MATHEMATISCHE ZEITSCHRIFT

52. BAND

MATHEMATISCHE ZEITSCHRIFT

UNTER STÄNDIGER MITWIRKUNG VON

E. KAMKE
TÜBINGEN

R. NEVANLINNA
HELSINKI

E. SCHMIDT
BERLIN

F. K. SCHMIDT
MÜNSTER

HERAUSGEGEBEN VON

K. KNOPP
TÜBINGEN

WISSENSCHAFTLICHER BEIRAT:

W. BLASCHKE L. FEJÉR G. HERGLOTZ
A. E. INGHAM H. KNESER O. PERRON
W. SÜSS H. WEYL

52. BAND

BERLIN GÖTTINGEN · HEIDELBERG
SPRINGER-VERLAG
1950

Unveränderter Nachdruck 1971
Springer-Verlag Berlin Heidelberg New York

Inhalt des 52. Bandes.

Seite

Barnett, I. A. und Mendel, C. W., Generalized Determinants of Vandermonde 723

Bohr, H., Zur Theorie der Dirichletschen Reihen 709

Bol, G., Zur Projektiven Differentialgeometrie der Regelflächen 791

Bompiani, E., Über das Theorem von F. Schur in der Riemannschen Geometrie 623

Buchholz, H., Uneigentliche Integrale mit parabolischen Funktionen über einen der beiden Parameter 355

Burger, E., Über Schnittzahlen von Homotopieketten 217

Carathéodory †, C., Bemerkung über die Definition der Riemannschen Flächen 703

Grunsky, H., Nachtrag zu meinen Arbeiten über „Eindeutige beschränkte Funktionen in mehrfach zusammenhängenden Gebieten“ 852

Haack, W., Strahlenkomplexe mit integrablen Pfaffschen Differentialformen 322

Hadwiger, H., Über konvexe Körper mit Flachstellen 212

Haupt, O., Über die Verteilung der Relativordnungen bezüglich eines Bogens 527

Heinhold, J., Einige mittels Laplace-Transformation lösbare Integralgleichungen. I. 779

Jehle, H., Eine Bemerkung zum Konvergenzkriterium von Weierstraß . . 60

Karamata, J., Über die Beziehung zwischen dem Bernsteinschen und Cesàroschen Limitierungsverfahren 305

Kneschke, A., Zur Theorie der Interpolation 137

Kneser, H., Die Potenzreihe der reziproken Gammafunktion 655

Kommerell, K., Mehrfach ausgeartete Desarguessche Konfigurationen . . 472

Krull, W., Subdirekte Summendarstellungen von Integritätsbereichen . . 810

Köthe, G., Über die Vollständigkeit einer Klasse lokalkonvexer Räume . . 627

Kühnel, U., Verschärfung der notwendigen Bedingungen für die Existenz von ungeraden vollkommenen Zahlen 202

Lense, J., Bestimmung einer ebenen birationalen quadratischen Verwandtschaft durch sieben Paare entsprechender Punkte 605

Lorenzen, P., Über halbgeordnete Gruppen 483

Lobell, F., Eine reelle Deutung der komplexen Vektoren 759

Maak, W., Summierung der Fourierreihen gleichartig fastperiodischer Funktionen auf Gruppen 770

Meyer-König, W., Untersuchungen über einige verwandte Limitierungsverfahren 257

Meyer-König, W., Die E_p- und S_a-Summierbarkeit einer Potenzreihe an der Konvergenzgrenze 344

Müller, M., Bemerkungen zur Fehlertheorie 735

Nagell, T., Über die Anzahl der Lösungen gewisser diophantischer Gleichungen dritten Grades 750

Nevanlinna, R., Über die Existenz von beschränkten Potentialfunktionen auf Flächen von unendlichem Geschlecht 599

Nöbeling, G., Über die erste Randwertaufgabe bei regulären Variationsproblemen. II. (Abänderung der Randwerte) 1

Nöbeling, G., Über die Schnittpunkte zweier stetiger ebener Kurven endlicher Länge in allgemeiner Lage 637

Petersson, H., Über Weierstraßpunkte und die expliziten Darstellungen der automorphen Formen von reeller Dimension 32

Pickert, G., Inseparable Körpererweiterungen 81

Richert, H.-E., Über Zerfällungen in ungleiche Primzahlen 342

Sansone, G., Due semplici limitazioni nel campo complesso delle funzioni associate ai polinomi di Tchebychef-Hermite e del termine complementare della loro rappresentazione asintotica 593

Sauer, R., Parallelogrammgitter als Modelle pseudosphärischer Flächen . . 611

Schmidt, H., Zur Approximation und Kettenbruchentwicklung quadratischer Zahlen 168

Schmidt, H., Über Wurzelapproximation nach Euler und Fixgebilde linearer Transformationen 547

Schwan, W., Zusammensetzung von Schwesterperspektivitäten in Verbänden 150

Schwan, W., Ein Homomorphiesatz der Theorie der Verbände 193

Seifert, H., Schlingknoten 62

Severi, F., Sulle molteplicità d'intersezione delle varietà algebriche ed analitiche e sopra una teoria geometrica dell'eliminazione 827

Specht, W., Abschätzungen der Wurzeln algebraischer Gleichungen . . . 310

Specht, W., Gesetze in Ringen. I. 557

Steuerwald, R., Bemerkungen zu einer Arbeit von Herrn J. Heinhold . . 394

Steuerwald, R., Über die Perioden regelmäßiger Kettenbrüche für Quadratwurzeln aus ganzen Zahlen 686

Stoll, W., Eine Bemerkung über die Dirichletschen L-Reihen 307

Strubecker, K., Über die Flächen, deren Asymptotenlinien beider Scharen linearen Komplexen angehören 401

Szasz, O., On a summation method of O. Perron 631

Szegö, G., Über eine Verallgemeinerung des Dirichletschen Integrals . . . 676

Süss, W., Ein affines Analogon zur Bestimmung einer Fläche aus einer Grundform und einer Krümmungsfunktion durch W. Scherrer 698

Tietze, Die Relation zwischen den drei quadratischen Fundamentalformen einer Fläche 590

Tricomi, F. G., Über die Abzählung der Nullstellen der konfluenten hypergeometrischen Funktionen 669

Töpfer, H., Über die meromorphen Lösungen der Differenzengleichung $F(z+1) = \frac{R_1(z)\,F(z) + R_2(z)}{F(z) + R_3(z)}$ mit rationalen $R_\nu(z)$ 436

van der Waerden, B., Über Landau's Beweis des Primzahlsatzes 649

Wielandt, H., Zur Theorie der einfach transitiven Permutationsgruppen. II. 384

Wielandt, H., Unzerlegbare, nicht negative Matrizen 642

Über die erste Randwertaufgabe bei regulären Variationsproblemen. II.

(Abänderung der Randwerte.)

Von

G. Nöbeling in Erlangen.

§ 1.

Einleitung.

In einer ersten Arbeit mit dem gleichen Haupttitel[1]), die wir mit I zitieren und deren Definitionen und Sätze wir hier verwenden, haben wir eine hinreichende Bedingung dafür angegeben, daß eine einzelne zugelassene Kurve R eine Kurve mit Lösung ist, d. h. daß für R die Randwertaufgabe I, (2), (5) eine Lösung besitzt.

In dieser Arbeit beschäftigen wir uns mit folgenden zwei ganz anders gearteten Fragen. Es sei R eine zugelassene Kurve mit Lösung. 1. Hat dann jede zugelassene Kurve, die aus R durch eine hinreichend kleine Änderung hervorgeht, ebenfalls eine Lösung? 2. Wie weit kann man diese Änderung treiben und welches ist der Grund, weshalb bei einer zu großen Änderung das Randwertproblem keine Lösung mehr hat?

Dabei beschränken wir uns nicht, wie sonst in diesem Zusammenhang üblich, auf Änderungen, die linear von einem Parameter abhängen ($r(x, y) = r_0(x, y) + \varepsilon r_1(x, y)$), sondern wir lassen beliebige Änderungen zu. Was heißt dann aber „kleine" oder „große" Änderung? Am einfachsten und zugleich umfassendsten ist es, wenn man einen Abstand zwischen zugelassenen Kurven einführt bzw. als eingeführt annimmt und kleine bzw. große Änderung im Sinne eines kleinen bzw. großen Abstandes der beiden Kurven voneinander interpretiert.

Die Frage 1 ist dann einfach mit Ja zu beantworten (Satz 1). Und die Antwort auf die Frage 2 lautet: Man kann so weit abändern, als das Variationsproblem noch einen Sinn hat (Satz 2).

Präzisieren wir nun diese Andeutungen!

Es sei $\mathfrak{R}$ ein System von zugelassenen Kurven R, also von Kurven des xyz-Raumes mit den Eigenschaften I, 1—5. Je zwei Kurven R_0 und R aus $\mathfrak{R}$ sei ein den üblichen drei Abstandsaxiomen genügender

[1]) Über die erste Randwertaufgabe bei regulären Variationsproblemen. I. (Existenz der Lösung.) Diese Zeitschrift, **51**, S. 712—751.

Abstand $\Delta(R_0, R)$ zugeordnet, welcher außerdem noch folgender *Bedingung* genügt: Ist R_0 eine Kurve aus $\mathfrak{R}$ und ein $\varepsilon > 0$ gegeben, so existiert ein $\varepsilon' = \varepsilon'(R_0, \varepsilon)$ derart, daß es für jede Kurve R aus $\mathfrak{R}$ mit $\Delta(R_0, R) < \varepsilon'$ eine topologische Abbildung τ von R_0 auf R gibt, für welche das Maximum $\bigtriangledown_\tau(R_0, R)$ der Abstände (im üblichen Sinne) der Punkte auf R_0 von ihren Bildpunkten auf R kleiner als ε ist[2]).

Wir bezeichnen $\mathfrak{R}$ als *zugelassenen Kurvenraum*, wenn $\mathfrak{R}$ neben den Eigenschaften I, 1—5 und der Metrik Δ noch die folgende Eigenschaft 6 besitzt:

Eigenschaft 6. Zu jeder Kurve R_0 aus $\mathfrak{R}$ existiert ein $\varepsilon_0 > 0$ derart, daß für alle Kurven R aus $\mathfrak{R}$ mit $\Delta(R_0, R) < \varepsilon_0$ die Zahlen r, c und d der Eigenschaften I, 4 und 5 gleichmäßig gewählt werden können: $r = r(R_0, \varepsilon_0)$, $c = c(R_0, \varepsilon_0)$, $d = d(R_0, \varepsilon_0)$[3]).

Wir werden im § 5 Beispiele von zugelassenen Kurvenräumen angeben.

Nun sei $\mathfrak{R}$ ein zugelassener Kurvenraum. Wir behaupten erstens:

Satz 1. *Die Menge $\mathfrak{R}_1$ aller Kurven aus $\mathfrak{R}$ mit Lösungen ist offen in $\mathfrak{R}$.*

Es sei R eine Kurve mit einer Lösung $H(x, y)$. Dann existieren $H_x(x, y)$ und $H_y(x, y)$ überall in G und sind stetig[4]). Wir bezeichnen mit $d(R)$ die kleinste Zahl d, für welche die Steigung

$$\sqrt{H_x^2(x, y) + H_y^2(x, y)} \leqq d$$

in ganz G ist. Aus der Stetigkeit von H_x und H_y folgt, daß $d(R)$ gleich der unteren Grenze aller lokalen Dehnungsschranken von $H(x, y)$, also, da $H(x, y)$ in $\mathfrak{F}(\overline{G})$ liegt, $d(R) < D$ ist.

Wir behaupten nun zweitens:

Satz 2. *Konvergiert die Folge $\{R_i\}$ aus $\mathfrak{R}_1$ gegen eine Kurve R aus $\mathfrak{R} - \mathfrak{R}_1$, so konvergiert die Folge $\{d(R_i)\}$ gegen D.*

Der Satz 1 besagt, daß, wenn für eine Kurve R_0 aus $\mathfrak{R}$ das Randwertproblem I, (2), (5) eine Lösung hat, dasselbe gilt für jede Kurve R aus $\mathfrak{R}$, die von R_0 einen hinreichend kleinen Abstand $\Delta(R_0, R)$ hat. Die Behauptung des Satzes 2 kann folgendermaßen interpretiert werden: Für die Kurve R hat das Randwertproblem I, (2), (5) keine (in $\mathfrak{F}(\overline{G})$ liegende!) Lösung, weil die zu den R_i gehörenden Lösungen $H_i(x, y)$ an einzelnen Stellen (x_i, y_i) mit wachsendem i zu steil werden, d. h. weil für jedes i im Innern G_i des Definitionsbereiches $\overline{G}_i$ von $H_i(x, y)$

[2]) Diese Bedingung besagt, daß bei kleinem $\Delta(R_0, R)$ die Kurven R_0 und R sich nur wenig unterscheiden, d. h. auseinander durch eine kleine topologische Deformation hervorgehen (insbesondere bestehen dann R_0 und R aus gleich vielen Komponenten, die wegen Eigenschaft I, 1 einfach geschlossene Kurven sind).

[3]) Dies bedeutet, daß die Kurven R mit $\Delta(R_0, R) < \varepsilon$ *gleichmäßig* glatt sind.

[4]) C. R. Morrey jr., Transact. Amer. Math. Soc. **43** (1938), S. 126—166.

ein Punkt (x_i, y_i) existiert derart, daß die Folge der Punkte $\left(p_i = \frac{\partial}{\partial x} H_i(x_i, y_i),\ q_i = \frac{\partial}{\partial y} H_i(x_i, y_i)\right)$ der Kreisscheibe $p^2 + q^2 < D^2$ gegen die Peripherie dieser Kreisscheibe strebt, innerhalb welcher unser Variationsproblem überhaupt nur definiert und regulär ist.

§ 2.

Drei Sätze über zugelassene Kurvenräume.

Durch die Eigenschaft I, 3 gehört zu jeder Kurve R aus $\mathfrak{R}$ (mindestens) ein beschränktes Gebiet G der xy-Ebene, dessen Begrenzung G^* die Projektion K von G ist. Hierüber gilt folgender

Satz 3. *Das Gebiet G ist durch R eindeutig bestimmt. Ist R^0 eine Kurve aus $\mathfrak{R}$ und G^0 das zugehörige Gebiet, so existiert zu jedem hinreichend kleinen $\delta > 0$ ein $\varepsilon > 0$ derart, daß für jede Kurve R aus $\mathfrak{R}$ mit $\mathcal{A}(R_0, R) < \varepsilon$ gilt*

$$(1) \qquad (G^0 - G) + (G - G^0) \subset K^0(\delta) \,.\, K(\delta),$$

wobei $K^0(\delta)$ bzw. $K(\delta)$ die Menge aller Punkte mit Abständen $< \delta$ von K^0 bzw. K ist[5]).

Beweis. Da G beschränkt und zusammenhängend ist und die Begrenzung K hat, gilt bei geeigneter Numerierung der Komponenten $K_1, \ldots, K_m$ von K (einfach geschlossene Kurven) folgendes: $K_2, \ldots, K_m$ liegen im Innengebiet I_1 von K_1 und für jedes $i = 2, \ldots, m$ liegen $K_2, \ldots, K_{i-1}, K_{i+1}, \ldots, K_m$ im Außengebiet A_i von K_i. Es gilt daher $G = I_1 \,.\, A_2 \,.\, \ldots \,.\, A_m$. Insbesondere ist also G durch K eindeutig bestimmt: $G = G(K)$.

Nun sei eine Kurve R^0 aus $\mathfrak{R}$ (ihre Projektion heiße K^0 und das zugehörige Gebiet G^0) und ein $\delta > 0$ gegeben. Wir wählen δ sofort so klein, daß für jede Kurve R aus $\mathfrak{R}$ mit $\mathcal{A}(R_0, R) < \varepsilon$ die Anzahl der Komponenten gleich der Anzahl m der Komponenten von R^0 ist. Ist nun ε hinreichend klein, so gilt $K\left(\frac{\delta}{2}\right) \subset K^0(\delta)$ für jedes R mit $\mathcal{A}(R^0, R) < \varepsilon$ zufolge der Bedingung für $\mathcal{A}$ auf S. 2. Es genügt also zum Beweis von (1), die Beziehung $(G^0 - G) + (G - G^0) \subset K^0\left(\frac{\delta}{2}\right)$ zu beweisen. Ist nun δ hinreichend klein, so liegt jeder Punkt mit einem Abstand $\geqq \frac{\delta}{2}$ von K^0 dann und nur dann in A_i bzw. I_1, wenn er in A_i^0 bzw. I_1^0 liegt (bei geeigneter Numerierung der A_i). Also gilt:

$$(A_i^0 - A_i) + (A_i - A_i^0) + (I_1^0 - I_1) + (I_1 - I_1^0) \subset K^0\left(\frac{\delta}{2}\right).$$

[5]) Für eine beliebige Menge P und ein beliebiges $\delta > 0$ bezeichnen wir mit $P(\delta)$ die Menge aller Punkte mit Abständen $< \delta$ von P. Die Menge $P(\delta)$ ist offen und enthält $\overline{P}$. Wir nennen $P(\delta)$ die δ-Umgebung von P.

Wegen

$$G^0 - G = I_1^0 A_2^0 \ldots A_m^0 - I_1 A_2 \ldots A_m \subset (I_1^0 - I_1) + (A_2^0 - A_2) + \cdots + (A_m^0 - A_m)$$
$$G - G^0 = I_1 A_2 \ldots A_m - I_1^0 A_2^0 \ldots A_m^0 \subset (I_1 - I_1^0) + (A_2 - A_2^0) + \cdots + (A_m - A_m^0)$$

gilt also

$$G^0 - G \subset K^0\left(\frac{\delta}{2}\right) \text{ und } G - G^0 \subset K^0\left(\frac{\delta}{2}\right).$$

Damit ist (1) bewiesen.

Satz 4. *Es sei $\mathfrak{R}$ ein zugelassener Kurvenraum und R_0 eine Kurve aus $\mathfrak{R}$. Dann existieren vier positive Zahlen ε, r, c und $d < D$ [6]) sowie zu jeder Kurve R aus $\mathfrak{R}$ mit $\Delta(R_0, R) < \varepsilon$ eine in sich kompakte Menge $\mathfrak{L}(\mathfrak{R})$ von Kreisen L der xy-Ebene und zwei in sich kompakte Mengen $\tilde{\mathfrak{K}}(R)$ und $\underset{\sim}{\mathfrak{K}}(R)$ von Kugeln $\tilde{K}$ bzw. $\underset{\sim}{K}$ derart, daß folgendes gilt:*

α) jeder Punkt der Projektion K von R liegt auf mindestens einem Kreis L aus $\mathfrak{L}(R)$;

β) jeder Kreis L aus $\mathfrak{L}(R)$ hat mit K genau einen Punkt (X, Y) gemein;

γ) jeder Kreis L aus $\mathfrak{L}(R)$ ist fremd zu G und umschließt G nicht;

α') in jedem Punkt von R wird R durch mindestens eine Kugel $\tilde{K}$ bzw. $\underset{\sim}{K}$ aus $\tilde{\mathfrak{K}}(R)$ bzw. $\underset{\sim}{\mathfrak{K}}(R)$ von oben bzw. unten berührt;

β') jede Kugel $\tilde{K}$ aus $\tilde{\mathfrak{K}}(R)$ bzw. $\underset{\sim}{K}$ aus $\underset{\sim}{\mathfrak{K}}(R)$ hat mit R genau einen Punkt gemein und berührt R dort von oben bzw. unten;

γ') jede Kugel $\tilde{K}$ aus $\tilde{\mathfrak{K}}(R)$ bzw. $\underset{\sim}{K}$ aus $\underset{\sim}{\mathfrak{K}}(R)$ hat im Berührungspunkt mit R eine Steigung $\leqq d$.

δ) Es sei $T(R)$ die Menge aller Zahlen-9-Tupel $t = (X, Y, Z, \tilde{\alpha}, \tilde{\beta}, \underset{\sim}{\alpha}, \underset{\sim}{\beta}, X^1, Y^1)$ derart, daß $(X, Y, Z) \in R$, $L(X, Y, X^1, Y^1) \in \mathfrak{L}(R)$, $\tilde{K}(X, Y, Z, \tilde{\alpha}, \tilde{\beta}) \in \tilde{\mathfrak{K}}(R)$, $\underset{\sim}{K}(X, Y, Z, \underset{\sim}{\alpha}, \underset{\sim}{\beta}) \in \underset{\sim}{\mathfrak{K}}(R)$ [7]); dann existiert zu jedem $\sigma > 0$ ein $\varepsilon' = \varepsilon'(\sigma) \leqq \varepsilon$ derart, daß es bei beliebigem $R \in \mathfrak{R}$ mit $\Delta(R_0, R) < \varepsilon'$ zu jedem $t \in T(R)$ ein $t_0 = (X_0, \ldots, Y_0^1) \in T(R_0)$ gibt mit $|X_0 - X| < \sigma, \ldots, |Y_0^1 - Y^1| < \sigma$.

Beweis. Es sei K die Projektion der Kurve R aus $\mathfrak{R}$ und G das von K begrenzte beschränkte Gebiet. Nach Eigenschaft I, 4 und 6 ist K bei hinreichend kleinem $\Delta(R_0, R)$ auf der Seite G stumpf von einem Grade $r' > 0$ (r' unabhängig von R); dabei können und

---

[6]) Genauer: ε, r und c können als beliebig kleine positive Zahlen und d kann als beliebig große positive Zahl $< D$ gewählt werden.

[7]) $L(X, Y, X^1, Y^1)$ sei der Kreis durch (X, Y) um (X^1, Y^1). Mit $\tilde{K}(X, Y, Z, \tilde{\alpha}, \tilde{\beta})$ bezeichnen wir allgemein eine Kugel mit der Eigenschaft, daß der Punkt (X, Y, Z) auf der unteren Hälfte $z = U(x, y)$ dieser Kugel liegt und $\frac{\partial U}{\partial x}(X, Y) = \tilde{\alpha}$ und $\frac{\partial U}{\partial y}(X, Y) = \tilde{\beta}$ ist.

wollen wir sofort r' so klein annehmen, daß kein Kreis mit dem Radius r' das Gebiet G umschließt. Es sei $\mathfrak{L}'(R)$ die Menge aller Kreise L' mit dem Radius r', welche zu G fremd sind, zu K jedoch nicht. Diese Menge $\mathfrak{L}'(R)$ ist in sich kompakt, jeder Punkt von K liegt auf mindestens einem Kreis aus $\mathfrak{L}'(R)$, jeder Kreis aus $\mathfrak{L}'(R)$ ist fremd zu G und umschließt G nicht. Nun sei r eine feste Zahl mit $0 < r < r'$. Ist L' ein beliebiger Kreis von $\mathfrak{L}'(R)$, so zeichnen wir durch jeden Punkt von KL' den Kreis L mit dem Radius r, welcher L' in diesem Punkt von innen berührt. Dies machen wir für jeden Kreis L' aus $\mathfrak{L}'(R)$. Die so entstehende Menge $\mathfrak{L}(R)$ von Kreisen L hat die Eigenschaften $\alpha) - \gamma)$. — Analog zeigt man die Existenz von $\tilde{\mathfrak{K}}(R)$ und $\underset{\sim}{\mathfrak{K}}(R)$ mit Hilfe der Menge $\tilde{\mathfrak{K}}'(R)$ bzw. $\underset{\sim}{\mathfrak{K}}'(R)$ aller Kugeln mit einem Radius c', welche R in (mindestens) einem Punkt berühren und dort eine Steigung $\leqq d$ haben, wobei c' und d gemäß Eigenschaft I, 5 und 6 (von R mit hinreichend kleinem $\Delta(R_0, R)$ unabhängig) gewählt sind. — δ) beweist man nun leicht indirekt.

Satz 5. *Ist $d \geqq d(R_0, \varepsilon_0)$*[8]) *eine globale Dehnungsschranke der zugelassenen Kurve R_0 und $\delta > 0$, so ist $d + \delta$ eine globale Dehnungsschranke für jede zugelassene Kurve R mit $\Delta(R_0, R) < \varepsilon$ bei hinreichend kleinem $\varepsilon > 0$.*

Beweis. Angenommen, diese Behauptung wäre falsch. Dann existiert eine Folge von zulässigen Kurven $R_1, R_2, \ldots$ mit $\lim \Delta(R_0, R_i) = 0$ und auf jedem R_i ein Punktepaar $(x_1^{(i)}, y_1^{(i)}, z_1^{(i)})$, $(x_2^{(i)}, y_2^{(i)}, z_2^{(i)})$ mit

$$|z_1^{(i)} - z_2^{(i)}| > (d + \delta) \sqrt{(x_1^{(i)} - x_2^{(i)})^2 + (y_1^{(i)} - y_2^{(i)})^2}. \tag{2}$$

Indem wir nötigenfalls zu einer Teilfolge übergehen, können wir sofort annehmen, daß die Folge $\{(x_1^{(i)}, y_1^{(i)}, z_1^{(i)})\}$ gegen einen Punkt $(x_1^{(0)}, y_1^{(0)}, z_1^{(0)})$ und $\{(x_2^{(i)}, y_2^{(i)}, z_2^{(i)})\}$ gegen einen Punkt $(x_2^{(0)}, y_2^{(0)}, z_2^{(0)})$ von R_0 konvergiert. Nun ist sicher nicht $(x_1^{(0)}, y_1^{(0)}, z_1^{(0)}) \neq (x_2^{(0)}, y_2^{(0)}, z_2^{(0)})$; denn wegen (2) wäre dann

$$|z_1^{(0)} - z_2^{(0)}| \geqq (d + \delta) \sqrt{(x_1^{(0)} - x_2^{(0)})^2 + (y_1^{(0)} - y_2^{(0)})^2}$$

und dies würde bedeuten, daß R_0 nicht die Dehnungsschranke d hat. Also sind $(x_1^{(0)}, y_1^{(0)}, z_1^{(0)})$ und $(x_2^{(0)}, y_2^{(0)}, z_2^{(0)})$ gleich einem Punkt $(x^{(0)}, y^{(0)}, z^{(0)})$. Für hinreichend große i sind $(x_1^{(i)}, y_1^{(i)}, z_1^{(i)})$ und $(x_2^{(i)}, y_2^{(i)}, z_2^{(i)})$ beliebig benachbart. Wegen (2) und $d \geqq d(R_0, \varepsilon_0)$ liegt also für hinreichend großes i der Punkt $(x_2^{(i)}, y_2^{(i)}, z_2^{(i)})$ nicht, wie es nach unserer Definition der Berührung (I, S. 715) sein müßte, auf oder unterhalb bzw. oberhalb der die Kurve R im Punkt $(x_1^{(i)}, y^{(i)}, z_1^{(i)})$ von oben bzw. von berührenden Kugel mit dem Radius $c(R_0, \varepsilon_0)$ und der Steigung $\leqq d(R_0, \varepsilon_0)$ im Punkt $(x_1^{(i)}, y_1^{(i)}, z_1^{(i)})$, die nach Eigenschaft I, 5 bzw. 6 existiert. Damit ist der gesuchte Widerspruch gefunden und der Satz 5 bewiesen.

[8]) Zur Definition von $d(R_0, \varepsilon_0)$ vgl. die Eigenschaft 6.

§ 3.

Beweis des Satzes 1.

Es sei also R_0 eine Kurve aus $\mathfrak{R}$, für welche das Randwertproblem I, (2), (5) eine Lösung $H_0(x, y)$ besitzt. Wir haben zu zeigen, daß es auch eine Lösung $H(x, y)$ besitzt, für jede Kurve R aus $\mathfrak{R}$ mit hinreichend kleinem Abstand $\Delta(R_0, R)$ von R_0.

Es sei K_0 die Projektion von R_0 in die xy-Ebene und G_0 das beschränkte Gebiet mit der Begrenzung K_0 (Eigenschaft I, 3). Da $H_0(x, y)$ in $\overline{G}_0$ eine lokale Dehnungsschranke $d < D$ hat, ergibt die Anwendung des Überdeckungssatzes von Heine-Borel endlich viele offene, $\overline{G}_0$ überdeckende Mengen $U_1, \ldots, U_k$ derart, daß H_0 in $\overline{G}_0 U_i$ die Dehnungsschranke d hat. Dann existiert ein $\delta_0 > 0$ derart, daß die Kreisscheibe um einen jeden Punkt von $\overline{G}_0$ mit einem Durchmesser $< \delta_0$ in mindestens einer Menge U_i enthalten ist. Daher ist $d^{\delta_0}(H_0, \overline{G}_0) \leqq d$. Wir setzen

$$d^{\delta_0}(H_0, \overline{G}_0) = d_0. \tag{3}$$

Gemäß Satz 4 wählen wir vier positive Zahlen ε_1, r, c und d_1 mit $d_0 < d_1 < D$ so, daß für jede Kurve R aus $\mathfrak{R}$ mit $\Delta(R_0, R) < \varepsilon_1$ eine in sich kompakte Menge $\mathfrak{L}(R)$ von Kreisen der xy-Ebene mit dem Radius r existiert, für welche $\alpha) - \gamma)$ gilt, sowie zwei in sich kompakte Mengen $\mathfrak{K}(R)$ und $\mathfrak{k}(R)$ von Kugeln mit dem Radius c, für welche $\alpha') - \gamma')$ (mit d_1 statt d) gilt. Wir wählen weiter vier Zahlen d_2, d_3, d_4 und d_5 derart, daß

$$d_0 < d_1 < d_2 < d_3 < d_4 < d_5 < D \tag{4}$$

ist.

Nun sei R eine zunächst beliebige Kurve aus $\mathfrak{R}$, K ihre Projektion in die xy-Ebene und G das von K begrenzte beschränkte Gebiet. $\delta > 0$ sei zunächst beliebig. Mit $\mathfrak{H} = \mathfrak{H}(R, \delta)$ bezeichnen wir die Gesamtheit aller derjenigen Funktionen $h(x, y)$ mit dem Definitionsbereich G, für welche $d^{\delta}(h, \overline{G}) \leqq d_5$ und der Rand der Fläche $z = h(x, y)$ gleich R ist (im Sinne von I, (5)). *Angenommen erstens, es sei bereits bewiesen, daß $\mathfrak{H}$ nicht leer ist wenigstens dann, wenn $\Delta(R_0, R)$ und δ hinreichend klein sind.*

Die untere Grenze der Integrale $I[h(x, y), G]$ für alle Funktionen $h(x, y)$ aus $\mathfrak{H}$ heiße u. Aus Gliedern von $\mathfrak{H}$ können wir eine Folge $\{h_n(x, y)\}$ bilden derart, daß $\lim I[h_n, G] = u$ ist. Nach I, Satz 10 [9]) können wir also die Folge $\{h_n(x, y)\}$ auf $\overline{G}$ als gleichmäßig konvergent annehmen. Die Grenzfunktion $\lim h_n(x, y) = H(x, y)$ liegt in $\mathfrak{H}$, so daß also $I[H, G] \geqq u$ ist. Wegen der Halbstetigkeit [10]) $I[H, G] \leqq \lim I[h_n, G]$ ist $I[H, G] \leqq u$. Also gilt $I[H, G] = u$.

[9]) vgl. auch I, S. 749, achte Zeile von unten.

[10]) T. Radó, Math. Ann. **101** (1929) S. 626. Vgl. auch I, Fußnote [17]).

Wir behaupten, daß die Grenzfunktion $H(x, y)$ eine Lösung des Randwertproblems I, (2), (5) für die Kurve R ist, falls $\Delta(R_0, R)$ und δ hinreichend klein ist.

Es sei also $h(x, y)$ irgendeine Funktion aus $\mathfrak{F}(\bar{G})$, die auf K mit $H(x, y)$ identisch ist, in G jedoch nicht. Wir haben die Ungleichung $I[H, G] < I[h, G]$ zu beweisen. Wir können diese Ungleichung auch in der Form $f(0) < f(1)$ schreiben, wenn wir $f(\Theta) = I[H + \Theta(h - H), G]$ setzen für $0 \leqq \Theta \leqq 1$. *Angenommen zweitens, wir hätten bereits bewiesen, daß* $d^{\delta}(H, \bar{G}, \bar{G}) \leqq d_4$ *gilt, falls* $\Delta(R_0, R)$ *und* δ *hinreichend klein sind.* Nun ist mit h und H auch $h - H$ lokal und folglich (vgl. I, S. 749) auch global dehnungsbeschränkt. Daher gilt für jedes hinreichend kleine $\Theta \geqq 0$ die Ungleichung $d^{\delta}(H + \Theta(h - H), \bar{G}) \leqq d_5$ wegen $d_4 < d_5$, d. h. für jedes hinreichend kleine $\Theta \geqq 0$ liegt $H + \Theta(h - H)$ in $\mathfrak{H}$. Für jedes solche Θ gilt also $f(\Theta) \geqq f(0) = u$. Mithin hat $f(\Theta)$ an der Stelle $\Theta = 0$ ein relatives Minimum. Wegen $f''(\Theta) > 0$ $(0 \leqq \Theta \leqq 1)$ (I, S. 732) ist dieses relative Minimum sogar ein absolutes Minimum, d. h. es ist $f(0) < f(\Theta)$ für $0 < \Theta \leqq 1$, insbesondere also $f(0) < f(1)$, w. z. z. w.[11]).

Erstens müssen wir jetzt noch beweisen, daß $\mathfrak{H}$ nicht leer ist, wenn $\Delta(R_0, R)$ und δ hinreichend klein sind.

Es sei $R = [(x, y) \in K,\ z = r(x, y)]$ eine Kurve aus $\mathfrak{R}$ mit $\Delta(R_0, R) < \varepsilon_1$. Da jede Kugel $\bar{K}$ aus $\bar{\mathfrak{K}}(R)$ und $\underline{K}$ aus $\underline{\mathfrak{K}}(R)$ im Berührungspunkt mit R eine Steigung $\leqq d_1$ hat (S. 6), existiert ein von R unabhängiges $\varrho > 0$ derart, daß

$$d^{\varrho}(r, K) \leqq d_3 \tag{5}$$

ist. Wir wählen dieses ϱ sofort so klein, daß

$$2\varrho \leqq \delta_0 \tag{6}$$

ist. Wegen (3) und (4) ist dann

$$d^{\varrho}(H_0, \bar{G}_0) \leqq d_2. \tag{7}$$

Ist (x_1, y_1) ein beliebiger Punkt von K und τ eine feste Zahl $> d_2$, so setzen wir auf der Kreisscheibe $(x - x_1)^2 + (y - y_1)^2 \leqq \varrho^2$

$$k^+(x, y, x_1, y_1, \tau) \equiv r(x_1, y_1) + \tau\sqrt{(x - x_1)^2 + (y - y_1)^2}$$

und

$$k^-(x, y, x_1, y_1, \tau) \equiv r(x_1, y_1) - \tau\sqrt{(x - x_1)^2 + (y - y_1)^2}.$$

Die beiden Flächen $z = k^+(x, y, x_1, y_1, \tau)$ und $z = k^-(x, y, x_1, y_1, \tau)$ sind dann Stücke des Kreiskegels mit der Spitze im Punkt $(x_1, y_1, r(x_1, y_1))$ von R, der Achse parallel zur z-Achse und der Steigung τ. In jedem Punkt (x, y) der Menge $K(\varrho)$ aller Punkte der xy-Ebene,

[11]) Vgl. zu diesem Beweis A. Haar, Math. Ann. **97** (1917) S. 124—158 und Hamburger Abhandlungen, **8** (1931) S. 1—31, sowie I, Beweis des Satzes 1.

die von K Abstände $\leqq \varrho$ haben, setzen wir

$$(8)\qquad \begin{cases} f^+(x,y) = f^+(x,y,R,\tau) = \operatorname{Min} k^+(x,y,x_1,y_1,\tau) \\ f^-(x,y) = f^-(x,y,R,\tau) = \operatorname{Max} k^-(x,y,x_1,y_1,\tau), \end{cases}$$

wobei das Minimum und Maximum gebildet wird über alle Punkte (x_1, y_1) von K mit Abständen $\leqq \varrho$ von (x, y), also über alle Punkte (x_1, y_1), für welche $k^+(x,y,x_1,y_1,\tau)$ und $k^-(x,y,x_1,y_1,\tau)$ überhaupt definiert sind. Nach (5) und wegen $\tau > d_2$ gilt

$$(9)\qquad f^+(x,y,R,\tau) = f^-(x,y,R,\tau) = r(x,y) \text{ auf } K.$$

Wir behaupten, daß die Funktionen $f^+(x,y)$ und $f^-(x,y)$ in einer hinreichend kleinen Umgebung von K die lokale Dehnungsschranke τ haben; genauer behaupten wir (11).

Zum Beweis sei n eine so große natürliche Zahl, daß

$$\frac{n-2}{n+1} > \frac{d_2}{d_3}$$

gilt. Ist nun (x, y) ein beliebiger Punkt, dessen Abstand von K, also von einem Punkt (x_1', y_1') von K höchstens gleich $\frac{\varrho}{n}$ ist, so betrachten wir einen beliebigen Punkt (x_1, y_1) von K, dessen Abstand von (x, y) größer als $\frac{n-1}{n}\varrho$, jedoch höchstens gleich ϱ ist, falls es einen solchen Punkt überhaupt gibt. Dann gilt, weil die Funktion k^+ die Steigung τ hat und (5) gilt.

$$\begin{aligned} & k^+(x,y,x_1,y_1,\tau) - k^+(x,y,x_1',y_1',\tau) \\ = {} & k^+(x,y,x_1,y_1,\tau) - k^+(x_1,y_1,x_1,y_1,\tau) + r(x_1,y_1) - r(x_1',y_1') \\ & + k^+(x_1',y_1',x_1',y_1',\tau) - k^+(x,y,x_1',y_1',\tau) \\ \geqq {} & \frac{n-1}{n}\varrho\tau - \frac{n+1}{n}\varrho d_2 - \frac{1}{n}\varrho\tau = \frac{n-2}{n}\varrho\tau - \frac{n+1}{n}\varrho d_2 > 0. \end{aligned}$$

Also gilt die Bemerkung: Für jeden Punkt (x, y) mit einem Abstand $\leqq \frac{\varrho}{n}$ von K genügt es, in der Definition (8) von $f^+(x,y)$ den Punkt (x_1, y_1) alle Punkte von K mit Abständen $\leqq \frac{n-1}{n}\varrho$ von (x, y) durchlaufen zu lassen, man gelangt dabei zu derselben Funktion $f^+(x,y)$.

Ist also (x_0, y_0) ein beliebiger Punkt der Menge $\overline{K(\delta)}$ aller Punkte der xy-Ebene, die von K Abstände $\leqq$

$$(10)\qquad \delta \leqq \delta_1 = \frac{\varrho}{2n}$$

haben, ist weiter M_0 die Menge aller Punkte aus $K(\delta)$ mit Abständen $\leqq \delta$ von (x_0, y_0), so können wir $f^+(x,y)$ auf M_0 durch (8) definieren, wobei (x_1, y_1) alle Punkte von K durchläuft mit Abständen $\leqq \frac{2n-1}{2n}\varrho$ von (x_0, y_0). Die zu diesen Punkten (x_1, y_1) gehörigen Funktionen $k^+(x,y,x_1,y_1,\tau)$ sind dann in ganz M_0 definiert, da M_0 für jeden

solchen Punkt (x_1, y_1) in der Kreisscheibe um (x_1, y_1) mit dem Radius ϱ liegt. Nun hat aber das Infimum (ebenso das Supremum) eines endlichen oder unendlichen Systems von Funktionen mit gleichem Definitionsbereich M_0 und derselben Dehnungsschranke τ in M_0 ebenfalls die Dehnungsschranke τ in M_0. Also gilt für f^+ und analog für

$$f^- = f^-(x, y, R, \tau)$$

die behauptete Beziehung

$$d^\delta(f^+, \overline{K(\delta)}) \leqq \tau, \quad d^\delta(f^-, K(\delta_1)) \leqq \tau. \tag{11}$$

Für die Menge $K(\delta)$, zu der wir soeben geführt worden sind, gilt

$$\overline{G} - K(\delta) \subset G_0, \quad \overline{G} \subset G_0(\delta), \tag{12}$$

wenn $\Delta(R_0, R)$ hinreichend klein ist, etwa $\Delta(R_0, R) < \varepsilon_2(\delta) \leqq \varepsilon_1$. Dies folgt unmittelbar aus dem Satz 3.

Wir betrachten nun die Funktionen $f^+(x, y, R, d_4)$ und $f^-(x, y, R, d_4)$, jedoch nur auf der Menge K' aller Punkte von G mit dem Abstand δ von K. Wir behaupten für $\Delta(R_0, R) < \varepsilon_2(\delta)$, falls $\varepsilon_2(\delta)$ hinreichend klein ist:

$$f^-(x, y, R, d_4) < H_0(x, y) < f^+(x, y, R, d_4) \text{ auf } K'. \tag{13}$$

Dies ergibt sich folgendermaßen. Ist (x, y) ein Punkt der Menge K_0' aller Punkte von G_0 mit dem Abstand δ von K_0, so ist[12])

$$k_0^+(x, y, x_1, y_1, d_4) - H_0(x, y) = k_0^+(x, y, x_1, y_1, d_4) - k_0^+(x_1, y_1, x_1, y_1, d_4)$$
$$+ H_0(x_1, y_1) - H_0(x, y) \geqq (d_4 - d_2)\sqrt{(x - x_1)^2 + (y - y_1)^2} \geqq (d_4 - d_2)\,\delta$$

für jeden Punkt (x_1, y_1) aus K_0 mit einem Abstand $\leqq \varrho$ von (x, y), da $k_0^+(x_1, y_1, x_1, y_1, d_4) = r_0(x_1, y_1) = H_0(x_1, y_1)$ ist und $k_0^+(x, y, x_1, y_1, d_4)$ die Steigung d_4 hat, während $d^\delta(H_0, \overline{G_0}) \leqq d_2$ ist wegen (7) und (10). Mithin ist auch

$$f^+(x, y, R_0, d_4) - H_0(x, y) \geqq (d_4 - d_2)\delta \text{ auf } K_0'.$$

Nun sind einerseits $f^+(x, y, R_0, d_4)$ und $H_0(x, y)$ als lokal dehnungsbeschränkte Funktionen stetig; bei hinreichend kleinem $\Delta(R_0, R)$ liegt anderseits K in einer beliebig kleinen Umgebung von K_0 (siehe die Bedingung für Δ auf S. 2) und daher K_0' in einer beliebig kleinen Umgebung von K' (vgl. auch den Satz 3). Ist also $\varepsilon_3(\delta)$ hinreichend klein, so gilt für $\Delta(R_0, R) < \varepsilon_3(\delta)$:

$$f^+(x, y, R_0, d_4) - H_0(x, y) \geqq (d_4 - d_2)\frac{2\delta}{3} \text{ für jedes } (x, y) \in K'. \tag{14}$$

Es sei nun (x, y) ein Punkt von K'. Nach der Bemerkung von S. 8 existiert in K ein Punkt (x_1, y_1) mit einem Abstand $\leqq \frac{n-1}{n}\varrho$ von

[12]) $k_0^+(x, y, x_1, y_1, \tau)$ ist die Funktion $k^+(x, y, x_1, y_1, \tau)$ für $K = K_0$ und $r(x, y) = r_0(x, y)$ (es ist $[(x, y) \in K_0, \; z = r_0(x, y)]$ die Kurve R_0), also $f^+(x, y, R_0, d_4) = \operatorname{Min} k_0^+(x, y, x_1, y_1, d_4)$.

(x, y) derart, daß $f^+(x, y, R, d_4) = k^+(x, y, x_1, y_1, d_4)$ ist. Ist $\varepsilon_2(\delta)$ hinreichend klein, so existiert, falls $\Delta(R_0, R) < \varepsilon_2(\delta)$ ist, auf K_0 ein Punkt (x_0, y_0) mit einem Abstand $\leqq \frac{\varrho}{n}$ von (x_1, y_1) derart, daß

$$|k^+(x, y, x_1, y_1, d_4) - k_0^+(x, y, x_0, y_0, d_4)| \leqq (d_4 - d_2)\frac{\delta}{3},$$

also

$$|f^+(x, y, R, d_4) - k_0^+(x, y, x_0, y_0, d_4)| \leqq (d_4 - d_2)\frac{\delta}{3}$$

und daher $f^+(x, y, R, d_4) \geqq k_0^+(x, y, x_0, y_0, d_4) - (d_4 - d_3)\frac{\delta}{3}$. Nun ist $k_0^+(x, y, x_0, y_0, d_4) \geqq f^+(x, y, R_0, d_4)$ nach (8). Also gilt $f^+(x, y, R, d_4) \geqq f^+(x, y, R_0, d_4) - (d_4 - d_3)\frac{\delta}{3}$. Dies und (13) ergibt $f^+(x, y, R, d_4) - H_0(x, y) \geqq (d_4 - d_3)\frac{\delta}{3}$, also $H_0(x, y) < f^+(x, y, R, d_4)$ für $\Delta(R_0, R) < \varepsilon_2(\delta)$. Analog ergibt sich die erste Hälfte von (13).

Wir setzen nun die Funktion $H_0(x, y)$ fort zu einer Funktion $H_0^*(x, y)$, die nicht nur auf $\overline{G}_0$ (dem Definitionsbereich von $H_0(x, y)$) definiert ist, sondern auf der Menge $\overline{G_0(\delta)} = G_0 + K_0(\delta)$ aller Punkte der Ebene mit Abständen $\leqq \delta$ von G_0, indem wir setzen:

$$(15) \qquad H_0^*(x, y) = \begin{cases} H_0(x, y) & \text{für } (x, y) \in \overline{G}_0 \\ f^+(x, y, R_0, d_3) & \text{für } (x, y) \in \overline{G_0(\delta)} - G_0. \end{cases}$$

Dann gilt, da $\delta < 2\varrho$ ist wegen (10), wegen (7) und (4) die Ungleichung $d^\delta(H_0, \overline{G}_0) \leqq d_3$; anderseits gilt nach (11) für die Funktion $f^+ = f^+(x, y, R_0, d_3)$ die Ungleichung $d^\delta(f^+, \overline{K_0(\delta)}) \leqq d_3$; also ist nach I, Satz 11

$$(16) \qquad d^\delta(H_0^*, \overline{G_0(\delta)}) \leqq d_3.$$

Nun sei R eine Kurve aus $\mathfrak{R}$ mit $\Delta(R_0, R) < \varepsilon_2(\delta)$ (also $z = r(x, y)$ mit $(x, y) \in K$, wobei K die Projektion von R ist). Wir definieren die gesuchte Funktion $h(x, y)$ aus $\mathfrak{H}$ folgendermaßen:

$$(17)\ h(x, y) = \begin{cases} H_0(x, y) \text{ für } (x, y) \in \overline{G} - K(\delta), \\ \text{der mittleren der Zahlen } f^-(x, y, R, d_4), \\ f^+(x, y, R, d_4) \text{ und } H_0^*(x, y) \text{ für } (x, y) \in \overline{G} - \overline{K(\delta)}\ ^{13}). \end{cases}$$

Dazu ist zu bemerken 1. die Menge $\overline{G} - K(\delta)$ ist nach (12) in G_0 enthalten, also $H_0(x, y)$ auf dieser Menge definiert; 2. $\overline{G} \cdot \overline{K(\delta)}$ ist nach (12) in $G_0(\delta)$ enthalten, also $H_0^*(x, y)$ auf dieser Menge definiert und die Funktionen f^- und f^+ sind nach (8) in $\overline{K(\delta)}$, wegen (10) also auch in $\overline{G} \cdot \overline{K(\delta)}$ definiert; 3. für $(x, y) \in (\overline{G} - K(\delta)) \cdot (\overline{G} \cdot \overline{K(\delta)}) \subset G_0 \cdot K'$ ist $H_0(x, y) = H_0^*(x, y)$ nach (15) und gleich der mittleren der drei Zahlen f^-, f^+ und H_0^* nach (13). Also ist $h(x, y)$ in $\overline{G}$ eindeutig definiert.

---

[13]) Sind a, b und c drei Zahlen mit $a \leqq b \leqq c$, so nennen wir b die mittlere.

Wir behaupten, daß $h(x, y)$ in $\mathfrak{H}$ liegt. Erstens ist $h(x, y) = r(x, y)$ auf K, d. h. die Fläche $z = h(x, y)$ hat die Kurve R zum Rand. Denn es gilt $K \subset \bar{G}\, K(\delta)$ und $f^-(x, y, R, d_4) = f^+(x, y, R, d_4) = r(x, y)$ nach (4) für $(x, y) \in K$, so daß die mittlere der drei Zahlen $f^-(x, y, R, d_4)$, $f^+(x, y, R, d_4)$, $H_0^*(x, y)$ gleich $r(x, y)$ ist. Zweitens behaupten wir $d^\delta(h, \bar{G}) \leqq d_4$. Nach I, Satz 11 (mit $\bar{G}$ statt A und $G - \overline{K(\delta)}$ statt G_0 genügt es,

$$d^\delta(h, G - K(\delta)) \leqq d_4 \quad \text{und} \quad d^\delta(h, \bar{G} \cdot \overline{K(\delta)}) \leqq d_4$$

zu beweisen. Nun ist $h(x, y) = H_0(x, y)$ auf $G - K(\delta)$ nach (8); und da $G - K(\delta) \subset G_0$ ist und (8) sowie $\delta \leqq 2\varrho$ gilt nach (10), so folgt $d^\delta(h, G - K(\delta)) \leqq d_2 < d_4$. Zum Beweis der Ungleichung $d^\delta(h, \overline{G\,K(\delta)}) \leqq d_4$ seien (x_0, y_0) und (x_1, y_1) zwei Punkte der Menge $\overline{G\,K(\delta)}$ mit einem Abstand $\leqq \sigma$ voneinander. Wir haben zu zeigen:

$$|h(x_0, y_0) - h(x_1, y_1)| \leqq d_4 \sqrt{(x_0 - x_1)^2 + (y_0 - y_1)^2}. \tag{18}$$

Hat h in den Punkten (x_0, y_0) und (x_1, y_1) dieselben Werte wie eine und dieselbe der Funktionen $f^-(x, y, R, d_4)$, $f^+(x, y, R, d_4)$, $H_0(x, y)$, so folgt (18) aus (11) mit $\tau = d_4$ bzw. (7), (10) und (4).

Nun sei beispielsweise $h(x_0, y_0) = f^-(x_0, y_0, R, d_4)$ und $h(x_1, y_1) = H_0^*(x_1, y_1)$. Da h gleich der mittleren der drei Zahlen f^-, f^+ und H_0^* ist, so ist also $h(x, y)$ in den Punkten (x_0, y_0) und (x_1, y_1) gleich der Funktion $g(x, y) = \mathrm{Max}\,(f^-(x, y, R, d_4),\ H_0^*((x, y))\ ((x, y) \in \overline{G\,K(\delta)})$. Nun ist aber $d^\delta(g, \overline{G\,K(\delta)}) \leqq d_4$ wegen (11) mit $\tau = d_4$, (16) und (12). Hieraus folgt (18). Genau so schließt man für die anderen Möglichkeiten von Werten für $h(x_0, y_0)$ und $h(x_1, y_1)$.

Also liegt $h(x, y)$ in $\mathfrak{H}$, wenn $\Delta(R_0, R) < \varepsilon_2(\delta)$ und $\delta \leqq \delta_1$ ist, was wir ab jetzt voraussetzen[14]). Dann ist also $\mathfrak{H}$ nicht leer und insbesondere existiert die Grenzfunktion $H(x, y)$.

Zweitens müssen wir noch zeigen, daß $d^\delta(H, \bar{G}) \leqq d_4$ ist, falls $\Delta(R_0, R)$ und δ hinreichend klein sind.

Nach der Definition der Funktion $H(x, y)$ (S. 6) ist $I[H, G] \leqq I[h, G]$ für jede Funktion $h(x, y)$, die in $\bar{G}$ definiert ist, auf der Begrenzung $G^* = K$ von G mit $H(x, y)$ identisch ist und für welche $d^\delta(h, \bar{G}) \leqq d_5$ ist. $H(x, y)$ ist also eine (G, δ, d_5)-Extremale im Sinne der folgenden Definition: Es sei G eine offene Menge der xy-Ebene, δ eine positive Zahl und d eine Zahl mit $0 < d < D$; eine Funktion $H(x, y)$ mit dem Definitionsbereich $\bar{G}$ und mit der Eigenschaft $d^\delta(H, \bar{G}) \leqq d$ heiße eine (G, δ, d)-Extremale, wenn $I[H, G] \leqq I[h, G]$ ist für jede Funktion

[14]) Endgültig fixieren werden wir δ erst auf S. 19. Bis dahin sei also δ eine beliebige, aber noch nicht fest gewählte Zahl mit $0 < \delta \leqq \delta_1$. — Die im folgenden auftretenden Zahlen $r_0 - r_5$ werden von δ unabhängig sein (dies ist wichtig, da wir δ mittels r_5 fixieren werden).

$h(x, y)$ mit dem Definitionsbereich $\bar{G}$, welche auf der Begrenzung G^* von G mit $H(x, y)$ identisch ist und für welche $d^\delta(h, \bar{G}) \leqq d$ ist. Nun gilt auch für die (G, δ, d)-Extremalen der Satz 15 im Teil I unserer Arbeit und wird wörtlich ebenso bewiesen.

Nach I, Satz 15, η) genügt es also, $d^\delta(H, K, G) \leqq d_4$ zu beweisen. Angenommen, wir wüßten bereits folgendes: Ist (X, Y, Z) ein beliebiger Punkt einer Kurve R aus $\mathfrak{R}$ mit hinreichend kleinem $\Delta(R_0, R)$, so gibt es in einer Kreisscheibe $(x-X)^2+(y-Y)^2<r_5^2$ zwei Lösungen $\Phi(x, y)$ und $\Psi(x, y)$ der Differentialgleichung I, (13) derart, daß gilt:

(19) $\Phi(x, y)$ und $\Psi(x, y)$ haben die globale Dehnungsschranke d_1,

(20) $$\Psi(x, y) \leqq H(x, y) \leqq \Phi(x, y) \text{ in } E,$$

(21) $$\Psi(X, Y) = H(X, Y) = \Phi(X, Y),$$

wobei E den Durchschnitt der obigen Kreisscheibe mit G bedeutet. Aus (19)—(21) folgt sofort für jeden Punkt $(x, y) \neq (X, Y)$ von E:

$$\frac{|H(x, y) - H(X, Y)|}{\sqrt{(x-X)^2+(y-Y)^2}} \leqq d_4.$$

Für $\delta \leqq r_5$ gilt also $d^\delta(H, K, G) \leqq d_4$. Wir brauchen also nur noch die Existenz der zwei Funktionen $\Phi(x, y)$ und $\Psi(x, y)$ mit den Eigenschaften (19)—(21) zu beweisen.

Es sei $A > 1$ eine feste Zahl derart, daß die Kurve R_0 aus $\mathfrak{R}$ in der Menge $x^2+y^2 \leqq (A-1)^2$, $z^2 \leqq (A-1)^2$ enthalten. Für jeden Punkt (X, Y, Z) des xyz-Raumes mit der Eigenschaft $X^2+Y^2 \leqq A^2$, $Z^2 \leqq A^2$ betrachten wir alle Kugeln

$$K = [(x-\tilde{x})^2+(y-\tilde{y})^2+(z-\tilde{z})^2 = c^2]$$

mit dem Radius c (c, d_1 und r wurden auf S. 6 gewählt), deren untere Hälfte

$$z = U(x, y) \equiv \tilde{z} - \sqrt{c^2-(x-\tilde{x})^2-(y-\tilde{y})^2}$$

den Punkt (X, Y, Z) enthält ($Z = U(X, Y)$) und welche in diesem Punkt eine Steigung $\leqq d_1$ haben: $\left(\frac{\partial U}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial U}{\partial y}\right)^2 \leqq d_1^2$ für $x = X$, $y = Y$. Setzen wir $\frac{\partial U}{\partial x}(X, Y) = \alpha$ und $\frac{\partial U}{\partial y}(X, Y) = \beta$, so ist also

(22) $$\alpha^2+\beta^2 \leqq d_1^2$$

sowie

$$\tilde{x} = X - \frac{\alpha c}{\sqrt{\alpha^2+\beta^2+1}}, \quad \tilde{y} = Y - \frac{\beta c}{\sqrt{\alpha^2+\beta^2+1}}, \quad \tilde{z} = Z + \frac{c}{\sqrt{\alpha^2+\beta^2+1}}.$$

Wegen $\alpha^2+\beta^2 \leqq d_1^2 < +\infty$ existiert eine positive Zahl r_0 derart, daß die Kreisscheibe $(x-X)^2+(y-Y)^2<r_0^2$ enthalten ist im Durchschnitt der Projektionen (in der xy-Ebene) aller Kugeln $\tilde{K}$ durch den Punkt

(X, Y, Z); in dieser Kreisscheibe sind also die Funktionen $U(x, y)$, die zu diesen Kugeln gehören, definiert. Und zwar hängt

$$U(x, y) = U(x, y, X, Y, Z, \alpha, \beta)$$

von den unabhängigen Variablen x und y, sowie den Parametern $X, Y, Z = \alpha_1$, $\alpha = \alpha_2$ und $\beta = \alpha_3$ regulär analytisch ab im Bereich

$$X^2 + Y^2 \leqq A^2, \quad Z^2 \leqq A^2, \tag{23}$$

$$\alpha^2 + \beta^2 \leqq d_1^2, \tag{24}$$

$$(x - X)^2 + (y - Y)^2 < r_0^2. \tag{25}$$

Es seien X^1 und Y^1 zwei weitere Parameter, die mit den Parametern X und Y durch die Bedingung

$$(X - X^1)^2 + (Y - Y^1)^2 = r^2 \tag{26}$$

verknüpft sind.

Da die Halbkugelflächen $z = U(x, y)$ sämtlich denselben Radius haben und ihre Steigung im Punkt $(x = X, y = Y)$ höchstens gleich d_1 ist, so gilt, falls r_0 hinreichend klein ist, was wir sofort annehmen dürfen, in ganz (25)

$$\left(\frac{\partial U}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial U}{\partial y}\right)^2 \leqq d_2^2.$$

Umsomehr gilt in jedem Punkt (x, y) der Kreisscheibe (25) für die Steigung

$$\frac{\partial U}{\partial t} \equiv -\frac{\partial U}{\partial x}\frac{y - Y^1}{\sqrt{(x - X^1)^2 + (y - Y^1)^2}} + \frac{\partial U}{\partial y}\frac{x - X^1}{\sqrt{(x - X^1)^2 + (y - Y^1)^2}}$$

$\equiv T(x, y) \equiv T(x, y, X, Y, Z, \alpha, \beta, X^1, Y^1)$ der Fläche $z = U(x, y)$ in der Richtung der Tangente t im Punkt (x, y) jedes Kreises $(x - X^1)^2 + (y - Y^1)^2 = r^2$ durch (x, y) und (X, Y) die Ungleichung

$$\left(\frac{\partial U}{\partial t}\right)^2 \leqq d_2^2 \tag{27}$$

(t entsprechend dem positiven Umlaufssinn orientiert). Die Funktion T ist eine regulär analytische Funktion ihrer neun Argumente im Bereich (23)—(26). Dasselbe gilt dann auch für die Funktion

$$N \equiv \sqrt{d_3^2 - T^2} \qquad (> 0)$$

und im Bereich (23)—(26) gilt

$$\left(\frac{\partial U}{\partial t}\right)^2 + N^2 = d_3^2 < D^2. \tag{28}$$

Nach I, Satz 20 gibt es also ein r_1 mit $0 < r_1 < r_0$ derart, daß für jedes Parametersystem $X, Y, Z = \alpha_1$, $\alpha = \alpha_2$, $\beta = \alpha_3$, X^1, Y^1 des Bereiches (23), (24), (26) in der Kreisscheibe

$$(x - X)^2 + (y - Y)^2 < r_1^2 \tag{29}$$

eine Lösung

$$\Phi(x, y) \equiv \Phi(x, y, X, Y, Z, \alpha, \beta, X^1, Y^1)$$

der Differentialgleichung I, (13) existiert, die auf dem Durchschnitt des Kreises

$$L = [(x - X^1)^2 + (y - Y^1)^2 = r^2] \tag{30}$$

der xy-Ebene mit der Kreisscheibe (29) den Anfangsbedingungen

$$\Phi = U, \quad \frac{\partial \Phi}{\partial n} = N \tag{31}$$

genügt, wobei $\frac{\partial}{\partial n}$ die Ableitung nach der äußeren Normale von (30) bedeutet, die Funktionen Φ, Φ_x und Φ_y sind stetige Funktionen ihrer neun Argumente im Bereich (23), (24), (26), (29) und bei festen Parametern regulär analytische Funktionen von $(x\,y)$ in der Kreisscheibe (29).

Es sei $(X, Y, Z, \alpha, \beta, X^1, Y^1)$ ein Parameter-7-Tupel des Bereiches (23), (24), (26) und $\Phi(x, y)$ eine zugehörige Funktion. Es sei L der Kreis durch (X, Y), auf dessen Durchschnitt mit (29) die Gleichungen (31) gelten. Nach der ersten der Gleichungen (31) hat $\Phi(x, y)$ im Punkt (X, Y) in der Richtung der Tangente t an L die Steigung $\frac{\partial U}{\partial t}$ und nach der zweiten in der Richtung der Normalen die Steigung

$$\frac{\partial \Phi}{\partial n} = \sqrt{d_3^2 - \left(\frac{\partial U}{\partial t}\right)^2}. \tag{32}$$

Also hat $\Phi(x, y)$ in (X, Y) die Steigung d_3. Diese Steigung ist aber gleich $\sqrt{\Phi_x^2(X, Y) + \Phi_y^2(X, Y)}$. Also gilt

$$\Phi_x^2(X, Y) + \Phi_y^2(X, Y) = d_3^2. \tag{33}$$

Nun sei M die Menge aller 9-Tupel $(X, Y, X, Y, Z, \alpha, \beta, X^1, Y^1)$, wenn das 7-Tupel $(X, Y, Z, \alpha, \beta, X^1, Y^1)$ den Bereich (23), (24), (26) durchläuft. Da Φ_x und Φ_y auf dem Bereich (23), (24), (26), (29) stetig sind und $d_3 < d_4$ ist, existiert ein r_2 mit $0 < r_2 < r_1$, so daß

$$\Phi_x^2(x, y) + \Phi_y^2(x, y) < d_4^2 \tag{34}$$

ist in der Menge aller 9-Tupel $(x, y, X, Y, Z, \alpha, \beta, X^1, Y^1)$, die den Bedingungen $(x - X)^2 + (y - Y)^2 < r_2^2$ (23), (24), (26) genügen. Also hat $\Phi(x, y)$ in der Kreisscheibe $(x - X)^2 + (y - Y)^2 < r_2^2$ die globale Dehnungsschranke d_4. Da die erst später zu wählende Zahl $r_0 \leqq r_2$ sein wird, ist damit der $\Phi(x, y)$ betreffende Teil von (19) bewiesen.

Analog definiert man die Funktion $\Psi(x, y) \equiv \Psi(x, y, X, Y, Z, \alpha, \beta, X^1, Y^1)$ mittels der Kugeln K, auf deren Oberseite der Punkt (X, Y, Z) liegt, und beweist die erste Hälfte von (19); dabei hat man eventuell r_1 und r_2 zu verkleinern.

Wegen (27) und

$$\left(\frac{\partial U}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial U}{\partial y}\right)^2=\left(\frac{\partial U}{\partial n}\right)^2+\left(\frac{\partial U}{\partial t}\right)^2$$

für $U(x, y) = U(x, y, X, Y, Z, \alpha, \beta)$ ist

$$\frac{\partial U}{\partial n} \leqq \sqrt{d_2^2-\left(\frac{\partial U}{\partial t}\right)^2}.$$

Dies ergibt zusammen mit (32) für $\Phi(x, y) = \Phi(x, y, X, Y, Z, \alpha, \beta, X^1, Y^1)$

$$\frac{\partial \Phi}{\partial n}-\frac{\partial U}{\partial n} \geqq \sqrt{d_3^2-\left(\frac{\partial U}{\partial t}\right)^2}-\sqrt{d_2^2-\left(\frac{\partial U}{\partial t}\right)^2} \text{ in } (X, Y).$$

Nun ist $\sqrt{d_3^2-\xi^2}-\sqrt{d_2^2-\xi^2} \geqq M = \text{Min}\,(d_3-d_2,\ \sqrt{d_3^2-d_2^2})>0$ im Intervall $0 \leqq \xi \leqq d_2$. Also gilt

$$\frac{\partial \Phi}{\partial n}-\frac{\partial U}{\partial n} \geqq m>0 \text{ in } (X, Y).$$

Hieraus ergibt sich für ein hinreichend kleines r_3 mit $0<r_3 \leqq r_2$: Die zu beliebigen Parameter-7-Tupeln des Bereiches (23), (24), (26) gehörigen Funktionen Φ genügen in der Kreisscheibe $(x-X)^2+(y-Y)^2<r_3^2$ der Ungleichung [15])

$$\frac{\partial \Phi}{\partial n}(x, y)-\frac{\partial U}{\partial n}(x, y)>0. \tag{35}$$

Dies folgt, analog wie (34) aus (33), wenn man berücksichtigt, daß

$$\frac{\partial \Phi}{\partial n}=\frac{\partial \Phi}{\partial x}\,\frac{x-X^1}{\sqrt{(x-X^1)^2+(y-Y^1)^2}}+\frac{\partial \Phi}{\partial y}\,\frac{y-Y^1}{\sqrt{(x-X^1)^2+(y-Y^1)^2}}$$

und analog $\frac{\partial U}{\partial n}$ auf dem Bereich (23), (24), (26), (29) stetig sind. Nach der ersten Gleichung (31) ist $\Phi(x, y) = U(x, y)$ auf dem Durchschnitt der Kreisfläche $(x-X)^2+(y-Y)^2<r_1^2$ mit L. Hieraus und (35) folgt:

$$U(x, y) \leqq \Phi(x, y) \tag{36}$$

für $U(x, y) = U(x, y, X, Y, Z, \alpha, \beta)$ und $\Phi(x, y) = \Phi(x, y, X, Y, Z, \alpha, \beta, X^1, Y^1)$ in jedem Punkt (x, y), der im Durchschnitt der Kreisscheibe $(x-X)^2+(y-Y)^2 \leqq r_3^2$ mit dem abgeschlossenen Außenbereich des Kreises $L = [(x-X^1)^2+(y-Y^1)^2 = r^2]$ liegt.

Nun beschränken wir die Punkte (X, Y, Z), die Kugeln $\tilde{K}$ und $\underset{\sim}{K}$, bestimmt durch α und β, sowie die Kreise L (s. (30)), bestimmt durch X^1 und Y^1 bei festem Radius $\sqrt{(X-X^1)^2+(Y-Y^1)^2} = r$, folgendermaßen. Nach Wahl von A und der Bedingung für Δ (S. 2) existiert ein $\varepsilon_3>0$ derart, daß die Punkte (X, Y, Z) jeder Kurve R mit $\Delta(R_0, R)<\varepsilon_3$ den Bedingungen (23) genügen. Wir nehmen sofort $\varepsilon_3 \leqq \varepsilon_2(\delta)$ an (dann hängt ε_3 von δ ab: $\varepsilon_3 = \varepsilon_3(\delta)$. Wir betrachten jetzt nur noch

[15]) $\frac{\partial}{\partial n}$ ist die Ableitung in der Richtung von (X^1, Y^1) nach (x, y).

Kurven R aus $\mathfrak{R}$ mit $\Delta(R_0, R) < \varepsilon_3$. Als Punkte (X, Y, Z) betrachten wir nur noch die Punkte der Kurven R aus $\mathfrak{R}$ mit $\Delta(R_0, R) < \varepsilon_3$. Ist $(X, Y, Z) \in R$ ein solcher Punkt, so lassen wir zu nur noch die ihn enthaltenden Kugeln $\tilde{K}$ bzw. $\underset{\sim}{K}$ mit dem Radius c der auf S. 6 gewählten Menge $\tilde{\mathfrak{K}}(R)$ bzw. $\underset{\sim}{\mathfrak{K}}(R)$ des Satzes 4 (sie haben in (X, Y, Z) eine Steigung $\sqrt{\alpha^2 + \beta^2} \leqq d_1$, berühren R in (X, Y, Z) von oben bzw. unten und haben mit R nur den Punkt (X, Y, Z) gemein) und die Kreise L der Menge $\mathfrak{L}(R)$ des Satzes 4 mit dem festen Radius r (ihre Mittelpunkte heißen (X^1, Y^1) und sie sind fremd zu G und umschließen G nicht). Die $\tilde{K}$, $\underset{\sim}{K}$ und L bestimmenden Parameter α, β, X^1 und Y^1 sind also i. a. mehrdeutige Funktionen von X, Y und R bzw. K: $\alpha = \alpha(X, Y, R)$, $\beta = \beta(X, Y, R)$, $X^1 = X^1(X, Y, K)$, $Y^1 = Y^1(X, Y, K)$ mit $(X, Y) \in K$. Die durch die Anfangsbedingungen (31) festgelegte(n) Lösung(en)

$$\Phi(x, y) = \Phi(x, y, X, Y, Z, \alpha, \beta, X^1, Y^1)$$

der Differentialgleichung I, (13) bezeichnen wir als die zu $(X, Y, Z) \in R$ gehörigen Funktionen $\Phi(x, y)$.

Um (20) zu beweisen für $\Phi(x, y) = \Phi(x, y, X, Y, Z, \alpha, \beta, X^1, Y^1)$ und $\Psi(x, y) = \Psi(x, y, X, Y, Z, \alpha, \beta, X^1, Y^1)$ (wobei (24) und (26) gelten), genügt es wegen I, Satz 15, ε) nachzuweisen, daß die Ungleichungen $\Psi(x, y) \leqq H(x, y) \leqq \Phi(x, y)$ auf der Begrenzung E^* von E richtig sind; denn $H(x, y)$ ist eine (G, δ, d_5)-Extremale nach S. 11 und die Funktionen $\Phi(x, y)$ und $\Psi(x, y)$ sind als regulär analytische Lösungen der Differentialgleichung I, (13) mit der globalen Dehnungsschranke d_4 Lösungen des Variationsproblems I, (2) nach I, Satz 19 und folglich auch (G, δ, d_5)-Extremalen. Nun ist die Begrenzung des Durchschnittes zweier Mengen enthalten in der Summe der Begrenzungen der beiden Mengen. Also ist jeder Punkt von E^* enthalten entweder im Durchschnitt B der Projektion K von R mit der Kreisscheibe $(x - X)^2 + (y - Y)^2 \leqq r_5^2$ oder im Durchschnitt C des Kreises $(x - X)^2 + (y - Y)^2 = r_5^2$ mit $\bar{G}$. Folglich genügt es, statt (20) für hinreichend kleines positives r_5 zu beweisen:

$$\Psi(x, y) \leqq H(x, y) \leqq \Phi(x, y) \text{ in } B, \tag{37}$$

$$\Psi(x, y) \leqq H(x, y) \leqq \Phi(x, y) \text{ in } C. \tag{38}$$

Es sei nun (x, y) ein Punkt des Durchschnittes der Kreisscheibe $(x - X)^2 + (y - Y)^2 \leqq r_3^2$ mit der Projektion K von R. Da der Kreis L (vgl. (30)) durch (X, Y) zu G fremd ist und G nicht umschließt, ist K und somit (x, y) im abgeschlossenen Außenbereich von L enthalten. Wegen (36) gilt also $U(x, y) \leqq \Phi(x, y)$. Anderseits liegt (x, y) wegen $r_3 \leqq r_0$ in der Projektion der Kugel $\tilde{K}$ mit der Unterseite $z = U(x, y)$. Da $\tilde{K}$ die Kurve R in (X, Y, Z) von oben berührt und $(x, y, H(x, y))$ wegen der soeben gemachten Voraussetzung $(x, y) \in K$ auf R liegt, gilt $H(x, y) \leqq U(x, y)$. Es ist also $H(x, y) \leqq \Phi(x, y)$. Für jedes positive

$r_5 \leqq r_3$ ist damit die auf Φ bezügliche Hälfte von (37) bewiesen. Analog ergibt sich die andere Hälfte.

Nun beginnen wir den schwierigeren Beweis der Ungleichungen (38).

Der Punkt (X, Y, Z) variiere in der Kurve R_0 und in Abhängigkeit hiervon variiere das Parameterquadrupel α, β, X^1, Y^1, $(\alpha = \alpha(X, Y, R_0)$, $\beta = \beta(X, Y, R_0)$, $X^1 = X^1(X, Y, K_0)$, $Y^1 = Y^1(X, Y, K_0)$, $(X, Y) \in K_0)$; dann durchläuft also $\bar{K}$ die Kugeln der Menge $\mathfrak{K}(R_0)$ und L die Kreise der Menge $\mathfrak{L}(R_0)$ des Satzes 4. Es sei $\Phi_0(x, y)$ die (bzw. eine) zu (X, Y, Z) gehörige Funktion. Sie hat im Punkt (X, Y) die Steigung d_3 nach (33), speziell in der Richtung der Tangente t von L ist die Steigung $\frac{\partial \Phi_0}{\partial t}$ von Φ_0 absolut nur gleich $\left|\frac{\partial U}{\partial t}\right| \leqq d_2$ nach (31) und (27). Bezeichnet also $\mathfrak{r}$ im Punkt (X, Y) diejenige Richtung, in welcher Φ_0 die Steigung d_3 hat, so gilt für den (kleineren) Winkel ω zwischen $|t|$[16]) und $\mathfrak{r}$ die Ungleichung $0 < \omega < \frac{\pi}{2}$. Wegen $\frac{\partial \Phi_0}{\partial n} = N > 0$ weist $\mathfrak{r}$ in das Äußere des Kreises L. Mit $\frac{\partial}{\partial x} \Phi_0$ und $\frac{\partial}{\partial y} \Phi_0$ ist nun auch $\mathfrak{r}$ und damit ω eine stetige Funktion von $(X, Y, X, Y, Z, \alpha, \beta, X^1, Y^1)$. Außerdem bilden, da die Mengen $\mathfrak{K}(R_0)$ und $\mathfrak{L}(R_0)$ des Satzes 8 in sich kompakt sind, die 9-Tupel $(X, Y, X, Y, Z, \alpha, \beta, X^1, Y^1)$ eine in sich kompakte Menge. Folglich existieren zwei Zahlen ω' und ω'' mit $0 < \omega' < \omega'' < \frac{\pi}{2}$ derart, daß $\omega' \leqq \omega \leqq \omega''$ für alle ω.

Wir bringen nun in jedem Punkt (x, y) der Kreisscheibe $(x - X)^2 + (y - Y)^2 \leqq r_3^2$ den Einheitsvektor $\mathfrak{v} = \mathfrak{v}(x, y, X, Y, Z, \alpha, \beta, X^1, Y^1)$ mit der Richtung $\mathfrak{r}$ an und bezeichnen mit $\frac{\partial}{\partial \mathfrak{v}}$ die Ableitung in der Richtung dieses Vektors. Nach Definition von $\mathfrak{r}$ ist

$$\frac{\partial \Phi_0}{\partial \mathfrak{v}}(X, Y) = d_3.$$

Da $\mathfrak{v}$ auf seinem Definitionsbereich stetig ist, da darin weiter $\frac{\partial}{\partial x} \Phi_0$ und $\frac{\partial}{\partial y} \Phi_0$ stetig sind, ist auch $\frac{\partial}{\partial \mathfrak{v}} \Phi_0(x, y) = \frac{\partial}{\partial \mathfrak{v}} \Phi_0(x, y, X, Y, Z, \alpha, \beta, X^1, Y^1)$ darin stetig. Da auf dem in sich kompakten Teilbereich der $(X, Y, X, Y, Z, \alpha, \beta, X^1, Y^1)$ die letzte Gleichung gilt, existiert ein r_4 mit $0 < r_4 \leqq \mathrm{Min}\,(r_3, \delta_0)$ derart, daß

$$\frac{\partial}{\partial \mathfrak{v}} \Phi_0(x, y) > d_2 \tag{39}$$

ist überall in der Kreisscheibe $(x - X)^2 + (y - Y)^2 < r_4^2$ bei beliebigem $(X, Y, Z) \in R_0$ und zugehörigen α, β, X^1, Y^1.

Es sei (x, y) ein Punkt des Durchschnittes von G_0 mit einer Kreisscheibe $(x - X)^2 + (y - Y)^2 \leqq r_5^2$, wobei $0 < r_5 < r_4$ und $(X, Y, Z) \in R_0$

[16]) $|t|$ bedeute die nichtorientierte Tangente an L in (X, Y).

ist. Da (x, y) im Außengebiet des Kreises L liegt und $\omega \geqq \omega' > 0$ mit festem ω', so trifft, wenn r_5 (unabhängig von $X, Y, Z, \alpha, \beta, X^1, Y^1$) hinreichend klein ist, die rückwärtige Verlängerung von $\mathfrak{v}$ den Kreis L und daher, weil L zu G_0 fremd ist, auch die Projektion $K_0 = G_0^*$ von R_0, in einem ersten Punkt (x', y'), und zwar liegt dieser (bei hinreichend kleinem r_5), in der Kreisscheibe $(x-X)^2 + (y-Y)^2 < r_4^2$.

Wir behaupten nun: in jedem Punkt des Durchschnittes $C_0 = C_0(X, Y)$ des Kreises $(x-X)^2 + (y-Y)^2 = r_5^2$ um $(X, Y) \in K_0$ mit $\bar{G}_0$ gilt

$$H_0(x, y) < \Phi_0(x, y) \tag{40}$$

für jede zu (X, Y, Z) gehörige Funktion Φ_0.

Angenommen, in einem Punkt (x_0, y_0) von C_0 wäre $H_0(x_0, y_0) \geqq \Phi_0(x_0, y_0)$. Dann liegt (x_0, y_0) sicher nicht auf K_0. Denn zunächst ist $(x_0, y_0) \neq (X, Y)$, da (x_0, y_0) auf dem Kreis $(x-X)^2 + (x-Y)^2 = r_5^2$ liegt. Wäre nun (x_0, y_0) auf K_0 gelegen, also $(x_0, y_0, H_0(x_0, y_0)$ auf der Kurve R_0, so wäre einerseits $H_0(x_0, y_0) < U(x_0, y_0)$, da die zu $\Phi_0(x, y)$ gehörige Kugel $\tilde{K}$ mit der Unterseite $z = U(x, y)$ (mit deren Hilfe Φ_0 durch (31) definiert ist) die Kurve R_0 in (X, Y, Z) von oben berührt, aber keinen weiteren Punkt mit R_0 gemeinsam hat; anderseits ist $U(x_0, y_0) \leqq \Phi_0(x_0, y)$ nach (36); also ist $H_0(x_0, y_0) < \Phi_0(x_0, y)$. Mithin liegt (x_0, y_0) in G_0. Die rückwärtige Verlängerung des Vektors $\mathfrak{v}(x_0, y_0, X, Y, Z, \alpha, \beta, X^1, Y^1)$ bis zum Treffpunkt (x_0', y_0') mit K_0 heiße V. Nach Wahl von r_5 liegt (x_0', y_0') in der Kreisscheibe $(x-X)^2 + (y-Y)^2 \leqq r_4^2$. Nach (38) ist also einerseits $U(x_0', y_0') \leqq \Phi_0(x_0', y')$. Anderseits ist $H_0(x_0', y_0') \leqq U(x_0', y_0')$, da $\tilde{K}$ die Kurve R_0 von oben berührt. Also folgt $H_0(x_0', y_0') \leqq \Phi_0(x_0', y_0')$. Mit den Endpunkten (x_0, y_0) und (x_0', y_0') liegt ganz V in der Kreisscheibe $(x-X)^2 + (y-Y)^2 \leqq r_4^2$. Also hat Φ_0 nach (39) längs V überall eine Steigung $> d_2$. Also muß wegen $H_0(x_0', y_0') \leqq \Phi_0(x_0', y_0')$ und $H_0(x_0, y_0) \geqq \Phi_0(x_0, y)$ auch H_0 in mindestens einem Punkt von V eine Steigung $> d_1$ haben, was wegen $r_4 \leqq \delta_0$ (S. 17) im Widerspruch zu (3) steht. Damit ist (40) bewiesen und zwar für jedes Argumentsystem $(x, y, X, Y, Z, \alpha, \beta, X^1, Y^1)$ der Menge $M_0 = [(x, y) \in \bar{G}_0,\ (x-X)^2 + (y-Y)^2 = r_5^2,\ (X, Y, Z) \in R_0;\ \alpha = \alpha(X, Y, R_0),\ \beta = \beta(X, Y, R_0),\ X^1 = X^1(X, Y, K_0),\ Y^1 = Y^1(X, Y, K_0)]$.

Nun ist die Menge M_0 in sich kompakt; denn die Menge $[(x, y) \in \bar{G}_0,\ (x-X)^2 + (y-Y)^2 = r_5^2,\ (X, Y, Z) \in R_0]$ ist natürlich in sich kompakt und für die Mengen $[\alpha = \alpha(X, Y, R_0),\ \beta = \beta(X, Y, R_0)]$ und $[X^1 = X^1(X, Y, K_0),\ Y^1 = Y^1(X, Y, K_0)]$ folgt dies daraus, daß die Mengen $\mathfrak{R}(R_0)$ und $\mathfrak{L}(R_0)$ des Satzes 4 in sich kompakt sind (vgl. die Definition der Funktionen α, β, X^1, Y^1 auf S. 16). Folglich existiert ein festes $\lambda' > 0$ derart, daß $\Phi_0(x, y, X, Y, Z, \alpha, \beta, X^1, Y^1) - H_0(x, y) > \lambda'$ auf der Menge M_0, daß also m. a. W.

$$\Phi_0(x, y) - H_0(x, y) > \lambda'$$

$$\text{auf } C_0 = [(X, Y) \in K_0,\ (x-X)^2 + (y-Y)^2 = r_5^2,\ (x, y) \in \bar{G}_0]$$

gilt für jede zu einem beliebigen Punkt $(X, Y, Z) \in R_0$ gehörige Funktion $\Phi_0(x, y)$. Für jedes solche Φ_0 liegt daher die Punktmenge $[(x, y) \in C_0, z = \Phi_0(x, y)]$ oberhalb der Fläche $[(x, y) \in \overline{G}_0, z = H_0(x, y) + \lambda']$, d. h. ist (x, y, z'') ein beliebiger Punkt der Menge und (x, y, z') der Punkt der Fläche mit denselben x und y, so ist $z' < z''$. Nun existiert ein $\lambda > 0$ derart, daß kein Punkt des Raumes, der von der Fläche $[(x, y) \in \overline{G}_0, z = H_0(x, y)]$ einen Abstand $\leqq 3\lambda$ hat, oberhalb der Fläche $[(x, y \in \overline{G}_0, z = H_0(x, y) + \lambda']$ liegt. Folglich gilt für jede zu einem beliebigen Punkt $(X, Y, Z) \in R_0$ gehörige Funktion $\Phi_0(x, y)$:

(41) Die Punktmenge $[(x, y) \in C_0, z = \Phi_0(x, y)]$ liegt oberhalb der Fläche $[(x, y) \in \overline{G}_0, z = H_0(x, y)]$ und hat von ihr einen Abstand $> 3\lambda$ (im üblichen Sinn).

Durch indirekten Schluß ergibt sich weiter die Existenz einer Zahl $\varkappa > 0$ mit folgender Eigenschaft:

(42) Sind $(x_0, y_0, z_0 = H_0(x_0, y))$ und (x_1, y_1, z_1) zwei Punkte derart, daß (x_0, y_0) und (x_1, y_1) einen Abstand $< \varkappa$ haben und (x_1, y_1, z_1) von der Fläche $[(x, y) \in \overline{G}_0, z = H_0(x, y)]$ einen Abstand $< \varkappa$ hat, so haben (x_0, y_0, z_0) und (x_1, y_1, z_1) einen Abstand $< \lambda$.

Für $\mu > 0$ sei $U(C_0, \mu)$ die Menge aller Punkte der xy-Ebene, die von der Menge C_0 Abstände $< \mu$ haben und $V(C_0, \mu)$ bzw. $W(C_0, \Phi_0, \mu)$ die Menge aller Punkte des Raumes, die von der Menge $[(x, y) \in C_0, z = H_0(x, y)]$ bzw. $[(x, y) \in C_0, z = \Phi_0(x, y)]$ Abstände $< \mu$ haben. Dann ist $U(C_0, \mu)$ die Projektion sowohl von $V(C_0, \mu)$ als auch von $W(C_0, \Phi_0, \mu)$ und aus (41) folgt: $V(C_0, \lambda)$ liegt unterhalb von $W(C_0, \Phi_0, \lambda)$, d. h. sind (x, y, z') und (x, y, z'') zwei Punkte aus $V(C_0, \lambda)$ bzw. $W(C_0, \Phi_0, \lambda)$ mit derselben Projektion $(x, y) \in U(C_0, \lambda)$, so ist $z' < z''$.

Nun setzen wir $\delta = \operatorname{Min}(\delta_1, r_3)$ [17].

Es sei nun ε_4 eine positive Zahl $\leqq \varepsilon_3$, über die wir im Folgenden noch genauer verfügen werden. Zu jedem solchen ε_4 existiert dann (S. 2) eine positive Zahl $\varepsilon_5 \leqq \varepsilon_4$ derart, daß es für jede Kurve R aus $\mathfrak{R}$ mit $\Delta(R_0, R) < \varepsilon_5$ eine topologische Abbildung τ von R_0 auf R gibt, für welche

$$\nabla_\tau(R_0, R) < \varepsilon_4 \tag{43}$$

ist. Es sei R eine Kurve aus $\mathfrak{R}$ mit $\Delta(R_0, R) < \varepsilon_5$ und τ eine Abbildung der genannten Art. Weiter sei (X_0, Y_0) ein die Projektion K_0 von R_0 durchlaufender Punkt und (X, Y) der (X_0, Y_0) bei der Abbildung τ entsprechende Punkt von K. Ist ε_4 hinreichend klein und

[17]) Unsere bisherigen Überlegungen von „*Zweitens*“ (S. 11) an gelten für jedes δ mit $0 < \delta \leqq \delta_1$ (vgl. Fußnote 14). Durch die obige Fixierung von δ sind jetzt auch $\varepsilon_2 = \varepsilon_2(\delta)$ und $\varepsilon_3 = \varepsilon_3(\delta)$ fixiert.

das nehmen wir an, so unterscheiden sich erstens die Kreise $(x-X)^2+(y-Y)^2=r_\varepsilon^2$ und $(x-X_0)^2+(y-Y_0)^2=r_\varepsilon^2$ und zweitens nach Satz 3 die Bereiche $\overline{G}$ und $\overline{G}_0$ so wenig voneinander, daß für jeden Punkt (X_0, Y_0) von K_0 und sein τ-Bild (X, Y) in K die Mengen

$$C = |(x-X)^2+(y-Y)^2 = r_\varepsilon^2,\ (x,y)\in\overline{G}|,$$
$$C_0 = |(x-X_0)^2+(y-Y_0)^2 = r_\varepsilon^2,\ (x,y)\in\overline{G}_0|$$

folgende Eigenschaft haben:

$$C\subset U(C_0, \varkappa). \tag{44}$$

Nach Satz 4 sind die Mengen $\mathfrak{L}(R_0)$ und $\tilde{\mathfrak{R}}(R)$ in sich kompakt. Infolgedessen bilden die 7-Tupel $(X_0, Y_0, Z_0, \alpha_0, \beta_0, X_0^1, Y_0^1)$, wobei (X_0, Y_0, Z_0) die Kurve R_0 durchläuft und für jedes $(X_0, Y_0, Z_0)\in R_0$ die vier Zahlen α_0, β_0, X_0^1 und Y_0^1 alle Werte der i. a. mehrdeutigen Funktionen $\alpha(X_0, Y_0, R_0)$, $\beta(X_0, Y_0, R_0)$, $X^1(X_0, Y_0, K_0)$ und $Y^1(X_0, Y_0, K_0)$ annimmt, eine in sich kompakte Teilmenge des Bereiches (23), (24) und (26).

Deshalb und weil (nach S. 14) $\Phi(x, y, X, Y, Z, \alpha, \beta, X^1, Y^1)$ im Bereich (23), (24), (26), (29) stetig ist, gilt für ein festes, hinreichend kleines $\bar{\sigma}>0$ (das wir sofort $<\frac{\lambda}{3}$ wählen) und jedes hinreichend kleine $\sigma>0$ folgendes: Für jede zu einem Punkt $(X_0, Y_0, Z_0)\in R_0$ gehörige Funktion

$$\Phi_0(x,y) = \Phi(x, y, X_0, Y_0, Z_0, \alpha_0, \beta_0, X_0^1, Y_0^1)$$

und jede zu einem Punkt $(X, Y, Z)\in R$ gehörige Funktion

$$\Phi(x,y) = \Phi(x, y, X, Y, Z, \alpha, \beta, X^1, Y^1),$$

für welche

$$\begin{gathered}|X_0-X|<\sigma,\ |Y_0-Y|<\sigma,\ |Z_0-Z|<\sigma,\\ |\alpha_0-\alpha|<\sigma,\ |\beta_0-\beta|<\sigma,\ |X_0^1-X^1|<\sigma,\ |Y_0^1-Y^1|<\sigma\end{gathered} \tag{45}$$

ist, gilt die Ungleichung

$$|\Phi_0(x'', y'')-\Phi(x', y')|<\frac{\lambda}{3} \tag{46}$$

für je zwei Punkte (x', y') und (x'', y'') mit

$$\left\{\begin{gathered}|x''-x'|<\bar{\sigma},\ |y''-y'|<\bar{\sigma},\\ (x''-X_0)^2+(y''-Y_0)^2=r_\varepsilon^2,\ (x'-X)^2+(y'-Y)^2=r_\varepsilon,\\ (x'', y'')\in\overline{G}_0,\ (x', y')\in\overline{G}.\end{gathered}\right. \tag{47}$$

Falls nun ε_ε hinreichend klein ist, gibt es für jedes zu einem beliebigen Punkt (X, Y, Z) von R gehörige 7-Tupel $(X, Y, Z, \alpha, \beta, X^1, Y^1)$ auf R_0 einen Punkt (X_0, Y_0, Z_0) und ein dazugehöriges 7-Tupel $(X_0, Y_0, Z_0, \alpha_0, \beta_0, X_0^1, Y_0^1)$ derart, daß die Ungleichungen (45) erfüllt sind (Satz 4, δ)). Bei hinreichend kleinem ε_ε unterscheiden sich nach Satz 3 weiter $\overline{G}_0$ und $\overline{G}$ so wenig voneinander und bei hinreichend kleinem σ ist der Abstand der Punkte (X_0, Y_0) und (X, Y) nach (45)

so klein, daß C in einer so kleinen Umgebung von C_0 liegt, daß es zu jedem Punkt $(x', y') \in C$ einen Punkt $(x'', y'') \in C_0$ gibt derart, daß (47) gilt. Also gilt dann (46) für jeden Punkt $(x', y') \in C$ und einen geeigneten Punkt $(x'', y'') \in C_0$. Hieraus folgt wegen (47) und $\bar{\sigma} < \frac{\lambda}{3}$:

Ist $\Phi(x, y)$ eine zu einem beliebigen Punkt (X, Y, Z) von R mit $\mathcal{A}(R_0, R) < \varepsilon_4$ gehörige Funktion, so gibt es unter den zu einem geeigneten Punkt (X_0, Y_0, Z_0) von R_0 gehörigen Funktionen eine Funktion $\Phi_0(x, y)$ mit folgender Eigenschaft:

(48) die Menge $[(x, y) \in C, \quad z = \Phi(x, y)]$ liegt in $W(C_0, \Phi_0, \lambda)$.

Schließlich behaupten wir für hinreichend kleines ε_4:

(49) die Menge $[(x, y) \in C, \quad z = H(x, y)]$ liegt in $V(C_0, \lambda)$.

Wegen (42) und (43) genügt es, zu beweisen, daß die Fläche $[(x, y) \in G, \; z = H(x, y)]$ in der $\varkappa$-Umgebung der Fläche $[(x, y) \in \bar{G}_0 \; z = H_0(x, y)]$ liegt, falls ε_4 hinreichend klein ist. Nun wählen wir ein positives ν so klein, daß

(50) $$\nu < \delta \text{ und } \nu < \frac{\varkappa}{2 + d_5}$$

ist und nehmen ε_4 so klein an, daß gilt:

(51) $$\varepsilon_4 < \nu, \; \varepsilon_4 < \delta_0 - \nu \text{ und } \varepsilon_4 < \frac{\varkappa}{1 + 2 d_0 + d_5}.$$

Es sei S bzw. T die Menge aller Punkte (x, y) von $\bar{G}$ mit Abständen $= \nu$ bzw. $< \nu$ von $K = G^*$.

Wir betrachten $H(x, y)$ zunächst auf der Menge T. Es sei (x, y) ein Punkt von T. Dann existiert auf K ein Punkt (X, Y) mit einem Abstand $< \nu$ von (x, y). Wegen $d^\delta(H, \bar{G}) \leqq d_5$ und $\nu < \delta$ ist dann $|H(x, y) - H(X, Y)| < \nu d$; also hat der Punkt $(x, y, H(x, y))$ vom Punkt $(X, Y, H(X, Y))$ der Kurve R einen Abstand $< \nu + \nu d_5$. Nun hat der Punkt $(X, Y, Z = H(X, Y))$ von seinem τ-Urbild $(X_0, Y_0, Z_0 = H_0(X_0, Y_0)) \in R_0$ wegen (43) einen Abstand $\leqq \varepsilon_4$. Wegen der zweiten Ungleichung (50) und der ersten Ungleichung (51) hat also der Punkt $(x, y, H(x, y))$ von $(X_0, Y_0, Z_0) \in R_0$ einen Abstand $< \varkappa$.

Nun betrachten wir $H(x, y)$ auf S. Es sei (x, y) ein Punkt von S. Dann liegt (x, y) sicher auch in $\bar{G}_0$, da K_0 wegen (43) in der ε_4-Umgebung von K liegt und $\varepsilon_4 < \nu$ ist nach (51). Wir wollen $|H(x, y) - H_0(x, y)|$ abschätzen. Auf K existiert ein Punkt (X, Y) mit dem Abstand ν von (x, y). Da $\nu < \delta$ ist nach (50) und $d^\delta(H, \bar{G}) \leqq d_5$ gilt, ist wie vorhin $|H(x, y) - H(X, Y)| < \nu d_5$. Ist nun $(X_0, Y_0, Z_0 = H_0(X_0, Y_0))$ das τ-Urbild $\in R_0$ von $(X, Y, Z = H(X, Y))$ so ist $|H(X, Y) - H_0(X_0, Y_0)| < \varepsilon_4$ nach (43). Da außerdem (x, y) und (X_0, Y_0) einen Abstand $< \nu + \varepsilon_4$ haben und $\nu + \varepsilon_4 < \delta_0$ ist nach (51), so ist $|H_0(X_0, Y_0) - H_0(x, y)| < (\nu + \varepsilon_4) d_0$ wegen (3). Also gilt

$$|H(x, y) - H_0(x, y)| < \varkappa$$

wegen (51).

Diese letzte Ungleichung gilt also auf ganz S. Nun enthält S die Begrenzung der offenen Menge $G_1 = \bar{G} - (S + T) \subset G_0$. Da $H(x, y)$ und $H_1(x, y)$ beide (G_1, δ, d_s)-Extremalen sind nach I, Satz 15, α), so folgt aus I, Satz 15, β) und ε), daß $|H(x, y) - H_0(x, y)| < \varkappa$ auch in ganz G_1 gilt. — Dies, zusammen mit dem vorhin bewiesenen Resultat, daß für $(x, y) \in T$ der Punkt $(x, y, H(x, y))$ in der $\varkappa$-Umgebung der Kurve R_0 liegt, ergibt die zu beweisende Behauptung, daß die Fläche $[(x, y) \in \bar{G},\ z = H(x, y)]$ in der $\varkappa$-Umgebung der Fläche $[(x, y) \in \bar{G}_0,\ z = H(x, y)]$ liegt.

Aus (48) und (49), sowie der oben (S. 19) festgestellten Tatsache, daß $V(C_0, \lambda)$ unterhalb von $W(C_0, \Phi_0, \lambda)$ liegt, folgt der auf $\Phi(x, y)$ bezügliche Teil von (38). Analog beweist man den auf $\Psi(x, y)$ bezüglichen Teil von (38).

Damit ist (20) bewiesen.

Schließlich ergibt sich (21) einfach daraus, daß die Funktion auf der rechten Seite der ersten Anfangsbedingung (31) für $x = X$, $y = Y$ den Wert $Z = r(X, Y) = H(X, Y)$ hat.

Damit ist der Satz 1 bewiesen.

§ 4.

Beweis des Satzes 2.

Es sei R eine Kurve aus $\mathfrak{R}$. Sie sei der Limes einer Folge $\{R_i\}$ von Kurven R_i aus $\mathfrak{R}$, für welche das Randwertproblem I, (2), (5) eine Lösung $H_i(x, y)$ besitzt und für welche nicht $\lim d(R_i) = D$ ist. Es genügt zu zeigen, daß dann R in $\mathfrak{R}_1$ liegt. — Wegen $d(R_i) = d(H_i) < D$ und der Voraussetzung, daß nicht $\lim d(R_i) = D$ ist, können wir sofort voraussetzen, daß ein $d < D$ existiert derart, daß $d(R_i) < d$ gilt für alle i.

Nach I, Hilfssatz 1 hat jedes $H_i(x, y)$ auf jeder konvexen Teilmenge des von der Projektion K_i von R_i begrenzten beschränkten Gebietes G_i die globale Dehnungsschranke d.

Wegen $\lim R_i = R$ existiert weiter eine Konstante $k > 0$ derart, daß die Kurven R_i und R sämtlich zwischen den Ebenen $z = k$ und $z = -k$ liegen. Nach I, Satz 15, δ) gilt dann $|H_i(x, y)| < k$ in ganz $\bar{G}_i$ für jedes $i = 1, 2, \ldots$. Ist nun $\{O_n\}$ eine Folge von offenen, samt Peripherie in G enthaltenen Kreisscheiben, deren Summe $O_1 + O_2 + \cdots = G$ ist, so enthält also nach I, Satz 10 die Folge $\{H_i(x, y)\}$ eine auf $\bar{O}_1$ gleichmäßig konvergente Teilfolge $\{H_i^1(x, y)\}$[18]), diese eine auf $\bar{O}_2$ gleichmäßig konvergente Teilfolge $\{H_i^2(x, y)\}$, usw. Die Diagonalfolge der Folgen $\{H_i^1(x, y)\}$, $\{H_i^2(x, y)\}$, ... konvergiert also gleichmäßig auf $\bar{O}_1, \bar{O}_2, \ldots$[19]). Wir können ohne Beschränkung der Allgemeinheit sofort

[18]) Wegen $\lim R_i = R$ ist auch $\lim G_i = G$ und daher auch jedes $\bar{O}_n$ in fast allen G_i enthalten.

[19]) Dabei ist jedes $\bar{O}_n$ i. a. im Definitionsbereich nicht aller, sondern nur fast aller Funktionen der Diagonalfolge enthalten.

annehmen, daß die Folge $\{H_i(x,y)\}$ selbst auf jedem $\bar{O}_n$ gleichmäßig konvergiert.

Die Limesfunktion $H(x,y)$ ist in $O_1+O_2+\cdots=G$ definiert und hat in jeder Kreisscheibe O_n die globale Dehnungsschranke d. $H(x,y)$ ist also in G lokal dehnungsbeschränkt mit der Dehnungsschranke d. Nach I, Satz 9 kann $H(x,y)$ erweitert werden zu einer in $\bar{G}$ definierten und dort stetigen, lokal dehnungsbeschränkten Funktion $\bar{H}(x,y)$, z. B. mit der lokalen Dehnungsschranke $\frac{1}{2}(d+D)$.

Wir behaupten weiter, daß die Fläche $z=\bar{H}(x,y)$ die Randkurve R hat, d. h. daß, wenn $R=[(x,y)\in K, z=r(x,y)]$ ist, auf K gilt $\bar{H}(x,y)=r(x,y)$. Wegen der Stetigkeit von $\bar{H}(x,y)$ und $r(x,y)$ und da nach I, Satz 5 die Menge der Punkte, in denen K differenzierbar ist, in K dicht liegt, genügt es, die Gleichung $\bar{H}(x,y)=r(x,y)$ zu beweisen für jeden Punkt (x,y), in welchem K differenzierbar ist. Es sei (x_0,y_0) ein solcher Punkt und $(x_0,y_0,z_0=r(x_0,y_0))$ der zugehörige Punkt von R. Weiter sei ein $\varepsilon>0$ gegeben. Wir zeichnen durch (x_0,y_0) die Normale N zu K und wählen auf N denjenigen Punkt (x_1,y_1), der in G liegt und von (x_0,y_0) den Abstand ε hat. Ist ε hinreichend klein, was wir annehmen, existiert (x_1,y_1) sicher. Dann ist $|\bar{H}(x_0,y_0)-\bar{H}(x_1,y_1)|\leqq D\varepsilon$ nach I, Hilfssatz 1, da $\bar{H}(x,y)$ die lokale Dehnungsschranke D hat. Der Punkt (x_1,y_1) liegt in einer Kreisscheibe $\bar{O}_n$. Da die Folge $\{H_i(x,y)\}$ auf O_n gleichmäßig gegen $H(x,y)$ konvergiert, ist $|H(x_1,y_1)-H_i(x_1,y_1)|\leqq\varepsilon$ für jedes hinreichend große i. Für jedes so große i, daß (x_1,y_1) in G_i liegt, laufen wir auf N von (x_1,y_1) aus in Richtung auf (x_0,y_0), bis wir (eventuell erst nach Passieren von (x_0,y_0)) zum ersten Mal auf einen Punkt (x_i,y_i) der Projektion $K_i=G_i^*$ von R_i treffen. Die offene Strecke $S_i\subset N$ mit den Endpunkten (x_1,y_1) und (x_i,y_i) liegt dann in G_i. Ist i weiter so groß, daß R in einer hinreichend kleinen Umgebung von R liegt, (es ist $\lim R_i=R$!), so haben die Punkte $(x_i,y_i,H_i(x_i,y_i))\in R_i$ und $(x_0,y_0,z_0)\in R$ einen Abstand $\leqq\varepsilon$ und die Länge von S_i ist $\leqq 2\varepsilon$. Dann gilt $|H_i(x_i,y_i)-z_0|\leqq\varepsilon$ und $|H_i(x_i,y_i)-H_i(x_1,y_1)|\leqq 2D\varepsilon$ (letzteres, weil $H_i(x,y)$ auf S_i die Dehnungsschranke D hat; nach I, Hilfssatz 1). Die bewiesenen Ungleichungen zusammen ergeben $|z_0-\bar{H}(x_0,y_0)|\leqq\varepsilon(3D+2)$. Also gilt $z_0=\bar{H}(x_0,y_0)$. Die Fläche $z=\bar{H}(x,y)$ hat also die Randkurve R.

Schließlich ist $\bar{H}(x,y)$ eine Lösung des Variationsproblems I, (2), (5) für das Gebiet G: $I[H,G]=\text{Min}$. Um dies zu zeigen, genügt es nach I, Satz 18 zu beweisen, daß $I[H,G_0]=\text{Min}$ ist für jede offene Teilmenge G_0 von G mit $\bar{G}_0\subset G$. Es sei also G_0 eine solche Menge. Wegen $\bar{G}_0\subset G$ existiert dann ein natürliches n derart, daß $G_0\subset O_1+O_2+\cdots+O_n$ gilt, sowie ein i_0 derart, daß $O_1+O_2+\cdots+O_n\subset G_i$ gilt für alle $i>i_0$. Auf $\bar{O}_1+\bar{O}_2+\cdots+\bar{O}_n$, also auch auf $\bar{G}_0$ konvergiert die Folge $\{H_i(x,y)\}$ $(i=i_0, i_0+1,\ldots)$ gleichmäßig gegen $\bar{H}(x,y)=H(x,y)$. Da $H_i(x,y)$

in G_i eine Lösung des Variationsproblems ist ($I[H_i, G_i] = \text{Min}$), so für $i > i_0$ auch in $G_0 \subset G_i$ (Beweis wie für I, Hilfssatz 15, α)). Schließlich haben alle $H_i(x, y)$ die lokale Dehnungsschranke $d < D$. Nach I, Satz 17 ist also $H(x, y)$ eine Lösung des Variationsproblems I, (2), für die Menge G_0[20]), w. z. z. w.

§ 5.

Beispiele einer stumpfen Kurve.

Satz 6. *Es sei K eine einfach geschlossene Kurve der xy-Ebene: $K = [x = x(\varphi), y = y(\varphi), 0 \leqq \varphi \leqq 2\pi]$, mit zweimal stetig differenzierbarem $x(\varphi)$ und $y(\varphi)$. Dann ist K auf beiden Seiten stumpf*[21]).

Beweis. Unter dem *Richtungswinkel* eines Teilbogens B von K verstehen wir folgendes: Zunächst orientieren wir B; ist P ein Punkt von B, so zeichnen wir in P die vordere Halbtangente an B und zu dieser die parallele Halbgerade mit dem Anfangspunkt im Koordinatenursprung; lassen wir nun P den Bogen B durchlaufen, so überstreicht die genannte parallele Halbgerade einen gewissen Winkel (teilweise i. a. mehrfach); diesen Winkel bezeichnen wir als den Richtungswinkel von B.

Bemerkung 1. Ist der Richtungswinkel von B höchstens gleich $\frac{\pi}{2}$, so ist B enthalten in der kleinsten abgeschlossenen Kreisscheibe S, welche die Endpunkte E und F von B enthält.

Angenommen, ein Punkt G von B läge außerhalb von S. Dann gibt es auf B zwischen E und G einen Punkt P_1, in welchem die gerichtete Tangente an B parallel ist zur gerichteten Strecke von E nach G; analog gibt es auf B zwischen G und F einen Punkt P_2, in welchem die gerichtete Tangente an B parallel ist zur gerichteten Strecke von G nach F. Der Richtungswinkel von B ist mindestens gleich dem Winkel zwischen diesen gerichteten Tangenten in P_1 und P_2, also mindestens gleich dem Supplement des Winkels EGF. Da dieses Supplement $> \frac{\pi}{2}$ ist, so ist der Richtungswinkel von B größer als $\frac{\pi}{2}$, entgegen der Voraussetzung.

Bemerkung 2. Der Bogen B habe einen Richtungswinkel $\leqq \frac{\pi}{2}$, seine Endpunkte E und F mögen auf einem Kreis L mit einem Radius r

[20]) Im Beweis von I, Satz 17 wird die Voraussetzung betr. die Begrenzung G^* von G, die für unser G_0 nicht erfüllt zu sein braucht, nur dazu gebraucht, nachzuweisen, daß $H(x, y)$ in $\mathfrak{F}(\bar{G})$ liegt, d. h. in $\bar{G}$ eine lokale Dehnungsschranke $< D$ hat. In unserem Fall hat $H(x, y)$ in G und daher auch in $\bar{G}_0 \subset G$ die lokale Dehnungsschranke $d < D$, wie oben festgestellt wurde. Also gilt die Behauptung von I, Satz 17 für unser G_0.

[21]) Dieses Beispiel hätte in den Teil I dieser Arbeit gehört.

liegen, während mindestens ein Punkt von B im Äußeren von L liegt. Dann gibt es auf B mindestens einen Punkt mit einem Krümmungsradius $\leqq r$.

Zum Beweis sei $S \supset B$ die Kreisscheibe der Bemerkung 1. Da P im Äußeren von L liegt, fällt L nicht mit der Peripherie von S zusammen nach der Bemerkung 1; also ist der Radius von S kleiner als der von L und folglich liegen sich E und F auf L nicht diametral gegenüber. Wir lassen einen zweiten, zunächst mit L zusammenfallenden Kreis L' sich so bewegen, daß der Mittelpunkt von L' sich geradlinig auf den Mittelpunkt der Strecke EF zu bewegt. Bevor er diesen erreicht, hat L' in einem bestimmten Augenblick eine Lage, bei welcher B in der dann von L' begrenzten abgeschlossenen Kreisscheibe enthalten ist, während mindestens ein Punkt P von B auf L' liegt. B berührt also L' in P von innen und hat daher in P einen Krümmungsradius $\leqq r$.

Nun ergibt sich der Beweis des Satzes 6 folgendermaßen. Wir stellen K dar als Summe endlich vieler Teilbogen $K_1, \ldots, K_h$ mit Richtungswinkeln $< \frac{\pi}{6}$ und setzen $K_{h+n} = K_n$, wenn n ganz. Die Numerierung sei so gewählt, daß man $K_1, \ldots, K_h$ in dieser Reihenfolge bei einer Durchlaufung von K durchläuft. Es sei nun $r > 0$ erstens kleiner als der kleinste Krümmungsradius von K und zweitens höchstens gleich dem halben Abstand jedes Bogens K_μ von $K_{\mu+2} + K_{\mu+3} + \cdots + K_{\mu+h-2}$. Nun sei E ein beliebiger Punkt von K. Er liege etwa auf K_μ. Wir zeichnen die beiden Kreise L_1 und L_2 mit dem Radius r, welche K in E berühren. Da r kleiner ist als der Krümmungsradius von K in P, liegen alle zu P hinreichend benachbarten Punkte $\neq E$ von K im Äußeren sowohl von L_1 als auch von L_2. Angenommen nun, es gäbe einen Punkt von K im Innern etwa von L_1. Dann gibt es auch einen Punkt F von K auf L_1. Nach Wahl von r ist F ein Punkt des Bogens $K_{\mu-1} + K_\mu + K_{\mu+1}$. Auf den Teilbogen B dieses Bogens mit den Endpunkten E und F treffen dann die Voraussetzungen der Bemerkung 2 zu. Nach dieser Bemerkung gibt es also auf B einen Punkt mit einem Krümmungsradius $\leqq r$, im Widerspruch zur Definition von r. Damit ist Satz 6 bewiesen.

Ein erstes Beispiel eines zugelassenen Kurvenraumes.

Die Begrenzung $G^* = K$ eines beschränkten Gebietes G sei eine Summe von endlich vielen, paarweise fremden, einfach geschlossenen Kurven $K_1, \ldots, K_m$ und stumpf auf der Seite G. (Also z. B. K eine einfach geschlossene zweimal stetig differenzierbare Kurve (Satz 6)). K sei die Projektion von jeder der $n+1$ paarweise verschiedener, zugelassener Kurven[22]) $R^{(i)} = [(x, y) \in K,\ z = z_i(x, y)]$, $i = 0, 1, \ldots, n$.

[22]) Definition der zugelassenen Kurven: I, 714.

Wir bezeichnen mit $\mathfrak{S}$ die lineare Schar aller Kurven

$$R = R(\Theta_1, \ldots, \Theta_n) =$$
$$|(x, y) \in K,\ z = z_0(x, y) + \Theta_1 z_1(x, y) + \cdots + \Theta_n z_n(x, y)|$$
$$-\infty < \Theta_1 < +\infty, \ldots, -\infty < \Theta_n < +\infty.$$

Als Abstand zweier Kurven $R' = R(\Theta_1', \ldots, \Theta_n')$ und $R'' = R(\Theta_1'', \ldots, \Theta_n'')$ aus $\mathfrak{S}$ führen wir ein die Zahl

$$\triangle(R', R'') = \sqrt{(\Theta_1' - \Theta_1'')^2 + \cdots + (\Theta_n' - \Theta_n'')^2}.$$

Dieser Abstand genügt den üblichen drei Abstandsaxiomen und der Bedingung von S. 2. Wir behaupten folgenden

Satz 7. *Die Menge $\mathfrak{R}$ aller Kurven aus $\mathfrak{S}$, welche zugelassen sind, bilden eine offene Teilmenge von $\mathfrak{S}$ und zugleich einen zugelassenen Kurvenraum.*

Beweis. Wir betrachten nur den Fall $n = 1$. Den allgemeinen Fall erledigt man ganz analog.

Es sei $R_0 = |(x, y) \in K,\ z = z_0(x, y) + \Theta^0 z_1(x, y)|$ eine zugelassene Kurve aus $\mathfrak{S}$. Alle Kurven R aus $\mathfrak{S}$ haben natürlich die Eigenschaften I, 1—4 und die Zahl r der letzteren Eigenschaft ist von R unabhängig, da K von R unabhängig ist. Es genügt also folgendes zu zeigen: Es existiert ein $\varepsilon > 0$ derart, daß für $|\Theta - \Theta^0| < \varepsilon$ die Kurven $R(\Theta) = |(x, y) \in K,\ z = z(x, y) + \Theta z_1(x, y)|$ die Eigenschaft I. 5 haben und zwar mit von Θ unabhängigen Zahlen c und d.

Setzen wir $z_0(x, y) + \Theta^0 z_1(x, y) = z_0'(x, y)$ und $\Theta - \Theta^0 = \Theta'$, so ist

$$R(\Theta) = |(x, y) \in K,\ z = z_0'(x, y) + \Theta' z_1(x, y)| = R'(\Theta'),$$
$$R_0 = |(x, y) \in K,\ z = z_0'(x, y)| = R'(0).$$

Indem wir zur Vereinfachung wieder $z_0(x, y)$ statt $z_0'(x, y)$ und Θ statt Θ' schreiben, ist $R(\Theta) = |(x, y) \in K,\ z = z_0(x, y) + \Theta z_1(x, y)|$ und $R_0 = |(x, y) \in K,\ z = z_0(x, y)| = R(0)$.

Dann haben wir also zu zeigen: Es existiert ein $\varepsilon > 0$, so daß für $|\Theta| < \varepsilon$ die Kurven $R(\Theta)$ die Eigenschaft 5 haben und zwar mit von Θ unabhängigen Zahlen c und d. Wir zeigen dies für $0 \leqq \Theta < \varepsilon$; man führt hierauf den Fall $-\varepsilon' < \Theta \leqq 0$ durch Spiegelung an der xy-Ebene zurück.

Da die Kurven R_0 und $R_1 = |(x, y) \in K,\ z = z_1(x, y)|$ die Eigenschaft I. 5 besitzen, existiert ein $c' > 0$ und ein d' mit $0 < d' < D$ derart, daß es zu jedem Punkt $P = (X, Y, Z_i)$ von R_i eine Kugel

$$\tilde{K}_i = \tilde{K}(X, Y, Z_i, \alpha_i, \beta_i)$$

mit dem Radius c' gibt, deren Steigung in P höchstens gleich d' ist und welche R_i in P von oben berührt $(i = 0, 1)$. Es sei $z = U_i(x, y)$ und $z = O_i(x, y)$ die untere bzw. obere Hälfte der Kugel $\tilde{K}_i$. Der Durchschnitt der Definitionsbereiche der vier Funktionen enthält eine Kreis-

scheibe $F = F(X, Y)$ mit dem Mittelpunkt (X, Y) und einem Radius ϱ, der unabhängig von (X, Y) gewählt werden kann (da die Radien der Kugeln $\bar{K}_0$ und $\bar{K}_1$ konstant $= c'$ und ihre Steigungen in den Berührungspunkten $\leqq d'$ sind). Wir betrachten die vier Flächen $z = O_i(x, y)$ und $z = U_i(x, y)$ $(i = 0, 1)$ nur über $F = F(X, Y)$. Nun berührt für hinreichend kleines $\Theta \geqq 0$ die Fläche $z = U_0(x, y) + \Theta U_1(x, y)$ die Kurve $R(\Theta)$ im Punkt $(X, Y, Z_0 + \Theta Z_1)$ von oben (die Fläche hat dort die Steigung $\sqrt{(\alpha_0 + \Theta\alpha_1)^2 + (\beta_0 + \Theta\beta_1)^2}$) und liegt ihrerseits unterhalb der Fläche $z = O_0(x, y) + \Theta O_1(x, y)$; zwischen diesen beiden Flächen liegt kein Punkt von $R(\Theta)$, da kein Punkt von R_i zwischen $z = O_i(x, y)$ und $U_i(x, y)$ liegt $(i = 0, 1)$. Nun existiert, wenn $\varepsilon > 0$ hinreichend klein ist, ein von (X, Y) unabhängiges c'' derart, daß für jedes Θ mit $0 \leqq \Theta < \varepsilon$ durch jeden Punkt $(X, Y, Z_0 + \Theta Z_1)$ von $R(\Theta)$ eine Kugel mit dem Radius c'' geht, welche die Fläche $z = U_0(x, y) + \Theta U_1(x, y)$ in diesem Punkt von oben berührt und ganz zwischen den Flächen $z = U_0(x, y) + \Theta U_1(x, y)$ und $z = O_0(x, y) + \Theta O_1(x, y)$ liegt[23]. (Man beachte: Bei hinreichend kleinem $\varepsilon > 0$ hat der Abstand des Punktes $(X, Y, Z_0 + \Theta Z_1)$ von der Fläche $z = O_0(x, y) + \Theta O_1(x, y)$ eine positive (von (X, Y) und Θ unabhängige) untere Schranke σ; die Schnittkurven der Fläche $z = U_0(x, y) + \Theta U_1(x, y)$ mit den Ebenen durch $(X, Y, Z_0 + \Theta Z_1)$ senkrecht zur xy-Ebene haben Krümmungsradien mit positiver (von (X, Y) und Θ unabhängiger) unterer Schranke τ; wenn ϱ hinreichend klein ist, was angenommen werden kann, haben diese Schnittkurven Richtungswinkel $\leqq \frac{\pi}{2}$; nach der Bemerkung 2 im Beweis des Satzes 6 angewandt auf die Schnittkurven hat nun die Kugel $\bar{K}(X, Y, Z_0 + \Theta Z_1, \alpha_0 + \Theta\alpha_1, \beta_0 + \Theta\beta_1)$, welche im Punkt $(X, Y, Z_0 + \Theta Z_1)$ die Tangententialebene $z = (\alpha_0 + \Theta\alpha_1) + (\beta_0 + \Theta\beta_1)\, y + \text{const.}$ an die Fläche $z = U_0(x, y) + \Theta U_1(x, y)$ in diesem Punkt von oben berührt und den Radius $c'' = \text{Min}\left(\frac{\varrho}{2}, \frac{\sigma}{2}, \tau\right)$ hat, die verlangten Eigenschaften). Ist ε und damit $\Theta \geqq 0$ hinreichend klein, so unterscheidet sich die Steigung der Kugel im Punkt $(X, Y, Z_0 + \Theta Z_1)$ so wenig von d', daß sie $\leqq d = \frac{d' + D}{2} < D$ ist. — Analog verfährt man für die von unten berührenden Kugeln. Damit ist der Satz 7 bewiesen.

Ein zweites Beispiel eines zugelassenen Kurvenraumes.

Es sei $\mathfrak{R}$ das System aller einfach geschlossenen Kurven R, welche neben den Eigenschaften I, 2—4 die folgenden zwei Eigenschaften haben:

Eigenschaft 5': Ist $R = [(x, y) \in K,\ z = z(x, y)]$, so ist $z(x, y)$ auf K lokal dehnungsbeschränkt mit lokalen Dehnungsschranken $< D$.

[23]) Die Fläche $z = z(x, y)$ liegt zwischen den Flächen $z = z'(x, y)$ und $z = z''(x, y)$, wenn $z'(x, y) \leqq z(x, y) \leqq z''(x, y)$ ist.

Eigenschaft 6′: R ist rektifizierbar und die Koordinaten x, y, z der Punkte von R sind nach der Bogenlänge s von R zweimal stetig differenzierbar.

Wir machen $\mathfrak{R}$ folgendermaßen zu einem metrischen Raum. Ist τ eine topologische Abbildung zweier gegebener Kurven von R_0 und R aus $\mathfrak{R}$ aufeinander, so setzen wir

$$\Delta_\tau(R_0, R) = \operatorname{Max}\left\{ |x_0 - x|, |y_0 - y|, |z_0 - z|, \left|\frac{dx_0}{ds_0} - \frac{dx}{ds}\right|, \left|\frac{dy_0}{ds_0} - \frac{dy}{ds}\right|, \left|\frac{dz_0}{ds_0} - \frac{dz}{ds}\right|, \left|\frac{d^2x_0}{ds_0^2} - \frac{d^2x}{ds^2}\right|, \left|\frac{d^2y_0}{ds_0^2} - \frac{d^2y}{ds^2}\right|, \left|\frac{d^2z_0}{ds_0^2} - \frac{d^2z}{ds^2}\right| \right\},$$

wobei (x_0, y_0, z_0) die Kurve R_0 durchläuft und (x, y, z) das τ-Bild von (x_0, y_0, z_0) in R ist; s_0 ist die Bogenlänge auf R_0, s die Bogenlänge auf R. Die Zahl

$$\Delta(R_0, R) = \operatorname{Inf} \Delta_\tau(R_0, R),$$

wobei τ alle topologischen Abbildungen von R_0 auf R durchläuft, führen wir als Abstand der Kurven R_0 und R ein. Dieser Abstand genügt den üblichen Abstandsaxiomen und der Bedingung von S.

Satz 8. *$\mathfrak{R}$ ist ein zugelassener Kurvenraum.*

Beweis. Wir haben zu zeigen, daß $\mathfrak{R}$ die Eigenschaften I, 5 und 6 hat.

Es sei R_0 eine Kurve aus $\mathfrak{R}$.

Wir wählen für die Projektion K_0 von R_0 eine Zahl $r_0 > 0$ analog wie die Zahl r für die Kurve K im Beweis des Satzes 6 mithilfe einer Darstellung von K_0 als Summe von endlich vielen Teilbogen $K_{01}, \ldots, K_{0h}$ mit Richtungswinkeln $< \frac{\pi}{12}$. Ist R eine Kurve aus $\mathfrak{R}$ und $\Delta(R_0, R) < \varepsilon$ mit zunächst beliebigem $\varepsilon > 0$, so existiert nach Definition von $\Delta(R_0, R)$ eine topologische Abbildung τ der Kurven R_0 und R aufeinander derart, daß die Koordinaten aufeinander abgebildeter Punkte sowie deren ersten und zweiten Ableitungen nach den Bogenlängen sich um weniger als 2ε unterscheiden. Ist ε hinreichend klein, so ist also das Minimum der Krümmungsradien von K größer als $\frac{r_0}{2}$, die τ-Bilder der Bogen $K_{01}, \ldots, K_{0h}$ haben Richtungswinkel $< \frac{\pi}{6}$ und der Abstand des τ-Bildes des Bogens $K_{0\mu}$ vom τ-Bild der Menge $K_{0\mu+2} + K_{0\mu+3} + \cdots + K_{0\mu+h-2}$ ist $< \frac{r_0}{2}$ für $\mu = 1, \ldots, h$. Setzen wir also $r = \frac{r_0}{2}$, so ist nach den Überlegungen im Beweis des Satzes 6 die Projektion K der beliebigen Kurve R aus $\mathfrak{R}$ mit $\Delta(R_0, R) < \varepsilon$ auf der Seite G stumpf vom Grade r.

Jetzt haben wir noch zu zeigen, daß jede Kurve R aus $\mathfrak{R}$ die Eigenschaft I, 5 besitzt und daß die darin auftretenden Zahlen c und d gleichmäßig gewählt werden können für alle Kurven R aus $\mathfrak{R}$ mit hinreichend kleinem $\Delta(R_0, R)$. Dazu beweisen wir zunächst folgende

Bemerkung 3. Zu jeder Kurve R_0 aus $\mathfrak{R}$ existieren zwei Zahlen $\delta > 0$ und $c > 0$ derart, daß für jede Kurve R aus $\mathfrak{R}$ mit $\Delta(R_0, R) < \delta$ folgendes gilt: Jede Vollkugel $(x - x_1)^2 + (y - y_1)^2 + (z - z_1)^2 \leqq c$, deren Inneres zu R fremd ist, hat mit R höchstens einen Punkt gemein.

Zum Beweis dieser Bemerkung bezeichnen wir als Zylinder Z_{rh} jede Menge des Raumes, die kongruent ist zu $[x^2 + y^2 < r, |z| < h]$. Jede Gerade durch einen Punkt (x_0, y_0, z) der Begrenzung Z^*_{rh}, die bei dieser Kongruenz auf eine Gerade der xy-Ebene mit dem Abstand r vom Ursprung abgebildet wird, heiße eine äquatoriale Tangente von Z_{rh} im Punkt (x, y, z). Es genügt der Beweis der folgenden Behauptung:

Es existieren drei positive Zahlen δ, r und h derart, daß für jede Kurve R aus $\mathfrak{R}$ mit $\Delta(R_0, R) < \delta$ folgendes gilt: Jeder Zylinder Z_{rh}, von dem eine äquatoriale Tangente in einem Punkt (x, y, z) von $Z^*_{rh} \cdot R$ mit der Tangente von R in (x, y, z) zusammenfällt, ist fremd zu R.

Angenommen, diese Behauptung wäre falsch. Dann existiert erstens in $\mathfrak{S}$ eine Folge $\{R_n\}$ mit $\lim \Delta(R_0, R_n) = 0$, zweitens auf jedem R_n ein Punkt (x_n, y_n, z_n) und drittens für jedes n ein Zylinder $Z_n = Z_{\frac{1}{n}, \frac{1}{n}}$ mit $(x_n, y_n, z_n) \in Z^*_n$, dessen äquatoriale Tangente in (x_n, y_n, z_n) mit der Tangente T_n von R_n in (x_n, y_n, z_n) zusammenfällt, derart, daß $Z_n \cdot R_n$ nicht leer ist.

Indem wir nötigenfalls zu einer Teilfolge übergehen, können wir sofort annehmen, daß die Folge $\{x_n, y_n, z_n\}$ gegen einen Punkt (x_0, y_0, z_0) von R konvergiert, und daß außerdem die Achsen A_n der Zylinder Z_n gegen eine Gerade G durch (x_0, y_0, z_0) konvergieren. (Dann konvergieren wegen $\lim \Delta(R_0, R_n) = 0$ auch die Tangenten T_n gegen die Tangente T_0 an R_0 in (x_0, y_0, z_0)). Indem wir weiter für jedes ν die R_ν einer Kongruenz unterwerfen, dürfen wir weiterhin annehmen, daß die Punkte (x_ν, y_ν, z_ν) mit dem Koordinatenursprung zusammenfallen, daß T die z-Achse und daß

$$Z_n = \left[\left(x \pm \frac{1}{n}\right)^2 + y^2 < \frac{1}{n^2},\ |z| < \frac{1}{n}\right]$$

ist[24]). Schließlich können wir sofort annehmen, daß für jedes R_ν ($\nu = 0, 1, 2, \ldots$) der zum Punkt $(0, 0, 0)$ gehörige Parameterwert $s = 0$ ist.

Die Parameterdarstellung von R_ν laute: $x = x_\nu(s)$, $y = y_\nu(s)$, $z = z_\nu(s)$. Da der Zylinder Z_n in $(0, 0, 0)$ die x-Achse zur äquatorialen Tangente hat, so ist also die x-Achse die Tangente an R_ν im Punkt $(0, 0, 0)$. Es ist also $x'_\nu(0) = 1$, $y'_\nu(0) = 0$, $z'_\nu(0) = 0$. Es existiert also

[24]) ν durchläuft stets die Zahlen $0, 1, 2, \ldots$, hingegen n die Zahlen $1, 2, \ldots$.

ein $s_0 > 0$ derart, daß $|x_0'(s)| > \frac{3}{4}$ und $|y_0'(s)| < \frac{1}{8}$ ist für $|s| \leqq s_0$. Wegen $\lim \Delta(R_0, R_n) = 0$ existiert ein n_0, so daß

(52) $\quad |x_n'(s)| > \frac{1}{2}$ und $|y_n'(s)| < \frac{1}{4}$ für $|s| \leqq s$ und $n > n$

ist.

Weiter haben, wenn n hinreichend groß ist, die Projektionen $(x_0(s), y_0(s))$ der Punkte $(x_0(s), y_0(s), z_0(s))$ von R_0 mit $|s| \geqq s_0$ Abstände von der Kreisscheibe $\left[\left(x \pm \frac{1}{n}\right)^2 + y^2 < \frac{1}{n^2}\right]$ mit einer positiven unteren Schranke 2η; dies gelte etwa für $n > n_1$. Wegen $\lim \Delta(R_0, R_n) = 0$ existiert dann ein n_2 (das wir sofort $\geqq n_0$ und $\geqq n_1$ annehmen) derart, daß gilt:

$(x_n(s), y_n(s))$ hat von $\left[\left(x \pm \frac{1}{n}\right)^2 + y^2 < \frac{1}{n^2}\right]$ einen Abstand $> \eta$ für $n > n_2$ und $|s| \geqq s_0$.

Hieraus folgt, daß für $n > n_2$ die Menge aller Punkte der Kurve R_n, deren Parameterwerte s absolut $\geqq s_0$ sind, fremd ist zum Zylinder Z_n. Da R_n zu Z_n nicht fremd ist auf Grund der ad absurdum zu führenden Annahme, so folgt, daß der Teilbogen $B_n = [|s| \leqq s_0]$ von R_n zu Z_n nicht fremd ist für $n > n_2$. Bezeichnen wir mit $\underline{B}_n$ die Projektion dieses Teilbogens in die xy-Ebene, so ist also B_n zur Kreisscheibe $\left[\left(x \pm \frac{1}{n}\right)^2 + y^2 < \frac{1}{n^2}\right]$ nicht fremd.

Diese Projektion $\underline{B}_n = [x = x_n(s),\ y = y_n(s),\ |s| \leqq s_0]$ ist ein Bogen; denn da $x_n'(s) > 0$ ist nach (52), gilt $x_n(s_1) \neq x_n(s_2)$ für $-s_0 \leqq s_1 < s_2 \leqq s_0$. Die Krümmungsradien $\varrho_n(s)$ von $\underline{B}_n$ haben eine positive untere Schranke, da $x_n'^2 + y_n'^2 > \frac{1}{4}$ ist nach (52) für $n > n_0$ und da wegen der Beschränktheit von x_0', y_0', x_0'', y_0'' und $\lim \Delta(R_0, R_n) = 0$ die Differenz $x_n' y_n'' - x_n'' y_n'$ gleichmäßig beschränkt ist. Für alle hinreichend großen n liegen daher alle zu $(0, 0)$ hinreichend benachbarten Punkte von B_n mit $s \neq 0$ nicht in der Kreisscheibe $\left[\left(x \pm \frac{1}{n}\right)^2 + y^2 \leqq \frac{1}{n^2}\right]$. Der Bogen B_n enthält also einen Teilbogen C_n, dessen Endpunkte auf

$$\left[\left(x \pm \frac{1}{n}\right)^2 + y^2 = \frac{1}{n^2}\right]$$

liegen, während alle anderen Punkte von C_n im Äußeren dieses Kreises liegen. Da $\left|\frac{dy}{dx}\right| = |y_n'(s)| : |x_n'(s)| < \frac{1}{2}$ ist nach (52), hat $\underline{B}_n$ einen Richtungswinkel $< \frac{\pi}{2}$. Hieraus folgt nach der Bemerkung 2 im Beweis des Satzes 6, daß es auf C_n, für großes n, einen Punkt gibt, in welchem der Krümmungsradius $\leqq \frac{1}{n}$ ist, im Widerspruch zur Beschränktheit von $\varrho_n(s)$ nach unten.

Damit ist die Bemerkung 3 bewiesen.

Nach Eigenschaft 6' hat R_0 in jedem Punkt (x_0, y_0, z_0) eine (von diesem Punkt stetig abhängende) Tangente T_0. Die Steigung d_0 dieser

Tangente ist $< D$ nach Eigenschaft 5'. Wegen der Stetigkeit von T_0 existiert sogar ein $d < D$ derart, daß $d_0 < d$ ist für alle Punkte (x_0, y_0, z_0) von R_0. Folglich existiert weiter ein $\delta > 0$ derart, daß für jede Kurve R aus $\mathfrak{R}$ mit $\Delta(R_0, R) < \delta$ gilt: Die Steigung d_1 der Tangente an R in einem beliebigen Punkt (x_1, y_1, z_1) von R ist $< d$. Nun sei $z = \alpha x + \beta y + \gamma$ die Ebene durch (x_1, y_1, z_1) mit der Steigung d_1, welche diese Tangente enthält. Wir können nun die Zahl δ sofort so klein annehmen, daß für sie und ein $c > 0$ die soeben bewiesene Bemerkung 3 gilt. Von den Kugeln

$$\tilde{\mathfrak{K}} = [(x-\tilde{x})^2 + (y-\tilde{y})^2 + (z-\tilde{z})^2 = c^2],$$

$$\underset{\sim}{\mathfrak{K}} = [(x-\underset{\sim}{x})^2 + (y-\underset{\sim}{y})^2 + (z-\underset{\sim}{z})^2 = c^2] \text{ mit}$$

$$\tilde{x} = x_1 - \frac{\alpha c}{\sqrt{\alpha^2+\beta^2+1}}, \quad \tilde{y} = y_1 - \frac{\beta c}{\sqrt{\alpha^2+\beta^2+1}}, \quad \tilde{z} = z_1 + \frac{c}{\sqrt{\alpha^2+\beta^2+1}}$$

$$\underset{\sim}{x} = x_1 + \frac{\alpha c}{\sqrt{\alpha^2+\beta^2+1}}, \quad \underset{\sim}{y} = y_1 + \frac{\beta c}{\sqrt{\alpha^2+\beta^2+1}}, \quad \underset{\sim}{z} = z_1 - \frac{c}{\sqrt{\alpha^2+\beta^2+1}}$$

berührt die erste die Ebene $z = \alpha x + \beta y + \gamma$ im Punkt (x_1, y_1, z_1) von oben bzw. unten. Nach der Bemerkung 3 berühren sie also auch R im Punkt (x_1, y_1, z_1) von oben bzw. von unten im Sinne unserer Definition von I, S. 715. Die Steigung der Kugeln im Punkt (x_1, y_1, z_1) ist gleich $d_1 < d$.

Damit ist alles bewiesen.

(Eingegangen am 26. August 1947.)

Über Weierstraßpunkte und die expliziten Darstellungen der automorphen Formen von reeller Dimension.

Von

H. Petersson in Hamburg.

1. Im Folgenden betrachten wir die automorphen Formen einer reellen Dimension $-r$ mit Multiplikatoren v des Betrages Eins zu einer Grenzkreisgruppe Γ von erster Art mit der oberen τ-Halbebene $\mathfrak{H}$ als Grenzkreisinnerem. Die Gesamtheit dieser automorphen Formen nennen wir $\{\Gamma, -r, v\}$, die einzelne Funktion von $\{\Gamma, -r, v\}$ nennen wir eine (automorphe) Form $\{\Gamma, -r, v\}$. Ferner werde unter

$$\mathfrak{C}_r = \mathfrak{C}(\Gamma, -r, v) \text{ die Schar der ganzen Formen } \{\Gamma, -r, v\},$$

unter

$$\mathfrak{C}_r^+ = \mathfrak{C}^+(\Gamma, -r, v) \text{ die Schar der ganzen Spitzenformen } \{\Gamma, -r, v\}$$

verstanden. Eine Form $\{\Gamma, -r, v\}$ heißt eine ganze Spitzenform, wenn sie ganz ist und in allen Spitzen (parabolischen Fixpunkten) von Γ verschwindet. Zur Orientierung über die einfachsten Grundbegriffe der Theorie sei auf die kurze Zusammenstellung im ersten Abschnitt der Abhandlung [1]) des Verf.s hingewiesen, aus der wir auch die Bezeichnungen übernehmen. Wir beschränken uns hier jedoch nicht auf die Gruppen Γ mit parabolischen Substitutionen (d. h. in jenen Bezeichnungen mit $\sigma_0 > 0$); wenn σ_0 verschwindet, fallen $\mathfrak{C}_r$ und $\mathfrak{C}_r^+$ zusammen.

Bekanntlich stellt der Ansatz der Poincaré-Reihen das einzige Prinzip zur expliziten Konstruktion allgemeiner automorphen Formen und Funktionen dar. In welchem präzisen Sinne der Ausdruck „explizite Konstruktion“ zu interpretieren ist, soll in diesem einleitenden Abschnitt 1 noch erläutert werden. Grundsätzlich und vom historischen Standpunkt darf hierzu bereits jetzt gesagt werden, daß die zu ihrer Zeit zweifellos berechtigte Kritik Kleins [2]) an der Tragweite des Ansatzes der Poincaré-Reihen und aller seiner Verallgemeinerungen durch die neueren Ergebnisse, insbesondere über die metrische Bedeutung der Poincaré-Reihen, als entkräftet angesehen werden kann.

---

[1]) H. Petersson, Über die systematische Bedeutung der Eisensteinschen Reihen, erscheint in den Abhandl. a. d. Math. Seminar Hamburg.

[2]) F. Klein, Vorlesungen über die hypergeometrische Funktion, herausgegeben von O. Haupt, Springer 1933 (Gelbe Sammlung, Bd. 39), S. 294, 302.

Im Einzelnen bemerken wir zunächst, daß die Konstruktion Poincaréscher Reihen in Gestalt von Partialbruch-Entwicklungen, deren einzelne Glieder vorgegebene Hauptteile in endlich vielen Systemen untereinander äquivalenter Punkte darstellen, in jedem wünschenswerten Sinne explizit zu nennen ist. Dabei erweist es sich als möglich und vorteilhaft, den Begriff des Hauptteils so weit zu fassen, daß er die konstanten Glieder in den Spitzen einbegreift. Aus dieser Konstruktion folgt, daß sich jede nicht in der Schar $\mathfrak{C}_r^+$ enthaltene Form $f \subset \{\Gamma, -r, v\}$ mit Hilfe einer durch f eindeutig und explizit bestimmten Partialbruchreihe der angedeuteten Art additiv auf eine Form aus $\mathfrak{C}_r^+$ reduzieren läßt. — Daß eine Lösung des genannten Reduktionsproblems auf einem anderen Wege als über diese Partialbruchreihen erreicht werden kann, ist nicht anzunehmen.

Damit entsteht als Hauptproblem der Theorie die Frage nach der expliziten Konstruktion einer Basis der Schar $\mathfrak{C}_r^+$. Diese Frage hat sich bis heute sehr weitgehend, aber immerhin noch nicht in vollem Umfange beantworten lassen. Was bewiesen ist, wird durch einen metrisch-algebraischen Zusammenhang zwischen der Struktur der Schar $\mathfrak{C}_r^+$ und gewissen Systemen Poincaréscher Reihen $\{\Gamma, -r, v\}$ ausgedrückt[3]); die hier in Betracht kommenden Strukturaussagen über die Schar $\mathfrak{C}_r^+$ beziehen sich sämtlich auf den Begriff der Weierstraß-Punkte und seiner Verallgemeinerungen. Der Zusammenhang kann in den einfachsten Fällen andeutungsweise wie folgt beschrieben werden.

a) Es bezeichne $\mathfrak{K}$ einen (etwa kanonischen) Fundamentalbereich von Γ, τ_0 einen Punkt in $\mathfrak{K}$, ν eine ganze Zahl > 0. Jedem solchen Paare τ_0, ν entspricht eindeutig eine gewisse Poincaré-Reihe (Quersumme) des erwähnten Systems, die wir vorübergehend $F(\tau; \tau_0, \nu)$ nennen wollen. Es sei nun (hier und im Folgenden) μ der Rang von $\mathfrak{C}_r^+$. Dann gibt es unendlich viele Ziffernsysteme $\nu_1, \nu_2, \ldots, \nu_\mu$ derart, daß die $F(\tau; \tau_0, \nu_i)$ $(1 \leqq i \leqq \mu)$ eine Basis von $\mathfrak{C}_r^+$ bilden. Das am leichtesten zugängliche, nämlich lexikographisch niedrigste solcher Ziffernsysteme beschreibt den Weierstrassschen Charakter des Punktes τ_0 bezüglich der Schar $\mathfrak{C}_r^+$ (also, wenn nicht $r = 2$, $v = 1$ ist, *nicht* im klassischen Sinne), d. h. die zugehörigen ν_i stimmen im wesentlichen mit den Lücken in den Polordnungen der auf $\mathfrak{K}$ außerhalb von τ_0 regulären *Formen* $\{\Gamma, r-2, v^{-1}\}$ überein. Im allgemeinen, und zwar für alle τ_0 in $\mathfrak{K}$ mit einer angebbaren endlichen Anzahl von Ausnahmen, bilden die ersten μ Reihen $F(\tau; \tau_0, \nu)$ $(1 \leqq \nu \leqq \mu)$ eine Basis

[3]) H. Petersson, Über eine Metrisierung der automorphen Formen und die Theorie der Poincaréschen Reihen, Math. Annalen **117** (1940); Einheitliche Begründung der Vollständigkeitssätze für die Poincaréschen Reihen von reeller Dimension bei beliebigen Grenzkreisgruppen von erster Art, Abhandl. a. d. Math. Seminar Hamburg **14** (1941). Auf diese Abhandlungen wird im zweiten Abschnitt ohne weiteres Zitat Bezug genommen.

von $\mathfrak{G}_r^+$. Zur Bestimmung der Ausnahmepunkte aber fehlte bisher im allgemeinen Falle jeder Ansatz.

b) Man betrachte eine beliebige Basis $\varphi_1(\tau), \varphi_2(\tau), \ldots, \varphi_\mu(\tau)$ von $\mathfrak{G}_r^+$ und μ verschiedene Nichtfixpunkte $\tau_k (1 \leqq k \leqq \mu)$ in $\mathfrak{R}$. Die Diskriminante

$$\Delta = \Delta(\tau_1, \tau_2, \ldots, \tau_\mu) = |\varphi_j(\tau_k)| \qquad (j, k = 1, 2, \ldots, \mu)$$

der Schar $\mathfrak{G}_r^+$ nimmt beim Übergang von den φ_j zu einer anderen Basis von $\mathfrak{G}_r^+$ einen von Null verschiedenen konstanten Faktor auf und verschwindet nach allgemeinen Sätzen höchstens auf niederdimensionalen Ausnahme-Mannigfaltigkeiten. Die Quersummen $F(\tau; \tau_k, 0)$ bilden dann und nur dann eine Basis von $\mathfrak{G}_r^+$, wenn $\Delta \neq 0$ ausfällt. Zur Bestimmung der Ausnahme-Mannigfaltigkeiten $\Delta = 0$ aber fehlt im allgemeinen Falle vorerst jeder Ansatz. —

Von den hier angeführten Basissätzen existieren zahlreiche Varianten, Zwischenbildungen und Verallgemeinerungen. Ihnen allen ist eine Unbestimmtheit der geschilderten Art gemeinsam, und diese drückt sich, soweit das vorgelegte System von Quersummen auf diskrete Parameterwerte bezogen ist, stets etwa in der Art aus, daß die Parameterwerte mit gewissen, der numerischen Bestimmung überaus schwer zugänglichen Lückenzahlen nach Art der Weierstrassschen Lückenzahlen klassischen Ursprungs zusammenfallen müssen. Die klassischen Lückenzahlen selbst treten bei der Untersuchung der Differentialklassen $\{\Gamma, -2, 1\}$ auf. Hier bedarf es zur Konstruktion der zugehörigen Poincaré-Reihen besonderer Hilfsmittel, da die Reihen F nicht mehr absolut konvergieren; die Reihen F lassen sich jedoch nach ihrer Erklärung durch ein (allerdings kompliziertes) Summationsverfahren in den geschilderten Zusammenhang sinngemäß einbeziehen.

Die zitierten Sätze lassen mit hinreichender Deutlichkeit erkennen, daß man nicht damit rechnen kann, allgemein gültige Aussagen zu erhalten, welche die Basiseigenschaft eines explizit bestimmten Systems Poincaréscher Reihen formulieren. Dagegen gibt es, wie im ersten Teil der vorliegenden Abhandlung gezeigt werden soll, explizite Kriterien für die getrennte Verwirklichung jeder einzelnen der beiden in einer Basis vereinigten Eigenschaften eines Systems von Quersummen $F(\tau; \tau_0, \nu)$, nämlich einerseits für seine lineare Unabhängigkeit, andrerseits für seine Vollständigkeit, d. h. dafür, daß die Reihen des Systems die volle Schar $\mathfrak{G}_r^+$ aufspannen. Das eine Kriterium besagt genauer, daß die mit willkürlichen paarweise verschiedenen $z_k (1 \leqq k \leqq b)$ im Fundamentalbereich $\mathfrak{R}$ und willkürlichen natürlichen Zahlen n_k mit der gegebenen Summe μ' gebildeten Quersummen

$$(1) \quad F(\tau; z_k, \nu_k) \ (\nu_k = 1, 2, \ldots, n_k, \ 1 \leqq k \leqq b), \ n_1 + n_2 + \cdots + n_b = \mu'$$

die volle Schar $\mathfrak{G}_r^+$ aufspannen, wo μ' eine gewisse, aus den Daten der Formenklasse $\{\Gamma, -r, v\}$ elementar bestimmbare natürliche Zahl

bezeichnet, die den Rang μ von $\mathfrak{C}_r^+$ um höchstens p_0, das Geschlecht von Γ übertrifft. Das andere Kriterium hat nur dann einen Inhalt, wenn $\mu > p_0$ erfüllt ist; es gilt unter der Voraussetzung, daß die Nullstellenanzahl der Formen von $\mathfrak{C}_r^+$ nicht unter einer gewissen extrem niedrigen Grenze liegt, und besagt, daß ein ebenso wie in (1) willkürlich, aber unter der Bedingung

$$n_1 + n_2 + \ldots + n_b = \mu - p_0$$

vorgegebenes Funktionensystem von der Gestalt (1) aus lauter linear unabhängigen Funktionen besteht.

Das an zweiter Stelle genannte Kriterium reduziert die Aufgabe der expliziten Basiskonstruktion auf die Bestimmung von nur noch p_0 Funktionen $F(\tau; \tau_0, \nu)$; demgemäß verfolgen die im zweiten Teil der Abhandlung dargestellten Überlegungen das Ziel, zu zeigen, daß die fehlenden p_0 Funktionen — wenigstens unter gewissen Voraussetzungen — aus der Kenntnis der klassischen Lückenzahlen von Weierstrass erhalten werden können. Diese Voraussetzungen schränken an sich weder die Gruppe Γ noch die Dimension $-r$ der betreffenden automorphen Formen ein; sie bedeuten, daß in der zu $\{\Gamma, -r, v\}$ komplementären Formenklasse $\{\Gamma, r-2, v^{-1}\}$ eine Form anzugeben sei, deren Pole genau bekannt sind, und die außer den durch das Multiplikatorsystem v^{-1} in den Fixpunkten bedingten Bruchbestandteilen der Ordnungen keine Nullstellen aufweist. Die damit gestellte Forderung läßt sich als eine Eigenschaft des Multiplikatorsystems v der Klasse $\{\Gamma, -r, v\}$ formulieren und besagt etwa, daß v als Potenzprodukt der Multiplikatorsysteme derjenigen Primformen[4]) dargestellt werden könne, welche zu den oben genannten Polen der Form der Komplementärklasse gehören. Im übrigen ergibt sich aus dem Jacobischen Umkehrtheorem, daß eine Form der oben genannten Beschaffenheit zu allgemeinen Daten $\{\Gamma, -r, v\}$ stets existiert, wofern nur r eine gewisse Gruppenkonstante r^0 übertrifft, die in der erdrückenden Mehrzahl aller Fälle kleiner als 3 ist. Daher kann jene Voraussetzung bei allgemeinem Γ und reellem $r \leqq r_0$ als eine einschränkende Annahme über das Multiplikatorsystem v angesehen werden.

Vom Standpunkt des Riemann-Rochschen Satzes gestatten die zitierten Ergebnisse noch eine andere Deutung: Der eigentliche Grund zunächst dafür, daß sich $\mu - p_0$ von den μ Formen einer Basis der Schar $\mathfrak{C}_r^+$ durch eine so überaus einfache, völlig voraussetzungslose Vorschrift bestimmen lassen, liegt darin, daß diese Vorschrift vermöge der Metrisierung auf eine Aussage über nicht-spezialle Scharen im Sinne des klassischen Riemann-Rochschen Satzes zurückgeführt

[4]) H. Petersson, Zur analytischen Theorie der Grenzkreisgruppen III, Math. Annalen **115** (1938); neben diesem dritten Teil werden die Teile I, II (im gleichen Annalenband) in dem einführenden Abschnitt 2 der vorliegenden Abhandlung ausführlicher herangezogen.

werden kann. Eine Ausdehnung dieses Zusammenhanges ist jedoch nachweislich nicht möglich: Bereits die explizite Bestimmung einer einzigen der fehlenden p_0 Funktionen führt auf Spezialscharen. Zur Durchführung der vollständigen Basiskonstruktion hat man sich natürlich der aus[3]) bekannten Beziehung zu bedienen, die die Metrisierung zwischen den Quersummen $F(\tau; \tau_0, v)$ und dem verallgemeinerten RIEMANN-ROCHschen Satz für automorphe Formen reeller Dimension herstellt. Danach erhöht sich die Anzahl der linear unabhängigen unter den bereits gewonnenen Quersummen durch Hinzunahme einer neuen Quersumme $F(\tau; \tau_0, v)$ um Eins, wenn v eine gewisse Lückenbedingung für die Polordnungen der Formen $\{\Gamma, r-2, v^{-1}\}$ im Punkte $\tau = \tau_0$ erfüllt. Enthält nun die Klasse $\{\Gamma, r-2, v^{-1}\}$ eine Form der oben genannten Beschaffenheit, so läßt sich diese Lückenbedingung auf die klassische Lückenbedingung von WEIERSTRASS und damit die vollständige Basiskonstruktion auf die Kenntnis der WEIERSTRASSschen Lückenzahlen zurückführen.

Die Bedeutung des Begriffs der expliziten Konstruktion, wie er hier verwendet wird, bedarf noch einer näheren Erklärung. Zunächst erhellt, daß keine dieser Konstruktionsaufgaben in irgend einem Sinne ein definites Problem darstellt, wenn nicht angenommen wird, daß das Multiplikatorsystem v der zu untersuchenden Formenklasse $\{\Gamma, -r, v\}$ wenigstens grundsätzlich bekannt sei. Hier handelt es sich zweifelsohne um eine sehr gewichtige Voraussetzung, da die Multiplikatorsysteme selbst bei den Gruppen Γ, deren Matrixelemente ein bekanntes Bildungsgesetz befolgen, überaus schwer zugänglich sind. Immerhin kennt man aber für ganzes r stets ein Multiplikatorsystem, in Sonderfällen für ganzes und halbzahliges r deren mehrere; und die Kriterien des ersten Teils der vorliegenden Abhandlung können bei grundsätzlicher Kenntnis von v ohne Einschränkung als explizit bezeichnet werden.

Im zweiten Teile gewinnt der tiefer liegende Zusammenhang eine besondere Bedeutung, der zwischen einer automorphen Form $f(\tau)$ in ihrer Darstellung als Potenzprodukt von Primformen und ihrem Multiplikatorsystem v als dem Multiplikatorsystem dieses Potenzprodukts besteht. Im wesentlichen handelt es sich um die Ermittlung eines Primform-Potenzprodukts, dessen Multiplikatorsystem mit dem gegebenen v übereinstimmt. Die damit gestellte Frage führt, wofern ihre Antwort in Spezialfällen nicht von vornherein vorliegt, auf ein Gleichungssystem vom Typus der Gleichungen des Umkehrtheorems und damit letztlich auf ABELsche Funktionen, in deren Bereich ein Konstruktionsverfahren für die im Falle $r > r^0$ sicher existierenden Lösungen des Gleichungssystems auszubilden wäre.

Zusammenfassend ist von den Untersuchungen des zweiten Teils zusagen, daß sich die dort gewonnenen Kriterien natürlich nicht

allgemein explizit realisieren lassen, und daß also nur eine grundsätzliche Aufklärung über die das Gesamtproblem bestimmenden Zusammenhänge erreicht werden kann. Dabei ergibt sich einerseits, daß sich die Ermittlung aller wesentlichen Eigenschaften der automorphen Formen auf die der Eigenschaften ihrer Multiplikatorsysteme zurückführen läßt. Andrerseits aber entstehen aus der Untersuchung der Multiplikatorsysteme neue funktionentheoretische Probleme, deren genauere Diskussion eine Heranziehung der ABELschen Funktionen erfordert.

Die Übertragung der hier andeutungsweise umrissenen Theorie von der Γ zugeordneten RIEMANNschen Fläche in die obere τ-Halbebene $\mathfrak{H}$ macht eine Auswahl unter den einem Flächenpunkte $\mathfrak{p}_0$ entsprechenden Punkten τ_0 in $\mathfrak{H}$ notwendig. Hierüber seien noch folgende Bemerkungen angefügt:

Ersetzt man in der einzelnen Funktion $F(\tau; \tau_0, \nu)$ den festen Punkt τ_0 durch einen zu τ_0 nach Γ äquivalenten Punkt $L_0 \tau_0 (L_0 \subset \Gamma)$, so nimmt $F(\tau; \tau_0, \nu)$ lediglich einen elementar bestimmbaren und stets von Null verschiedenen konstanten Faktor auf. Zur Realisierung der Kriterien, die im Folgenden bewiesen werden, braucht man daher keineswegs einen Fundamentalbereich $\mathfrak{R}$ von Γ mehr oder minder genau zu kennen. Es genügt vielmehr, — wofern das System der verwendeten Punkte z_k mehr als einen Punkt enthält, — daß ein Verfahren bekannt sei, welches die Äquivalenz oder Nicht-Äquivalenz vorgegebener Punkte in endlich vielen Schritten zu entscheiden gestattet. Von einem solchen Verfahren muß angenommen werden, daß es gleichzeitig mit der Matrizengruppe Γ, von der die ganze Untersuchung ausgeht, vorgelegt ist. Im übrigen kann sogar auf diese wohl selbstverständliche Grundlage der Theorie verzichtet werden, wenn man sich damit begnügen will, Systeme (1) in Betracht zu ziehen, die mit Hilfe nur eines Punktes $z = z_1$, also für $b = 1$ gebildet sind. —

Die genaueren Einzelheiten und die ersten Konsequenzen der beiden oben ausführlicher zitierten Kriterien werden im dritten Abschnitt der Abhandlung in der für die vorliegende Untersuchung angemessenen Sprache der Divisorentheorie formuliert. Der zweite Abschnitt bringt, soweit über [1]) hinaus erforderlich, eine kurze Zusammenstellung der nötigen Hilfsmittel aus der allgemeinen und der metrischen Theorie der automorphen Formen. Die hier zitierten metrischen Zusammenhänge bilden neben dem RIEMANN-ROCHschen Satz die methodische Grundlage der Arbeit. Im vierten Abschnitt werden diejenigen Kriterien entwickelt, welche die lineare Unabhängigkeit von mehr als $\mu - p_0$ explizit bestimmbaren POINCARÉ-Reihen betreffen. Welcher Kriterien man sich zur expliziten Konstruktion möglichst vieler linear unabhängigen POINCARÉ-Reihen in konkreten Fällen zu bedienen hat, wird an einigen Beispielen zu dem allgemeinen Satz 12 dargelegt.

Diese im fünften Abschnitt behandelten Beispiele gehören der Theorie der Kongruenzuntergruppen der Modulgruppe an. Die den betreffenden Gruppen entsprechenden algebraischen Gebilde sind sämtlich nicht hyperelliptisch. Daß sich hier eine explizite Basiskonstruktion überhaupt durchführen läßt, beruht ganz wesentlich darauf, daß es gelingt, für drei Kongruenzgruppen der Geschlechter $p_0 = 3, 3, 5$ die WEIERSTRASS-Punkte und die WEIERSTRASSschen Lückenzahlen numerisch zu berechnen.

Bezüglich des Zusammenhanges zwischen der Struktur der Schar $\mathfrak{C}_r^+$ und den oben genannten Systemen (1) POINCARÉscher Reihen sei noch folgendes hervorgehoben: Jede Aussage über die lineare Unabhängigkeit eines aus m Funktionen bestehenden Systems (1) läßt sich mit Hilfe der Metrisierung auf eine Aussage der folgenden Art zurückführen und mit ihr als gleichbedeutend erweisen: Ein durch die POINCARÉ-Reihen eindeutig bestimmtes System von m Entwicklungskoeffizienten der allgemeinen Form φ der Schar $\mathfrak{C}_r^+$ legt diese Form bis auf eine additive Zusatzform fest, die nur noch von $\mu - m$ Scharparametern linear homogen abhängt. Insbesondere bedeutet eine Basiskonstruktion das gleiche wie die Ermittlung von μ Entwicklungskoeffizienten der allgemeinen Form φ, deren Werte diese Form völlig festlegen. In diesem Sinne kann eine solche Basiskonstruktion als eine Interpolationsaufgabe interpretiert werden; die unter a) genannte Basisbestimmung entspricht der Interpolation nach der TAYLORschen Formel, die Basisbestimmung unter b) der Interpolation nach der LAGRANGEschen Interpolationsformel.

Bezüglich der Bezeichnungen sei den folgenden Ausführungen vorangeschickt, daß die Symbole Γ, r, v stets in der oben genannten Bedeutung auftreten; es ist also stets Γ eine Grenzkreisgruppe von erster Art, r eine reelle Zahl, v ein Multiplikatorsystem des Betrages Eins. Wie ebenfalls oben bemerkt, werden über [1]) hinaus auch Grenzkreisgruppen ohne parabolische Substitutionen untersucht. Mit $\mathfrak{R}$ bezeichnen wir wie in [1])[3]) einen — etwa kanonischen — Fundamentalbereich von Γ. Die für das Folgende grundlegende metrische Verknüpfung der automorphen Formen geschieht mit Hilfe der in [1])[3]) eingeführten invarianten Integration.

2. Es sei $f(\tau) \subset \{\Gamma, -r, v\}$. Neben der Entwicklung [1]) (11) (12) benötigen wir die Entwicklungen von $f(\tau)$ nach den Ortsvariabeln der Punkte in $\mathfrak{H}$. Es sei $\tau_0 \subset \mathfrak{H}$. Wir erhalten mit konstanten Koeffizienten $b_m(\tau_0, f)$:

$$(2) \qquad f(\tau) = (\tau - \bar{\tau}_0)^{-r} \sum_{m=m_0}^{\infty} b_m(\tau_0, f) \left(\frac{\tau - \tau_0}{\tau - \bar{\tau}_0}\right)^m.$$

Ist hier $\tau_0 = \omega$ eine Ecke (ein elliptischer Fixpunkt) von Γ der Ordnung l, so verschwinden alle $b_m(\omega, f)$ mit $m \not\equiv a \pmod{l}$, wo a eine durch r und v eindeutig bestimmte nicht negative ganze Zahl $\leqq l - 1$ be-

zeichnet. Wir schreiben an Stelle von (2)

$$(3)\quad f(\tau) = (\tau - \overline{\omega})^{-r} \sum_{m=m_0}^{\infty} b_m^*(\omega, f)\, t^{m+\varrho} \left(\varrho = \frac{a}{l},\ 0 \leqq \varrho < 1,\ t^{\frac{1}{l}} = \frac{\tau - \omega}{\tau - \bar{\omega}}\right)$$

und nennen ϱ den Drehrest der Klasse $\{\Gamma, -r, v\}$ oder auch von f in der Ecke ω, ebenso die Zahl $\varkappa$ aus [1]) (10) den Drehrest von $\{\Gamma, -r, v\}$ oder von v oder von f in der Spitze ξ von Γ. Analog [1]) (12a) gilt

$$(4)\quad b_m(L\tau_0, f) = \varrho_m(\tau_0, L)\, b_m(\tau_0, f),\ \varrho_m(\tau_0, L) = v(L) \frac{(\gamma\tau_0 + \delta)^r}{|\gamma\tau_0 + \delta|^{2r}} \left(\frac{\gamma\tau_0 + \delta}{\gamma\bar{\tau}_0 + \delta}\right)^m$$

und die entsprechende Gleichung für $b_m^*(\omega, f) = b_{lm+a}(\omega, f)$.

Unter der Voraussetzung $b_{m_0}(A, f) \neq 0$ bzw. $b_{m_0}(\tau_0, f) \neq 0$ bzw. $b_{m_0}(\omega, f) \neq 0$ heißt $m_0 + \varkappa$ bzw. m_0 bzw. $m_0 + \varrho$ die Ordnung von f im Punkte $\tau = \xi$ bzw. $\tau = \tau_0$ (Nichtfixpunkt) bzw. $\tau = \omega$. Wir bezeichnen die Ecken von $\mathfrak{R}$ (die ein volles System inäquivalenter Ecken von Γ bilden) mit ω_k, ihre Ordnungen mit l_k (l_k entspricht dem obigen l, $1 \leqq k \leqq e_0$); von den Konstanten

$$(5)\quad q_0 = \sigma_0 + \sum_{k=1}^{e_0} \left(1 - \frac{1}{l_k}\right) \text{ (Verzweigungsmaß)},$$
$$\varrho_0 = p_0 - 1 + \tfrac{1}{2} q_0 \text{ (Gruppenrang)}$$

ist die zweite stets positiv. Ein Fundamentalsatz, den wir im Folgenden oft, und meistens ohne ausdrückliches Zitat anwenden werden, besagt:

Die Summe der Ordnungen einer (nicht identisch verschwindenden) automorphen Form $\{\Gamma, -r, v\}$ in den sämtlichen Punkten von $\mathfrak{R}$ ist gleich $r\varrho_0$.

Daraus folgt, daß es außer Null keine ganzen Formen $\{\Gamma, -r, v\}$ mit $r < 0$ geben kann; eine ganze Form $\{\Gamma, 0, v\}$ mit $|v| = 1$ ist konstant. Ferner ist eine Form $\{\Gamma, -r, v\}$ mit reellem r und $|v| = 1$ durch ihre Ordnungen in den Punkten von $\mathfrak{R}$ bis auf einen konstanten Faktor eindeutig bestimmt.

Unter einem Divisor verstehen wir hier ein formales Potenzprodukt von Punkten aus $\mathfrak{R}$, das mit ganzen Exponenten α_h, β_k, λ_m und paarweise verschiedenen Nichtfixpunkten τ_m in der Gestalt

$$(6)\quad \mathfrak{d} = \prod_{h=1}^{\sigma_0} (\xi_h)^{\alpha_h} \prod_{k=1}^{e_0} (\omega_k)^{\beta_k} \prod_{m=1}^{d_0} (\tau_m)^{\lambda_m} \quad [\sigma_0, \xi_h \text{ vgl. } ^1), \text{ l. c.}]$$

geschrieben wird. Diese Divisoren werden wie Potenzprodukte rationaler Primzahlen multipliziert und dividiert. Ein Divisor (6) ändert sich durch Hinzufügen oder Unterdrücken endlich vieler Punkte mit den Exponenten Null definitionsgemäß nicht. Als Exponent eines in $\mathfrak{d}$ nicht auftretenden Punktes gilt dementprechend Null. Der Divisor, dessen sämtliche Exponenten verschwinden, wird mit $\langle 1 \rangle$ bezeichnet.

Der Divisor

$$\mathfrak{a} = \prod_{h=1}^{\sigma_0} (\xi_h)^{\vartheta_h}, \quad \vartheta_h = \begin{cases} 0 \text{ für } \varkappa_h > 0 \\ 1 \text{ für } \varkappa_h = 0 \end{cases} \qquad [\varkappa_h \text{ vgl. } ^1), \text{ 1. c.}] \tag{7}$$

heißt der Ergänzungsdivisor von v oder von $\{\Gamma, -r, v\}$. Ein Divisor (6) mit lauter nicht negativen Exponenten heißt ein Polygon. Die Exponentensumme

$$\sum_{h=1}^{\sigma_0} \alpha_h + \sum_{k=1}^{e_0} \beta_k + \sum_{m=1}^{d_0} \lambda_m$$

wird als Ordnung von $\mathfrak{d}$ und mit ord $\mathfrak{d}$ bezeichnet. Eine Form $f(\tau) \subset \{\Gamma, -r, v\}$ wird ein Multiplum von $\mathfrak{d}$ genannt, in Zeichen $f \equiv 0 \pmod{\mathfrak{d}}$, wenn entweder $f(\tau)$ identisch verschwindet oder anderenfalls die Ordnung von f in jedem Punkte von $\mathfrak{R}$ den Exponenten dieses Punktes in $\mathfrak{d}$ nicht unterschreitet. $f \subset \mathfrak{C}_r$ bedeutet $f \equiv 0 \pmod{\langle 1\rangle}$, $f \subset \mathfrak{C}_r^+$ bedeutet $f \equiv 0 \pmod{\mathfrak{a}}$.

Es bezeichne $\mathfrak{C}_r(\mathfrak{d}) = \mathfrak{C}(\Gamma, -r, v; \mathfrak{d})$ die Schar der Multipla von $\mathfrak{d}$ unter den Formen $\{\Gamma, -r, v\}$, $\nu_0(-r, v, \mathfrak{d})$ den Rang der Schar $\mathfrak{C}(\Gamma, -r, v; \mathfrak{d})$. Dann gilt der Riemann-Rochsche Satz in Gestalt des folgenden Reziprozitätsgesetzes:

$$\begin{aligned} \nu_0(-r, v, \mathfrak{d}) = &- \operatorname{ord} \mathfrak{d} + r\varrho_0 - \sum_{h=1}^{\sigma_0} \varkappa_h - \sum_{k=1}^{e_0} \varrho_k + \\ &- p_0 + 1 + \nu_0(r-2, v^{-1}, \mathfrak{a}\mathfrak{d}^{-1}); \end{aligned} \tag{8}$$

hier bedeuten $\varkappa_h$, ϱ_k die Drehreste der Klasse $\{\Gamma, -r, v\}$ in den Spitzen ξ_h und den Ecken ω_k von $\mathfrak{R}$. Mit

$$a^+ = a^+(-r, v) = r\varrho_0 - \sum_{h=1}^{\sigma_0} \varkappa_h^+ - \sum_{k=1}^{e_0} \varrho_k \qquad (\varkappa_h^+ = \varkappa_h + \vartheta_h) \tag{9}$$

ergibt sich für die Ränge $\mu = \nu_0(-r, v, \mathfrak{a})$ von $\mathfrak{C}_r^+$ und $\nu_0(-r, v, \langle 1\rangle)$ von $\mathfrak{C}_r$:

$$\begin{gathered} \mu = a^+ - p_0 + 1, \ \nu_0(-r, v, \langle 1\rangle) = \mu + \operatorname{ord} \mathfrak{a} \\ (r > 2, \ v \text{ beliebig und } r = 2, \ v \neq 1); \end{gathered} \tag{10}$$

allgemein gilt

$$\nu_0(-r, v, \mathfrak{a}\mathfrak{d}) = - \operatorname{ord} \mathfrak{d} + a^+ - p_0 + 1 + \nu_0(r-2, v^{-1}, \mathfrak{d}^{-1}). \tag{8a}$$

Für eine ganze Spitzenform $f \subset \{\Gamma, -r, v\}$ bezeichnet a^+ die Gesamtanzahl der Nullstellen in $\mathfrak{R}$, die mit ihren Vielfachheiten, aber ohne die durch die Bedingung $f \equiv 0 \pmod{\mathfrak{a}}$ verursachten Beiträge $\varkappa_h^+$ bzw. ϱ_k zu zählen sind.

Die für $r > 2$, $|v| = 1$ absolut konvergenten Quersummen (Poincaré-Reihen)

$$G_{-r}(\tau, v, A, \Gamma, \nu) = \frac{1}{\Gamma(r-1)} \sum_{M \subset \mathfrak{S}(A, \Gamma)} e^{2\pi i (\nu + \varkappa) \frac{M\tau}{N}} (v(M)(m_1\tau + m_2)^r)^{-1} \tag{11}$$

$$(\nu + \varkappa > 0),$$

$$\Phi_{-r}(\tau, v, z, \Gamma, \nu) = \frac{1}{\Gamma(r-1)} \sum_{M \subset \Gamma} \left(\frac{M\tau - z}{M\tau - \bar{z}}\right)^{\nu} (v(M)(m_1\tau + m_2)^r (M\tau - \bar{z})^r)^{-1} \tag{12}$$

$$(\nu \geqq 0)$$

sind mit den folgenden Bedeutungen erklärt: $\zeta = A^{-1}\infty$ eine Spitze von Γ; A, N, $\varkappa$, $\mathfrak{S}(A, \Gamma)$ nach [1]) 1. c. d.; $v(M) = v(A)\,\sigma(A, L)\,v(L)$ für $M = AL \subset A\Gamma$ mit (wofern $A \subset \Gamma$) willkürlichem $v(A)$ des Betrages Eins; $r > 2$, $|v| = 1$, $z \subset \mathfrak{H}$, $\underline{M} = \{m_1, m_2\}$, ν ganz. Alle Quersummen (11) (12) stellen ganze Spitzenformen $\{\Gamma, -r, v\}$ dar. Für jedes $L_0 \subset \Gamma$ bestehen die Relationen

$$G_{-r}(\tau, v, AL_0, \Gamma, \nu) = G_{-r}(\tau, v, A, \Gamma, \nu)\ (v(AL_0) = v(A)\,\sigma(A, L_0)\,v(L_0)),$$

$$\Phi_{-r}(\tau, v, L_0 z, \Gamma, \nu) = \overline{v(L_0)}\,\frac{|\gamma_0 z + \delta_0|^{2r}}{(\gamma_0 z + \delta_0)^r}\left(\frac{\gamma_0 \bar{z} + \delta_0}{\gamma_0 z + \delta_0}\right)^{\nu} \Phi_{-r}(\tau, v, z, \Gamma, \nu). \tag{13}$$

Die Quersummen (11) (12) genügen den metrischen Grundgleichungen

$$\begin{aligned}(\varphi(\tau),\ G_{-r}(\tau, v, A, \Gamma, \nu)) &= e_r(A, \Gamma, \nu)\ b_\nu(A, \varphi)\\ (\varphi(\tau),\ \Phi_{-r}(\tau, v, z, \Gamma, \nu)) &= \varepsilon_r(z, \Gamma, \nu)\ b_\nu(z, \varphi)\end{aligned} \qquad (\varphi \subset \mathfrak{C}_r^+) \tag{14}$$

mit gewissen elementaren und stets von Null verschiedenen Konstanten $e_r(A, \Gamma, \nu)$, $\varepsilon_r(z, \Gamma, \nu)$, deren genaue Werte im Folgenden keine Rolle spielen. Es sei von ihnen nur soviel gesagt, daß sie nach ihren expliziten Darstellungen für alle positiven r erklärt sind, woraus folgt, daß man auch den Funktionen $G_{-r}(\tau, v, A, \Gamma, \nu)$ und $\Phi_{-r}(\tau, v, z, \Gamma, \nu)$ für beliebige r, v mit $r > 0$, $|v| = 1$, und zwar ohne jede Rücksicht auf die Konvergenz irgendwelcher Reihen, vermöge der metrischen Formeln (14) einen eindeutig bestimmten Sinn beilegen kann. Die so erklärten Funktionen G_{-r}, Φ_{-r} gehören definitionsgemäß der Schar $\mathfrak{C}_r^+$ an und genügen nach (14) genau denselben Transformations- und Invarianzgleichungen, wie die für $r > 2$, $|v| = 1$ absolut konvergenten Reihen (11) (12).

Wir denken uns den kanonischen Fundamentalbereich $\mathfrak{K}$ von Γ fest und so gewählt, daß er, falls $\sigma_0 > 0$ ist (d. h. falls $\bar{\Gamma}$ parabolische Substitutionen enthält), den Rand von $\mathfrak{H}$ in der Spitze ∞ erreicht. Die hierzu erforderliche Bedingung, daß ∞ parabolischer Fixpunkt von Γ sei, läßt sich durch eine auf Γ auszuübende Transformation mit Hilfe einer passenden reellen unimodularen Matrix erfüllen. Im übrigen bedienen wir uns der Bezeichnungen von [1]) c), nennen also $\zeta_h = A_h^{-1}\infty$ die sämtlichen Spitzen von $\mathfrak{K}$, wobei wir $\zeta_1 = \infty$, $A_1 = I$ und $a_{h1} > 0$ für $h > 1$ vorschreiben $(1 \leqq h \leqq \sigma_0)$; ω_k wie oben die sämtlichen Ecken von $\mathfrak{K}$, l_k ihre Ordnungen; $\varkappa_h$, $\varrho_k = \frac{a_k}{l_k}$ mit ganzen $a_k (1 \leqq k \leqq e_0)$ die Drehreste der Klasse $\{\Gamma, -r, v\}$ in den Spitzen ζ_h und Ecken ω_k von $\mathfrak{K}$. Für festgewählte solche A_h schreiben wir

$$\begin{aligned} H(\tau, \zeta_h, \nu) &= G_{-r}(\tau, v, A_h, \Gamma, \nu) && (\nu + \varkappa_h > 0,\ 1 \leqq h \leqq \sigma_0),\\ H(\tau, \omega_k, \nu) &= \Phi_{-r}(\tau, v, \omega_k, \Gamma, a_k + \nu l_k) && (0 \leqq a_k \leqq l_k - 1,\ \nu \geqq 0,\\ & && \qquad 1 \leqq k \leqq e_0),\\ H(\tau, \tau_0, \nu) &= \Phi_{-r}(\tau, v, \tau_0, \Gamma, \nu) && (\tau_0 \text{ ein Nichtfixpunkt in } \mathfrak{K},\ \nu \geqq 0). \end{aligned} \tag{15}$$

Dann gilt an Stelle von (14) und mit $\varepsilon_r^*(\omega_k, \Gamma, \nu) = \varepsilon_r(\omega_k, \Gamma, a_k + \nu l_k)$ das System der Grundgleichungen

$$(16)\qquad \begin{aligned} (\varphi(\tau),\ H(\tau, \zeta_h, \nu)) &= e_r(A_h, \Gamma, \nu)\ b_r(A_h, \varphi), \\ (\varphi(\tau),\ H(\tau, \omega_k, \nu)) &= \varepsilon^*(\omega_k, \Gamma, \nu)\ b_r^*(\omega_k, \varphi), \\ (\varphi(\tau),\ H(\tau, \tau_0, \nu)) &= \varepsilon_r(\tau_0, \Gamma, \nu)\ b_r(\tau_0, \varphi). \end{aligned} \qquad \varphi \subset \mathfrak{C}_r^+.$$

Wir setzen im Folgenden $\mu > 0$ voraus; für $\mu = 0$ ist die Problemstellung inhaltlos. $\mu > 0$ hat zur Folge, daß die in (9) erklärte Zahl $a^+ \geqq 0$ ausfällt.

Aus der Theorie der Multiplikatoren benötigen wir die folgenden Aussagen: Bedeuten $\hat{\varkappa}_h$, ϱ_k die Drehreste der Klasse $\{\Gamma, r-2, v^{-1}\}$ in ζ_h bzw. ω_k, so gilt

$$(17)\qquad \hat{\varkappa}_h = 1 - \varkappa_h^+ \text{ [vgl. (9)]}\ (1 \leqq h \leqq \sigma_0),\ \hat{\varrho}_k = 1 - \frac{1}{l_k} - \varrho_k\ (1 \leqq k \leqq e_0).$$

Die einzige (notwendige und hinreichende) Existenzbedingung für ein Multiplikatorsystem $v \subset [\Gamma, -r]$ besteht in der Kongruenz

$$(18)\qquad \sum_{h=1}^{\sigma_0} \varkappa_h + \sum_{k=1}^{e_0} \varrho_k \equiv r\varrho_0 \pmod 1;$$

daß diese eine notwendige Bedingung darstellt, folgt bereits aus der Ganzzahligkeit von a^+.

Im Rahmen der Divisorentheorie sind die Primformen von hervorragender Bedeutung. Es sei w ein beliebiger Punkt in $\mathfrak{R}$. Die zum Punkte w gehörige automorphe Primform $Z(\tau, w)$ ist eine ganze Form $\{\Gamma, -r_0, u_w\}$ mit $r_0\varrho_0 = 1$ und einem Multiplikatorsystem $u_w \subset [\Gamma, -r_0]$ des Betrages Eins. $Z(\tau, w)$ verschwindet in $\mathfrak{R}$ nirgends außer in w und hat dort die Ordnung 1. $Z(\tau, w)$ ist durch diese Eigenschaften bis auf einen konstanten Faktor eindeutig bestimmt. Um $Z(\tau, w)$ völlig festzulegen, kann man dem ersten Entwicklungskoeffizienten von Z im Punkte w den Wert 1 erteilen. Dies besagt

$$b_1(A_h, Z(\tau, \zeta_h)) = 1\ (w = \zeta_h),\quad b_1^*(\omega_k, Z(\tau, \omega_k)) = 1\ (w = \omega_k),$$
$$b_1(\tau_0, Z(\tau, \tau_0)) = 1\ (w = \tau_0 \text{ ein Nichtfixpunkt}).$$

3. Es sei $r > 0$, $|v| = 1$. Einem beliebigen Polygon $\mathfrak{d}$ von der Gestalt (6) ordnen wir das wie folgt erklärte Funktionensystem $\mathfrak{G}(\mathfrak{d})$ zu: $\mathfrak{G}(\mathfrak{d})$ bestehe aus den ord $\mathfrak{d}$ Funktionen

$$(19)\qquad \begin{aligned} &H(\tau, \zeta_h, \nu_h + \vartheta_h)\ (\vartheta_h \text{ nach (7)},\ 0 \leqq \nu_h \leqq \alpha_h - 1,\ 1 \leqq h \leqq \sigma_0), \\ &H(\tau, \omega_k, \nu_k)\ (0 \leqq \nu_k \leqq \beta_k - 1,\ 1 \leqq k \leqq e_0), \\ &H(\tau, \tau_m, \nu_m)\ (0 \leqq \nu_m \leqq \lambda_m - 1,\ 1 \leqq m \leqq d_0). \end{aligned}$$

$\mathfrak{G}(\mathfrak{d})$ enthält also sinngemäß zu fest gegebenem h bzw. k bzw. m keine der Funktionen

$$H(\tau, \zeta_h, \nu + \vartheta_h) \text{ bzw. } H(\tau, \omega_k, \nu) \text{ bzw. } H(\tau, \tau_m, \nu)\ (\nu \geqq 0),$$

wenn α_h bzw. β_k bzw. λ_m verschwindet. — Wir behaupten

Satz 1. *Wenn* $\operatorname{ord}\mathfrak{d} = a^+ + 1$ *ist, so spannen die Funktionen von* $\mathfrak{G}(\mathfrak{d})$ *die volle Schar* $\mathfrak{C}_r^+$ *auf. Ihre Anzahl ist um höchstens* p_0 *größer, als der Rang* μ *von* $\mathfrak{C}_r^+$.

Beweis. Es bezeichne $\mathfrak{N}(\mathfrak{d})$ die Normalschar von $\mathfrak{G}(\mathfrak{d})$ in $\mathfrak{C}_r^+$, d. h. die Schar der auf allen Formen von $\mathfrak{G}(\mathfrak{d})$ senkrechten Formen von $\mathfrak{C}_r^+$. Nach (16) bedeutet $\varphi \subset \mathfrak{N}(\mathfrak{d})$, daß die sämtlichen Entwicklungskoeffizienten

$$\begin{gathered} b_{\nu_h + \vartheta_h}(A_h, \varphi) \ (0 \leqq \nu_h \leqq \alpha_h - 1,\ 1 \leqq h \leqq \sigma_0) \\ b^*_{\nu_k}(\omega_k, \varphi) \ (0 \leqq \nu_k \leqq \beta_k - 1,\ 1 \leqq k \leqq e_0), \\ b_{\nu_m}(\tau_m, \varphi) \ (0 \leqq \nu_m \leqq \lambda_m - 1,\ 1 \leqq m \leqq d_0) \end{gathered} \tag{19a}$$

verschwinden. Daher ist φ offenbar ein Multiplum von $\mathfrak{a}\mathfrak{d}$. Wenn nun die Form φ nicht identisch verschwände, so hätte sie, abgesehen von den festen Beiträgen $\varkappa_h^+$ und ϱ_k in den Spitzen und Ecken, mehr als a^+ Nullstellen in $\mathfrak{R}$. Dies ist unmöglich. Also verschwindet φ identisch. Andrerseits spannen die Funktionen von $\mathfrak{G}(\mathfrak{d})$ die volle Schar der zu $\mathfrak{N}(\mathfrak{d})$ orthogonalen Formen von $\mathfrak{C}_r^+$ auf. Daraus folgt die erste Behauptung.

Die zweite Behauptung ergibt sich nach (8a) aus

$$a^+ + 1 - \mu = p_0 - \nu_0(r-2,\ v^{-1},\ \langle 1\rangle) \leqq p_0. \ —$$

Es sei wie oben $r > 0$, $|v| = 1$, $\mathfrak{d}$ ein Polygon (dessen Ordnung zunächst keiner Einschränkung unterliegt), $\mathfrak{G}(\mathfrak{d})$ werde durch (19) erklärt. Wenn ein nicht identisch verschwindendes Multiplum von $\mathfrak{d}^{-1}$ in $\{\Gamma, r-2, v^{-1}\}$ existiert, so gilt für die Summe seiner Ordnungen in $\mathfrak{R}$

$$(2-r)\left(p_0 - 1 + \frac{q_0}{2}\right) \geqq -\operatorname{ord}\mathfrak{d} + \sum_{h=1}^{\sigma_0} \hat{\varkappa}_h + \sum_{k=1}^{e_0} \hat{\varrho}_k,$$

also nach (5), (8a), (17)

$$\sum_{h=1}^{\sigma_0} \hat{\varkappa}_h + \sum_{k=1}^{e_0} \hat{\varrho}_k = q_0 - \sum_{h=1}^{\sigma_0} \varkappa_h^+ - \sum_{k=1}^{e_0} \varrho_k,$$

$$\operatorname{ord}\mathfrak{d} \geqq a^+ - 2p_0 + 2 = \mu - p_0 + 1 - \nu_0(r-2,\ v^{-1},\ \langle 1\rangle).$$

Es sei nun $a^+ - 2p_0 + 1 \geq 0$, $\operatorname{ord}\mathfrak{d} \leqq a^+ - 2p_0 + 1$. Dann verschwindet $\nu_0(r-2,\ v^{-1},\ \mathfrak{d}^{-1})$, folglich auch $\nu_0(r-2,\ v^{-1},\ \langle 1\rangle)$, und wir erhalten mit $n = \operatorname{ord}\mathfrak{d}$:

$$\nu_0(-r,\ v,\ \mathfrak{a}\mathfrak{d}) = -\operatorname{ord}\mathfrak{d} + a^+ - p_0 + 1 = \mu - n. \tag{20}$$

Eine Form $\varphi \subset \mathfrak{C}_r^+$ steht dann und nur dann auf dem vollen System $\mathfrak{G}(\mathfrak{d})$ senkrecht, wenn sie Multiplum von $\mathfrak{a}\mathfrak{d}$ ist. Daher spannen die n Funktionen von $\mathfrak{G}(\mathfrak{d})$ die Normalschar zur Schar der Multipla von $\mathfrak{a}\mathfrak{d}$ auf. Diese Normalschar hat nach (20) den Rang n, folglich sind die sie aufspannenden Funktionen von $\mathfrak{G}(\mathfrak{d})$ linear unabhängig. — Dies besagt

Satz 2. *Es sei* $r>0$, $|v|=1$. *Die Zahl* a^+-2p_0+1 *stimmt, wenn sie nicht negativ ist, mit* $\mu-p_0$ *überein, d. h. es verschwindet* $v_0(r-2, v^{-1}, \langle 1\rangle)$. *Es sei* $\mathfrak{d}$ *ein Polygon einer Ordnung* $n \leqq a^+-2p_0+1$. *Dann sind die* n *Funktionen von* $\mathfrak{G}(\mathfrak{d})$ *linear unabhängig, und die von ihnen aufgespannte Schar ist die Normalschar zur Schar aller Multipla von* $\mathfrak{a}\mathfrak{d}$ *in* $\mathfrak{C}^+(\Gamma, -r, v)$.

Die in diesem Satze auftretende ganze Zahl a^+-2p_0+1 ist wegen

$$a^+-2p_0+2 \geqq q_0+(r-2)\varrho_0-q_0=(r-2)\varrho_0 \tag{21}$$

für $r>2$ stets nicht negativ. Bestimmt man irgend ein Multiplikatorsystem

$$v \subset [\Gamma, -2] \text{ mit } \varkappa_h>0 \ (1 \leqq h \leqq \sigma_0), \ \sum_{h=1}^{\sigma_0} \varkappa_h = 1, \ \varrho_k = 1-\frac{1}{l_k} \ (1 \leqq k \leqq e_0),$$

so wird $a^+-2p_0+1=\sigma_0-2$ $(r=2)$. Dies gilt also für eine von $2p_0+\sigma_0-1$ reellen Parametern abhängige Schar von Multiplikatorsystemen $[\Gamma, -2]$ des Betrages Eins. Daß a^+-2p_0+1 auch für $r<2$ positiv ausfallen kann, erkennt man wie folgt: Man setze

$$r=2-s \ (0<s<2, \ s \text{ reell}), \ s\varrho_0 \not\equiv 0 \pmod 1, \ m_0=[s\varrho_0],$$

$$\varkappa_h>0 \ (1 \leqq h \leqq \sigma_0), \ \sum_{h=1}^{\sigma_0} \varkappa_h = m_0+1-s\varrho_0, \quad \varrho_k = 1-\frac{1}{l_k} \ (1 \leqq k \leqq e_0).$$

Die entsprechend bestimmten Multiplikatorsysteme $[\Gamma, -r]$ des Betrages Eins hängen wieder von $2p_0+\sigma_0-1$ reellen Parametern ab, und es wird nun

$$a^+-2p_0+1=\sigma_0-m_0-2. \ —$$

Unter einer Teilerkette verstehen wir ein System von Polygonen

$$\begin{gathered}\mathfrak{d}_1, \mathfrak{d}_2, \ldots, \mathfrak{d}_t, \ldots, \mathfrak{d}_s=\mathfrak{d} \text{ mit } \mathfrak{d}_t \mid \mathfrak{d}_{t+1}, \\ \operatorname{ord}\mathfrak{d}_{t+1}-\operatorname{ord}\mathfrak{d}_t>0 \ (1 \leqq t \leqq s-1).\end{gathered} \tag{22}$$

Wir setzen $n_t=\operatorname{ord}\mathfrak{d}_t$ $(1 \leqq t \leqq s)$, $n_s=n$ und bezeichnen mit $\mathfrak{S}_t$ die lineare Schar der Multipla von $\mathfrak{a}\mathfrak{d}_t$, mit $\mathfrak{N}_t$ die Normalschar von $\mathfrak{S}_t$ in $\mathfrak{C}_r^+$ $(1 \leqq t \leqq s)$, mit $\mathfrak{M}_{t+1}$ die Normalschar von $\mathfrak{S}_{t+1}$ in $\mathfrak{S}_t$ $(1 \leqq t \leqq s-1)$; $\mathfrak{M}_1$ sei mit $\mathfrak{N}_1$ identisch. Es gelten die direkten Zerlegungen in paarweise orthogonale Summanden:

$$\begin{aligned}\mathfrak{C}_r^+ &= \mathfrak{M}_1+\mathfrak{S}_1=\mathfrak{M}_1+\mathfrak{M}_2+\mathfrak{S}_2=\cdots \\ &=\mathfrak{M}_1+\mathfrak{M}_2+\cdots+\mathfrak{M}_t+\mathfrak{S}_t \ (1 \leqq t \leqq s);\end{aligned} \tag{23}$$

danach ist $\mathfrak{N}_t=\mathfrak{M}_1+\mathfrak{M}_2+\cdots+\mathfrak{M}_t$ $(1 \leqq t \leqq s)$.

Unter der Voraussetzung $0<n=\operatorname{ord}\mathfrak{d} \leqq a^+-2p_0+1$ soll ein Verfahren zur expliziten Bestimmung einer Basis für jede der Scharen $\mathfrak{M}_t$ entwickelt werden. Zu diesem Zwecke stellen wir zunächst fest, daß die n_t Funktionen von $\mathfrak{G}(\mathfrak{d}_t)$ eine Basis von $\mathfrak{N}_t$ bilden. Wir führen für die Funktionen der Systeme $\mathfrak{G}(\mathfrak{d}_t)$ $(1 \leqq t \leqq s)$ die folgenden ab-

kürzenden Bezeichnungen ein:

$$G_i(\tau) \subset \mathfrak{G}(\mathfrak{d}_1)\ (1 \leqq i \leqq n_1);\ G_i(\tau) \subset \mathfrak{G}(\mathfrak{d}_2)\ (n_1 < i \leqq n_2);\ \cdots;$$
$$(24)\quad G_i(\tau) \subset \mathfrak{G}(\mathfrak{d}_t)\ (n_{t-1} < i \leqq n_t);\ \cdots;\ G_i(\tau) \subset \mathfrak{G}(\mathfrak{d}_s) = \mathfrak{G}(\mathfrak{d})$$
$$(n_{s-1} < i \leqq n_s = n);\ \mathfrak{G}(\mathfrak{d}_t) \subset \mathfrak{G}(\mathfrak{d}_{t+1})\ (1 \leqq t \leqq s-1).$$

Ferner nennen wir $b_i(\varphi)$ denjenigen Entwicklungskoeffizienten der allgemeinen Form $\varphi \subset \mathfrak{C}_r^+$, welcher mit $G_i(\tau)$ nach der auf $G_i(\tau)$ anzuwendenden metrischen Formel (16), also gemäß

$$(\varphi, G_i) = C_i b_i(\varphi)\ (C_i = e_r,\ \varepsilon_r^*\ \text{oder}\ \varepsilon_r)$$

zusammenhängt.

Eine Basis von $\mathfrak{M}_1$ wird von den Funktionen $G_i(\tau)$ $(1 \leqq i \leqq n_1)$ von $\mathfrak{G}(\mathfrak{d}_1)$ gebildet. Sei $2 \leqq t \leqq s$. Aus $\mathfrak{N}_t = \mathfrak{N}_{t-1} + \mathfrak{M}_t$, $\mathfrak{M}_t \subset \mathfrak{S}_{t-1}$ und der Orthogonalität von $\mathfrak{N}_{t-1}$ und $\mathfrak{S}_{t-1}$ folgt, daß $\mathfrak{M}_t$ die Normalschar zu $\mathfrak{N}_{t-1}$ in $\mathfrak{N}_t$ ist. Daher erhält man eine Basis von $\mathfrak{M}_t$ in denjenigen Linearkombinationen

$$(25)\qquad G_i^*(\tau) = G_i(\tau) - \sum_{\nu=1}^{n_{t-1}} \lambda_{i\nu} G_\nu(\tau) \qquad (n_{t-1} < i \leqq n_t)$$

der Funktionen von $\mathfrak{G}(\mathfrak{d}_t)$, welche auf $\mathfrak{N}_{t-1}$ senkrecht stehen, also die Relationen

$$\sum_{\nu=1}^{n_{t-1}} \lambda_{i\nu}(G_\nu, G_k) = (G_i, G_k) \qquad (n_{t-1} < i \leqq n_t,\ 1 \leqq k \leqq n_{t-1})$$

erfüllen. Diese Gleichungen sind nach den $\lambda_{i\nu}$ eindeutig auflösbar; die Auflösung kann sich der Darstellung

$$(26)\qquad \sum_{\nu=1}^{n_{t-1}} \lambda_{i\nu} b_k(G_\nu) = b_k(G_i) \qquad (n_{t-1} < i \leqq n_t,\ 1 \leqq k \leqq n_{t-1})$$

des obigen Gleichungssystems bedienen und gelangt damit in dem Falle $r > 2$ auf Grund der expliziten Bestimmung der $b_k(G_\nu)$, $b_k(G_i)$ zu expliziten Darstellungen der Basisformen $G_i^*(\tau)$ $(n_{t-1}+1 \leqq i \leqq n_t)$ von $\mathfrak{M}_t$. Wir formulieren das Ergebnis in dem folgenden

Satz 3. *Zu jeder Teilerkette* (22) *gehört eine Zerlegung* $\mathfrak{C}_r^+ = \mathfrak{M}_1 + \mathfrak{M}_2 + \cdots + \mathfrak{M}_s + \mathfrak{S}_s$ *von* $\mathfrak{C}_r^+$ *in paarweise orthogonale Summanden. Hier bezeichnet* $\mathfrak{S}_t = \mathfrak{M}_{t+1} + \cdots + \mathfrak{M}_s + \mathfrak{S}_s$ *die Schar der Multipla von* $\mathfrak{a}\mathfrak{d}_t$ *und daher* $\mathfrak{N}_t = \mathfrak{M}_1 + \mathfrak{M}_2 + \cdots + \mathfrak{M}_t$ *die Normalschar zu* $\mathfrak{S}_t$ *in* $\mathfrak{C}_r^+$ $(1 \leqq t \leqq s)$. *Es sei* $0 < n = \operatorname{ord}\mathfrak{d} \leqq a^+ - 2p_0 + 1$. *Dann bilden die Funktionen von* $\mathfrak{G}(\mathfrak{d}_t)$ *eine Basis von* $\mathfrak{N}_t$. *Für* $2 \leqq t \leqq s$ *ergibt sich eine Basis von* $\mathfrak{M}_t$ *in Gestalt der Linearkombinationen* (25) *der Funktionen von* $\mathfrak{G}(\mathfrak{d}_t)$. *Die Koeffizienten* $\lambda_{i\nu}$ *dieser Linearkombinationen sind durch Auflösung der linearen Gleichungen* (26) *zu gewinnen. Als Koeffizienten dieser linearen Gleichungen ergeben sich gewisse der Entwicklungskoeffizienten* (19 a), *gebildet für die Parameter der Funktionen von* $\mathfrak{G}(\mathfrak{d}_t)$; *dabei durchläuft überdies* φ *die Funktionen von* $\mathfrak{G}(\mathfrak{d}_t)$.

Die oben bewiesenen Sätze können auf Grund des metrischen Zusammenhanges (16) zwischen den Funktionen H und den Entwicklungskoeffizienten b, b^* als Aussagen über die Struktur automorpher Formenscharen aufgefaßt und formuliert werden. Um insbesondere den Hauptsatz 2 in diesem Sinne zu interpretieren, bilden wir zu einem gegebenen Polygon $\mathfrak{d}$ den Vektor $\mathfrak{z}(\mathfrak{d}, \varphi)$ mit den Komponenten (19a) in irgend einer bestimmten, etwa der in (19a) angegebenen Anordnung ($\varphi \subset \mathfrak{C}_r^+$). Bezeichnet $\varphi_j(\tau)$ $(1 \leqq j \leqq \mu)$ eine beliebige fest gewählte Basis von $\mathfrak{C}_r^+$, so verstehen wir unter $\mathsf{M}(\mathfrak{d})$ die Matrix mit der j-ten Zeile $\mathfrak{z}(\mathfrak{d}, \varphi_j)$ $(1 \leqq j \leqq \mu)$; $\mathsf{M}(\mathfrak{d})$ hat also μ Zeilen und $\operatorname{ord}\mathfrak{d}$ Spalten. Über $\mathsf{M}(\mathfrak{d})$ gilt der folgende

Satz 4. *Es sei* $r > 0$, $|v| = 1$, $a^+ - 2p_0 + 1 > 0$ *und* $\mathfrak{d}$ *ein Polygon der positiven Ordnung* $n \leqq a^+ - 2p_0 + 1$. *Dann hat* $\mathsf{M}(\mathfrak{d})$ *den Rang* n, *es sind also alle Spalten von* $\mathsf{M}(\mathfrak{d})$ *linear unabhängig.*

Beweis. Für eine Form $\varphi(\tau) = \sum_{\nu=1}^{\mu} \xi_\nu \varphi_\nu(\tau)$ (ξ_ν konstant) aus $\mathfrak{C}_r^+$ bedeutet $\varphi \equiv 0 \pmod{\mathfrak{a}\mathfrak{d}}$, daß das algebraische Skalarprodukt des Vektors $\mathfrak{x} = \{\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_\mu\}$ mit jeder Spalte von $\mathsf{M}(\mathfrak{d})$ verschwindet. Bezeichnet ϱ den Rang von $\mathsf{M}(\mathfrak{d})$, so ist also $\nu_0(-r, v, \mathfrak{a}\mathfrak{d}) = \mu - \varrho$. Daraus folgt nach (20) die Behauptung.

Wir heben die folgenden Sonderfälle hervor:

Satz 5. *Es sei* $r > 0$, $|v| = 1$, $a^+ - 2p_0 + 1 > 0$; *man bestimme* $\mu - p_0$, *also* $a^+ - 2p_0 + 1$ *paarweise verschiedene Nichtfixpunkte* τ_k *im Fundamentalbereich* $\mathfrak{R}$ $(1 \leqq k \leqq \mu - p_0)$. *Dann hat die (für eine beliebige Basis* φ_j *von* $\mathfrak{C}_r^+$ *gebildete) Matrix* $(\varphi_j(\tau_k))$ $(1 \leqq j \leqq \mu,\ 1 \leqq k \leqq \mu - p_0)$ *den Rang* $\mu - p_0$.

Satz 6. *Es sei* $r > 0$, $|v| = 1$, $a^+ - 2p_0 + 1 > 0$. *Zu jedem Punkte* $\tau = \tau_0 = \xi_h, \omega_k, z$ (= *Nichtfixpunkt) in* $\mathfrak{R}$ *gibt es eine Basis* φ_j $(1 \leqq j \leqq \mu)$ *von* $\mathfrak{C}_r^+$ *der folgenden Beschaffenheit: Für* $1 \leqq j \leqq \mu$, $1 \leqq \nu \leqq \mu - p_0$ *gilt entsprechend* $\tau_0 = \xi_h, \omega_k, z$:

$$b_{\nu + \vartheta_h}(A_h, \varphi_j) \text{ bzw. } b_\nu^*(\omega_k, \varphi_j) \text{ bzw. } b_\nu(z, \varphi_j) = \left\{ \begin{matrix} 1\ (\nu = j) \\ 0\ (\nu \neq j) \end{matrix} \right\}.$$

Ein anderer Sonderfall läßt sich in einen allgemeineren Zusammenhang einordnen, den wir jetzt formulieren wollen. Zu diesem Zwecke verabreden wir die folgende Terminologie: Eine Form $F(\tau) \subset \{\Gamma, -r, v\}$ (r reell, $|v| = 1$) heiße ein genaues Multiplum des Divisors $\mathfrak{d}$ (der etwa in der Gestalt (6) mit ganzen Exponenten gegeben sei), wenn ihre Ordnungen in allen Punkten von $\mathfrak{R}$, abgesehen von den Bruchbestandteilen in den Fixpunkten, mit den Exponenten, die diese Punkte in $\mathfrak{d}$ tragen, übereinstimmen. Dabei gilt es als selbstverständlich, daß die Punkte τ_m in der Darstellung (6) paarweise verschiedene Nichtfixpunkte in $\mathfrak{R}$ sind.

Nach den Überlegungen, die zum Beweise von Satz 2 führten, besteht der folgende

Satz 7. *Es sei* $r>0$, $|v|=1$, $a^+-2p_0+1\geqq 0$, $\mathfrak{d}$ *ein Polygon. Wenn es außer Null ein Multiplum* $F(\tau)$ *von* $\mathfrak{d}^{-1}$ *in* $\{\Gamma, r-2, v^{-1}\}$ *gibt, so gilt* $\operatorname{ord}\mathfrak{d}\geqq\mu-p_0+1$. *Bezeichnet* $\mathfrak{d}^{-1}\mathfrak{g}$ *den Divisor, dessen genaues Multiplum* $F(\tau)$ *ist, so stellt* $\mathfrak{g}$ *ein Polygon dar, und es gilt* $\operatorname{ord}\mathfrak{d}=\mu-p_0+1+\operatorname{ord}\mathfrak{g}$. *Ein genaues Multiplum von* $\mathfrak{d}^{-1}$ *in* $\{\Gamma, r-2, v^{-1}\}$ *ist bis auf einen konstanten Faktor eindeutig bestimmt, und* $\mathfrak{d}$ *hat dann die Ordnung* $\mu-p_0+1$.

Zu der gegebenen Klasse $\{\Gamma, -r, v\}$ existiert natürlich immer ein Divisor $\mathfrak{d}$, aber keineswegs immer ein Polygon $\mathfrak{d}$ derart, daß die Klasse $\{\Gamma, r-2, v^{-1}\}$ ein genaues Multiplum von $\mathfrak{d}^{-1}$ enthält. Wir werden jedoch im nächsten Abschnitt zeigen, daß dennoch ein solches Polygon $\mathfrak{d}$ existiert, vorausgesetzt lediglich, daß die positive Zahl r nicht gar zu klein ist.

Es sei $\tau=w$ ein beliebiger fester Punkt in $\mathfrak{R}$ ($w=\xi_k$ oder $=\omega_k$ oder ein Nichtfixpunkt). Aus Satz 7 folgt in der Terminologie von [3]) 1., § 1:

Satz 7a. *Die ersten* $\mu-p_0$ *Werte* $\nu=1, 2, \ldots, \mu-p_0$ *sind sämtlich Lücken in den Polordnungen der auf* $\mathfrak{R}$ *außerhalb von* w *regulären Formen* $\{\Gamma, r-2, v^{-1}\}$. *Die niedrigste mögliche Polordnung ist also* $\mu-p_0+1$.

4. Im Folgenden können und wollen wir, da das Konstruktionsproblem der vorliegenden Arbeit für $p_0=0$ als gelöst gelten kann, $p_0>0$ voraussetzen. Zur expliziten Bestimmung eines Systems von mehr als $\mu-p_0$ linear unabhängigen Quersummen H dienen die folgenden Sätze, deren Beweise wir nach dem Verfahren der unter [3]) zitierten Untersuchungen auf den Riemann-Rochschen Satz und in Verbindung damit auf Aussagen über den Rang der Matrizen $\mathsf{M}(\mathfrak{d})$ zurückführen.

Satz 8. *Es sei* $r>0$, $|v|=1$, $a^+-2p_0+1\geqq 0$, $\mathfrak{d}$ *ein beliebiges Polygon von einer der Ordnungen* $\mu-p_0+k$ $(1\leqq k\leqq p_0)$. *Wenn es außer Null kein Multiplum von* $\mathfrak{d}^{-1}$ *in* $\{\Gamma, r-2, v^{-1}\}$ *gibt, so sind die* $\mu-p_0+k$ *Funktionen von* $\mathfrak{G}(\mathfrak{d})$ *linear unabhängig.*

Beweis. Aus (8a) und den Voraussetzungen folgt

$$\nu_0(\neg r, v, \mathfrak{a}\mathfrak{d})=-\operatorname{ord}\mathfrak{d}+a^+-p_0+1=p_0-k. \tag{27}$$

Bezeichnet ferner ϱ den Rang von $\mathsf{M}(\mathfrak{d})$, so wird nach (27) und dem Beweise von Satz 4:

$$\mu-\varrho=p_0-k,\ \varrho=\mu-p_0+k=\operatorname{ord}\mathfrak{d}.$$

Also sind die sämtlichen Spalten von $\mathsf{M}(\mathfrak{d})$ und mit ihnen die Funktionen von $\mathfrak{G}(\mathfrak{d})$ linear unabhängig. —

Versteht man unter $F(\tau)$ eine nicht konstante ganze Form, so erweist sich $F(\tau)^{-1}$ stets als das genaue Multiplum eines reziproken Polygons. Die Umkehrung dieser Aussage trifft nicht allgemein zu. Wir verstehen, um den allgemeinen Fall zu betrachten, unter $\mathfrak{d}$ ein Polygon, unter $F(\tau)$ eine automorphe Form reeller Dimension $+r$, zu einem Multiplikatorsystem v des Betrages Eins, nehmen an, daß F

ein genaues Multiplum von $\mathfrak{d}^{-1}$ sei und untersuchen unter der weiteren Voraussetzung $a^+ - 2p_0 + 1 \geqq 0$ die Formenklasse $\{\Gamma, -r, v\}$ $(r = 2 + r_1,$ $v = v_1^{-1})$. Dann gelten die folgenden Sätze:

Satz 9. *(Voraussetzungen): Es sei* $r > 0$, $|v| = 1$, $a^+ - 2p_0 + 1 \geqq 0$; *es gebe in der Klasse* $\{\Gamma, r-2, v^{-1}\}$ *ein genaues Multiplum von* $\mathfrak{d}^{-1}$, *wo* $\mathfrak{d}$ *ein Polygon bezeichnet. (Behauptung): Tilgt man von den* $\operatorname{ord}\mathfrak{d} = \mu - p_0 + 1$ *Quersummen des Systems* $\mathfrak{G}(\mathfrak{d})$ *irgend eine (einzige) derjenigen, welche unter allen zu den einzelnen Punkten* $\zeta_h (\alpha_h > 0)$, *bzw.* $\omega_k (\beta_k > 0)$, *bzw.* $\tau_m (\lambda_m > 0)$ *gehörigen die höchsten Parameterwerte* $\nu_h = \alpha_h - 1$, *bzw.* $\nu_k = \beta_k - 1$, *bzw.* $\nu_m = \lambda_m - 1$ *aufweisen, so sind die übrigbleibenden Funktionen linear unabhängig, die getilgte Funktion aber läßt sich linear mit konstanten Koeffizienten aus den übrigbleibenden kombinieren.*

Zum Beweise erschließt man für irgend einen der mit $\alpha_h > 0$, bzw. $\beta_k > 0$, bzw. $\lambda_m > 0$ in $\mathfrak{d}$ auftretenden Punkte $w = \zeta_h$, bzw. $w = \omega_k$, bzw. $w = \tau_m$ aus dem Riemann-Rochschen Satz (8 a):

$$\nu_0(-r, v, \mathfrak{a}\mathfrak{d}(w)^{-1}) = \nu_0(-r, v, \mathfrak{a}\mathfrak{d}) = p_0.$$

Daraus folgt, daß die Matrizen $\mathsf{M}(\mathfrak{d}(w)^{-1})$ und $\mathsf{M}(\mathfrak{d})$ den gleichen Rang $\mu - p_0$ haben, und dies besagt, daß die Funktionen von $\mathfrak{G}(\mathfrak{d}(w)^{-1})$ linear unabhängig sind, die von $\mathfrak{G}(\mathfrak{d})$ hingegen nicht. —

Beachtet man, daß eine automorphe Form reeller Dimension mit Multiplikatoren des Betrages 1 durch ihre Ordnungen in den Punkten von $\mathfrak{R}$ bis auf einen konstanten Faktor eindeutig bestimmt ist, so erhält man

Satz 10. *Unter den Voraussetzungen von Satz 9 bezeichne* v^* *ein von* v *verschiedenes Multiplikatorsystem* $[\Gamma, -r]$ *derart, daß die Klassen* $\{\Gamma, -r, v\}$ *und* $\{\Gamma, -r, v^*\}$ *die gleichen Drehreste aufweisen. Dann sind die* $\mu - p_0 + 1$ *Funktionen von* $\mathfrak{G}(\mathfrak{d})$, *gebildet für die Klasse* $\{\Gamma, -r, v^*$ *linear unabhängig.*

Die Multiplikatorsysteme $[\Gamma, -r]$ des Betrages 1 mit gegebenen Drehresten hängen von $2p_0$ reellen Parametern ab. —

Satz 11. *Es seien die Voraussetzungen von Satz 9 erfüllt und man kenne ein Polygon* $\mathfrak{d}'$, *welches nicht als Nenner einer automorphen Funktion* $\{\Gamma, 0, 1\}$ *auftreten kann (d. h. es gebe keine nicht-konstante automorphe Funktion, die ein Multiplum von* $\mathfrak{d}'^{-1}$ *ist). Man zerlege das System* $\mathfrak{G}(\mathfrak{d}\mathfrak{d}')$ *in die elementfremden Systeme* $\mathfrak{G}(\mathfrak{d})$ *und* $\mathfrak{G}_1(\mathfrak{d}\mathfrak{d}')$, *tilge aus* $\mathfrak{G}(\mathfrak{d})$ *eine der in Satz 9 angegebenen Funktionen und bezeichne das aus* $\mathfrak{G}(\mathfrak{d})$ *durch diese Tilgung entstehende System mit* $\mathfrak{G}^*(\mathfrak{d})$. *Dann sind die* $\mu - p_0 + n'$ $(n' = \operatorname{ord}\mathfrak{d}')$ *Funktionen der Vereinigung* $\mathfrak{G}^*(\mathfrak{d}) + \mathfrak{G}_1(\mathfrak{d}\mathfrak{d}')$ *linear unabhängig.*

Beweis. Da die Schar der Multipla von $\mathfrak{d}'^{-1}$ in $\{\Gamma, 0, 1\}$ aus den Konstanten allein besteht, findet man nach (8 a)

$$\begin{aligned}\nu_0(-r, v, \mathfrak{a}\mathfrak{d}\mathfrak{d}') &= -(\mu - p_0 + 1) - n' + a^+ - p_0 + 1 + \\ &\quad + \nu_0(r-2, v^{-1}, \mathfrak{d}^{-1}\mathfrak{d}'^{-1}) = p_0 - n'.\end{aligned}$$

Bezeichnet ϱ' den Rang von $\mathsf{M}(\mathfrak{d}\,\mathfrak{d}')$, so ergibt sich $\mu - \varrho' = p_0 - n'$, daher $\varrho' = \mu - p_0 + n'$. Diese Zahl ist um Eins kleiner als die Spaltenzahl von $\mathsf{M}(\mathfrak{d}\,\mathfrak{d}')$, folglich sind diese Spalten nach Tilgung einer passend bestimmten unter ihnen linear unabhängig. —

Kennt man eine natürliche Zahl P derart, daß keine nicht konstante automorphe Funktion $\{\Gamma, 0, 1\}$ existiert, welche jeden Wert höchstens P-mal annimmt, so kann in Satz 11 für $\mathfrak{d}'$ irgend ein Polygon der Ordnung P gewählt werden. —

Wir wollen weiter annehmen, daß die Voraussetzungen von Satz 9 erfüllt seien. Wir bilden für ganzes $m \geqq 0$ und einen beliebigen Punkt w in $\mathfrak{R}$ die Zahlen

$$u_m = \nu_0(-r, v, \mathfrak{a}\mathfrak{d}(w)^m) - \nu_0(-r, v, \mathfrak{a}\mathfrak{d}(w)^{m+1}) \qquad (m \geqq 0),$$
$$u'_m = \nu_0(r-2, v^{-1}, \mathfrak{d}^{-1}(w)^{-m}) - \nu_0(r-2, v^{-1}, \mathfrak{d}^{-1}(w)^{-m+1}) \quad (m \geqq 1).$$

Nach (8a) gilt, weil $\nu_0(-r, v, \mathfrak{a}\mathfrak{d}(w)^{m+1})$ für $m \geqq 2p_0 - 2$ offenbar verschwindet,

$$\nu_0(-r, v, \mathfrak{a}\mathfrak{d}) = \sum_{m=0}^{2p_0-2} u_m = -(\mu - p_0 + 1) + a^+ - p_0 + 2 = p_0;$$

$$0 \leqq u_m \leqq 1, \quad 0 \leqq u'_m \leqq 1; \quad u_m + u'_{m+1} = 1 \qquad (m \geqq 0).$$

Es seien $m+1 = h_i = h_i(w)$ $(1 \leqq i \leqq p_0)$ die Weierstrassschen Lückenzahlen des Punktes w im klassischen Sinne; sie können zunächst natürlich für $r = 2$, $v = 1$, $\mathfrak{d} = \langle 1 \rangle$; unter den genannten Voraussetzungen aber auch für die hier vorgegebenen $r, v, \mathfrak{d}$ durch $u'_{h_i} = 0$, also durch $u_{h_i-1} = 1$ definiert werden. Ihre Bedeutung für die Schar $\mathfrak{C}_r^+$ geht aus der folgenden Überlegung hervor:

Es bezeichne φ_j $(1 \leqq j \leqq \mu)$ irgend eine fest gewählte Basis von $\mathfrak{C}_r^+$. Wir bilden die Spalten $\mathfrak{b}_\nu(w)$ mit den Komponenten

$$(28) \qquad \begin{matrix} b_{\nu+\vartheta_h}(A_h, \varphi_j)\ (w = \xi_h), \quad \text{bzw. } b^*_\nu(\omega_k, \varphi_j)\ (w = \omega_k), \\ \text{bzw. } b_\nu(z, \varphi_j)\ (w = \text{Nichtfixpunkt } z), \end{matrix} \qquad (\nu \geqq 0)$$

($j = 1, 2, \ldots, \mu$ stellt den Zeilenindex der betreffenden Spalte dar). Es sei λ_0 der Exponent von w in $\mathfrak{d}$. Wir betrachten die folgendermaßen erklärte Matrix M^*_m: Ihre ersten $\mu - p_0 + 1$ Spalten sind mit den Spalten von $\mathsf{M}(\mathfrak{d})$ identisch, ihre restlichen m Spalten sind die soeben definierten $\mathfrak{b}_{\lambda_0+\nu}$ $(0 \leqq \nu \leqq m-1,\ m \geqq 1)$. Eine Form $\varphi(\tau) = \sum_{\nu=1}^{\mu} \xi_\nu \varphi_\nu(\tau)$ aus $\mathfrak{C}_r^+$, deren Koeffizientenvektor $\mathfrak{x} = \{\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_\mu\}$ die Eigenschaft hat, daß sein algebraisches Skalarprodukt mit jeder Spalte von M^*_m verschwindet, ist ein Multiplum von $\mathfrak{a}\mathfrak{d}(w)^m$ und umgekehrt. Daher bedeutet $u_m = 0$, daß $\mathfrak{b}_{\lambda_0+m}$ sich aus den Spalten von M^*_m linear mit skalaren Koeffizienten kombinieren läßt, $u_m = 1$, daß dies nicht möglich ist. Wenn nun das algebraische Skalarprodukt von $\mathfrak{x}$ mit jeder Spalte von $\mathsf{M}(\mathfrak{d})$ und mit jeder Spalte $\mathfrak{b}_{\lambda_0+h_i-1}(w)$ $(1 \leqq i \leqq p_0)$ verschwindet, so heißt dies, daß φ ein Multiplum von $\mathfrak{a}\mathfrak{d}(w)^{h_{p_0}}$, also von $\mathfrak{a}\mathfrak{d}(w)^n$ für jedes

natürliche n ist, also daß φ identisch verschwindet. Es sei $\tilde{\mathsf{M}}(\mathfrak{d}, w)$ die Matrix, deren erste $\mu - p_0 + 1$ Spalten mit denen von $\mathsf{M}(\mathfrak{d})$ übereinstimmen und als deren restliche Spalten die $\mathfrak{d}_{\lambda_0+h_i-1}(w)$ $(1 \leqq i \leqq p_0)$ auftreten. Da die algebraische Orthogonalität des Vektors ξ zu den Spalten von $\tilde{\mathsf{M}}(\mathfrak{d}, w)$ das Verschwinden aller ξ_ν nach sich zieht, hat $\mathsf{M}(\mathfrak{d}, w)$ den Rang μ, und daher gilt

Satz 12. *Es seien die Voraussetzungen von Satz 9 erfüllt, und es sei w ein beliebiger Punkt in $\mathfrak{R}$, λ_0 sein Exponent in $\mathfrak{d}$, $\lambda_0' = \lambda_0$, wenn $w \neq \xi_h (1 \leqq h \leqq \sigma_0)$, $\lambda_0' = \lambda_0 + \vartheta_h$, wenn $w = \xi_h$, $\mathfrak{G}^*(\mathfrak{d})$ wie in Satz 11 eines derjenigen Funktionensysteme, die aus $\mathfrak{G}(\mathfrak{d})$ durch die Tilgung einer der in Satz 9 angegebenen Funktionen entstehen. Dann bilden die Funktionen von $\mathfrak{G}^*(\mathfrak{d})$ zusammen mit den Quersummen*

$$H(\tau, w, \lambda_0' + h_i(w) - 1) \quad (1 \leqq i \leqq p_0)$$

eine Basis von $\mathfrak{S}_\tau^+$.

Um für den nach (6) vorgegebenen Divisor $\mathfrak{d}$ ein genaues Multiplum $F(\tau)$ von $\mathfrak{d}^{-1}$ zu bestimmen, welches die dem obigen Ansatz entsprechenden Drehreste besitzt, ziehen wir die automorphen Primformen heran. Es seien die reellen Zahlen $\varkappa_h$ mit $0 \leqq \varkappa_h < 1$ $(1 \leqq h \leqq \sigma_0)$ und die rationalen Zahlen $\varrho_k = \frac{a_k}{l_k}$ mit ganzen a_k und $0 \leqq \varrho_k < 1$ $(1 \leqq k \leqq e_0)$ willkürlich aber fest vorgegeben. Wir erklären $\varkappa_h^+$ durch (7) (9), $\hat{\varkappa}_h$, $\hat{\varrho}_k$ durch (17) und bilden das Potenzprodukt

$$(29) \qquad F(\tau) = Q(\tau, \mathfrak{d}) = \prod_{h=1}^{\sigma_0} Z(\tau, \xi_h)^{\hat{\varkappa}_h - \alpha_h} \prod_{k=1}^{e_0} Z(\tau, \omega_k)^{\hat{\varrho}_k - \beta_k} \prod_{m=1}^{d_0} Z(\tau, \tau_m)^{-\lambda_m}.$$

Es sei speziell $\mathfrak{d}$ ein Polygon, es seien also die α_h, β_k nicht negativ, die τ_m, falls vorhanden, paarweise verschiedene Nichtfixpunkte in $\mathfrak{R}$ und die λ_m positiv. $F(\tau)$ gehört einer Klasse $\{\Gamma, +r_1, u_\mathfrak{d}^{*-1}\}$ mit einem reellen r_1 und einem gewissen Multiplikatorsystem $u_\mathfrak{d}^*$ des Betrages Eins an, das wir uns aus $u_\mathfrak{d}^* \subset [\Gamma, -r]$ $(r = 2 + r_1)$ bestimmt denken können. Man erkennt leicht, daß $u_\mathfrak{d}^*$ in dieser Eigenschaft die Drehreste $\varkappa_h$ bzw. ϱ_k aufweist. Denn nach (17) und (29) hat die Klasse $\{\Gamma, -2-r_1, u_\mathfrak{d}^*\}$ diejenigen Drehreste $\varkappa_{1h}$, ϱ_{1k}, welche durch

$$\varkappa_{1h} \equiv -\hat{\varkappa}_h \equiv \varkappa_h^+ \equiv \varkappa_h \pmod 1, \quad \varrho_{1k} = 1 - \frac{1}{l_k} - \varrho_k = \varrho_k$$

erklärt sind, was bereits die Behauptung ausdrückt. Wir berechnen ferner für die Klasse $\{\Gamma, -r, u_\mathfrak{d}^*\}$ den Wert $a^+ - 2p_0 + 1$. Mit $n = \operatorname{ord} \mathfrak{d}$ gilt nach (29)

$$-r_1 \varrho_0 = -n + \sum_{h=1}^{\sigma_0} \hat{\varkappa}_h + \sum_{k=1}^{e_0} \hat{\varrho}_k,$$

$$(30) \qquad (r-2)\varrho_0 = r\varrho_0 - (2p_0 - 2) - q_0 = n + \sum_{h=1}^{\sigma_0} \varkappa_h^+ + \sum_{k=1}^{e_0} \varrho_k - q_0,$$

$$a^+ - 2p_0 + 1 = n - 1,$$

so daß die Voraussetzungen von Satz 9 für $n \geqq 1$ erfüllt sind. Die letzte Gleichung bedeutet im übrigen so viel wie $\nu_0(-r, u_0^*, \mathfrak{a}\mathfrak{d}) = p_0$.

Bildet man die Divisoren

$$\mathfrak{d}_0 = (w)^{p_0}, \quad \mathfrak{d} = \prod_{m=1}^{p_0} (w_m)$$

mit paarweise verschiedenen sonst beliebigen Punkten w_m in $\mathfrak{R}$ und einem beliebigen festen w in $\mathfrak{R}$, bildet man ferner, jedesmal unter Verwendung der gleichen $\varkappa_h$, ϱ_k, die oben erklärten Funktionen $Q(\tau, \mathfrak{d}_0)$, $Q(\tau, \mathfrak{d})$, so wird deren Quotient

$$\Theta(\tau, \mathfrak{d}) = \frac{Q(\tau, \mathfrak{d}_0)}{Q(\tau, \mathfrak{d})} = \prod_{m=1}^{p_0} \frac{Z(\tau, w_m)}{Z(\tau, w)} \subset \{\Gamma, 0, \chi\}$$

eine multiplikative Funktion mit dem Divisor $\mathfrak{d}\mathfrak{d}_0^{-1}$, lauter Multiplikatoren χ des Betrages Eins und lauter verschwindenden Drehresten. Hier kann man durch Wahl der w, w_m erreichen, daß χ mit einem willkürlichen geraden Abelschen Charakter von Γ zusammenfällt[5]). Daraus folgt das für die Tragweite des Satzes 12 wichtige Ergebnis:

Wenn $n = \operatorname{ord}\mathfrak{d} \geqq p_0$ ist, so erhält man durch obigen Ansatz in der Gestalt u_0^* jedes Multiplikatorsystem $[\Gamma, -r]$, welches den Betrag Eins und die gegebenen Drehreste $\varkappa_h, \varrho_k$ aufweist.

Nach (30) hat man nun

$$r\varrho_0 = n + 2p_0 - 2 + \sum_{h=1}^{\sigma_0} \varkappa_h^+ + \sum_{k=1}^{e_0} \varrho_k; \tag{30 a}$$

daher ist $n \geqq p_0$ sicher erfüllt, wenn

$$r\varrho_0 \geqq 3p_0 - 2 + q_0, \quad r \geqq 3 + \frac{2 - q_0}{2p_0 - 2 + q_0},$$

und es besteht demgemäß der folgende

Satz 12 a. *Die Voraussetzungen und die Behauptungen von Satz 12 gelten für jede Klasse $\{\Gamma, -r, v\}$, für die*

$$r\varrho_0 \geqq 3p_0 - 2 + \sum_{h=1}^{\sigma_0} \varkappa_h^+ + \sum_{k=1}^{e_0} \varrho_k$$

zutrifft; die Abschätzung für r ist immer dann erfüllt, wenn

$$r \geqq 3 + \frac{2 - q_0}{2\varrho_0}.$$

Die hier auftretende Schranke $r^0 = 3 + \dfrac{2 - q_0}{2p_0 - 2 + q_0}$ hat folgende Werte:

$$p_0 = 1: \quad r^0 = 2 + \frac{2}{q_0} \leqq 6,$$

$$p_0 \geqq 2: \quad r^0 = 2 + \frac{2p_0}{2\varrho_0} \leqq 2 + \frac{p_0}{p_0 - 1} = 3 + \frac{1}{p_0 - 1} \leqq 4.$$

[5]) H. Weyl, Die Idee der Riemannschen Fläche, Teubner 1913, § 17.

Ferner gilt:

Für alle Γ von erster Art mit $\sigma_0 \geqq 2$ ist $r^0 \leqq 3$.

Aus dem soeben dargestellten Zusammenhang läßt sich durch Spezialisierung ein etwas übersichtlicheres Resultat gewinnen:

Satz 13. *Es seien die Zahlen $\varkappa_h$, ϱ_k unter den Bedingungen*

$$0 \leqq \varkappa_h < 1,\ 0 \leqq \varrho_k < 1,\ l_k \varrho_k \text{ ganz } (1 \leqq h \leqq \sigma_0,\ 1 \leqq k \leqq e_0),$$

es sei der Punkt w in $\mathfrak{R}$ und die natürliche Zahl n willkürlich vorgegeben. Es werde r durch (30 a) erklärt, es sei v ein Multiplikatorsystem des Betrages Eins, das als Multiplikatorsystem $[\Gamma, -r]$ die Drehreste $\varkappa_h$, ϱ_k aufweist. Dann gilt für die Klasse $\{\Gamma, -r, v\}$ zunächst

$$a^+ - 2p_0 + 1 = \mu - p_0 = n - 1 \geqq 0.$$

Man betrachte die zu einem festen Punkte $w (= \xi_h$ oder $= \omega_k$ oder $=$ einem Nichtfixpunkt $z)$ in $\mathfrak{R}$ mit den Daten $\{\Gamma, -r, v\}$ nach (15) gebildeten Quersummen $H(\tau, w, \boldsymbol{\nu})$ $(w \neq \xi_h)$ bzw. $H(\tau, w, \boldsymbol{\nu} + \vartheta_h)$ $(w = \xi_h)$ und nenne $\mathfrak{Q}$ irgend ein System dieser Funktionen, das in jedem Falle durch Angabe der verwendeten $\boldsymbol{\nu} \geqq 0$ zu bestimmen ist. Dann gilt mit der aus (29) zu entnehmenden Bedeutung des Multiplikatorsystems

$$u_{w,n} = u_0^* \subset [\Gamma, -r] \qquad (\mathfrak{g} = (w)^n):$$

a) *Für $v = u_{w,n}$ besteht das System $\mathfrak{Q}$ mit $0 \leqq \boldsymbol{\nu} \leqq \mu - p_0 - 1$ aus lauter linear unabhängigen Funktionen; dagegen sind die Funktionen des Systems $\mathfrak{Q}$ mit $0 \leqq \boldsymbol{\nu} \leqq \mu - p_0$ linear abhängig.*

b) *Für $v \neq u_{w,n}$ besteht das System $\mathfrak{Q}$ mit $0 \leqq \boldsymbol{\nu} \leqq \mu - p_0$ aus lauter linear unabhängigen Funktionen.*

c) *Für $v = u_{w,n}$ stellt das System $\mathfrak{Q}$ mit*

$$0 \leqq \boldsymbol{\nu} \leqq \mu - p_0 - 1 \quad \text{und} \quad \boldsymbol{\nu} = \mu - p_0 + h_i(w)\ (1 \leqq i \leqq p_0)$$

eine Basis von $\mathfrak{S}_r^+$ dar.

Die hier auftretenden Lückenordnungen $h_i(w)$ sind nur für $p_0 = 1$ und für die $p_0 \geqq 2$ in den hyperelliptischen Fällen genauer bekannt. Es gilt $h_1 = 1$ für $p_0 = 1$ und alle w, ferner in den hyperelliptischen Fällen

$$(31)\quad \begin{aligned} h_i(w) &= i, \text{ wenn } w \text{ kein Verzweigungspunkt ist.} \\ h_i(w) &= 2i - 1, \text{ wenn } w \text{ ein Verzweigungspunkt ist.} \end{aligned} \qquad (1 \leqq i \leqq p_0)$$

Mit den Kriterien des Abschnitts 4 ist das eigentliche Ziel der Untersuchungen, die Zurückführung der Daten, von denen eine Basis der Schar $\mathfrak{S}_r^+$ abhängt, auf die Weierstrassschen Lückenzahlen, also auf ein einheitlich definiertes System von Bestimmungsstücken, erreicht. Eine weitere Reduktion des Problems ist offenbar nicht zu erwarten. Im Bereiche der absolut konvergenten Quersummen H, d. h. für $r > 2$ bleibt die Frage der Basisbestimmung lediglich in den Klassen $\{\Gamma, -r, v\}$

noch offen, auf die Satz 12 nicht angewendet werden kann; dies sind nach Satz 12a ausschließlich Klassen mit

$$2 < r < 3 + \frac{2 - q_0}{2p_0 - 2 + q_0}.$$

Aber auch in den Klassen, deren r den Ungleichungen von Satz 12a genügen, liegen zweifellos komplizierte Verhältnisse vor, wenn man sich auf die Betrachtung von Quersummen H beschränkt, die mit Hilfe eines einzigen Parameterpunktes w gebildet sind.

Im Falle $p_0 = 1$ ergibt sich eine volle Übersicht über die ganzzahligen Parameterwerte $\nu \geqq 0$, für welche die mit einem festen w gebildeten $H(\tau, w, \nu)$ $(w \neq \xi_h$ für $1 \leqq h \leqq \sigma_0)$ bzw. $H(\tau, w, \nu + \vartheta_h)$ $(w = \xi_h)$ eine Basis von $\mathfrak{C}_r^+$ darstellen, gemäß der folgenden Disjunktion: Ist (in der Terminologie des Satzes 13) $\nu \neq u_{w,n}$, so gewinnt man eine Basis von $\mathfrak{C}_r^+$ durch die Wahl der ersten μ-Werte $\nu = 0, 1, 2, \ldots, \mu - 1$. Ist dagegen $\nu = u_{w,n}$, so überspringe man, um eine Basis von $\mathfrak{C}_r^+$ zu bestimmen, den letzten dieser Werte, $\mu - 1$, und ersetze ihn durch den nächstgrößeren, also durch $\nu = \mu$. Die Einfachheit dieser Vorschrift muß allerdings, wie bereits einleitend hervorgehoben wurde, ziemlich teuer erkauft werden. Denn es hat sich, auch bei ganz konkreten Gruppen Γ und selbst im Falle $p_0 = 1$ als recht schwierig erwiesen, die Multiplikatorsysteme $u_{w,n}$ der Primformpotenzen $Q(\tau, \mathfrak{g})$ aus (29) so weit zu bestimmen, daß die obige Disjunktion praktisch realisiert werden kann. Trotzdem gelangt man in günstig gelagerten konkreten Sonderfällen, auch für Gruppen Γ mit $p_0 > 1$, durch Anwendung des Satzes 12 zu einer Fülle von vollständigen expliziten Basisbestimmungen, wie nun an einigen Beispielen gezeigt werden soll.

5. Im folgenden bezeichne wie in[1]) $\Gamma(N)$ für natürliches N die Hauptkongruenzgruppe der Stufe N, d. h. die Gruppe der unimodularen ganzen $L \equiv I \pmod N$. — Auf die Erörterung des naheliegenden Beispiels $\Gamma = \Gamma(6)$ kann verzichtet werden, da der Fall $p_0 = 1$ allgemein erledigt ist. Wir betrachten die Klassen $\{\Gamma(N), -r, v\}$ mit $N \equiv 0 \pmod 6$, $r > 2$ und $v =$ Multiplikatorsystem $[\Gamma(1), -r]$[5a]) der Modulform

$$\Delta(\tau)^{\frac{r}{12}} = e^{\pi i \frac{r}{6}} \prod_{m=1}^{\infty} (1 - e^{2\pi i m \tau})^{2r}.$$

Bekanntlich ist $\sqrt[6]{\Delta(\tau)}$ das bis auf einen konstanten Faktor einzige Differential erster Gattung der Gruppe $\Gamma(6)$. Wir schreiben zur Abkürzung $s = \frac{rN}{12}$ und setzen

$$(32)\quad \delta(x) = \begin{cases} 1, \text{ wenn } x \text{ ganz} \\ 0 \text{ sonst} \end{cases}, \quad [x] = \text{größte ganze Zahl} \leqq x \ (x \text{ reell}).$$

[5a]) Vgl. etwa H. Rademacher, Bestimmung einer gewissen Einheitswurzel in der Theorie der Modulfunktionen, Journ. Lond. Math. Soc. 7, 1 (1932) und dort zitierte Literatur; in (20) ist für negatives h im Nenner des Restsymbols die hier durch (35) gegebene Modifikation des Restsymbols einzutragen.

Die Drehreste von $\{\Gamma(N), -r, v\}$ in den Spitzen von $\Gamma(N)$ sind alle einander gleich und zwar $= \varkappa = s - [s]$. Daher wird für diese Klasse

$$a^+ - 2p_0 + 1 = (r-2)\frac{\mu_0}{12} + \sigma_0(1-\varkappa^+) - 1 \geqq 0$$

$$\left(\varrho_0 = \frac{\mu_0}{12},\ \mu_0 = \text{Index}\,[\bar{\Gamma}(1):\bar{\Gamma}(N)]\right). \tag{33}$$

Die Sätze 9, 10, 11, 12 lassen sich auf $\{\Gamma(N), -r, v\}$ deshalb anwenden, weil $\Delta(\tau)^{-\frac{r-2}{12}}$ der Klasse $\{\Gamma(N), r-2, v^{-1}\}$ angehört. Für die (von den Bruchbestandteilen befreite) gemeinsame Ordnung $-b = -b_{N,r}$ dieser Funktion in den Spitzen ergibt sich

$$b = b_{N,r} = (r-2)\frac{N}{12} + 1 - \varkappa^+ = \left[\frac{rN}{12}\right] - \frac{N}{6} - \delta\left(\frac{rN}{12}\right) + 1,$$

und es ist nach (33) in den Bezeichnungen von Satz 9

$$\mathfrak{d} = \prod_{h=1}^{\sigma_0} (\xi_h)^{b_h},\quad \sigma_0 b = \text{ord}\,\mathfrak{d} = \mu - p_0 + 1.$$

Damit sind — bis auf die Lückenzahlen $h_i(w)$ — die sämtlichen Daten für die Anwendung der genannten Sätze zusammengestellt.

Es soll jetzt eine Klasse numerischer Beispiele mit $p_0 = 3$ vollständig diskutiert werden[6]). Die Thetareihen[7])

$$\vartheta_{00}(\tau) = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} e^{\pi i m^2 \frac{\tau}{2}},\quad \vartheta_{01}(\tau) = \vartheta_{00}(\tau+2) = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} (-1)^m e^{\pi i m^2 \frac{\tau}{2}} \tag{34}$$

sind ganze Modulformen $\{\Gamma(4), -\frac{1}{2}, v_\vartheta\}$ mit[8])

$$v_\vartheta(L) = \left(\frac{\gamma}{\delta}\right)_* = \left(\frac{\gamma}{|\delta|}\right)(-1)^{\frac{\text{sgn}\,\gamma-1}{2}\cdot\frac{\text{sgn}\,\delta-1}{2}}$$

$$\left(L = \begin{pmatrix}\alpha & \beta\\ \gamma & \delta\end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix} \pmod 4,\ \gamma \neq 0;\ \left(\frac{0}{1}\right)_* = 1\right). \tag{35}$$

L sei wie alle anderen im folgenden auftretenden zweireihigen Matrizen ganzzahlig und unimodular. Da e_0 und die Drehreste $\varkappa_h$ der Klasse $\{\Gamma(4), -\frac{1}{2}, v_\vartheta\}$ $(1 \leqq h \leqq \sigma_0 = 6)$ sämtlich verschwinden[7]), da ferner $\varrho_0 = \frac{\mu_0}{12}$ (vgl. (33)) für $\Gamma(4)$ den Wert 2 hat und da schließlich $\vartheta_{00}(\tau)$

---

[6]) Bezüglich der im Folgenden auftretenden Gruppe $\bar{\Gamma}(4)$ und ihrer Thetareihen vgl. H. Petersson, Über die Berechnung der Skalarprodukte ganzer Modulformen, Comm. Math. Helv. Bd. 22 (1949).

[7]) Vgl. [6]) und: H. Petersson, Über die Entwicklungskoeffizienten der ganzen Modulformen und ihre Bedeutung für die Zahlentheorie, Abhandl. a. d. Math. Seminar Hamburg **8** (1930); Zur analytischen Theorie der Grenzkreisgruppen IV, Math. Annalen **115** (1938).

[8]) a. a. O. [7]) Abhandl. a. d. Math. Seminar Hamburg **8** (1930) und dort zitierte Literatur.

eine in $\mathfrak{H}$ konvergente Produktentwicklung gestattet, hat sowohl $\vartheta_{00}(\tau)$ als auch $\vartheta_{01}(\tau)$ die Eigenschaften einer Primform zu je einer Spitze eines Fundamentalbereichs der $\Gamma(4)$.

Wir betrachten die Untergruppe $\tilde{\Gamma}(4)$ von $\Gamma(4)$, deren Matrizen L den Bedingungen

$$(36)\quad L = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix} \text{ ganz, } |L| = \alpha\delta - \beta\gamma = 1,\ \alpha \equiv \delta \equiv 1\,(4),\ \beta \equiv \gamma \equiv 0\,(8)$$

genügen. $\tilde{\Gamma}(4)$ ist ein Normalteiler der vollen Modulgruppe mit den Daten

$$(37)\qquad \Gamma = \tilde{\Gamma}(4)\colon\ \sigma_0 = 12,\ e_0 = 0,\ \varrho_0 = \frac{\mu_0}{12} = 8,\ p_0 = 3.$$

Beim Übergang von $\Gamma(4)$ zu $\tilde{\Gamma}(4)$ zerfällt jede Spitze eines Fundamentalbereiches von $\Gamma(4)$ in zwei nach $\tilde{\Gamma}(4)$ inäquivalente Spitzen, welche gemäß (36) beide die Breite 8 erhalten. Daraus ergibt sich das Verhalten der Funktionen (34) in ihrer Eigenschaft als automorphe Formen der Gruppe $\tilde{\Gamma}(4)$: Jede von ihnen hat in genau zwei Spitzen eines Fundamentalbereichs $\tilde{\mathfrak{R}}_4$ von $\tilde{\Gamma}(4)$ je eine Nullstelle zweiter Ordnung und ist in allen anderen Punkten von $\tilde{\mathfrak{R}}_4$ regulär und von Null verschieden. Die in diesem Sinne den Modulformen ϑ_{00} bzw. ϑ_{01} zugeordneten Spitzen von $\tilde{\mathfrak{R}}_4$ mögen mit ζ_1, ζ_2 bzw. ζ_3, ζ_4 bezeichnet werden.

Es seien s und t reell. Mit einem gewissen Multiplikatorsystem $v_\vartheta^{(s,t)}$ des Betrages Eins aus $\left[\tilde{\Gamma}(4), -\frac{s+t}{2}\right]$ gilt

$$(38)\qquad \vartheta^{(s,t)}(\tau) \equiv \vartheta_{00}^{s}(\tau)\,\vartheta_{01}^{t}(\tau) \subset \left\{\tilde{\Gamma}(4), -\frac{s+t}{2},\ v_\vartheta^{(s,t)}\right\}.$$

Die Drehreste $\varkappa_h$ dieser Klasse haben die Werte

$$(39)\quad \varkappa_1 = \varkappa_2 = 2s - [2s],\ \varkappa_3 = \varkappa_4 = 2t - [2t],\ \varkappa_5 = \varkappa_6 = \cdots = \varkappa_{12} = 0.$$

Wegen $\vartheta^{(s,t)}(\tau) \subset \{\tilde{\Gamma}(4), -2, 1\}$ für ganze s, t mit $s+t = 4$ ist

$$v_\vartheta^{(2-s,\,2-t)} v_\vartheta^{(s,t)} = 1,\ \vartheta^{(2-s,\,2-t)}(\tau) \subset \left\{\tilde{\Gamma}(4),\ \frac{s+t}{2} - 2,\ (v_\vartheta^{(s,t)})^{-1}\right\}.$$

Es sei insbesondere $s \geqq 0$, $t \geqq 0$, $s+t > 0$. Dann stellt $\vartheta^{(s,t)}(\tau)$ eine ganze Modulform dar, und man findet nach (37), (39) für die Klasse (38) von $\vartheta^{(s,t)}$:

$$(40)\qquad a^+ - 2p_0 + 1 = 2([2s] + [2t] - \delta(2s) - \delta(2t)) - 13.$$

Daher ist $a^+ - 2p_0 + 1$ ungerade und fällt für $[2s] - \delta(2s) + [2t] - \delta(2t) \geqq 7$ positiv aus. Die letzte Ungleichung werde im folgenden als erfüllt vorausgesetzt; sie gilt z. B. stets für $s > \frac{3}{2}$, $t > 2$ und auch für $s > 2$, $t > \frac{3}{2}$.

Die zahlentheoretische Funktion $\beta_s = [2s] - \delta(2s) - 3$ hat offenbar die Werte

$$\beta_s = k \text{ für } \frac{3+k}{2} < s \leqq 2 + \frac{k}{2},\ k = 0, 1, 2, \ldots, \tag{41}$$

und nun erweist sich $\vartheta^{(2-s,\,2-t)}(\tau)$ als genaues Multiplum von $\mathfrak{d}^{-1}$ in der Klasse $\left\{\tilde{\Gamma}(4),\ \frac{s+t}{2} - 2,\ (v_\vartheta^{(s,t)})^{-1}\right\}$, wo

$$\mathfrak{d} = (\xi_1)^{\beta_s}\,(\xi_2)^{\beta_s}\,(\xi_3)^{\beta_t}\,(\xi_4)^{\beta_t};$$

$\mathfrak{d}$ ist nach (41) dann und nur dann ein Polygon, wenn $s > \frac{3}{2}$ und zugleich $t > \frac{3}{2}$.

Es läßt sich leicht nachweisen, daß $\tilde{\Gamma}(4)$ (d. h. das der Gruppe $\tilde{\Gamma}(4)$ entsprechende algebraische Gebilde) nicht hyperelliptisch ist. Wir betrachten allgemeiner das System $\mathfrak{W} = \mathfrak{W}(\mathfrak{N})$ der Weierstraß-Punkte im kanonischen Fundamentalbereich $\mathfrak{K}_\mathfrak{N}$ eines echten Normalteilers $\Gamma = \mathfrak{N}$ der Modulgruppe $\Gamma(1)$ vom endlichen Index μ_0 in $\Gamma(1)$. Offenbar zerfällt $\mathfrak{W}$ in vollständige Teilsysteme von untereinander nach $\Gamma(1)$ äquivalenten Punkten in $\mathfrak{K}_\mathfrak{N}$. Je zwei Punkte w, w' des gleichen Teilsystems besitzen die gleichen Lückenzahlen, d. h. es gilt $h_i(w) = h_i(w')$ für $w \subset \mathfrak{W}(\mathfrak{N})$, $w \sim w'$ $(\Gamma(1))$, $w, w' \subset \mathfrak{K}_\mathfrak{N}$, $1 \leqq i \leqq p_0$. Daher besteht $\mathfrak{W}(\mathfrak{N})$ aus mindestens μ_0 Punkten, wenn $\mathfrak{W}$ einen Nichtfixpunkt enthält, und aus mindestens σ_0 Punkten, wenn $\mathfrak{W}$ eine Spitze enthält. Andererseits müßte $\mathfrak{W}(\tilde{\Gamma}(4))$ aus acht Punkten bestehen, wenn $\tilde{\Gamma}(4)$ hyperelliptisch wäre, und dies widerspricht nach (37) dem soeben dargestellten Sachverhalt. Auf die gleiche Art beweist man, daß $\Gamma(7)$ und $\Gamma(8)$ nicht hyperelliptisch sind. Für $N \geqq 9$ ergibt sich die analoge Aussage über $\Gamma(N)$ aus einer Teilbarkeitsrelation und einer einfachen numerischen Abschätzung [9]).

Für einen beliebigen Punkt w im kanonischen Fundamentalbereich $\mathfrak{K}$ einer Grenzkreisgruppe Γ von erster Art nennt man

$$\lambda(w) = \sum_{i=1}^{p_w} (h_i(w) - i) \quad (w \subset \mathfrak{K})$$

die Lückenordnung von w. Die Summe aller Lückenordnungen $\lambda(w)$, erstreckt über alle Punkte w von $\mathfrak{K}$, hat den Wert $(p_0 - 1)\,p_0\,(p_0 + 1)$. Da dieser Wert bei den Gruppen $\Gamma = \Gamma(4), \Gamma(7), \Gamma(8)$ erheblich kleiner ausfällt als μ_0, so stimmt w für diese Gruppen mit dem System der Spitzen überein, und man erhält für jede Spitze ξ der betreffenden Gruppe Γ:

$$\begin{gathered}\lambda(\xi) = 2\ (\Gamma = \tilde{\Gamma}(4)),\quad \lambda(\xi) = 1\ (\Gamma = \Gamma(7)),\quad \lambda(\xi) = 5\ (\Gamma = \Gamma(8)),\\ h_1(\xi) = 1,\ h_2(\xi) = 2,\ h_3(\xi) = 5\ (\Gamma = \tilde{\Gamma}(4));\\ h_1(\xi) = 1,\ h_2(\xi) = 2,\ h_3(\xi) = 4\ (\Gamma = \Gamma(7)).\end{gathered} \tag{42}$$

[9]) Vgl. H. Petersson, Zwei Bemerkungen über die Weierstraßpunkte der Kongruenzgruppen, erscheint im Archiv d. Math.

Mit diesen Daten sind für die Klassen $\left\{\tilde{\Gamma}(4), -\frac{s+t}{2}, v_\vartheta^{(s,t)}\right\}$ alle Unterlagen zu einer Realisierung des Satzes 12 gewonnen. Es sei entweder $s>\frac{3}{2}$, $t>2$ oder $s>2$, $t>\frac{3}{2}$ (s, t reell). Man bilde zunächst das System $\mathfrak{G}(\mathfrak{d})$:

$$G_{-\frac{s+t}{2}}(\tau, v_\vartheta^{(s,t)}, A_h, \tilde{\Gamma}(4), \nu_h+\delta(2s)) \tag{43}$$

$$(0 \leqq \nu_h \leqq \beta_s - 1;\ h = 1, 2 \ -\ \text{wofern } s>2),$$

$$G_{-\frac{s+t}{2}}(\tau, v_\vartheta^{(s,t)}, A_h, \tilde{\Gamma}(4), \nu_h+\delta(2t)) \tag{44}$$

$$(0 \leqq \nu_h \leqq \beta_t - 1;\ h = 3, 4 \ -\ \text{wofern } t>2)$$

und schließe nun entweder eine der beiden Funktionen (43) mit $\nu_1 = \nu_2 = \beta_s - 1$ oder eine der beiden Funktionen (44) mit $\nu_3 = \nu_4 = \beta_t - 1$ von $\mathfrak{G}(\mathfrak{d})$ aus, — das erstere kann für $s>2$, das letztere für $t>2$ geschehen. — Dem dadurch entstehenden System $\mathfrak{G}^*(\mathfrak{d})$ (das also die sämtlichen Funktionen (43), (44) mit genau einer Ausnahme enthält) füge man die drei Funktionen eines der folgenden zwölf Systeme hinzu:

$$G_{-\frac{s+t}{2}}(\tau, v_\vartheta^{(s,t)}, A_h, \tilde{\Gamma}(4), m) \tag{45}$$

(h ein fester Wert mit $5 \leqq h \leqq 12$; $m = 1, 2, 5$)

$$G_{-\frac{s+t}{2}}(\tau, v_\vartheta^{(s,t)}, A_h, \tilde{\Gamma}(4), \beta_s + \delta(2s) + m) \tag{46}$$

($h = 1$ oder 2; $m = 0, 1, 4$)

$$G_{-\frac{s+t}{2}}(\tau, v_\vartheta^{(s,t)}, A_h, \tilde{\Gamma}(4), \beta_t + \delta(2t) + m) \tag{47}$$

($h = 3$ oder 4; $m = 0, 1, 4$).

Dann entsteht eine Basis von $\mathfrak{C}^+(\tilde{\Gamma}(4), -\frac{s+t}{2}, v_\vartheta^{(s,t)})$. Anstelle eines der zwölf Tripel (45) (46) (47) kann man sich mit dem gleichen Erfolg auch jedes Tripels

$$\Phi_{-\frac{s+t}{2}}(\tau, v_\vartheta^{(s,t)}, z, \tilde{\Gamma}(4), m) \qquad (z \subset \mathfrak{H},\ m = 0, 1, 2) \tag{48}$$

bedienen. — Die hier angegebene Basiskonstruktion besteht insbesondere für ganze und halbzahlige Dimensionen $-\frac{s+t}{2}$ und für diejenigen explizit bestimmten Multiplikatorsysteme $v_\vartheta^{(s,t)} = v_\vartheta^{s+t}$, die man aus diesem Ansatz für ganze s und t mit $s \geqq 2$, $t \geqq 2$, $s+t \geqq 5$ erhält.

Zu ähnlichen Ergebnissen gelangt man für $\Gamma = \Gamma(7)$ und $\Gamma = \Gamma(8)$. Im Falle $\Gamma = \Gamma(7)$ kann man, um die Voraussetzungen des Satzes 12 in der analogen Weise zu realisieren, von der Funktion $F(\tau) = \Delta(\tau)^{-\frac{r-2}{12}}$

ausgehen, die eine Modulform von der Dimension $r-2$ darstellt. Im Falle $\Gamma = \Gamma(8)$ kann man ebenfalls von der Form $F(\tau) = \Delta(\tau)^{-\frac{r-2}{12}}$ oder von der Form $F(\tau) = \vartheta^{(2-t,\,2-t)}(\tau)$ ausgehen. Bei der Wahl $F(\tau) = \Delta(\tau)^{-\frac{r-2}{12}}$ ist jedoch zu beachten, daß das in der allgemeinen Theorie mit v bezeichnete Multiplikatorsystem $[\Gamma, -r]$ nicht mit dem Multiplikatorsystem von $\Delta(\tau)^{12}$ übereinstimmt. Unabhängig davon spielt bei allen diesen Ansätzen $F(\tau)$ die Rolle der automorphen Form (29). Auf die ausführliche Formulierung der Ergebnisse kann verzichtet werden, da ihre genaue Struktur aus Satz 12 und dem Beispiel $\Gamma = \tilde{\Gamma}(4)$ zu ersehen ist.

Im Falle $\Gamma = \Gamma(8)$ müssen jedoch zur Durchführung einer dieser Konstruktionen die Weierstrassschen Lückenzahlen $h_i\,(w)$ $(1 \leqq i \leqq p_0)$ bestimmt werden, wobei es genügt, für w irgend eine Spitze der $\Gamma(8)$ einzusetzen. Diese Bestimmung läßt sich mit Hilfe des Riemann-Rochschen Satzes auf eine Eigenschaft der einfachen Thetareihen der $\Gamma(8)$ zurückführen. Sie gelingt wesentlich deshalb, weil die einfachen Thetareihen der Stufe 8 von den Dimensionen $-\frac{1}{2}$ und $-\frac{3}{2}$ vollständig bekannt sind.

Zur Stufe 8 gehören nach [6]) neben den Funktionen (34) die Thetareihen

$$\vartheta(\tau, h) = \sum_{m \equiv h\,(4)} e^{\pi i m^2 \frac{\tau}{4}} \in \left\{\Gamma(8), -\frac{1}{2}, v_\vartheta\right\} \quad (h = 0, 1, 2). \tag{49}$$

Sie stellen wie die Funktionen (34) ganze Modulformen dar und sind mit ihnen zusammen linear unabhängig. Ferner gehört zur $\Gamma(8)$ eine einfache Thetareihe der Dimension $-\frac{3}{2}$:

$$\vartheta_1(\tau, 1) = \sqrt[8]{\Delta(\tau)} = \sum_{m \equiv 1\,(4)} m\, e^{\pi i m^2 \frac{\tau}{4}} \in \left\{\Gamma(8), -\frac{3}{2}, v_\vartheta\right\}; \tag{50}$$

sie ist offenbar eine ganze Spitzenform.

Für die elementaren Konstanten der Klasse $\{\Gamma, -r, v\} \cong \{\Gamma(8), -\frac{1}{2}, v_\vartheta\}$ finden sich die Werte

$$\sigma_0 = 24,\ e_0 = 0,\ \varrho_0 = \frac{\mu_0}{12} = 16,\ p_0 = 5;\quad \varkappa_h = 0\ (1 \leqq h \leqq 24). \tag{51}$$

Hieraus folgt nach (8) und (50)

$$\nu_0(-\tfrac{1}{2}, v_\vartheta, \langle 1\rangle) = 8 - 5 + 1 + \nu_0(-\tfrac{3}{2}, v_\vartheta, \mathfrak{a}) \geqq 5; \tag{52}$$

in dieser Ungleichung kann rechts das Gleichheitszeichen geschrieben werden, weil $\vartheta_1(\tau, 1)$ wegen $\operatorname{ord} \mathfrak{a} = \frac{3}{2}\varrho_0$ ein genaues Multiplum von $\mathfrak{a}$ ist. Daher bilden die fünf Funktionen (34) und (49) eine Basis von $\mathfrak{C}_1$.

Für eine Spitze ζ von $\Gamma(8)$ und ganzes $k \geqq 0$ setzen wir

$$t_k = \nu_0(-\tfrac{1}{2}, v_\vartheta, (\zeta)^k) - \nu_0(-\tfrac{1}{2}, v_\vartheta, (\zeta)^{k+1}) \quad (k \geqq 0)$$
$$t'_k = \nu_0(-\tfrac{3}{2}, v_\vartheta, \mathfrak{a}(\zeta)^{-k}) - \nu_0(-\tfrac{3}{2}, v_\vartheta, \mathfrak{a}(\zeta)^{-k+1}) \quad (k \geqq 1).$$

Wie beim Beweise von Satz 12 gilt

$$0 \leqq t_k \leqq 1, \quad 0 \leqq t_k' \leqq 1, \quad t_{k-1} + t_k' = 1 \,(k \geqq 1), \quad \sum_{k=0}^{8} t_k = 5.$$

Dividiert man eine Form $\{\Gamma(8), -\frac{3}{2}, v_\vartheta\}$, die ein Multiplum von $\mathfrak{a}(\xi)^{-k}$, nicht aber von $\mathfrak{a}(\xi)^{-k+1}$ ist, durch $\vartheta_1(\tau, 1)$, so erhält man eine in $\mathfrak{R}$ außerhalb von ξ reguläre automorphe Funktion $\{\Gamma(8), 0, 1\}$, die in ξ die Ordnung $-k$ aufweist und umgekehrt. Daher sind die Weierstraßschen Lückenzahlen $h_i(\xi)$ $(1 \leqq i \leqq 5)$ durch $h_i(\xi) = k$, $t_{k-1} = 1$ erklärt.

Wir betrachten insbesondere die Spitze $\xi = \xi_1 = \infty$ und ordnen einer ganzen Form $f(\tau) \subset \{\Gamma(8), -\frac{1}{2}, v_\vartheta\}$ den Vektor

$$\mathfrak{c}(f) = \{b_0(I, f), b_1(I, f), \ldots, b_8(I, f)\}, \quad f \subset \mathfrak{C}_{\frac{1}{2}} \tag{53}$$

zu. Wegen $\frac{1}{2}\varrho_0 = 8$ ist $f(\tau)$ durch $\mathfrak{c}(f)$ eindeutig bestimmt. Der Schar $\mathfrak{C}_{\frac{1}{2}}$ der ganzen Formen $\{\Gamma(8), -\frac{1}{2}, v_\vartheta\}$ entspricht vermöge (53) ein lineares Vektorgebilde $\mathfrak{B}$ vom Range 5 im neundimensionalen komplexen Vektorraum. Indem wir die Reihenfolge der Einheitsvektoren $\mathfrak{e}_0, \mathfrak{e}_1, \ldots, \mathfrak{e}_8$ dieses Raumes durch

$$\mathfrak{c}(f) = \sum_{\nu=0}^{8} b_\nu(I, f)\, \mathfrak{e}_\nu$$

bestimmen, erhalten wir für die fünf Modulformen

$$f(\tau) = \vartheta(\tau, 0),\ \vartheta(\tau, 1),\ \vartheta(\tau, 2),\ \vartheta_{00}(\tau),\ \vartheta_{01}(\tau):$$
$$\mathfrak{c}(f) = \mathfrak{e}_0,\ \mathfrak{e}_1,\ 2\mathfrak{e}_4,\ \mathfrak{e}_0 + 2\mathfrak{e}_2 + 2\mathfrak{e}_8,\ \mathfrak{e}_0 - 2\mathfrak{e}_2 + 2\mathfrak{e}_8.$$

Mithin bilden die Vektoren $\mathfrak{e}_0, \mathfrak{e}_1, \mathfrak{e}_2, \mathfrak{e}_4, \mathfrak{e}_8$ eine Basis von $\mathfrak{B}$, und es ergibt sich in Ergänzung zu und in Übereinstimmung mit (42):

$$h_1(\xi) = 1,\ h_2(\xi) = 2,\ h_3(\xi) = 3,\ h_4(\xi) = 5,\ h_5(\xi) = 9. \tag{54}$$

(Eingegangen am 18. Februar 1948.)

Eine Bemerkung zum Konvergenzkriterium von Weierstraß.

Von

H. Jehle in Weinheim (Bergstr.)

Das Konvergenzkriterium von WEIERSTRASS[1]) lautet: Ist $\sum a_n$ eine Reihe mit beliebigen komplexen Gliedern, und kann für alle n von einer gewissen Stelle an der Quotient $\frac{a_{n+1}}{a_n}$ auf die Form

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = 1 + \frac{a}{n} + c_n \tag{1}$$

gebracht werden[2]) mit konstantem a und absolut konvergenter Reihe $\sum c_n$, so ist $\sum a_n$ dann und nur dann konvergent, wenn $\Re(a) < -1$ ist. Die Konvergenz ist dann eine absolute.

Daß die Bedingung hinreichend ist, ist leicht zu beweisen[3]), nicht so leicht, daß sie auch notwendig ist. Hierfür gaben A. PRINGSHEIM[4]) und I. A. GMEINER[5]) Beweise, die gegenüber dem WEIERSTRASS'schen als einfacher anzusehen sind. Der folgende dürfte wesentlich kürzer und durchsichtiger sein, als die bisher genannten. Wie bei diesen wird sich ergeben, daß $\sum a_n$ im Falle $\Re(a) = -1$, $a \neq -1$ noch beschränkte Teilsummen hat, für $a = -1$ und $\Re(a) > -1$ dagegen nicht mehr.

Hilfssatz 1. Für die Glieder der Reihen $\sum a_n$ und $\sum b_n$ mögen von einer gewissen Stelle an die Beziehungen

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{b_{n+1}}{b_n}(1 + c_n) \tag{2}$$

gelten, mit Zahlen c_n, für die $\sum c_n$ absolut konvergiert[6]). Wenn dann

[1]) K. WEIERSTRASS, Werke I S. 185. Vergl. auch K. KNOPP, Unendliche Reihen, 4. Auflage (1947) S. 412.

[2]) WEIERSTRASS fordert hier, daß $\frac{a_{n+1}}{a_n}$ sich in eine konvergente Reihe der Form $1 + \frac{a}{n} + \frac{a_2}{n^2} + \ldots$ entwickeln lasse. Spätere Autoren fordern eine Darstellung der Form $1 + \frac{a}{n} + \frac{\alpha_n}{n^\lambda}$ mit $\lambda > 1$ und beschränkten α_n. Das allein Wesentliche aber ist die absolute Konvergenz von $\sum\left(\frac{a_{n+1}}{a_n} - 1 - \frac{a}{n}\right)$.

[3]) Vgl. KNOPP a. a. O.

[4]) A. PRINGSHEIM Archiv Math. u. Phys. (3) **4**, S. 1–19, spez. S. 13–17 (1902).

[5]) I. A. GMEINER, Monatsh. Math. u. Phys. **19**, S. 149–163 (1908).

[6]) Mit c_n, c'_n, ... sollen im Folgenden die Glieder von absolut konvergenten Reihen bezeichnet werden. Sie brauchen nicht an jeder Stelle, an der sie auftreten, dieselben zu sein.

von den Reihen $\sum a_n$ und $\sum b_n$

(a) die eine beschränkte Teilsummen hat, so auch die andere;

(b) die eine konvergiert, so auch die andere.

Beweis. Da nach (2) auch $\frac{b_{n+1}}{b_n} = \frac{a_{n+1}}{a_n}(1+c_n')$ ist, so brauchen die beiden Behauptungen nur in der einen Richtung bewiesen zu werden. Aus (2) folgt nun, daß von einer Stelle an $a_n = b_n \cdot p_n$ gesetzt werden darf, wobei die p_n Teilprodukte eines absolut konvergenten Produktes sind. Abelsche Teilsummierung liefert dann, wenn die Teilsummen der Reihen $\sum a_n$ und $\sum b_n$ mit A_n bzw. B_n bezeichnet werden:

$$\sum_{\varrho=n+1}^{n+k} a_\nu = \sum_{\nu=n+1}^{n+k} b_\nu p_\nu = \sum_{\nu=n+1}^{n+k} B_\nu (p_\nu - p_{\nu+1}) - B_n p_{n+1} + B_{n+k} p_{n+k+1}.$$

Dies zeigt, daß aus der Beschränktheit der B_n die der A_n folgt, zeigt aber auch, daß aus der Konvergenz der B_n die der A_n folgt, denn $\sum (p_\nu - p_{\nu+1}) = \sum p_\nu c_{\nu+1}$ ist absolut konvergent.

Hilfssatz 2. Gilt

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = 1 + \frac{a}{n} + c_n \text{ und zugleich } \frac{b_{n+1}}{b_n} = 1 + \frac{a}{n} + c_n',$$

so ist

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{b_{n+1}}{b_n}(1+c_n'').$$

Denn es ist

$$\frac{1 + \frac{a}{n} + c_n}{1 + \frac{a}{n} + c_n'} = (1+c_n'').$$

Beweis, daß $\sum a_n$ divergiert, falls (1) gilt und $\Re(a) \geqq -1$ ist. Nach den beiden Hilfssätzen braucht die Behauptung nur für eine spezielle Reihe $\sum b_n$ bewiesen zu werden, für die $\frac{b_{n+1}}{b_n} = 1 + \frac{a}{n} + c_n$ gesetzt werden kann. Für $a = -1$ leistet schon die harmonische Reihe das Gewünschte. Denn es ist

$$\frac{1}{n+1} : \frac{1}{n} = 1 - \frac{1}{n} + c_n.$$

Für $\Re(a) = -1$, $a \neq -1$ und $\Re(a) > -1$ leistet es die Reihe $\sum b_n$ mit

$$b_n = e^{(1+a)h_{n-1}} - e^{(1+a)h_n} \qquad (n \geqq 1),$$

wobei $h_0 = 0$ und $h_n = 1 + \frac{1}{2} + \ldots \ldots + \frac{1}{n}$ für $n \geqq 1$ gesetzt ist; denn für sie ist

$$\frac{b_{n+1}}{b_n} = e^{\frac{1+a}{n}} \cdot \frac{1 - e^{\frac{1+a}{n+1}}}{1 - e^{\frac{1+a}{n}}} = 1 + \frac{a}{n} + c_n$$

und ferner $B_n = 1 - e^{(1+a)h_n}$, woraus die Behauptungen abzulesen sind.

(Eingegangen am 6. Februar 1948.)

Schlingknoten.

Von

H. Seifert in Heidelberg.

Einleitung.

Wenn sich zu einer topologischen Abbildung des dreidimensionalen euklidischen Raumes $\mathfrak{R}^3$ auf sich selbst eine simpliziale Zerlegung angeben läßt, deren Simplexe affin abgebildet werden, so heißt diese Abbildung *semilinear*. Wir wollen sie kurz eine *s-Abbildung* nennen, wenn sie überdies die Orientierung des Raumes invariant läßt. Die s-Abbildungen des $\mathfrak{R}^3$ bilden eine Gruppe (vgl. GRAEUB [2]). Die Knotentheorie ist ein Teil der zu dieser Gruppe gehörigen Geometrie. Sie beschäftigt sich mit den gegen s-Abbildungen invarianten Eigenschaften von Knoten, d. h. von doppelpunktfreien geschlossenen Polygonen*).

Die einfachsten Knoten sind solche, die man durch s-Abbildung in den Rand eines Dreiecks überführen kann. Man spricht in diesem Falle von einem *Kreis*, oder einer *unverknoteten Kurve*. Ein Kreis läßt sich auch dadurch kennzeichnen, daß er Rand eines singularitätenfreien, aus ebenen Dreiecken aufgebauten Elementarflächenstückes ist (vgl. GRAEUB [2]).

Auch wenn der Knoten kein Kreis ist, kann man ein Elementarflächenstück in ihn einspannen, aber es weist Singularitäten (Selbstdurchdringungen) auf. Z. B. bildet der Projektionskegel, den man durch Projektion des Knotens von einem nicht auf ihm liegenden Punkt aus erhält, ein solches Elementarflächenstück.

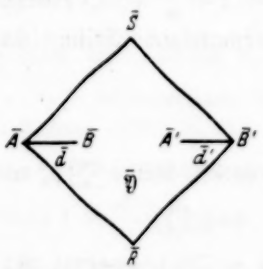


Fig. 1.

Man kann nach den Knoten fragen, in die sich ein Elementarflächenstück $\mathfrak{P}$ mit möglichst einfacher Selbstdurchdringung einspannen läßt. Diese werden dann in gewissem Sinne nächst den Kreisen die einfachsten Knoten sein.

Um die Art der Selbstdurchdringung von $\mathfrak{P}$ zu beschreiben, betrachten wir neben $\mathfrak{P}$ sein singularitätenfreies Urbild $\bar{\mathfrak{P}}$, das wir als ebenes Quadrat $\bar{A}\bar{R}\bar{B}'\bar{S}$ realisiert denken (Fig. 1) und aus dem $\mathfrak{P}$ durch eine

*) Zwei Knoten werden hiernach als äquivalent betrachtet, wenn sie durch s-Abbildungen ineinander überführbar sind. Diese Äquivalenz-Definition ist gleichwertig mit der sonst gebräuchlichen, wonach zwei Knoten als äquivalent angesehen werden, wenn sie durch eine Reihe von „elementaren Deformationen" ineinander überführbar sind (vgl. GRAEUB [2]).

9254-52 5 R

simpliziale Abbildung η hervorgehe. Die Selbstdurchdringung von $\mathfrak{H}$ erfolge längs eines Streckenzuges d, dem im Urbild $\overline{\mathfrak{H}}$ die beiden gleich langen Strecken $\overline{d} = \overline{A}\,\overline{B}$ und $\overline{d}' = \overline{A}'\,\overline{B}'$ der Diagonale $\overline{A}\,\overline{B}'$ entsprechen mögen. Je zwei Punkte von $\overline{d}$ und $\overline{d}'$, die bei der Translation $\overline{A} \to \overline{A}'$ einander entsprechen, sollen denselben Bildpunkt auf d haben. Ein singularitätenfreies Elementarflächenstück $\mathfrak{H}$, das eine Selbstdurchdringung der angegebenen Art aufweist, heiße kurz ein *Elementarflächenstück mit Selbstdurchdringung*. Zwei Elementarflächenstücke mit Selbstdurchdringung werden als gleich betrachtet, wenn sie dieselbe Punktmenge des $\mathfrak{R}^3$ ausmachen.

Der Rand eines Elementarflächenstückes mit Selbstdurchdringung, also das η-Bild des Randes $\overline{A}\,\overline{R}\,\overline{B}'\,\overline{S}\,\overline{A}$ des Quadrates $\overline{\mathfrak{H}}$ heißt ein *Schlingknoten*. Ein Schlingknoten ist mit anderen Worten ein Knoten, in den sich ein Elementarflächenstück mit Selbstdurchdringung „einspannen" läßt.

Von den möglichen gestaltlichen Verhältnissen, die hierbei vorliegen können, gewinnt man eine anschauliche Vorstellung, wenn man das Urbildquadrat $\overline{\mathfrak{H}}$ in Richtung der Diagonale $\overline{A}\,\overline{B}'$ zu einem langen Bande ausdehnt, dieses in beliebiger Weise verschlingt und verdrillt und dann seine Enden so zusammensteckt, daß sie sich längs einer Strecke

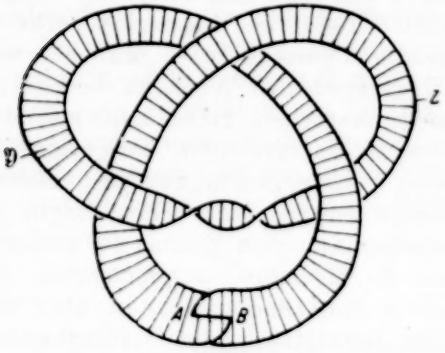


Fig. 2.

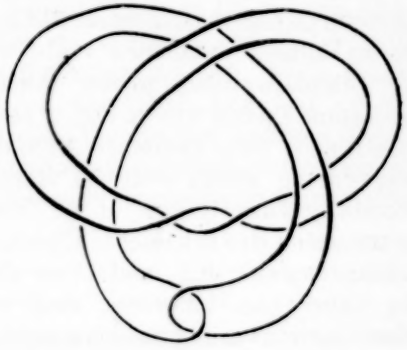


Fig. 3.

$d = AB$ durchdringen. Fig. 2 zeigt ein Beispiel, in Fig. 3 ist der Schlingknoten l noch einmal ohne das eingespannte Flächenstück $\mathfrak{H}$ gezeichnet.

Mit dem Elementarflächenstück $\mathfrak{H}$ mit Selbstdurchdringung ist nicht nur der Schlingknoten l als Rand von $\mathfrak{H}$, sondern noch ein weiterer Knoten k bestimmt. Man erhält ihn, wenn man auf $\mathfrak{H}$ die Endpunkte A und B der Durchdringungslinie d durch einen doppelpunktfreien und abgesehen von seinen Endpunkten A und B zu d punktfremden Streckenzug v verbindet und diesen durch d zu einem geschlossenen Polygon k ergänzt. Im Urbild $\overline{\mathfrak{H}}$ erscheint v als ein doppelpunktfreier,

die Punkte $\overline{A}'$ und $\overline{B}$ verbindender Streckenzug $\bar{v}$, der abgesehen von seinen Endpunkten $\overline{A}'$ und $\overline{B}$ die Strecken $\overline{d}$ und $\overline{d}'$ nicht trifft. Da man zwei solche Streckenzüge in dem längs $\overline{d}$ und $\overline{d}'$ aufgeschnittenen Quadrat durch elementare Deformationen ineinander überführen kann, so ist k bis auf äquivalente Knoten vollkommen durch $\mathfrak{H}$ bestimmt. Wir können k z. B. auffassen als η-Bild der Diagonale $\overline{A}\overline{B}'$ und nennen k deshalb den *Diagonalknoten* von $\mathfrak{H}$.

Ist nicht das Elementarflächenstück $\mathfrak{H}$ mit Selbstdurchdringung, sondern ein Schlingknoten l vorgelegt, so erhebt sich die Frage, wieviele verschiedene Elementarflächenstücke mit Selbstdurchdringung man in ihn einspannen kann. Es wird sich zeigen, daß es im wesentlichen nur ein solches Elementarflächenstück gibt. Genauer: *sind $\mathfrak{H}$ und $\mathfrak{H}^*$ zwei in l eingespannte Elementarflächenstücke mit Selbstdurchdringung, so gibt es, abgesehen von einem Ausnahmefall, eine s-Abbildung des $\mathfrak{R}^3$, die $\mathfrak{H}^*$ in $\mathfrak{H}$ überführt. Insbesondere ist also der Diagonalknoten k durch den Schlingknoten l bis auf äquivalente festgelegt. Diese letztere Aussage gilt sogar ohne jede Ausnahme.*

Daraus ergibt sich ein neuer Beweis des Satzes von Whitehead [6], wonach ein Schlingknoten i. a. kein Kreis ist.

Geht man vom Diagonalknoten k aus und fragt nach den zugehörigen Elementarflächenstücken mit Selbstdurchdringung, so gibt es deren immer unendlich viele wesentlich verschiedene. Man hat nur ein schmales Band in der durch k angegebenen Weise zu verknoten und seine Enden wie in Fig. 2 zusammenzustecken. Dabei kann man das Band noch eine beliebige Anzahl von Malen verdrillen. Bei geeigneter Verdrillung erhält man als Rand von $\mathfrak{H}$ einen Schlingknoten l, *dessen Homologieinvarianten* (d. h. Homologiegruppen und Verschlingungsinvarianten der zyklischen Überlagerungsmannigfaltigkeiten des Knotenaußenraumes) *sich nicht von denen der Kreislinie unterscheiden.* Es ist daher von Interesse, daß man in den Diagonalknoten über die Homologieinvarianten hinausgehende Invarianten der Schlingknoten besitzt. Die Schlingknoten wurden erstmalig von Whitehead [6] untersucht (vgl. auch H. Seifert [5]).

§ 1.

Der Satz von J. W. Alexander über die Zerlegung des $\mathfrak{R}^3$ durch eine simpliziale Kugelfläche.

Nach J. W. Alexander [1] ist das abgeschlossene Innere eines im $\mathfrak{R}^3$ liegenden, zu einer Kugelfläche homöomorphen Polyeders ein Elementarraumstück, d. h. homöomorph einer euklidischen Vollkugel. Wir benötigen im folgenden die schärfere Aussage, daß man durch *eine s-Abbildung des* $\mathfrak{R}^3$ das Polyeder in ein Tetraeder überführen kann. Der

Beweis hierfür kann durch geeignete Abänderung der von ALEXANDER benutzten Methode erbracht werden (vgl. GRAEUB [2]). Der ALEXANDERsche Satz wird immer im folgenden Zusammenhang gebraucht werden: es seien $\mathfrak{E}$ und $\mathfrak{F}$ zwei Elementarflächenstücke des $\mathfrak{R}^3$, die sich in einer geschlossenen, doppelpunktfreien Kurve c, die den Durchschnitt von $\mathfrak{E}$ und $\mathfrak{F}$ ausmacht, durchdringen[1]). c liege ganz im Innern von $\mathfrak{E}$ und ebenso im Innern von $\mathfrak{F}$. Die Elementarflächenstücke $\mathfrak{e}$ und $\mathfrak{f}$, die von c auf $\mathfrak{E}$ bzw. $\mathfrak{F}$ berandet werden, bilden zusammen den Rand eines Elementarraumstückes $\mathfrak{K}$ (Fig. 4). Man kann dann, anschaulich gesprochen, $\mathfrak{f}$ über $\mathfrak{K}$ hinwegdeformieren, so daß schließlich $\mathfrak{F}$ in ein zu $\mathfrak{E}$ punktfremdes Elementarflächenstück übergeht. Genauer gibt es eine s-Abbildung φ_1 des $\mathfrak{R}^3$, die außerhalb einer beliebig kleinen Umgebung von $\mathfrak{K}$ und auf $\mathfrak{E}-\mathfrak{e}$ die Identität ist und die $\mathfrak{f}$ in $\mathfrak{e}$ überführt, so daß der Durchschnitt von $\varphi_1(\mathfrak{F})$ und $\mathfrak{E}$ das Elementarflächenstück $\mathfrak{e}$ ist. Durch eine anschließende s-Abbildung φ_2, die außerhalb einer beliebig kleinen Umgebung von $\mathfrak{e}$ die Identität ist, kann man dann $\mathfrak{f}$ von $\mathfrak{e}$ „abheben", so daß $\varphi_2\varphi_1(\mathfrak{F})$ überhaupt punktfremd zu $\mathfrak{E}$ wird. Der Beweis ergibt sich, wenn man $\mathfrak{K}$ durch eine s-Abbildung in ein Tetraeder überführt, was man so einrichten kann, daß $\mathfrak{e}$ in die eine Seitenfläche, $\mathfrak{f}$ in die drei anderen Seitenflächen übergeht. An den durch diese Abbildung transformierten Flächen $\mathfrak{E}$ und $\mathfrak{F}$ lassen sich die oben beschriebenen Operationen unmittelbar verfolgen.

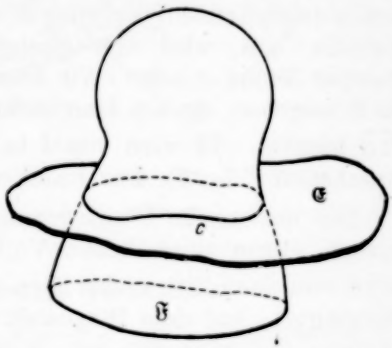


Fig. 4.

§ 2.

Sehnen in einem Elementarraumstück.

Es sei $\mathfrak{K}$ ein Elementarraumstück des $\mathfrak{R}^3$ und q eine doppelpunktfreie Kurve, die, abgesehen von ihren Endpunkten A und B, die auf dem Rande von $\mathfrak{K}$ liegen mögen, ganz im Innern von $\mathfrak{K}$ liege. Eine solche Kurve heiße eine *Sehne* von $\mathfrak{K}$. Wenn es möglich ist, A und B durch eine doppelpunktfreie Kurve p zu verbinden, die nicht in das Innere von $\mathfrak{K}$ eindringt, derart, daß $p+q$ eine unverknotete geschlossene Kurve wird, so heiße die Sehne q *unverknotet in* $\mathfrak{K}$. Man kann in diesem Falle eine s-Abbildung des $\mathfrak{R}^3$ angeben, die $\mathfrak{K}$ in ein Tetraeder und q in eine geradlinige Strecke überführt (vgl. SCHUBERT [4]).

[1]) Alle im folgenden vorkommenden Kurven und Flächen des $\mathfrak{R}^3$ sind simplizial, d. h. können aus euklidischen Simplexen aufgebaut werden.

§ 3.

Der Vollring $\mathfrak{V}$ und seine universelle Überlagerungsmannigfaltigkeit $\hat{\mathfrak{V}}$.

Es sei l ein Schlingknoten und $\mathfrak{Y}$ ein in ihn eingespanntes Elementarflächenstück mit Selbstdurchdringung, definiert durch das Urbildquadrat $\overline{\mathfrak{Y}}$ und die Abbildung η. Ist k der Diagonalknoten von $\mathfrak{Y}$, so gibt es einen (simplizialen) Vollring $\mathfrak{V}$ mit der Seele k, der $\mathfrak{Y}$ ganz im Innern enthält, z. B. wird eine geeignete simpliziale Umgebung von $\mathfrak{Y}$ ein solcher Vollring sein. Wir können weiter ein Meridianflächenstück $\mathfrak{M}$ in $\mathfrak{V}$ angeben, dessen Durchschnitt mit $\mathfrak{Y}$ aus dem η-Bild der Diagonale $\overline{R}\,\overline{S}$ besteht. $\mathfrak{M}$ wird von l in den Punkten $R = \eta(\overline{R})$ und $S = \eta(\overline{S})$ durchsetzt (Fig. 5). Der Rand von $\mathfrak{V}$ ist ein Torus $\mathfrak{T}$.

Die universelle Überlagerungsmannigfaltigkeit $\hat{\mathfrak{V}}$ von $\mathfrak{V}$ ist homöomorph einem unendlichen Vollzylinder. Das Meridianflächenstück $\mathfrak{M}$ wird von unendlich vielen Elementarflächenstücken $\hat{\mathfrak{M}}_\nu (-\infty < \nu < +\infty)$ überlagert. Auf dem Diagonalknoten k erklären wir als positive Durchlaufung diejenige, die von A über d nach B führt. Die Numerierung der $\hat{\mathfrak{M}}_\nu$ nehmen wir dann in der Weise vor, daß, wenn man die Überlagerung $\hat{k}$ von k im positiven Sinne durchläuft, man der Reihe nach $\ldots \hat{\mathfrak{M}}_{\nu-1}, \hat{\mathfrak{M}}_\nu, \hat{\mathfrak{M}}_{\nu+1} \ldots$ trifft. Auf $\hat{\mathfrak{M}}_\nu$ liegen die Punkte $\hat{R}_\nu$ und $\hat{S}_\nu$, die R und S überlagern. $\hat{\mathfrak{M}}_\nu$ und $\hat{\mathfrak{M}}_{\nu+1}$ schneiden aus $\hat{\mathfrak{V}}$ einen Vollzylinder aus, den man auch dadurch erhalten kann, daß man $\mathfrak{V}$ längs $\mathfrak{M}$ aufschneidet. Dabei zerfällt $\mathfrak{Y}$ in zwei sich durchdringende Elementarflächenstücke, die beiden Dreiecke $\hat{R}_\nu \hat{S}_\nu \hat{B}_\nu$ und $\hat{R}_{\nu+1} \hat{S}_{\nu+1} \hat{A}_{\nu+1}$ (Fig. 6).

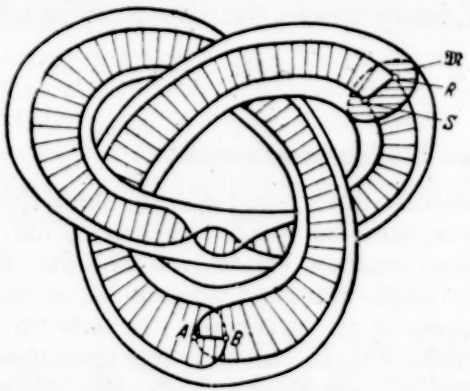


Fig. 5.

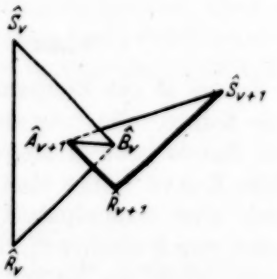


Fig. 6.

Der gesamte Überlagerungskomplex $\hat{\mathfrak{Y}}$ von $\mathfrak{Y}$ besteht daher aus unendlich vielen Elementarflächenstücken, den Quadraten $\hat{\mathfrak{Y}}_\nu = \hat{A}_\nu \hat{R}_\nu \hat{B}_\nu \hat{S}_\nu$,

von denen sich immer aufeinander folgende in einer Strecke durchdringen (Fig. 7). Der Rand $\hat{l}_\nu$ von $\hat{\mathfrak{Y}}_\nu$ überlagert l topologisch.

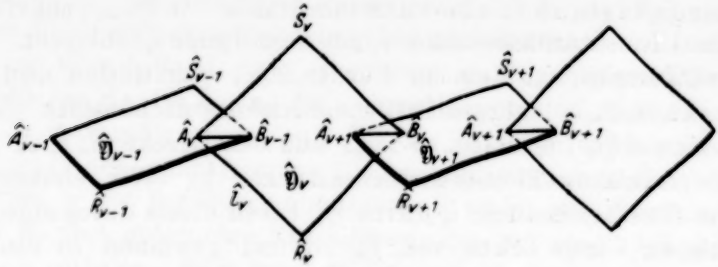


Fig. 7.

§ 4.

Geschlossene Kurven auf dem Torus $\mathfrak{T}$.

Hilfssatz 1. *Ist eine geschlossene Kurve c auf der Ringfläche $\mathfrak{T}$ nullhomotop in $\mathfrak{V}-l$, so ist c bereits nullhomotop auf $\mathfrak{T}$.*

Beweis. c ist nach Voraussetzung Rand eines in $\mathfrak{V}-l$ liegenden singulären Elementarflächenstückes $\mathfrak{E}$, dessen Urbild $\overline{\mathfrak{E}}$ sei. $\mathfrak{E}$ entsteht also aus $\overline{\mathfrak{E}}$ durch eine stetige Abbildung φ, von der wir annehmen können, daß sie simplizial ist, denn wir können sie nötigenfalls simplizial approximieren. Ist $\overline{O}$ ein fester Punkt auf $\overline{\mathfrak{E}}$, $\hat{O}_0$ ein über $\varphi(\overline{O}) = O$ liegender Punkt von $\hat{\mathfrak{V}}$, den wir ein für allemal fest aus der Reihe der über O liegenden Punkte auswählen, so gibt es genau eine stetige Abbildung $\hat{\varphi}_0$ von $\overline{\mathfrak{E}}$ in $\hat{\mathfrak{V}}$ derart, daß für jeden Punkt $\overline{P}$ von $\overline{\mathfrak{E}}$ der Punkt $\hat{\varphi}_0(\overline{P})$ über $\varphi(\overline{P})$ liegt und $\hat{\varphi}_0(\overline{O}) = \hat{O}_0$ ist. Diese Tatsache beruht auf dem einfachen Zusammenhang von $\overline{\mathfrak{E}}$. Das singuläre Flächenstück, das durch die Abbildung $\hat{\varphi}_0$ aus $\overline{\mathfrak{E}}$ entsteht, heiße $\hat{\mathfrak{E}}_0$ und sein Rand $\hat{c}_0$.

Wir konstruieren nun aus $\hat{\mathfrak{E}}_0$ ein in $\hat{c}_0$ eingespanntes singuläres Elementarflächenstück, das punktfremd zu $\hat{\mathfrak{Y}}$ ist. Sollte dies bei $\hat{\mathfrak{E}}_0$ noch nicht der Fall sein, so gibt es in der Reihe der Elementarflächenstücke $\hat{\mathfrak{Y}}_\nu$ ein erstes, etwa $\hat{\mathfrak{Y}}_\alpha$, das Punkte mit $\hat{\mathfrak{E}}_0$ gemein hat. $\hat{\mathfrak{E}}_0$ ist sicher punktfremd zum Rande von $\hat{\mathfrak{Y}}_\alpha$, da $\mathfrak{E}$ punktfremd zu l ist, und es ist $\hat{\mathfrak{Y}}_\alpha$ punktfremd zum Rande von $\hat{\mathfrak{E}}_0$, da der Rand von $\hat{\mathfrak{E}}_0$ auf $\hat{\mathfrak{T}}$ liegt. Das in $\overline{\mathfrak{E}}$ liegende Urbild des Durchschnittes von $\hat{\mathfrak{Y}}_\alpha$ und $\hat{\mathfrak{E}}_0$ besteht daher, wenn man nötigenfalls die Ecken der Simplexe von $\hat{\mathfrak{E}}_0$ noch beliebig wenig verschiebt, aus endlich vielen punktfremden doppelpunktfreien Kurven. Es sei $\bar{s}$ eine von ihnen. Ihr Bild $\hat{\varphi}_0(\bar{s}) = \hat{s}_0$ ist punktfremd zu der Durchdringungsstrecke $\hat{A}_\alpha \hat{B}_{\alpha-1}$ von $\hat{\mathfrak{Y}}_{\alpha-1}$ mit $\hat{\mathfrak{Y}}_\alpha$, weil sonst $\hat{\mathfrak{E}}_0$ Punkte mit $\hat{\mathfrak{Y}}_{\alpha-1}$ gemeinsam hätte, während doch $\hat{\mathfrak{Y}}_\alpha$ das erste Elementarflächenstück war, mit dem $\hat{\mathfrak{E}}_0$ Punkte gemeinsam

hat. Ferner hat $\bar{s}_0$ die Verschlingungszahl 0 mit dem Rand von $\bar{\mathfrak{H}}_{\alpha+1}$, weil das von $\bar{s}$ auf $\bar{\mathfrak{E}}$ berandete Elementarflächenstück $\bar{e}$ bei der Abbildung $\bar{\varphi}_0$ in ein zu $\bar{l}$, also auch zum Rande von $\bar{\mathfrak{H}}_{\alpha+1}$ punktfremdes singuläres Elementarflächenstück $\hat{e}_0$ mit dem Rande $\hat{s}_0$ übergeht. Somit ist $\hat{s}_0$ nullhomotop auf dem im Punkte $\hat{A}_{\alpha+1}$ punktierten und längs der Strecke $\hat{A}_\alpha B_{\alpha-1}$ aufgeschnittenen Elementarflächenstück $\hat{\mathfrak{H}}_\alpha$, also Rand eines auf $\hat{\mathfrak{H}}_\alpha$ liegenden, zu $\hat{A}_{\alpha+1}$ und der Strecke $\hat{A}_\alpha \hat{B}_{\alpha-1}$ punktfremden singulären Elementarflächenstückes $\hat{\mathfrak{f}}_0$. Wir ersetzen nun in $\hat{\mathfrak{E}}_0$ das Teilflächenstück $\hat{e}_0$ durch $\hat{\mathfrak{f}}_0$, heben dieses durch eine kleine Verschiebung seiner Ecken von $\hat{\mathfrak{H}}_\alpha$ ab und gewinnen so ein in $\hat{c}_0$ eingespanntes singuläres, wieder mit $\hat{\mathfrak{E}}_0$ bezeichnetes Elementarflächenstück, das mit $\hat{\mathfrak{H}}_\alpha$ mindestens eine Schnittkurve weniger hat. So können wir fortfahren, bis alle Schnittkurven mit $\hat{\mathfrak{H}}_\alpha$ beseitigt sind. Danach verfahren wir ebenso mit $\hat{\mathfrak{H}}_{\alpha+1}$ usw., bis $\hat{\mathfrak{E}}_0$ punktfremd zu $\hat{\mathfrak{H}}$ ist. Dem $\hat{\mathfrak{E}}_0$ entspricht im Grundkomplex $\mathfrak{B}$ ein Elementarflächenstück $\mathfrak{E}$, das punktfremd zu $\mathfrak{H}$ und daher auch zur Seele von $\mathfrak{B}$ ist und das wir infolgedessen unter Festhaltung seines Randes c auf den Rand $\mathfrak{T}$ von $\mathfrak{B}$ deformieren können, d. h. c ist auf $\mathfrak{T}$ nullhomotop, was zu beweisen war.

Hilfssatz 2. *Ist eine geschlossene Kurve c auf der Ringfläche $\mathfrak{T}$ Rand eines in $\mathfrak{R}^3-\mathfrak{B}+\mathfrak{T}$ liegenden singularitätenfreien Elementarflächenstückes $\mathfrak{y}$ und ist die Seele von $\mathfrak{B}$ kein Kreis, so ist c nullhomotop auf $\mathfrak{T}$.*

Beweis. Es sei m ein Meridiankreis von $\mathfrak{B}$, b ein zu m konjugierter Rückkehrschnitt auf $\mathfrak{T}$, den wir so wählen können, daß er in $\mathfrak{R}^3-\mathfrak{B}+\mathfrak{T}$ nullhomolog ist. Dann besteht eine Homologie

$$c \sim \mu m + \beta b \qquad \text{auf } \mathfrak{T}. \tag{1}$$

Die Verschlingungszahl von c und ebenso die von b mit der Seele k von $\mathfrak{B}$ ist null, da c und b nullhomolog in $\mathfrak{R}^3-\mathfrak{B}+\mathfrak{T}$ sind. Andererseits ist die Verschlingungszahl von m mit k gleich ± 1. Aus (1) folgt daher durch Übergang zu den Verschlingungszahlen $\mu = 0$. Wäre $|\beta|>1$, so könnte c nicht doppelpunktfrei, also $\mathfrak{y}$ nicht singularitätenfrei sein. Wäre $\beta = \pm 1$, so wäre $\pm c$ homotop k in $\mathfrak{B}$ und man könnte in k ein singularitätenfreies Elementarflächenstück einspannen, bestehend aus $\mathfrak{y}$ und einem in $\mathfrak{B}$ verlaufenden Kreisring mit den Randkurven c und k, während doch k kein Kreis sein sollte. Es ist also $\beta = 0$ und daher c nullhomolog, also sogar nullhomotop auf $\mathfrak{T}$.

§ 5.

Elementarraumstück auf $\mathfrak{B}$.

Hilfssatz 3. *Es sei $\mathfrak{K}$ ein Elementarraumstück auf dem Vollring $\mathfrak{B}$. Dann kann der Schlingknoten l nicht auf $\mathfrak{K}$ liegen. Ist der Durchschnitt von l mit $\mathfrak{K}$ eine Sehne auf $\mathfrak{K}$, so ist diese unverknotet.*

Beweis. In $\hat{\mathfrak{B}}$ wird $\mathfrak{K}$ von unendlich vielen punktfremden Elementarraumstücken $\hat{\mathfrak{K}}_\nu (-\infty < \nu < +\infty)$ topologisch überlagert. Läge l auf $\mathfrak{K}$, so würde $\hat{l}_\nu$ (bei geeigneter Numerierung der $\hat{\mathfrak{K}}_\nu$) auf $\hat{\mathfrak{K}}_\nu$ liegen. Da in einem Elementarraumstück aber jede geschlossene Kurve nullhomotop ist, so wäre $\hat{l}_\nu$ Rand eines singulären, zu $\hat{\mathfrak{K}}_\nu$ gehörigen Elementarflächenstückes $\hat{\mathfrak{Z}}_\nu$. Da $\hat{l}_\nu$ und $\hat{l}_{\nu+1}$ verschlungen sind, müßten sich $\hat{\mathfrak{Z}}_\nu$ und $\hat{\mathfrak{Z}}_{\nu+1}$ notwendig schneiden, was der Tatsache widerspricht, daß $\hat{\mathfrak{Z}}_\nu$ und $\hat{\mathfrak{Z}}_{\nu+1}$ den punktfremden Elementarraumstücken $\hat{\mathfrak{K}}_\nu$ und $\hat{\mathfrak{K}}_{\nu+1}$ angehören. — Ist der Durchschnitt von $\mathfrak{K}$ und l eine Sehne q auf $\mathfrak{K}$, so wird $\hat{\mathfrak{K}}_\nu$ (bei geeigneter Numerierung der $\hat{\mathfrak{K}}_\nu$) ein Stück $\hat{q}_\nu$ von $\hat{l}_\nu$ als Sehne enthalten. Man kann aber $\hat{q}_\nu$ außerhalb $\hat{\mathfrak{K}}_\nu$ zu einer unverknoteten geschlossenen Kurve, nämlich zu $\hat{l}_\nu$ ergänzen. Also ist $\hat{q}_\nu$ in $\hat{\mathfrak{K}}_\nu$ und daher q in $\mathfrak{K}$ unverknotet.

§ 6.

Beliebiges in $\mathfrak{B}$ liegendes Elementarflächenstück $\mathfrak{Y}^*$ mit Selbstdurchdringung.

Wir betrachten jetzt neben $\mathfrak{Y}$ ein weiteres in l eingespanntes Elementarflächenstück $\mathfrak{Y}^*$ mit Selbstdurchdringung. Es möge ebenso wie $\mathfrak{Y}$ im Innern von $\mathfrak{B}$ liegen. Als Urbild von $\mathfrak{Y}^*$ benutzen wir dasselbe Quadrat $\overline{\mathfrak{Y}} = \bar{A}\bar{R}\bar{B}'\bar{S}$ wie für $\mathfrak{Y}$. Die Abbildung, die $\overline{\mathfrak{Y}}$ in $\mathfrak{Y}^*$ überführt, sei η^*. Sie führt $\bar{A}, \bar{B}, \bar{R}, \bar{S}$ über in gewisse Punkte A^*, B^*, R^*, S^* von l und die Strecken $\bar{d}$ und $\bar{d}'$ in die Selbstdurchdringungslinie d^* von $\mathfrak{Y}^*$.

Es gibt zu η^* eine bestimmte überlagernde Abbildung $\hat{\eta}^*_\nu$, die $\overline{\mathfrak{Y}}$ stetig in die universelle Überlagerungsmannigfaltigkeit $\hat{\mathfrak{B}}$ von $\mathfrak{B}$ abbildet und die folgenden Eigenschaften hat: Es liegt $\hat{\eta}^*_\nu(\bar{P})$ über $\eta^*(\bar{P})$ für jeden Punkt $\bar{P}$ von $\overline{\mathfrak{Y}}$, und der Rand von $\overline{\mathfrak{Y}}$ geht über in $\hat{l}_\nu$ (§ 3). $\hat{\mathfrak{Y}}^*_\nu$ sei das Bild von $\overline{\mathfrak{Y}}$ bei $\hat{\eta}^*_\nu$.

Hilfssatz 4. *Die Abbildung $\hat{\eta}^*_\nu$ von $\overline{\mathfrak{Y}}$ ist nicht nur stetig, sondern sogar topologisch.*

Beweis. Wäre das nicht der Fall, wäre also für zwei verschiedene Punkte $\bar{P}$ und $\bar{P}'$ von $\overline{\mathfrak{Y}}$ $\hat{\eta}^*_\nu(\bar{P}) = \hat{\eta}^*_\nu(\bar{P}')$, so wäre auch $\eta^*(\bar{P}) = \eta^*(\bar{P})$, d. h. $\bar{P}$ und $\bar{P}'$ wären entsprechende Punkte von $\bar{d}$ und $\bar{d}'$. Dann gilt aber für je zwei entsprechende Punkte $\bar{Q}$ und $\bar{Q}'$ von $\bar{d}$ und $\bar{d}'$ die Gleichung $\hat{\eta}^*_\nu(\bar{Q}) = \hat{\eta}^*_\nu(Q')$. Denn die geradlinige Strecke $\bar{P}\bar{Q}$ geht bei η^* in denselben Streckenzug über wie die Strecke $\bar{P}'\bar{Q}'$. Dieses gemeinsame Bild würde daher von ein- und demselben von $\hat{\eta}^*_\nu(\bar{P}) = \hat{\eta}^*_\nu(\bar{P}')$ ausgehendem Streckenzug überlagert, dessen Endpunkt der Stetigkeit von $\hat{\eta}^*_\nu$ wegen $\hat{\eta}^*_\nu(\bar{Q}) = \hat{\eta}^*_\nu(\bar{Q}')$ ist. Somit wäre die Abbildung von $\hat{\mathfrak{Y}}^*_\nu$ auf $\mathfrak{Y}^*$, die jedem Punkt von $\hat{\mathfrak{Y}}^*_\nu$ den darunterliegenden von $\mathfrak{Y}^*$ zu-

ordnet, eineindeutig. $\hat{\mathfrak{H}}_\nu^*$ würde also keine zwei hinsichtlich der Deckbewegungsgruppe von $\mathfrak{V}$ äquivalenten Punkte enthalten können, d. h. die Flächenstücke $\hat{\mathfrak{H}}_\nu^*(-\infty < \nu < +\infty)$, die ja aus einem beliebigen von ihnen durch die Deckbewegungsgruppe hervorgehen, wären alle untereinander punktfremd. Das ist unmöglich, da z. B. die Ränder von $\hat{\mathfrak{H}}_0^*$ und $\hat{\mathfrak{H}}_1^*$ verschlungen sind. Unsere Annahme, daß $\hat{\eta}_\nu^*$ nicht topologisch sei, war also falsch.

§ 7.

Überführung von $\mathfrak{H}^*$ in $\mathfrak{H}$.

Das Ziel dieses Paragraphen ist der Beweis von

Hilfssatz 5. *Ist $\mathfrak{H}^*$ ein beliebiges, im Vollring $\mathfrak{V}$ liegendes, in den Schlingknoten l eingespanntes Elementarflächenstück mit Selbstdurchdringung, so gibt es eine s-Abbildung des $\mathfrak{R}^3$, die außerhalb $\mathfrak{V}$ die Identität ist und die $\mathfrak{H}^*$ in $\mathfrak{H}$ überführt.*

Wir betrachten den Durchschnitt von $\mathfrak{H}^*$ mit dem Meridianflächenstück $\mathfrak{M}$ oder vielmehr das Urbild dieses Durchschnittes in $\overline{\mathfrak{H}}$. Durch eine s-Abbildung, die beliebig wenig von der Identität abweicht, kann man $\mathfrak{H}^*$ nötigenfalls so abändern, daß das Urbild des Durchschnittes von $\mathfrak{H}^*$ mit $\mathfrak{M}$ aus endlich vielen doppelpunktfreien punktfremden Kurven $\overline{c}$, $\overline{c}'$, $\overline{c}''$, ..., den sogenannten *Schnittkurven* besteht, die alle geschlossen sind bis auf eine, welche zwei Randpunkte von $\overline{\mathfrak{H}}$, nämlich die Urbilder von R und S bei der Abbildung η^* verbindet. Diese seien $\overline{R}_*$ und $\overline{S}_*$. Es sind die einzigen Punkte des Randes von $\overline{\mathfrak{H}}$, die dem System der Schnittkurven angehören. Wir können weiter durch beliebig kleine Abänderung von $\mathfrak{H}^*$ erreichen, daß A^* und B^*, die Endpunkte der Durchdringungslinie d^*, nicht auf $\mathfrak{M}$ liegen. Dann sind also $\overline{R}_*$ und $\overline{S}_*$ verschieden von $\overline{A}$ und $\overline{B}'$. Es wird dann auch keine Schnittkurve durch $\overline{A}'$ oder $\overline{B}$ gehen können. Wenn eine Schnittkurve die Strecken $\overline{d}$ oder $\overline{d}'$ trifft, so können wir erreichen, daß Schnitte und keine Berührungen stattfinden.

Hilfssatz 6. *Die auf dem Meridianflächenstück $\mathfrak{M}$ liegenden Durchdringungskurven $c^{(\mu)} = \eta^*(\overline{c}^{(\mu)})$ von $\mathfrak{M}$ mit $\mathfrak{H}^*$ sind doppelpunktfrei* (können sich aber gegenseitig treffen, was dann der Fall ist, wenn $\mathfrak{M}$ von d^* getroffen wird).

Beweis. Nach Hilfssatz 4 ist die Abbildung $\hat{\eta}_0^*$ von $\overline{\mathfrak{H}}$ topologisch, führt also das doppelpunktfreie $\overline{c}^{(\mu)}$ in eine doppelpunktfreie Kurve $\hat{\eta}_0^*(\overline{c}^{(\mu)})$ auf einem gewissen $\hat{\mathfrak{M}}_\nu$ über. Da nun $\hat{\mathfrak{M}}_\nu$ topologisch über $\mathfrak{M}$ liegt, so ist auch die zu $\hat{\eta}_0^*(\overline{c}^{(\mu)})$ gehörige Grundkurve, d. h. $\eta^*(\overline{c}^{(\mu)})$ doppelpunktfrei, was zu beweisen war.

Die in Hilfssatz 5 erwähnte Überführung von $\mathfrak{H}^*$ in $\mathfrak{H}$ geschieht in mehreren Schritten.

Erster Schritt. *Beseitigung der geschlossenen, zu $\bar{d}+\bar{d}'$ punktfremden Schnittkurven $\bar{c}^{(\mu)}$.*

Wenn es unter den geschlossenen Schnittkurven $\bar{c}^{(\mu)}$ überhaupt welche gibt, die punktfremd zu $\bar{d}+\bar{d}'$ sind, so gibt es auch mindestens eine, etwa $\bar{c}$, die im Innern keine weiteren Kurven $\bar{c}^{(\mu)}$ enthält. $\bar{c}$ berandet auf $\bar{\mathfrak{H}}$ ein Elementarflächenstück $\bar{\mathfrak{y}}$, das, da es punktfremd zu $\bar{d}+\bar{d}'$ ist, vermöge η^* topologisch auf ein auf $\mathfrak{H}^*$ liegendes Elementarflächenstück $\mathfrak{y}^*$ abgebildet wird. Der Rand c^* von $\mathfrak{y}^*$ ist auf $\mathfrak{M}$ Rand eines Elementarflächenstückes $\mathfrak{m}$. $\mathfrak{y}^*$ und $\mathfrak{m}$ haben nur den Rand c^* gemeinsam (weil $\bar{c}$ eine „kleinste" Schnittkurve war) und bilden somit den Rand eines Elementarraumstückes $\mathfrak{K}$. *$\mathfrak{K}$ liegt im Innern von $\mathfrak{V}$*, da dies von dem Rande von $\mathfrak{K}$ gilt. *Der Durchschnitt von $\mathfrak{M}$ mit $\mathfrak{K}$ ist* $\mathfrak{m}$. Würde nämlich ein Punkt von $\mathfrak{M}-\mathfrak{m}$ zu $\mathfrak{K}$ gehören, so müßte, da $\mathfrak{y}^*$ punktfremd zu $\mathfrak{M}-\mathfrak{m}$ ist, ganz $\mathfrak{M}$ zu $\mathfrak{K}$ gehören. Der Rand von $\mathfrak{M}$ liegt aber sicher nicht auf $\mathfrak{K}$, da er auf dem Rande von $\mathfrak{V}$ und $\mathfrak{K}$ im Innern von $\mathfrak{V}$ liegt. *$\mathfrak{K}$ ist punktfremd zu l*, denn $\mathfrak{y}^*$ ist punktfremd zu l, weil $\bar{\mathfrak{y}}$ weder $\bar{A}'$ noch $\bar{B}$ enthalten kann, da $\bar{c}$ punktfremd zu $\bar{d}+\bar{d}'$ ist. l hat also mit $\mathfrak{y}^*$ und daher auch mit dem dazu homologen Flächenstück $\mathfrak{m}$ die Schnittzahl 0. $\mathfrak{m}$ enthält daher entweder keinen der Punkte R, S oder beide. Letzteres ist unmöglich, da dann $\mathfrak{M}-\mathfrak{m}+\mathfrak{y}^*$ punktfremd zu l wäre. Der Rand von $\mathfrak{M}$ wäre also nullhomotop in $\mathfrak{V}-l$, was Hilfssatz 1 widerspricht. l trifft daher den Rand von $\mathfrak{K}$ nicht. Daß l ganz im Innern von $\mathfrak{K}$ liegt, scheidet aus nach Hilfssatz 3.

Wir können somit durch eine s-Abbildung, die l, $\mathfrak{M}-\mathfrak{m}$ und das Äußere von $\mathfrak{V}$ punktweise fest läßt, $\mathfrak{y}^*$ in $\mathfrak{m}$ überführen und anschließend von $\mathfrak{M}$ abheben (§ 1), wodurch $\mathfrak{H}^*$ in ein Flächenstück übergeführt wird, das mit $\mathfrak{M}$ mindestens eine Schnittkurve weniger hat. Es verschwinden nämlich genau alle diejenigen $\bar{c}^{(\mu)}$, deren Bilder $\eta^*(\bar{c}^{(\mu)}) = c^{*(\mu)}$ vorher auf $\mathfrak{m}$ lagen, also mindestens $\bar{c}$. Man kann diesen Schritt wiederholen, bis keine zu $\bar{d}+\bar{d}'$ punktfremden geschlossenen Schnittkurven mehr vorhanden sind. *Die Anzahl der Schnittpunkte von $d^* = \eta^*(\bar{d}) = \eta^*(\bar{d}')$ hat sich bei dieser Abänderung von $\mathfrak{H}^*$ offenbar nicht vergrößert.* Das abgeänderte Flächenstück $\mathfrak{H}^*$ wird wiederum mit $\mathfrak{H}^* = \eta^*(\bar{\mathfrak{H}})$ bezeichnet.

Zweiter Schritt. *Beseitigung aller geschlossenen Schnittkurven.*

Dieser Schritt fällt aus, wenn nach Ausführung des ersten Schrittes bereits alle geschlossenen Schnittkurven verschwunden sind. Ist das nicht der Fall, so sei $\bar{c}$ eine geschlossene Schnittkurve, die keine anderen im Innern enthält. $\bar{c}$ hat mit $\bar{d}+\bar{d}'$ mindestens einen Punkt gemeinsam. $\bar{c}$ ist in $\bar{\mathfrak{H}}$ Rand eines Elementarflächenstückes $\bar{\mathfrak{y}}$. *Die Abbildung η^* ist topologisch auf $\bar{\mathfrak{y}}$.* Denn $\eta_0^*(\bar{\mathfrak{y}})$ liegt, abgesehen von seinem Rand, zwischen zwei aufeinander folgenden Meridianflächen-

stücken $\mathfrak{M}_\nu$ und $\mathfrak{M}_{\nu+1}$, da sonst im Innern von $\bar{\mathfrak{y}}$ noch eine weitere Schnittkurve vorhanden wäre. $\hat{\eta}_0^*(\bar{\mathfrak{y}})$ enthält somit keine hinsichtlich der Deckbewegungsgruppe von $\hat{\mathfrak{V}}$ äquivalenten Punkte. Die Abbildung von $\hat{\eta}_0^*(\bar{\mathfrak{y}})$ auf $\eta^*(\bar{\mathfrak{y}})$, die jedem Punkt seinen Grundpunkt in $\mathfrak{V}$ zuordnet, ist somit topologisch, und da auch $\hat{\eta}_0^*$ auf $\bar{\mathfrak{y}}$ (ja sogar auf $\overline{\mathfrak{Y}}$) topologisch ist (Hilfssatz 4), so ist η^* topologisch auf $\bar{\mathfrak{y}}$. Das Bild heiße $\mathfrak{y}^*$. Der Rand c^* von $\mathfrak{y}^*$ begrenzt auf $\mathfrak{M}$ ein Elementarflächenstück $\mathfrak{m}$.

Es sind drei Fälle denkbar: $\mathfrak{m}$ enthält von den Punkten R und S keinen, einen oder alle beide. Im ersten und dritten Falle hat $\mathfrak{m}$ und daher auch das zu $\mathfrak{m}$ homologe Elementarflächenstück $\mathfrak{y}^*$ die algebraische Schnittzahl 0 mit l. $\mathfrak{y}^*$ kann dann weder A^* noch B^* enthalten, denn A^* und B^* haben als Schnittpunkte von $\mathfrak{Y}^*$ mit l die gleiche Schnittzahl $+1$ oder -1.

Im ersten Falle ist also l punktfremd zu $\mathfrak{m}$ und $\mathfrak{y}^*$. Es liegen daher die gleichen Verhältnisse wie beim ersten Schritte vor, und wir können durch eine s-Abbildung, die l, $\mathfrak{M}-\mathfrak{m}$ und das Äußere von $\mathfrak{V}$ punktweise fest läßt, $\mathfrak{y}^*$ in $\mathfrak{m}$ überführen und danach von $\mathfrak{M}$ abheben. *Bei dieser Abänderung von $\mathfrak{Y}^*$ gehen mindestens zwei Schnittpunkte von d^* mit $\mathfrak{M}$ verloren*, nämlich erstens die Endpunkte der „Sehnen" von $\mathfrak{y}^*$, die den Durchschnitt von d^* mit $\mathfrak{y}^*$ ausmachen (es gibt mindestens eine solche Sehne, da $\bar{d}+\bar{d}'$ nach Voraussetzung von $\bar{c}$ getroffen wird, aber wie wir sahen, weder $\bar{B}$ noch $\bar{A}'$ im Innern enthält) und zweitens die möglicherweise außerdem vorhandenen Schnittpunkte von d^* mit dem Innern von $\mathfrak{m}$.

Der dritte Fall scheidet aus, weil dann $\mathfrak{M}-\mathfrak{m}$ punktfremd zu l wäre, d. h. es wäre der Rand von $\mathfrak{M}$ nullhomotop in $\mathfrak{V}-l$, nämlich Rand von $\mathfrak{M}-\mathfrak{m}+\mathfrak{y}^*$, was nach Hilfssatz 1 nicht zutrifft.

Im *zweiten Falle* haben $\mathfrak{y}^*$ und $\mathfrak{m}$ die Schnittzahl ± 1 mit l. $\mathfrak{y}^*$ enthält also genau einen der Punkte A^* und B^*. Nehmen wir an, um die Begriffe zu fixieren, daß $\mathfrak{m}$ den Punkt R und $\mathfrak{y}^*$ den Punkt A^* enthält. Der Durchschnitt von l mit dem von $\mathfrak{m}$ und $\mathfrak{y}^*$ berandeten Elementarraumstücke $\mathfrak{R}$ besteht in einer Sehne mit den Endpunkten R und A^*. Diese ist unverknotet in $\mathfrak{R}$ nach Hilfssatz 3. — Wir können daher durch eine s-Abbildung, die $\mathfrak{M}-\mathfrak{m}$ und das Äußere von $\mathfrak{V}$ punktweise fest läßt und l in sich überführt, $\mathfrak{y}^*$ in $\mathfrak{m}$ überführen und danach von $\mathfrak{M}$ abheben. Bei dieser Abänderung von $\mathfrak{Y}^*$ geht mindestens ein Schnittpunkt von d^* mit $\mathfrak{M}$ verloren.

In jedem Falle hat man damit die Anzahl der Schnittpunkte von d^* mit $\mathfrak{M}$ um mindestens eins verringert.

Nach Ausführung dieser Abänderung von $\mathfrak{Y}^*$ werden durch Wiederholung des ersten Schrittes etwa neu entstandene, zu $\bar{d}+\bar{d}'$ punktfremde geschlossene Schnittkurven beseitigt. Bleiben danach noch geschlossene Schnittkurven übrig, so wird die Anzahl der Schnitt-

punkte von d^* mit $\mathfrak{M}$ mit Hilfe des zweiten Schrittes weiter verringert usw., bis schließlich alle geschlossenen Schnittkurven verschwunden sind.

Es bleibt dann als Schnittkurve in $\overline{\mathfrak{Y}}$ nur noch eine $\overline{R}_*$ mit $\overline{S}_*$ verbindende doppelpunktfreie Kurve übrig, die wir wieder $\bar{c}$ nennen. *$\bar{c}$ ist punktfremd zu $\bar{d} + \bar{d}'$.* Wäre nämlich $\overline{C}$ ein auf $\bar{d}$ liegender Punkt von $\bar{c}$, also $\eta^*(\overline{C}) = C^*$ ein Punkt von $\mathfrak{M}$, so wäre auch $\eta^*(\overline{C}') = C^*$, wo $\overline{C}'$ der $\overline{C}$ entsprechende Punkt von $\overline{d}'$ ist. Es würde also $\overline{C}'$ auf $\bar{c}$ liegen. Die Abbildung η^* würde die beiden verschiedenen Punkte $\overline{C}$ und $\overline{C}'$ von $\bar{c}$ in denselben Punkt C^* abbilden, was nach Hilfssatz 6 unmöglich ist.

$\bar{c}$ trennt die beiden Strecken $\bar{d}$ und $\bar{d}'$ voneinander. Zum Beweise betrachten wir die auf $\overline{\mathfrak{Y}}$ topologische Abbildung $\hat{\eta}_0^*$ (§ 6). Sie führt $\bar{c}$ in eine auf $\hat{\mathfrak{M}}_0$ liegende, von $\hat{R}_0$ nach $\hat{S}_0$ führende Kurve $\hat{c}_0^*$ über. $\hat{R}_0$ und $\hat{S}_0$ zerlegen $\hat{l}_0$ in zwei Bögen $\hat{a}_0 = \hat{R}_0 \hat{A}_0 \hat{S}_0$ und $\hat{b}_0 = \hat{R}_0 \hat{B}_0 \hat{S}_0$. $\hat{c}_0^*$ zerlegt $\hat{\mathfrak{Y}}_0^*$ in zwei Elementarflächenstücke $\hat{\mathfrak{A}}_0^*$ und $\hat{\mathfrak{B}}_0^*$, die beziehungsweise von $\hat{a}_0 + \hat{c}_0^*$ und $\hat{b}_0 + \hat{c}_0^*$ begrenzt werden. Da diese beiden Ränder mit $\hat{l}_{-1}$ bzw. $\hat{l}_{+1}$ verschlungen sind, so hat $\hat{\mathfrak{A}}_0^*$ einen Punkt mit $\hat{l}_{-1}$ und $\hat{\mathfrak{B}}_0^*$ einen Punkt mit $\hat{l}_{+1}$ gemeinsam. Diesen Punkten entsprechen in dem zu $\hat{\mathfrak{Y}}_0^*$ homöomorphen Urbild $\overline{\mathfrak{Y}}$ notwendig die beiden Punkte $\overline{A}'$ und $\overline{B}$ (es bleibt dahingestellt, ob $\eta_0^*(\overline{A}') = \hat{A}_0^*$ in $\hat{\mathfrak{A}}_0^*$ oder in $\hat{\mathfrak{B}}_0^*$ liegt), da dies die einzigen Punkte im Innern von $\overline{\mathfrak{Y}}$ sind, deren η^*-Bilder auf l liegen. $\overline{B}$ und $\overline{A}'$ werden somit von $\bar{c}$ getrennt, was zu beweisen war.

Im Vollring $\mathfrak{V}$ haben wir also folgenden Sachverhalt: l wird durch die auf $\mathfrak{M}$ liegenden Punkte R und S in die beiden Bögen $RAS = a$ und $RBS = b$ zerlegt. $\mathfrak{Y}^*$ wird von $\mathfrak{M}$ in einer doppelpunktfreien Kurve c^* geschnitten, wodurch $\mathfrak{Y}^*$ in die beiden von $a + c^*$ bzw. $b + c^*$ berandeten Elementarflächenstücke $\mathfrak{A}^*$ und $\mathfrak{B}^*$ zerfällt. Der Durchschnitt von $\mathfrak{A}^*$ und $\mathfrak{B}^*$ besteht außer in dem gemeinsamen Randstück c^* in der zu $\mathfrak{M}$ punktfremden Durchdringungskurve d^*. — c, $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$ mögen die entsprechenden Bedeutungen für $\mathfrak{Y}$ haben.

Dritter Schritt. *Überführung von $\mathfrak{A}^*$ und $\mathfrak{B}^*$ in $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$.*

Da wir es jetzt nur noch mit den *singularitätenfreien* Elementarflächenstücken $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{A}^*$, $\mathfrak{B}^*$ zu tun haben, brauchen wir das Urbild $\overline{\mathfrak{Y}}$ von $\mathfrak{Y}$ bzw. $\mathfrak{Y}^*$ nicht mehr zu benutzen. Durch eine s-Abbildung, die außerhalb $\mathfrak{V}$ die Identität ist, l punktweise fest läßt und $\mathfrak{M}$ auf sich abbildet, können wir c^* in c überführen. Dabei gehen $\mathfrak{A}^*$ und $\mathfrak{B}^*$ in Elementarflächenstücke über, die wir wieder mit $\mathfrak{A}^*$ und $\mathfrak{B}^*$ bezeichnen, und die ebenso wie $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$ in $a + c$ bzw. $b + c$ eingespannt sind. Nunmehr können wir durch eine s-Abbildung, die a, c, $\mathfrak{M}$ und das Äußere von $\mathfrak{V}$ punktweise fest läßt und b in sich abbildet, $\mathfrak{A}^*$ in $\mathfrak{A}$ überführen. Durch eine s-Abbildung, die $\mathfrak{A} = \mathfrak{A}^*$ in sich

abbildet, können wir schließlich d^* in d und anschließend $\mathfrak{B}^*$ in $\mathfrak{B}$ überführen. Damit ist Hilfssatz 5 bewiesen.

§ 8.

Beliebiges in $\mathfrak{R}^3$ liegendes Elementarflächenstück $\mathfrak{Y}^*$ mit Selbstdurchdringung.

Satz I. *In einen Schlingknoten l seien zwei Elementarflächenstücke $\mathfrak{Y}$ und $\mathfrak{Y}^*$ mit Selbstdurchdringung eingespannt, und es sei der Diagonalknoten k von $\mathfrak{Y}$ kein Kreis. Dann gibt es eine s-Abbildung φ des $\mathfrak{R}^3$, die $\mathfrak{Y}^*$ in $\mathfrak{Y}$ überführt.* — Ist k ein Kreis, so ist der Satz nicht mehr allgemein richtig (vgl. § 11).

Wir führen Satz I auf einen leichter beweisbaren Hilfssatz zurück, der sich nur dadurch von Satz I unterscheidet, daß an Stelle des euklidischen Raumes $\mathfrak{R}^3$ die dreidimensionale Sphäre $\mathfrak{S}^3$ betrachtet wird.

Es sei Σ ein 3-Simplex, das $\mathfrak{Y}$ und $\mathfrak{Y}^*$ im Innern enthält. Wir bilden es affin ab auf eine dreidimensionale Seite Σ' eines vierdimensionalen Simplexes $'S^4$, dessen Rand eine dreidimensionale Sphäre $'\mathfrak{S}^3$ ist. $\mathfrak{Y}$, $\mathfrak{Y}^*$ mögen hierbei übergehen in $\mathfrak{Y}'$, $\mathfrak{Y}^{*\prime}$. Unter einer s-Abbildung von $'\mathfrak{S}^3$ verstehen wir eine simpliziale, topologische, die Orientierung erhaltende Selbstabbildung von $'\mathfrak{S}^3$. Angenommen, wir hätten eine s-Abbildung φ' von $'\mathfrak{S}^3$ konstruiert, die $\mathfrak{Y}^{*\prime}$ in $\mathfrak{Y}'$ überführt. Dann ergibt sich daraus die s-Abbildung φ des Satzes I folgendermaßen: bei φ' wird die Σ' gegenüberliegende Ecke P'_∞ von $'S^4$ in einen gewissen Punkt $\varphi'(P'_\infty)$ übergehen, der nicht auf $\mathfrak{Y}'$ liegt. Da $\mathfrak{Y}'$ die $'\mathfrak{S}^3$ nicht zerlegt, können wir $\varphi'(P'_\infty)$ mit P'_∞ durch einen $\mathfrak{Y}'$ nicht treffenden Weg verbinden und eine s-Abbildung φ'_1 von $'\mathfrak{S}^3$ konstruieren, die außerhalb einer beliebig kleinen, zu $\mathfrak{Y}'$ punktfremden Umgebung dieses Weges die Identität ist und $\varphi'(P'_\infty)$ in P'_∞ überführt. Die Produktabbildung $\varphi'_1\varphi'$ führt dann $\mathfrak{Y}^{*\prime}$ in $\mathfrak{Y}'$ über und läßt P'_∞ fest. Durch geeignete Wahl von φ'_1 können wir es sogar erreichen, daß bei $\varphi'_1\varphi'$ eine ganze Umgebung von P'_∞ punktweise fest bleibt, etwa ein den Punkt P'_∞ enthaltendes Elementarraumstück, das von $'\mathfrak{S}^3$ durch eine in $'S^4$ parallel zur Seite Σ' gezogene dreidimensionale Ebene abgeschnitten wird. Es sei $\mathfrak{s}'_1$ die zweidimensionale Randsphäre dieses Elementarraumstückes, $\mathfrak{s}'$ die Randsphäre von Σ' und $\mathfrak{s}'_1$ eine 2-Sphäre, die aus $\mathfrak{s}'$ durch ähnliche Verkleinerung mit dem Mittelpunkt von Σ' als Ähnlichkeitszentrum entsteht, und die sich so wenig von $\mathfrak{s}'$ unterscheidet, daß $\mathfrak{Y}'$ und $\mathfrak{Y}^{*\prime}$ auch noch im Innern von $\mathfrak{s}'_2$ liegen. Dabei verstehen wir unter dem Innern von $\mathfrak{s}'$, $\mathfrak{s}'_1$, $\mathfrak{s}'_2$ denjenigen von $\mathfrak{s}'$, $\mathfrak{s}'_1$, $\mathfrak{s}'_2$ begrenzten Teil von $'\mathfrak{S}^3$, der den Punkt P'_∞ nicht enthält. Es gibt nun eine s-Abbildung φ'_2 von $'\mathfrak{S}^3$, die das Innere von $\mathfrak{s}'_2$, insbesondere also $\mathfrak{Y}'$ und $\mathfrak{Y}^{*\prime}$ punktweise fest läßt und das Äußere von $\mathfrak{s}'$ in das Äußere von $\mathfrak{s}'_1$ überführt. Die

Abbildung $\varphi_2'^{-1}(\varphi|\varphi')\varphi_2'$ läßt dann das Äußere von $\mathfrak{s}'$ punktweise fest und führt $\mathfrak{Y}^{*\prime}$ in $\mathfrak{Y}'$ über. Betrachten wir also diese Abbildung nur auf dem Simplex Σ', so läßt sie den Rand von Σ' punktweise fest und führt $\mathfrak{Y}^*$ in $\mathfrak{Y}'$ über. Die entsprechende Selbstabbildung von Σ, die wir außerhalb von Σ durch die identische Abbildung ergänzen, ist dann eine s-Abbildung φ des $\mathfrak{R}^3$, die $\mathfrak{Y}^*$ in $\mathfrak{Y}$ überführt. Satz I ist damit zurückgeführt auf den folgenden Hilfssatz (in den Bezeichnungen lassen wir die Striche nun wieder fort):

Hilfssatz 7. *In einen Schlingknoten l der dreidimensionalen Sphäre $\mathfrak{S}^3$ seien zwei Elementarflächenstücke $\mathfrak{Y}$ und $\mathfrak{Y}^*$ mit Selbstdurchdringung eingespannt, und es sei der Diagonalknoten k von $\mathfrak{Y}$ kein Kreis. Dann gibt es eine s-Abbildung φ von $\mathfrak{S}^3$, die $\mathfrak{Y}^*$ in $\mathfrak{Y}$ überführt.*

Beweis. Es sei $\mathfrak{V}$ ein Vollring mit der Seele k, der $\mathfrak{Y}$ im Inneren enthält. Es genügt nach Hilfssatz 5, eine s-Abbildung anzugeben, die l in sich und $\mathfrak{Y}^*$ in eine Teilmenge von $\mathfrak{V}$ überführt. $\mathfrak{T}$ sei der Rand von $\mathfrak{V}$, $\overline{\mathfrak{Y}}$ das Urbild von $\mathfrak{Y}^*$ (Fig. 1), η^* die Abbildung, die $\overline{\mathfrak{Y}}$ in $\mathfrak{Y}^*$ überführt. Wir betrachten in $\overline{\mathfrak{Y}}$ das Urbild des Durchschnittes von $\mathfrak{Y}^*$ und $\mathfrak{T}$. Es besteht, wenn man die Ecken von $\mathfrak{Y}^*$ nötigenfalls beliebig wenig ändert, aus endlich vielen doppelpunktfreien, punktfremden, geschlossenen „Schnittkurven" $\overline{c}, \overline{c}', \ldots$. Die Überführung von $\mathfrak{Y}^*$ in $\mathfrak{V}$ geschieht in mehreren Schritten.

Erster Schritt. *Beseitigung der zu $\overline{d}+\overline{d}'$ punktfremden Schnittkurven $\overline{c}^{(\mu)}$.* Wenn es unter den Kurven $\overline{c}^{(\mu)}$ überhaupt welche gibt, die punktfremd zu $\overline{d}+\overline{d}'$ sind, so gibt es auch mindestens eine, etwa $\overline{c}$, die im Innern keine weitere Kurve $\overline{c}^{(\mu)}$ enthält. $\overline{c}$ berandet auf $\overline{\mathfrak{Y}}$ ein Elementarflächenstück $\overline{\mathfrak{y}}$, das bei η^* topologisch auf das auf $\mathfrak{Y}^*$ liegende Elementarflächenstück $\mathfrak{y}^*$ abgebildet wird. Die Randkurve c von $\mathfrak{y}^*$ ist eine doppelpunktfreie geschlossene Kurve auf dem Torus $\mathfrak{T}$. $\mathfrak{y}^*$ ist punktfremd zu l, da $\overline{\mathfrak{y}}$ weder $\overline{A}'$ noch $\overline{B}$ enthalten kann, wegen der Punktfremdheit von $\overline{c}$ und $\overline{d}+\overline{d}'$. $\mathfrak{y}^*$ liegt daher entweder in $\mathfrak{V}-l$ oder in $\mathfrak{S}^3-\mathfrak{V}+\mathfrak{T}$. Im ersten Falle ist c nullhomotop auf $\mathfrak{T}$ auf Grund von Hilfssatz 1, im zweiten Falle auf Grund von Hilfssatz 2, wobei wesentlich benutzt wird, daß k kein Kreis ist. c berandet also auf $\mathfrak{T}$ ein Elementarflächenstück $\mathfrak{t}$. $\mathfrak{y}^*$ und $\mathfrak{t}$ haben nur den Rand c gemeinsam und bilden zusammen eine zu l punktfremde zweidimensionale Sphäre. Sie zerlegt $\mathfrak{S}^3$ in zwei Elementarraumstücke, von denen $\mathfrak{R}$ dasjenige sei, das l nicht enthält. Der Durchschnitt von $\mathfrak{R}$ mit $\mathfrak{T}$ ist $\mathfrak{t}$. Die andere Möglichkeit, daß $\mathfrak{T}$ ganz zu $\mathfrak{R}$ gehört, scheidet nämlich aus, weil dann $\mathfrak{S}^3-\mathfrak{R}$ punktfremd zu $\mathfrak{T}$ wäre und andererseits l enthielte. Die abgeschlossene Hülle von $\mathfrak{S}^3-\mathfrak{R}$ wäre also ein in $\mathfrak{V}$ liegendes, l enthaltendes Elementarraumstück, was nach Hilfssatz 3 unmöglich ist. Durch eine s-Abbildung, die auf $\mathfrak{T}-\mathfrak{t}$ und l die Identität ist, können wir $\mathfrak{y}^*$ in $\mathfrak{t}$ überführen

und dann von $\mathfrak{T}$ abheben, wodurch $\mathfrak{H}^*$ in ein Elementarflächenstück mit Selbstdurchdringung übergeht, das in l eingespannt ist und mindestens eine Schnittkurve weniger mit $\mathfrak{T}$ aufweist. Die Anzahl der Schnittpunkte der Selbstdurchdringungslinie d^* von $\mathfrak{H}^*$ mit $\mathfrak{T}$ hat sich dabei sicher nicht vergrößert.

Zweiter Schritt. *Verminderung der Anzahl der Schnittpunkte von d^* mit $\mathfrak{T}$.* Nach wiederholter Ausführung des ersten Schrittes sind entweder alle Schnittkurven $\bar{c}^{(\mu)}$ verschwunden. Dann ist unser Ziel erreicht. Oder man gelangt zu einem Flächenstück $\mathfrak{H}^*$, dessen Schnittkurven $\bar{c}^{(\mu)}$ alle $\bar{d}+\bar{d}'$ schneiden. Keine von ihnen kann $\bar{A}'$ oder $\bar{B}$ im Innern enthalten. Denn das η^*-Bild von $\bar{c}^{(\mu)}$ ist eine geschlossene Kurve auf dem Torus $\mathfrak{T}$ und hat daher mit l die Verschlingungszahl 0, da dies von der Homologiebasis von $\mathfrak{T}$, nämlich dem Meridiankreis m und dem in $\mathfrak{S}^3-\mathfrak{V}+\mathfrak{T}$ nullhomologen Breitenkreis b gilt. Würde aber $\bar{c}^{(\mu)}$ einen der Punkte $\bar{A}'$ oder $\bar{B}$ oder alle beide im Innern enthalten, so müßte die Verschlingungszahl von $\eta^*(\bar{c}^{(\mu)})$ mit l gleich ± 1 oder ± 2 sein. $\bar{c}^{(\mu)}$ schneidet daher sowohl $\bar{d}$ als auch $\bar{d}'$ eine gerade Anzahl von Malen.

Unter den Kurven $\bar{c}^{(\mu)}$ betrachten wir eine, sie heiße wieder $\bar{c}$, die keine andere im Innern enthält. $\bar{c}$ berandet ein Elementarflächenstück $\bar{\mathfrak{y}}$ auf $\bar{\mathfrak{H}}$. Es kann nun sein, daß $\bar{\mathfrak{y}}$ bei η^* topologisch auf sein Bild $\mathfrak{y}^*$ abgebildet wird. $\mathfrak{y}^*$ ist punktfremd zu l, da $\bar{\mathfrak{y}}$ weder $\bar{A}'$ noch $\bar{B}$ enthält. Dann erkennt man wie beim ersten Schritt, daß der Rand c von $\mathfrak{y}^*$ auf $\mathfrak{T}$ ein Elementarflächenstück t berandet, und man beseitigt die Kurve $\bar{c}$ wie früher. Dabei geht $\mathfrak{H}^*$ in ein neues Elementarflächenstück mit Selbstdurchdringung über, für das d^* mindestens zwei Schnittpunkte weniger mit $\mathfrak{T}$ hat.

Wir betrachten nun den Fall, daß $\bar{\mathfrak{y}}$ bei η^* nicht topologisch abgebildet wird. Der Durchschnitt von $\bar{d}+\bar{d}'$ mit $\bar{\mathfrak{y}}$ zerfällt in endlich viele zu einander punktfremde Kurvenbögen, die wir die *Sehnen* von $\bar{\mathfrak{y}}$ nennen. Wenn zwei Punkte $\bar{P}$ und $\bar{P}'$ von $\bar{\mathfrak{y}}$ bei η^* denselben Bildpunkt P haben sollen, so kann es nicht sein, daß $\bar{P}$ innerer Punkt und $\bar{P}'$ Randpunkt von $\bar{\mathfrak{y}}$ ist. Denn dann würde P als Bildpunkt von $\bar{P}'$ auf c, also auf $\mathfrak{T}$ liegen und es würde daher $\bar{P}$ dem Schnittsystem $\bar{c}^{(\mu)}$ angehören müssen, während wir doch angenommen hatten, daß im Innern von $\bar{c}$ keine weitere Kurve $\bar{c}^{(\mu)}$ liegt. Zwei äquivalente Punkte $\bar{P}$ und $\bar{P}'$ von $\bar{\mathfrak{y}}$ sind also entweder beide innere Punkte oder beide Randpunkte. Sind $\bar{P}$ und $\bar{P}'$ äquivalente Randpunkte, so ist ihr gemeinsamer Bildpunkt P ein Doppelpunkt von c und damit Endpunkt einer Selbstdurchdringungskurve des in c eingespannten Elementarflächenstückes $\mathfrak{y}^*$, des η^*-Bildes von $\bar{\mathfrak{y}}$, denn $\mathfrak{y}^*$ liegt ganz auf ein und derselben Seite des zweiseitig in der $\mathfrak{S}^3$ liegenden Torus $\mathfrak{T}$. Man erhält somit die äquivalenten Randpunkte von $\bar{\mathfrak{y}}$ als Grenz-

punkte von äquivalenten inneren Punkten. Wir finden also, daß die Singularitäten von $\mathfrak{y}^*$ nur dadurch zustandekommen können, daß gewisse Sehnen von $\bar{\mathfrak{y}}$ äquivalent sind, d. h. bei γ^* topologisch auf dieselbe Bildkurve abgebildet werden. Zwei äquivalente Sehnen $\bar{s}$ und $\bar{s}'$ zerlegen $\bar{\mathfrak{y}}$ in zwei Segmente und eine Zone. Wir gewinnen aus den beiden Segmenten unter Fortlassung der zwischen ihnen liegenden Zone durch Identifizieren von $\bar{s}$ und $\bar{s}'$ ein neues Elementarflächenstück $\bar{\mathfrak{y}}_1$. Enthält $\bar{\mathfrak{y}}_1$ immer noch äquivalente Sehnen, s_1 und $\bar{s}_1'$, so bilden wir aus den von ihnen auf $\bar{\mathfrak{y}}_1$ abgeschnittenen Segmenten unter Fortlassung der zwischen ihnen liegenden Zone durch Identifizieren von $\bar{s}_1$ und $\bar{s}_1'$ ein neues Elementarflächenstück $\bar{\mathfrak{y}}_2$ usw., bis wir nach endlich vielen Schritten zu einem Elementarflächenstück $\bar{\mathfrak{y}}_i$ gelangen, in dem keine äquivalenten Sehnen mehr vorkommen. Das Bild von $\bar{\mathfrak{y}}_i$ ist also ein singularitätenfreies, zu l punktfremdes Elementarflächenstück $\mathfrak{y}_i$, dessen Rand c_i nach Hilfssatz 1 bzw. 2 auf $\mathfrak{T}$ nullhomotop, also Rand eines Elementarflächenstückes t ist. Wie beim ersten Schritt wird durch eine s-Abbildung, die $\mathfrak{T}-\mathfrak{t}$ und l punktweise fest läßt, $\mathfrak{y}_i$ in t übergeführt und danach von $\mathfrak{T}$ abgehoben, wodurch $\mathfrak{Y}^*$ in ein Elementarflächenstück mit Selbstdurchdringung übergeht, das in l eingespannt ist und dessen Selbstdurchdringungskurve d^* mindestens zwei Schnittpunkte weniger mit $\mathfrak{T}$ aufweist.

Nach Ausführung dieses Schrittes werden durch Wiederholung des ersten Schrittes etwa neuentstandene, zu $\bar{d}+\bar{d}'$ punktfremde Schnittkurven beseitigt und dann, wenn nötig, der zweite Schritt wieder angewendet, wodurch sich die Anzahl der Schnittpunkte von d^* mit $\mathfrak{T}$ abermals verringert. So kann man schließlich alle Schnittpunkte von d^* mit $\mathfrak{T}$ und durch nochmalige Anwendung des ersten Schrittes die ganze Durchdringung von $\mathfrak{T}$ mit $\mathfrak{Y}^*$ beseitigen. $\mathfrak{Y}^*$ liegt dann in $\mathfrak{B}$. Damit ist Hilfssatz 7 und Satz I bewiesen.

§ 9.

Der Diagonalknoten als Invariante des Schlingknotens.

Da bei der s-Abbildung des Satzes I, die $\mathfrak{Y}^*$ in $\mathfrak{Y}$ überführt, auch der Diagonalknoten k^* von $\mathfrak{Y}^*$ in den Diagonalknoten k von $\mathfrak{Y}$ übergeht, so sind k und k^* äquivalente Knoten. Gleiches gilt trivialerweise in dem Ausnahmefalle, wo k und k^* beide unverknotet sind. Es gilt daher

Satz II. *Sind $\mathfrak{Y}$ und $\mathfrak{Y}^*$ zwei in einen Schlingknoten l eingespannte Elementarflächenstücke mit Selbstdurchdringung, so sind die Diagonalknoten k und k^* von $\mathfrak{Y}$ und $\mathfrak{Y}^*$ äquivalent.*

Man kann auf Grund dieses Satzes jedem Schlingknoten l bis auf äquivalente einen bestimmten Knoten k zuordnen, den wir als den

zu l gehörigen Diagonalknoten bezeichnen können. Da diese Zuordnung offenbar invariant gegenüber s-Abbildungen des $\mathfrak{R}^3$ ist, so folgt

Satz III. *Eine notwendige Bedingung für die Äquivalenz zweier Schlingknoten ist die Äquivalenz ihrer Diagonalknoten.*

§ 10.

Eigenschnittzahl z und Verdrillungszahl v.

Ein Elementarflächenstück $\mathfrak{F}$ mit Selbstdurchdringung besitzt außer seinem Diagonalknoten noch zwei weitere Invarianten gegen s-Abbildungen. Unter der *Eigenschnittzahl* z von $\mathfrak{F}$ verstehen wir die Schnittzahl von $\mathfrak{F}$ mit seinem Rand l, wobei vorausgesetzt wird, daß die zur Bestimmung der Schnittzahl benutzte Orientierung von l diejenige ist, die von der willkürlich gewählten Orientierung von $\mathfrak{F}$ induziert wird. Kehrt man die Orientierung von $\mathfrak{F}$ um, so ändert sich also auch die Orientierung von l, sodaß die Schnittzahl ungeändert bleibt. Dagegen hängt sie von der Raumorientierung ab. Letztere ändert sich aber bei s-Abbildungen nicht. Die Eigenschnittzahl ist daher nach Festlegung einer bestimmten Raumorientierung eine Invariante von $\mathfrak{F}$ gegen s-Abbildungen. Ihr Wert kann offenbar nur $+2$ oder -2 sein. Spiegelbildliche Elementarflächenstücke mit Selbstdurchdringung haben entgegengesetzte Eigenschnittzahlen.

Zur Definition der Verdrillungszahl v von $\mathfrak{F}$ verbinden wir im Urbild $\overline{\mathfrak{F}}$ die Punkte $\overline{A}$ und $\overline{A}'$ durch eine Kurve α, die mit $\bar{d} + \bar{d}'$ nur Anfangspunkt und Endpunkt gemeinsam hat. Ebenso verbinden wir $\overline{B}$ und $\overline{B}'$ durch eine Kurve $\bar{\beta}$, die überdies punktfremd zu $\bar{\alpha}$ sei. Bei der Abbildung η von $\overline{\mathfrak{F}}$ auf $\mathfrak{F}$ gehen $\bar{\alpha}$ und $\bar{\beta}$ in die punktfremden geschlossenen Kurven α und β über, deren Verschlingungszahl wir als *Verdrillungszahl* v von $\mathfrak{F}$ erklären. v hängt nicht ab von der Wahl der Kurven $\bar{\alpha}$ und $\bar{\beta}$.

Da man ein Elementarflächenstück $\mathfrak{F}$ mit Selbstdurchdringung durch s-Abbildung stets in ein schmales Band überführen kann, dessen Verknotung durch den Diagonalknoten k angegeben wird (Fig. 2), so leuchtet ein, daß der Diagonalknoten k und die Zahlen $z = \pm 2$ und v beliebig vorgegeben werden können und $\mathfrak{F}$ bis auf s-Abbildungen bestimmen (vgl. Graeub [2]). Da ferner, wenn k kein Kreis ist, $\mathfrak{F}$ und sein Rand, der Schlingknoten l, sich nach Satz I umkehrbar eindeutig (bis auf s-Abbildungen) bestimmen, so folgt, *daß k, z, v charakteristische Invarianten des Schlingknotens l sind, vorausgesetzt, daß k kein Kreis ist.* Da dem Spiegelbild von l die Invarianten k, $-z$, $-v$ zukommen, so folgt weiter, *daß ein Schlingknoten, dessen Diagonalknoten kein Kreis ist, niemals seinem Spiegelbild äquivalent ist.*

§ 11.

Der Kreis als Diagonalknoten.

Wir betrachten ein Elementarflächenstück $\mathfrak{Y}$ mit Selbstdurchdringung, dessen Diagonalknoten k ein Kreis ist. Es steht auf Grund unserer bisherigen Sätze nicht fest, ob Eigenschnittzahl z und Verdrillungszahl v von $\mathfrak{Y}$ Invarianten des Randes l von $\mathfrak{Y}$ sind. Auf alle Fälle ist $\mathfrak{Y}$ und damit l durch die beiden Zahlen z und v bis auf äquivalente bestimmt. Wir bezeichnen daher l durch das Symbol (z, v). Um die Frage zu entscheiden, ob die Knoten (z_1, v_1) und (z_2, v_2) äquivalent sein können, berechnen wir nach einem der bekannten Verfahren die Homologiegruppe $\mathfrak{H}_2$ der zweiblättrigen zyklischen Überlagerungsmannigfaltigkeit $\mathfrak{M}_2$ der 3-Sphäre mit l als Verzweigungslinie. Da die Knoten (z, v) und $(-z, -v)$ Spiegelbilder

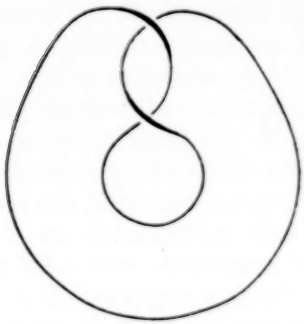


Fig. 8.

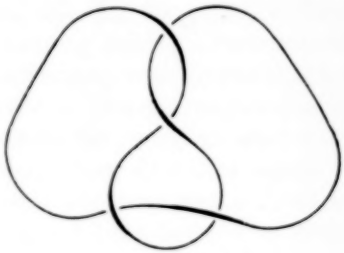


Fig. 9.

voneinander sind, also dieselbe Gruppe $\mathfrak{H}_2$ haben, genügt es, $z = +2$ vorauszusetzen. Es ergibt sich die zyklische Gruppe der Ordnung $|4v + 1|$. Hieraus folgt, daß zwei Knoten mit den verschiedenen Symbolen (z_1, v_1) und (z_2, v_2) höchstens dann äquivalent sein können, wenn $z_1 = -z_2$, $v_1 = -v_2$ ist, d. h. wenn die beiden Knoten Spiegelbilder voneinander sind. Die Frage, ob der Knoten $(2, v)$ seinem Spiegelbild äquivalent ist, ist zu bejahen für die Knoten (2,0) (Kreislinie, Fig. 8) und (2,1) (Viererknoten, Fig. 9), zu verneinen z. B. für diejenigen Knoten $(2, v)$, für die eine Primzahl der Form $4\varrho + 3$ in ungerader höchster Potenz in $|4v + 1|$ enthalten ist (s. Reidemeister [3]). Es ist zu vermuten, daß Kreislinie und Viererknoten die beiden einzigen Ausnahmen sind.

(Eingegangen am 7. Dezember 1948.)

Literatur.

J. W. Alexander.

[1] On the subdivision of 3-space by a polyhedron. Nat. Acad. Proc. **10** (1924), 6—8.

W. Graeub.

[2] Semilineare Abbildungen. (Erscheint in Sitz.-Ber. d. Akad. d. Wissensch. Heidelberg.)

K. Reidemeister.

[3] Knotentheorie. Erg. d. Math. I, 1. (1932).

H. Schubert.

[4] Die eindeutige Zerlegbarkeit eines Knotens in Primknoten. Sitz.-Ber. d. Akad. d. Wissensch. Heidelberg (1949).

H. Seifert.

[5] Über das Geschlecht von Knoten. Math. Ann. 110 (1934), 571—592.

J. H. C. Whitehead.

[6] On doubled knots. J. London Math. Soc. **12** (1937), 63—71.

Inseparable Körpererweiterungen[1]).

Von

G. Pickert in Tübingen.

Einleitung.

Die vorliegende Arbeit will Bausteine zu einer Strukturtheorie der inseparablen Erweiterungen beitragen. Über derartige Erweiterungen ist allgemein noch recht wenig bekannt. Während für die separablen Erweiterungen die Galoissche Theorie eine sogar die unendlichen Erweiterungen umfassende Strukturtheorie liefert, versagt dieses Werkzeug bei den inseparablen Erweiterungen insofern, als es nur Aussagen über deren separable Anteile liefern kann. Die der Galoisschen Theorie nachgebildete Theorie von Jacobson [5][2]) vermag keinen Ersatz zu schaffen, da sie einmal auf inseparable Erweiterungen vom Exponenten eins beschränkt bleibt, zum andern die in ihr den Erweiterungen zugeordneten Lie-Algebren strukturmäßig nicht einfacher, sondern eher schwieriger zu überblicken sind als die inseparablen Erweiterungen. Abweichend von derartigen Versuchen wollen wir hier keine Zuordnung von Erweiterungen zu andern algebraischen Gebilden herstellen, sondern im Wesentlichen gewisse Strukturinvarianten inseparabler Erweiterungen auffinden und näher untersuchen, deren Werte natürliche Zahlen bzw. Mächtigkeiten sind. Dabei erweist es sich allerdings als notwendig, bei den unendlichen Erweiterungen gänzlich andere Wege einzuschlagen als bei den endlichen.

Ein einigendes Band bilden jedoch die Begriffe der p-Abhängigkeit und des Unvollkommenheitsgrades, deren 1936 durch Teichmüller [15] erfolgte Einführung den ersten wesentlichen Fortschritt in der Theorie der inseparablen Erweiterungen seit der klassischen Steinitzschen Arbeit [14] vom Jahre 1910 darstellt. Dadurch wird eine von der Steinitzschen etwas abweichende Darstellungsart der grundlegenden Tatsachen über inseparable Erweiterungen notwendig, die die ersten beiden Paragraphen zusammen mit einigen Ergänzungen geben. Der dritte Paragraph behandelt die auf eine frühere Arbeit [10] zurückgehende Normalform $K(a_1, \ldots, a_m)$ für endliche, rein-inseparable Erweiterungen,

[1]) Von der Mathematisch-Naturwissenschaftlichen Fakultät der Eberhard-Karls-Universität in Tübingen als Habilitationsschrift angenommen.

[2]) Ziffern in eckigen Klammern beziehen sich auf das Literaturverzeichnis am Schluß.

die dadurch charakterisiert ist, daß $a_i (i = 1, \ldots, m)$ bezüglich $K(a_1, \ldots, a_{i-1})$ einen nichtverschwindenden, nichtkleineren Exponenten e_i besitzt als die $a_{i+1}, \ldots, a_m$. Die e_i sind nun Strukturinvarianten, und ihre Anzahl m stellt die Vielfachheit, d. h. die Minimalzahl von Erzeugenden, der Erweiterung dar.

Dabei bildet der Zusammenhang zwischen den e_i und gewissen Rangzahlen der aus $L = K(a_1, \ldots, a_m)$ durch Erweiterung von K zu einem Zerfällungskörper entstehenden primären Algebra die Grundlage für den Invarianzbeweis. Diese Methode zusammen mit der Bedeutung, die der Kompositumbildung in der Galoisschen Theorie zukommt, führt zu dem in § 5 dargelegten Verfahren, nähere Aussagen über Exponenten und Vielfachheiten durch Betrachtung von Kompositum LM und Algebrenprodukt $L \times M$ zweier Erweiterungen $L|K$ und $M|K$ zu gewinnen. Hierzu liefert § 4 neben einigen an sich interessanten Strukturaussagen die erforderlichen Grundlagen. Die wesentlichen Ergebnisse der Methode sind Zusammenhänge zwischen den Exponenten und damit auch den Vielfachheiten der Erweiterungen $L|K$, $L|M$, $M|K$, wenn M Zwischenkörper von $L|K$ ist. Wichtiges Hilfsmittel ist dabei die doppelte Erzeugung von $L \times M$ einmal als Grundkörpererweiterung L_M von $L|K$, das andere Mal als Grundkörpererweiterung M_L von $M|K$. Als Verallgemeinerung eines bekannten Steinitzschen Satzes ergibt sich so, daß jeder Zwischenkörper einer Erweiterung der Vielfachheit m eine Vielfachheit $\leqq m$ besitzt (Satz 28). Eine völlige Ausnutzung der Methode scheint jedoch im allgemeinen Fall nicht möglich zu sein, weshalb in § 6 nur die einfachsten Spezialfälle vollständig durchgeführt werden.

Im zweiten Abschnitt werden die Ergebnisse der Paragraphen 3 und 4 auf endliche Erweiterungen einfacher rein-transzendenter Erweiterungen angewendet. Für die Vielfachheit derartiger Funktionenkörper wird in Satz 34 als obere Grenze der Unvollkommenheitsgrad des Konstantenkörpers angegeben. Satz 36 liefert ein Kriterium für die separable Erzeugbarkeit bei fastvollkommenem Konstantenkörper. Ferner beweist in § 7 noch ein Gegenbeispiel, daß aus der Vielfachheit eines Funktionenkörpers keine Schlüsse auf die Vielfachheit des Restklassenkörpers nach einem Primdivisor gezogen werden können. In diesem Zusammerhang wird ein Fehler aus einer früheren Arbeit [10] aufgewiesen und berichtigt. § 8 untersucht die Frage, inwieweit aus dem Algebrenprodukt des Restklassenkörpers eines Primdivisors mit einer Konstantenerweiterung die durch die Konstantenerweiterung hervorgerufene Zerlegung des Primdivisors den Graden, Exponenten und Restklassenkörpern nach bestimmt ist. Während bei separabler Konstantenerweiterung diese Bestimmung vollständig möglich ist, liefert für inseparable Erweiterungen Satz 42 ein wesentlich schwächeres Ergebnis, das — wie Gegenbeispiele belegen — auch nicht verschärft werden kann.

Der dritte Abschnitt behandelt — wie früher schon in einem Vortrag skizziert [11] — die unendlichen rein-inseparablen Erweiterungen getrennt nach zwei Typen: den *rein-unendlichen*, die durch Adjunktion sämtlicher p-ter, p^2-ter, p^3-ter, u. s. f. Wurzeln aus den Elementen einer gewissen Menge entstehen, und den *halbendlichen* Erweiterungen $L|K$, bei denen aus $a \varepsilon K - K^p$ die Existenz eines n mit $a^{p^{-n}} \varepsilon L - L^p$ folgt. Satz 52 stellt fest, daß jede rein-inseparable Erweiterung sich auf genau eine Weise als halbendliche Erweiterung einer rein-unendlichen auffassen läßt. Zur näheren Untersuchung der rein-unendlichen Erweiterungen in § 9 wird der ebenso wie der Begriff der p-Abhängigkeit den Abhängigkeitsaxiomen (S. 9) genügende Begriff der *U-Abhängigkeit* eingeführt. Dem Unvollkommenheitsgrad eines Körpers entspricht hierbei der *U-Grad* einer rein-unendlichen Erweiterung $L|K$. Seinen Zusammenhang mit den Unvollkommenheitsgraden von L und K beschreibt Satz 48, mit dessen Hilfe auch der Beweis der Tatsache gelingt, daß der Unvollkommenheitsgrad eines algebraischen Erweiterungskörpers nicht größer ist als der Unvollkommenheitsgrad des Grundkörpers (Satz 50). In § 10 werden halbendliche Erweiterungen ohne Exponenten — die also nicht in einer p^{-e}-ten Potenz des Grundkörpers liegen — angegeben, bei denen eine Veränderung des Unvollkommenheitsgrades eintritt. Ein von MacLane [8] konstruiertes Beispiel zeigt, daß dies auch bei Grundkörpern von endlichem Unvollkommenheitsgrad eintreten kann. Zugleich ist damit die Existenz von unendlichen, halbendlichen Erweiterungen über gewissen Körpern von endlichem Unvollkommenheitsgrad bewiesen.

I. Endliche Erweiterungen.

§ 1.
Grundbegriffe.

Ist K ein Körper der Primzahlcharakteristik p, so nennt man nach Steinitz [14, S. 231] ein irreduzibles Polynom aus $K[x]$ ohne mehrfache Nullstellen *von erster Art*. Van der Waerden [17, S. 126] hat hierfür die im Folgenden verwandte Bezeichnung *separabel* eingeführt. Die in einem Oberkörper von K liegenden Nullstellen eines solchen Polynoms werden in gleicher Weise benannt. Eine Erweiterung $L|K$ heißt separabel, wenn sämtliche Elemente von L separabel über K sind, andernfalls *inseparabel*. Stellen wir ein beliebiges irreduzibles Polynom aus $K[x]$ durch maximale Wahl von e in der Form

$$f(x) = g(x^{p^e}) \tag{1}$$

dar, so ist g separabel. f sowie seine Nullstellen heißen dementsprechend *inseparabel* — bei Steinitz *von zweiter Art* —, wenn $e > 0$. Der Grad

n_0 von g, der mit dem Grad n von f durch

$$n = n_0 p^e \tag{2}$$

zusammenhängt, wird *reduzierter Grad* des Polynoms und seiner Nullstellen genannt und e als deren *Exponent* bezeichnet [14, S. 231]. $L = K(a)$ mit $f(a) = 0$ besitzt in einem genügend umfassenden Oberkörper genau n_0 relative Isomorphismen [17, S. 127—129]. Eine beliebige endliche Erweiterung $L = K(a_1, \ldots, a_s)$ mit $n^{(i)}$, $n_0^{(i)}$ als Grad und reduziertem Grad von a_i über $K(a_1, \ldots, a_{i-1})$, besitzt also $\prod_{i=1}^{s} n_0^{(i)} = n_0$ relative Isomorphismen und mit $n = \prod_{i=1}^{s} n^{(i)} = (L:K)$, dem Grad von L über K, gilt wieder eine Beziehung (2). Bei separablem $L|K$ ist $n = n_0$. Da aber die Erzeugung von $L|K$ mit irgendeinem Element von L begonnen werden kann, folgt auch umgekehrt aus $n = n_0$ die Separabilität. Zugleich ist damit gezeigt, daß durch sukzessive Adjunktion separabler Elemente stets eine separable Erweiterung entsteht.

Nach Teichmüller [15, S. 367] heißt eine algebraische Erweiterung $L|K$ *rein-inseparabel*, wenn jedes bez. K separable Element von L bereits in K liegt. Notwendig und hinreichend dafür ist, daß jedes Element bez. K den reduzierten Grad 1 besitzt, also in (1) das Polynom g immer linear ist:

$$f(x) = x^{p^e} - \alpha. \tag{3}$$

Das betreffende Element sowie sein Polynom (3) werden dann ebenfalls rein-inseparabel genannt. Die so eingeführten Bezeichnungen decken sich mit den Steinitzschen Benennungen *Wurzelkörper* und *Wurzelelement* [14, S. 229]. Sukzessive Adjunktion rein-inseparabler Elemente ergibt stets wieder eine rein-inseparable Erweiterung. „Rein-inseparabel" ist nicht Unterbegriff von „inseparabel": Genau die Elemente von K selbst sind bez. K sowohl separabel wie rein-inseparabel. Diese Tatsache läßt sich auch für Erweiterungen formulieren [15, S. 368 Satz 5]. Rein-inseparable Polynome (3) besitzen ein besonders einfaches Irreduzibilitätskriterium, nämlich: α nicht in K^p. Dabei soll M^n allgemein die Menge der n-ten Potenzen aller Elemente der Menge M bedeuten. Aus diesem Kriterium ergibt sich sofort

Satz 1. *Ein irreduzibles, rein-inseparables Polynom bleibt irreduzibel bei separabler Erweiterung seines Koeffizientenkörpers.*

Daraus wieder leitet man her den

Satz 2. *Ein Kompositum S der rein-inseparablen Erweiterung $L|K$ und der separablen Erweiterung $M|K$ ist isomorph dem Algebrenprodukt $L \times M$ mit K als Grundkörper, also separabel über L mit $(S:L) = (M:K)$ und rein-inseparabel über M mit $(S:M) = (L:K)$.*

Denn eine Basis von $L|K$ ist wegen Satz 1 auch Basis von $S|M$.

Nach Steinitz [14, S. 238] gibt es zu einer algebraischen Erweiterung $L|K$ genau einen Zwischenkörper Z so, daß $L|Z$ rein-inseparabel und $Z|K$ separabel ist, und zwar besteht Z aus allen bez. K separablen Elementen von L. Wir nennen ihn daher den *maximalen separablen Zwischenkörper (m. s. Zk.)* von $L|K$. Ist $(Z:K)$ endlich, so gibt dieser Grad die Anzahl der relativen Isomorphismen von $L|K$ an und heißt daher *reduzierter Grad* von $L|K$. Besitzen die Exponenten der Elemente von L ein Maximum, so heißt dieses der *Exponent der Erweiterung*. Er ist gleich der kleinsten Zahl e mit $L^{p^e} \subseteq Z$. Erweiterungen, die ein solches Maximum nicht besitzen, bezeichnen wir als *Erweiterungen ohne Exponenten*. Ist $(L:Z)$ endlich, also $= p^f$, so wird es der *Inseparabilitätsgrad* von $L|K$ genannt. Den zwischen e und f bestehenden Zusammenhang werden wir in § 3 näher untersuchen. Offenbar ist

$$e \leqq f. \tag{4}$$

Eine Antwort auf die Frage nach der andern Möglichkeit einer Zerlegung in rein-inseparable und separable Erweiterung gibt

Satz 3. *Es gibt zu einer algebraischen Erweiterung $L|K$ höchstens einen über K rein-inseparablen Zwischenkörper S, über dem L separabel ist. S existiert nicht immer, wohl aber dann, wenn $L|K$ normal ist.*

Die Eindeutigkeit ergibt sich daraus, daß ein solches S sämtliche über K rein-inseparablen Elemente von L und nur diese enthält: Ein über K rein-inseparables Element ist auch über S rein-inseparabel, zugleich aber über S separabel. Eine Erweiterung ohne derartigen Zwischenkörper konstruieren wir so: Wie im Folgenden stets seien u, v über dem Primkörper P_p der Charakteristik $p > 2$ algebraisch unabhängig. Dann setzen wir $K = P_p(u, v)$, $f(x) = x^{2p} + u x^p + v$, $L = K(a)$ mit $f(a) = 0$. Da f in einem genügend umfassenden Körper zwei verschiedene p-fache Nullstellen besitzt, zerfällt es über einem Oberkörper von K in einer der Arten $(x-b)^p (x-c)^p$, $(x^p - b)(x^p - c)$, $(x^2 + b x + c)^p$ oder ist irreduzibel. Über K ist danach f irreduzibel, während über einem Zwischenkörper S der besprochenen Art die dritte Art der Zerlegung auftreten müßte. Das ist jedoch wegen $u = b^p$, $v = c^p$, $(K(b, c) : K) = p^2 > 2p$ unmöglich. Der letzte Teil des Satzes wird nach einer Bemerkung bei Deuring [2, S. 290] so bewiesen: Ist $\mathfrak{G}$ die Galoissche Gruppe von $L|K$, so ist der aus allen von ganz $\mathfrak{G}$ festgelassenen Elementen bestehende Zwischenkörper S' der Körper S. Denn $S'|K$ besitzt außer dem identischen keinen relativen Isomorphismus, ist also rein-inseparabel. Die linksseitigen Nebenklassen (Isomorphismen als Linksoperatoren geschrieben!) der ein Element $a \varepsilon L$ festlassenden Untergruppe von $\mathfrak{G}$ führen ferner a in seine verschiedenen Konjugierten $a', \ldots, a^{(n-1)}$ über, werden untereinander aber durch linksseitige Multiplikation mit irgendeinem Element von $\mathfrak{G}$ permutiert. Daher liegen die elementarsymmetrischen Funktionen der $a, a', \ldots, a^{(n-1)}$ in S', d. h. a ist als Nullstelle von $(x-a)(x-a') \ldots (x-a^{(n-1)})$

separabel bez. S'. — Das Zuordnungsschema von Untergruppen $\mathfrak{H} \subseteq \mathfrak{G}$ und Zwischenkörpern T Fig. 1) ist dabei für $S \supset K$ nur in einer Richtung eindeutig, da ja z. B. alle Unterkörper von S durch ganz $\mathfrak{G}$ elementweis festgelassen werden. Diese bekannte Tatsache beleuchtet die Unbrauchbarkeit der Galoisschen Theorie für Strukturuntersuchungen, bei denen es gerade auf den rein-inseparablen Anteil ankommt.

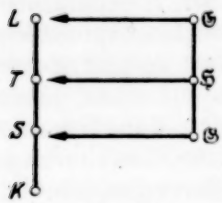


Fig. 1.

Während die Zerlegung entsprechend Satz 3 also nur in Sonderfällen möglich ist, führt die Verwendung des m. s. Zk. allgemein Strukturfragen inseparabler Erweiterungen auf solche von separablen und von rein-inseparablen Erweiterungen zurück. Für die Frage nach den Zwischenkörpern wird diese Reduktion gegeben durch

Satz 4. *Ist Z der m. s. Zk. von $L|K$, so sind alle Zwischenkörper von gleichem m. s. Zk. eineindeutig gewissen Zwischenkörpern von $L|Z$ zugeordnet.*

Es sei L' ein Zwischenkörper mit Z' als m. s. Zk. Das Kompositum L^* von Z und L' ist dann Zwischenkörper von $L|Z$ und nach Satz 2 separabel über L' (Fig. 2). Nach Satz 3 ist L' daher auch durch L^* und Z' eindeutig bestimmt.

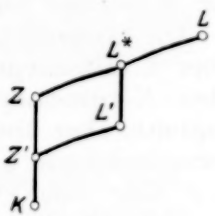


Fig. 2.

Der Satz vom primitiven Element besagt bekanntlich [17, S. 132], daß jede endliche Erweiterung $K(a_1, \ldots, a_s)$ mit über K separablen $a_1, \ldots, a_s$ — insbesondere jede endliche separable Erweiterung — durch Adjunktion *eines* Elementes erzeugt werden kann, also — wie man kurz sagt — *einfach* ist. Es genügt aber bereits, die Separabilität von a_i bez. $K(a_1, \ldots, a_{i-1}$ für $i = 2, \ldots, s$ zu fordern. Zum Beweis können wir uns auf $s = 2$ beschränken. d. h. auf

Satz 5. *$K(a, b)$ ist einfach, wenn a algebraisch über K und b separabel bez. $K(a)$ ist.*

Denn mit e als dem Exponent von a bez. K ist b^{p^e} separabel bez. $K^{p^e}(a^{p^e})$, also erst recht bez. $K(a^{p^e})$ und damit auch bez. K. Es gibt daher ein c mit $K(a, b^{p^e}) = K(c)$. Da ferner b separabel über $K(a)$, also erst recht über $K(c)$ ist, liegt es als über $K(c)$ rein-inseparabel in diesem Körper: $K(a, b) = K(c)$.

Es gibt nun [14, S. 223—224] endliche inseparable Erweiterungen, die nicht einfach sind. Eine für Strukturuntersuchungen endlicher inseparabler Erweiterungen wesentliche Invariante ist daher die Minimalzahl von Erzeugenden. Diese war in [10, S. 220] für rein-inseparable Erweiterungen als *Inseparabilitätsrang* bezeichnet worden. Im Folgenden soll sie für beliebige endliche Erweiterungen *Vielfachheit* genannt

werden, während der Ausdruck „Inseparabilitätsrang" für die Vielfachheit bez. des m. s. Zk. nur dort gebraucht werden wird, wo es notwendig ist, diese Vielfachheit von der bez. des Grundkörpers zu unterscheiden. Eine Erweiterung der Vielfachheit m wird gelegentlich auch als *m-fache Erweiterung* bezeichnet. Einfache Erweiterungen sind vor den mehrfachen durch die Endlichkeit ihrer Zwischenkörperzahl ausgezeichnet [14, S. 244]. Im rein-inseparablen Fall gilt speziell

Satz 6. *Eine rein-inseparable Erweiterung $L = K(a)$ vom Grad p^e besitzt für jede natürliche Zahl $e' < e$ genau einen Zwischenkörper vom Grad $p^{e'}$, nämlich $K(a^{p^{e-e'}})$, der also von der Wahl der Erzeugenden a unabhängig ist.*

. Denn aus $K \subset Z \subset L$, $(Z:K) = p^{e'}$ folgt $(L:Z) = p^{e-e'}$, also wegen (4) $b = a^{p^{e-e'}} \varepsilon Z$, $K(b) \subseteq Z$ und daraus wegen der sich aus $b^{p^{e'}} \varepsilon K - K^p$ ergebenden Gradrelation $(K(b):K) = (Z:K)$ die Behauptung $Z = K(b)$.

§ 2.

p-Abhängigkeit und Unvollkommenheitsgrad.

Um Strukturfragen rein-inseparabler Erweiterungen zu klären, muß man untersuchen, welche p-ten Wurzeln bei Adjunktion gewisser p-ter Wurzeln bereits miterfaßt sind. Dabei wird man zu dem auf Teichmüller [15, S. 368 u. ff.] zurückgehenden Begriff der p-Abhängigkeit geführt:

$a \varepsilon K$ heißt *p-abhängig* von der Menge $M \subseteq K$, wenn $a \varepsilon K^p(M)$ ist.

Nach Teichmüller genügt dieser Begriff den formalen *Abhängigkeitsaxiomen* [17, S. 105]:

I. *Ist a von M abhängig, so bereits von einer endlichen Teilmenge von M.*

II. *a ist abhängig von $a, a_1, \ldots, a_n$.*

III. *Ist b abhängig von $a, a_1, \ldots, a_n$, aber nicht von $a_1, \ldots, a_n$, so ist a abhängig von $b, a_1, \ldots, a_n$.*

IV. *Ist c abhängig von $b_1, \ldots, b_m$ und jedes b_i abhängig von $a_1, \ldots, a_n$, so ist auch c abhängig von $a_1, \ldots, a_n$.*

Üblicherweise wird dabei ein von der Menge $\{a_1, \ldots, a_n\}$ abhängiges Element als von den $a_1, \ldots, a_n$ abhängig bezeichnet. Eine Menge heißt unabhängig — in unserm Fall also *p-unabhängig* — wenn kein Element aus M von andern Elementen dieser Menge abhängig ist. Die p-Unabhängigkeit der $a_1, \ldots, a_n \varepsilon K$ drückt sich also in der Gradbeziehung $(K^p(a_1, \ldots, a_n) : K^p) = p^n$ aus.

Zusammen mit den Axiomen I—IV gelten nun auch alle z. B. aus der Theorie der linearen Abhängigkeit bekannten Folgesätze [17, S. 105 u. ff.]. Es gibt also p-unabhängige Mengen B, von denen jedes Element aus K p-abhängig ist, d. h. für die

$$K = K^p(B) \tag{5}$$

gilt. Alle solche Mengen B, die nach TEICHMÜLLER als *p-Basen* von K bezeichnet werden, haben gleiche Mächtigkeit, den *Unvollkommenheitsgrad* von K, im folgenden mit $\mathrm{Uvg}(K)$ abgekürzt. Diese letzte, ebenfalls auf TEICHMÜLLER zurückgehende Benennung ist dadurch veranlaßt, daß nach (5) die vollkommenen Körper durch leere p-Basen charakterisiert sind. Durch vollständige Induktion läßt sich (5) übrigens sofort zu

$$K = K^{p^e}(B) \qquad (e = 1, 2, \ldots) \tag{6}$$

verallgemeinern.

Einen Zusammenhang zwischen p-Abhängigkeit und Vielfachheit läßt bereits erkennen der

Satz 7. *Hat die endliche inseparable Erweiterung $L|K$ die Vielfachheit m, so sind je m diese Erweiterung erzeugende Elemente p-unabhängig in L.*

Wäre nämlich in $L = K(a_1, \ldots, a_m)$ etwa a_m p-abhängig von den $a_1, \ldots, a_{m-1}$, so müßte $a_m \varepsilon K(a_1, \ldots, a_{m-1}, a_m^p)$ sein. Damit hätte a_m bez. $K(a_1, \ldots, a_{m-1})$ den gleichen Grad wie a_m^p, wäre also [14, S. 232] separabel über diesem Körper. Da wegen der Inseparabilität von $L|K$ bei unserer Annahme $m - 1 \geqq 1$ sein müßte, würde sich also nach Satz 5 eine Erzeugung durch $m - 1$ Elemente im Widerspruch zur Bedeutung von m ergeben. Aus diesem Beweis folgt übrigens noch über die Behauptung von Satz 7 hinaus, daß in dem bei MACLANE [8] erklärten, auf TEICHMÜLLER zurückgehenden Sinn die $a_1, \ldots, a_m$ sogar schon in $L|K$ (oder „relativ zu K") p-unabhängig sind, d. h. kein a_i p-abhängig ist von den andern und einer p-Basis für K. Danach ist wegen $L = L^p(K, a_1, \ldots, a_m)$ die Menge $\{a_1, \ldots, a_m\}$ relative p-Basis von $L|K$ [15, S. 370], also in Übereinstimmung mit einem den Spezialfall rein-inseparabler Erweiterungen behandelnden Satz von BECKER und MACLANE [1, Theorem 6] die Vielfachheit m zugleich der relative Unvollkommenheitsgrad [15, S. 370] von $L|K$: $(L : L^p(K)) = p^m$. Allgemein heißt eine Erweiterung vom relativen Unvollkommenheitsgrad 0, also mit $L = L^p(K)$, *relativ vollkommen*.

Zur Frage des Verhaltens p-unabhängiger Elemente bei Übergang zu einem Erweiterungskörper hat TEICHMÜLLER gezeigt [15, S. 369], daß eine p-unabhängige Menge auch in einem separablen Oberkörper p-unabhängig bleibt, ja sogar eine p-Basis auch p-Basis jeder separablen Erweiterung ist, so daß der Uvg unverändert bleibt. Erwähnt sei noch, daß deswegen für eine separable Erweiterung $S|K$ immer $S^p(K) = S$ gilt und daher bei Einbeziehung der separablen Erweiterungen an die Stelle der oben für inseparable Erweiterungen bewiesenen Gleichheit von Vielfachheit und relativem Unvollkommenheitsgrad die Übereinstimmung von Inseparabilitätsrang und relativem Unvollkommenheitsgrad tritt. Das Erhaltenbleiben der p-Basis ist nun, wie bereits MACLANE [8, Theorem 8] nachgewiesen hat, sogar charakteristisch für die separablen unter den algebraischen Erweiterungen; denn es gilt

Satz 8. *Eine p-Basis bleibt bei keiner inseparablen Erweiterung p-unabhängig.*

Ist $L|K$ nämlich inseparabel, so gibt es ein $a \varepsilon L$ mit dem Exponenten 1. Mit Z als m. s. Zk. ist dann eine p-Basis B von K auch p-Basis von Z, also etwa a^p p-abhängig von $b, b_1, \ldots, b_n \varepsilon B$ aber p-unabhängig von $b_1, \ldots, b_n$. Nach Abhängigkeitsaxiom III ist also b in Z von $a^p, b_1, \ldots, b_n$ p-abhängig, d. h. aber b von $b_1, \ldots, b_n$ in $Z(a)$ und damit erst recht in L.

Die Konstruktion einer p-Basis einer rein-inseparablen Erweiterung aus einer p-Basis des Grundkörpers ermöglicht nun

Satz 9. *Ist $\{a\} + M$ in K p-unabhängig, so ist in $K(a^{p^{-e}})$ $(e = 1, 2, \ldots)$ auch $\{a^{p^{-e}}\} + M$ p-unabhängig.*

Der Schluß von e auf $e+1$ reduziert sich für diese Behauptung offenbar auf den Fall $e = 1$. Es genügt daher, den Beweis für diesen zu führen. Nach Voraussetzung ist a in K nicht p-abhängig von der Nullmenge. $a' = a^{p^{-1}}$ liegt also, wenn $K(a') = L$ gesetzt wird, nicht in $L^p(M) = K^p(a, M) \subseteq K$, d. h. a' ist in L p-unabhängig von M. Mit $M = \{b\} + M'$ liegt weiter b nicht in $K^p(M', a) = L^p(M')$. M ist daher p-unabhängig in L. Nach allgemeinen Abhängigkeitssätzen gilt das selbe für $\{a'\} + M$. Eine Art Umkehrung von Satz 9 ist

Satz 10. *Ist $K(a)$ rein-inseparabel vom Exponenten e bez. K und $M \subseteq K$ p-unabhängig in $K(a)$, so ist a^{p^e} in K p-unabhängig von M.*

Wir beweisen die Behauptung zuerst für $e = 1$. Wäre sie falsch, so gäbe es, da a^p nicht in K^p liegt, ein $b \varepsilon M$ und ein $M' \subset M$ so, daß a^p p-abhängig in K von $\{b\} + M'$, aber p-unabhängig von M' wäre. Daraus folgt aber die p-Abhängigkeit des b von $\{a^p\} + M'$, d. h. $b \varepsilon K^p(a^p, M')$. Das jedoch bedeutet im Widerspruch zur Voraussetzung die p-Abhängigkeit in $K(a)$ des Elementes b von M'. Ist die Behauptung ferner für $e-1$ $(e > 1)$ richtig, so gelten die Voraussetzungen unseres Satzes nach dem für $e = 1$ Bewiesenen auch noch für die Erweiterung $K(a^p)|K$ vom Exponenten $e-1$. Nach Induktionsvoraussetzung ist daher die Behauptung auch für e richtig und somit durch vollständige Induktion allgemein bewiesen.

Aus Satz 9 folgt nun [10, S. 222] zusammen mit dem oben erwähnten Ergebnis von Teichmüller über separable Erweiterungen

Satz 11. *Bei endlichem $L|K$ ist*

$$\mathrm{Uvg}(L) = \mathrm{Uvg}(K).$$

Für endlichen $\mathrm{Uvg}(K)$ gaben Becker und MacLane [1] einen auf der Gleichung

$$(K : K^p) = p^{\mathrm{Uvg}(K)} \tag{7}$$

beruhenden einfacheren Beweis an. Aus Satz 7 und Satz 11 folgt sofort

Satz 12. *Die Vielfachheit einer endlichen inseparablen Erweiterung ist nicht größer als der Unvollkommenheitsgrad des Grundkörpers.*

Eine einfachere Herleitung dieses zuerst vom Verfasser a. a. O. in anderem Zusammenhang bewiesenen Satzes benutzt nach Becker-MacLane [1] die Tatsache, daß wegen (6) ein endlicher rein-inseparabler Oberkörper von K durch seine p-Basis B als $K(B)$ gegeben ist.

Nach Satz 12 sind also die Körper mit $\mathrm{Uvg}(K) \leqq 1$ stets im Sinne von Krull [6, S. 320] *fastvollkommen*, d. h. jede endliche Erweiterung von ihnen ist einfach. Dieses Ergebnis und zwar mit der Verschärfung, daß $\mathrm{Uvg}(K) \leqq 1$ für fastvollkommenes K charakteristisch ist, läßt sich unter Benutzung von (7) aus einem Satz von Steinitz, [14, S. 244] entnehmen. Die Verschärfung ergibt sich auch sehr leicht aus der Tatsache, daß nach der Definition der p-Unabhängigkeit für p-unabhängige $a_1, \ldots, a_n$ $(K(a_1^{p^{-1}}, \ldots, a_n^{p^{-1}}) : K) = p^n$ ist, also diese Erweiterung die Vielfachheit n besitzen muß. Diese Betrachtungen sowohl wie Satz 12 werden im nächsten Paragraphen zum Satz 17 erweitert. Für die fastvollkommenen Körper gilt in Verallgemeinerung eines auf eine Bemerkung von F. K. Schmidt zurückgehenden Hilfssatzes bei Deuring [4, S. 165]

Satz 13. *Eine algebraische Erweiterung L vom Exponenten e des fastvollkommenen Körpers K hat den m. s. Zk. L^{p^e}.*

Nach Teichmüller [15, S. 371] ist nämlich $Z^{p^{-e}}$ die einzige rein-inseparable Erweiterung vom Exponenten e des ja ebenfalls fastvollkommenen m. s. Zk. Z. Als Folgerung von Satz 13 merken wir noch an, daß es zu jeder algebraischen Erweiterung L eines fastvollkommenen Körpers K einen Zwischenkörper S der in Satz 3 erwähnten Art gibt: Besitzt nämlich L einen Exponenten e, so ist mit $L^{p^e} | K$ auch $L | K^{p^{-e}}$ separabel, also $S = K^{p^{-e}}$. Hat die Erweiterung aber keinen Exponenten, so gilt $K^{p^{-e}} \subseteq L$ für jedes $e = 1, 2, \ldots$: L enthält den kleinsten vollkommenen Oberkörper von K, der $= S$ ist, weil L über ihm separabel sein muß.

§ 3.

Normalform mehrfacher, rein-inseparabler Erweiterungen.

Für endliche, rein inseparable Erweiterungen gilt der im Wesentlichen schon in [10, S. 220] formulierte und bewiesene

Satz 14. *Je m Erzeugende einer rein-inseparablen Erweiterung $L | K$ der Vielfachheit m lassen sich so als $a_1, \ldots, a_m$ bezeichnen, daß mit $i = 1, \ldots, m$ die Bedingungen*

I. $a_i^{q_i} = \alpha_i \varepsilon K(a_1^{q_i}, \ldots, a_{i-1}^{q_i})$ $(q_i = p^{e_i},\ e_i > 0)$

II. $a_i^{p^{-1}}$ *nicht in* $K(a_1, \ldots, a_{i-1})$

III. $e_1 \geqq e_2 \geqq \ldots \geqq e_m$

erfüllt sind. Gelten umgekehrt für eine Erzeugung $L = K(a_1, \ldots, a_m)$ *die Bedingungen I und II, so lassen sich die* a_i *so umordnen, daß mit denselben* e_i *neben I und II auch Bedingung III erfüllt ist. Die* $e_1, \ldots, e_m$ *sind dabei Invarianten der Erweiterung* $L|K$, *und m ist die Vielfachheit dieser Erweiterung. I—III sind gleichbedeutend damit, daß für* $i = 1, \ldots, m$ *der Körper L bez.* $K(a_1, \ldots, a_{i-1})$ *denselben von Null verschiedenen Exponenten besitzt wie das Element* a_i. *Bedingung II kann ersetzt werden durch*

II'. a_i *in* $K(a_1^{q_i}, \ldots, a_{i-1}^{q_i})$ *von den* $a_1^{q_i}, \ldots, a_{i-1}^{q_i}$ *p-unabhängig.*

Zum Beweis beachten wir, daß auf Grund von I—III e_i der Exponent von $L|K(a_1, \ldots, a_{i-1})$ ist. Also wird die im ersten Teil des Satzes geforderte Numerierung so durchzuführen sein, daß a_i bezüglich $K(a_1, \ldots, a_{i-1})$ keinen kleineren Exponenten besitzt als die $a_{i+1}, \ldots, a_m$. Dann sind II und III erfüllt; ebenso $e_i > 0$, da aus $e_m = 0$

$$D = K(a_1, \ldots, a_{m-1})$$

folgen würde. Den noch fehlenden Nachweis von I erbringt man wesentlich kürzer als a. a. O. folgendermaßen: Nach Einführung der Abkürzungen $K' = K(a_1, \ldots, a_{k-1})$, $K'' = K'(a_k^{q_i}, \ldots, a_{i-1}^{q_i})$, $q = q_k|q_i$ genügt es offenbar zu zeigen, daß für $k = 1, \ldots, i-1$ aus $\alpha_i = a_i^{q_i} \varepsilon K''(a_k)$ stets $\alpha_i \varepsilon K''$ folgt. $\alpha_i \varepsilon K''(a_k)$ bedeutet aber $\alpha_i = \sum_{h=0}^{q_i - 1} A_h a_k^h$ mit $A_h \varepsilon K''$. Daraus folgt $a_i^{q_i} = \sum_{h=0}^{q_i - 1} A_h^q (a_k^q)^h$. Da nach Voraussetzung die $a_{k+1}, \ldots, a_i$ bez. K' keinen größeren Exponenten haben als a_k, liegen $a_i^{q_i}$ und die A_h^q in K'. a_k^q hat aber bez. K' den Grad q_i. Somit ist $A_h = 0$ für $h > 0$, also $\alpha_i \varepsilon K''$, w. z. b. w. Damit haben wir zugleich bewiesen, daß I—III gleichbedeutend sind mit „L hat bez. $K(a_1, \ldots, a_{i-1})$ denselben von Null verschiedenen Exponenten wie $a_i (i = 1, \ldots, m)$". Sind nun weiter in einer Erzeugung $L = K(a_1, \ldots, a_m)$ I und II erfüllt, so zeigen wir durch vollständige Induktion nach m, daß durch Umordnen auch III erfüllt werden kann. Für $m = 1$ ist nichts zu beweisen. Es sei $m > 1$ und e_r nicht größer als jedes andere e_i. Dann erfüllt auch $L' = K(a_1, \ldots, a_{r-1}, a_{r+1}, \ldots, a_m)$ die Bedingung II trivialerweise und Bedingung I, weil für $i \geqq r+1$ ja

$$a_i \varepsilon K(a_1^{q_i}, \ldots, (a_r^{q_r})^{q_i q_r}, \ldots, a_{i-1}^{q_i}) = K(a_1^{q_i}, \ldots, a_{r-1}^{q_i}, a_{r+1}^{q_i}, \ldots, a_{i-1}^{q_i})$$

gilt. Also gibt es nach Induktionsvoraussetzung eine Umordnung $\bar{a}_1, \ldots, \bar{a}_{m-1}$ mit $\bar{e}_1 \geqq \ldots \geqq \bar{e}_{m-1}$. $L = L'(a_r)$ hat nun über L' den Grad $(L:K)/(L':K) = p^{\sum e_i - \sum \bar{e}_i} = q_r$. Wegen $a_r^{q_r} = \alpha_r \varepsilon L'$ gilt daher $a_r^{p^{\nu}} \varepsilon K(\bar{a}_1, \ldots, \bar{a}_{m-1})$. Setzen wir also $a_r = \bar{a}_m$, so sind die Bedingungen I—III auch für $L = K(\bar{a}_1, \ldots, \bar{a}_m)$ erfüllt. Die Invarianz der e_i und damit auch ihrer Anzahl m, d. h. die Unabhängigkeit dieser

Zahlen von der Wahl der Erzeugenden bei Erfüllung von I—III, folgt nun nach den Entwicklungen a. a. O. S. 229, 230 daraus, daß mit M als Zerfällungskörper von $L|K$ die e_i sich aus gewissen Strukturinvarianten der primären Algebra L_M über dem Grundkörper M berechnen lassen. In § 5 werden wir von allgemeinerer Fragestellung aus auf diese Zusammenhänge näher eingehen. Auf Grund des ersten Teils unseres Satzes ist damit m als die Vielfachheit von $L|K$ erkannt. Schließlich folgt aus II: α_i nicht in $K^p(a_1^p, \ldots, a_{i-1}^p)$, also erst recht nicht in $K^p(a_1^{q_i}, \ldots, a_{i-1}^{q_i})$, d. h. aber II'. Ist nun II' erfüllt, so sind für $i = 2, \ldots, m$ die $a_1^{q_i}, \ldots, a_{i-1}^{q_i}$ in $K^{(i)} = K(a_1^{q_i}, \ldots, a_{i-1}^{q_i})$ p-unabhängig. Ist nämlich diese für $i = 2$ sofort einzusehende Behauptung für $i = n < m$ richtig, so folgt aus II' die p-Unabhängigkeit der $a_1^{q_n}, \ldots, a_{n-1}^{q_n}$, α_n in $K^{(n)}$. Mehrfache Anwendung von Satz 9 ergibt daraus die p-Unabhängigkeit der $a_1^{q_{n+1}}, \ldots, a_n^{q_{n+1}}$ in $K^{(n+1)}$. Wieder mittels Satz 9 folgt aus der somit bewiesenen p-Unabhängigkeit der $a_1^{q_i}, \ldots, a_{i-1}^{q_i}$, α_i in $K^{(i)}$ die p-Unabhängigkeit der $a_1, \ldots, a_{i-1}$, α_i in $K(a_1, \ldots, a_{i-1})$. Darin ist aber Bedingung II enthalten.

Eine den Bedingungen I—III genügende Erzeugung soll im Folgenden *ausgezeichnet* genannt werden. Haben wir also eine ausgezeichnete Erzeugung aufgefunden, so kennen wir auch die Vielfachheit der Erweiterung. Wir können so zeigen

Satz 15. *Ein Zwischenkörper der endlichen Erweiterung $L|K$ hat bez. K dieselbe Vielfachheit wie der ihm entsprechend Satz 4 zugeordnete Oberkörper des m. s. Zk. Z von $L|K$.*

Für einen separablen Zwischenkörper $L' = Z'$ ist dies wegen $L^* = Z$ trivial. Im anderen Fall wählen wir eine ausgezeichnete Erzeugung $L' = Z'(a_1, \ldots, a_m)$. $L^* = Z(a_1, \ldots, a_m)$ erfüllt nun I und III trivialerweise und II wegen Satz 1. Also ist $m > 1$ auch die Vielfachheit von $L^*|Z$ und damit von $L^*|K$. Aus diesem Satz und Satz 6 erhalten wir sofort das Ergebnis von Steinitz [14, S. 243], daß alle Zwischenkörper einer einfachen algebraischen Erweiterung einfach sind. Der hier durchgeführte Beweis erscheint dem Steinitzschen gegenüber als unnötige Komplizierung, läßt sich dafür aber auf mehrfache Erweiterungen verallgemeinern (s. § 5, Satz 28).

Satz 14 umfaßt nebenbei auch die Charakterisierung der einfachen unter den endlichen Erweiterungen durch die Gleichheit der in (4) auftretenden Größen e und f [14, S. 242]: Die $e_1, \ldots, e_m$ von L bez. des m. s. Zk. — kurz als die *Exponenten* von $L|K$ bezeichnet (im separablen Fall ist ihre Anzahl, der Inseparabilitätsrang $m = 0$) — ergeben $e = e_1$, $f = \sum_1^m e_i$, wenn wie üblich ein „leerer Summenausdruck" als Null festgesetzt wird; $e = f$ ist also tatsächlich mit $m \leqq 1$, dem Ausdruck für die Einfachheit von $L|K$ äquivalent. Schließlich ergibt sich aus dem Beweis von Satz 14 noch

Satz 16. *Die endliche Erweiterung L von K ist über einem Zwischenkörper M, der bez. K den gleichen Exponenten besitzt wie L, von kleinerer Vielfachheit als über K.*

Wegen Satz 15 können wir uns nämlich auf rein-inseparable Erweiterungen $L|K$ beschränken und dann eine ausgezeichnete Erzeugung von $L|K$ mit dem ersten Element einer ausgezeichneten Erzeugung von $M|K$ beginnen, womit bereits die Behauptung bewiesen ist.

Die aus II' und Satz 11 folgende in [10, S. 222 unten] angegebene Konstruktionsanweisung für ausgezeichnete Erzeugungen liefert zusammen mit Satz 12

Satz 17. *Notwendig und hinreichend dafür, daß es über K eine Erweiterung mit den Exponenten $e_1, \ldots, e_m$ gibt, ist*

$$m \leqq \mathrm{Uvg}(K).$$

Zu jeder solchen Erweiterung und jedem m' mit

$$m < m' \leqq \mathrm{Uvg}(K)$$

gibt es einen Oberkörper der Vielfachheit m' bez. K.

Die einfachsten ausgezeichneten Erzeugungen werden nun im Falle $\alpha_i \varepsilon K$ geliefert. Nach eindeutiger Festlegung der $\bar{e}_i$ und $\bar{\alpha}_i$ durch

$$\alpha_i^{p^{\bar{e}_i}} = \bar{\alpha}_i \varepsilon K - K^p$$

können wir über das Auftreten dieses Falles Folgendes sagen:

Satz 18. *$\alpha_i \varepsilon K (i = 1, \ldots, m)$ ist gleichbedeutend mit der p-Unabhängigkeit der $\bar{\alpha}_1, \ldots, \bar{\alpha}_m$ in K. In diesem Fall ersetzt die p-Unabhängigkeit der $\alpha_i = \bar{\alpha}_i (i = 1, \ldots, m)$ in K die Bedingungen I und II.*

Ist nämlich $\alpha_i \varepsilon K$, also $\alpha_i = \bar{\alpha}_i$, so gibt es, da wegen Satz 7 die $a_1, \ldots, a_m$ in $K(a_1, \ldots, a_m)$ p-unabhängig, ein minimales $n \leqq m$ so, daß die $a_1, \ldots, a_n, \alpha_{n+1}, \ldots, \alpha_m$ in $K(a_1, \ldots, a_n)$ p-unabhängig sind. Bei $n > 0$ wären nun nach Satz 10 und der Bedeutung von α_n auch die $a_1, \ldots, a_{n-1}, \alpha_n, \ldots, \alpha_m$ in $K(a_1, \ldots, a_{n-1})$ p-unabhängig im Widerspruch zur Definition von n. Sind umgekehrt die $\bar{\alpha}_1, \ldots, \bar{\alpha}_i$ p-unabhängig, so folgt daraus durch mehrfache Anwendung von Satz 9 die p-Unabhängigkeit des $\bar{\alpha}_i$ von den $a_1, \ldots, a_{i-1}$ in $K(a_1, \ldots, a_{i-1})$. Also erfüllen die $\bar{\alpha}_i$ mit den $\bar{e}_i$ die Bedingungen einer ausgezeichneten Erzeugung, weshalb $\bar{\alpha}_i = \alpha_i \varepsilon K$ gilt.

Der in Satz 18 behandelte Fall liegt wegen I insbesondere dann vor, wenn $e_1 = \cdots = e_m = e$ ist. Hat bei endlichem $\mathrm{Uvg}(K)$ dann noch m den maximalen Wert $\mathrm{Uvg}(K)$, so ergeben sich wegen (6) genau die Erweiterungen mit dem Exponenten e, für die die Behauptung von Satz 13 zutrifft. Die weitergehende Frage, wann eine Erweiterung $L|K$ einen Zwischenkörper $K' = K^{p^{-e}}$ besitzt, ist wegen (6) und des Erhaltenbleibens der p-Basis bei separablen Erweiterungen gleichbedeutend damit, wann die p^e-te Wurzel des m. s. Zk. selbst

Zwischenkörper ist. O. B. d. A. können wir also $L|K$ als rein-inseparabel annehmen. Ist nun $e < e_i$, so liegt mit der Abkürzung $p^{e_i - e} = q_i'$ die q_i'-te Potenz von a_i in $K'(a_1^{q_i'}, \ldots, a_{i-1}^{q_i'})$ aber nicht in $K'(a_1, \ldots, a_{i-1})^p$, da dies im Widerspruch zu II $a_i^{p^{e-1}} \varepsilon K(a_1^{p^e}, \ldots, a_{i-1}^{p^e})$ bedeuten würde. Für $e \geqq e_i$ dagegen liegt a_i bereits in $K'(a_1, \ldots, a_{i-1})$, so daß das Kompositum LK' über K' die Exponenten $e_1 - e, \ldots, e_r - e$ besitzt, wenn r die Anzahl der $e_i > e$ bedeutet. Die für $K' \leqq L$ notwendige und hinreichende Bedingung $LK' = L$, also $(LK' : K) = (L : K)$, schreibt sich daher $(e \,.\, \mathrm{Uvg}(K) - r) = e_{r+1} + \cdots + e_m$. Diese ist dann und nur dann erfüllt, wenn $m = \mathrm{Uvg}(K)$ und $e_{r+1} = \cdots = e_m = e$ ist. Also gilt

Satz 19. *Nur in inseparablen Erweiterungen, deren Vielfachheit m mit dem Uvg des Grundkörpers übereinstimmt, sind alle p-ten Wurzeln des Grundkörpers enthalten, und zwar alle p^{e_m}-ten, jedoch nicht alle p^{e_m+1}-ten Wurzeln. Über dem Körper dieser Wurzeln besitzt die Erweiterung einen Inseparabilitätsrang $< m$.*

Damit haben wir zugleich eine Charakterisierung des kleinsten Exponenten für den Fall maximaler Vielfachheit ohne Bezugnahme auf eine spezielle ausgezeichnete Erzeugung gewonnen.

§ 4.

Kompositum und Grundkörpererweiterung.

In der Galoisschen Theorie werden bekanntlich nicht nur die Zwischenkörper M einer normalen Erweiterung $L|K$ untersucht, sondern auch über den beliebigen Erweiterungen M von K die Komposita LM. Die Angabe des gemeinsamen Oberkörpers von L und M, in dem jeweils das Kompositum, also der kleinste gemeinsame Oberkörper gebildet werden soll, erübrigt sich dabei, weil ja (auch bei inseparablen Erweiterungen) wegen der Normalität von $L|K$ der Erweiterungstypus $LM|M$ eindeutig bestimmt ist. Die Galoissche Theorie ermöglicht nun die Zurückführung der Frage nach der Struktur von $LM|M$ auf die nach der Struktur von L über dem Durchschnitt D von L und M, der ja als Unterkörper von M bereits ohne Angabe eines gemeinsamen Oberkörpers von L und M eindeutig bestimmt ist. Gerade weil nun im inseparablen Falle die Galoissche Theorie nicht in vollem Umfang zur Verfügung steht, wird vermutlich die Untersuchung von $LM|M$ einen wesentlichen Beitrag zur Strukturfrage inseparabler Erweiterungen liefern.

Wie Krull [6, S. 334] bemerkt, bleibt bei einfachem, normalem $L|K$ die Gradgleichung der Galoisschen Theorie

$$(LM : M) = (L : D) \tag{8}$$

bestehen, ist also bei fastvollkommenem K und normalem $L|K$ all-

gemein erfüllt. Ferner ist (8) bei normalem $L|K$ und separablem $M|K$ erfüllt, was sich ergibt, wenn man den m. s. Zk. Z von $L|K$ verwendet und Satz 2 beachtet (Fig. 3). Aber schon für nichtseparable, einfache Erweiterungen und $\mathrm{Uvg}(K)=2$ gibt es ein Gegenbeispiel: Für M nehmen wir die in dem Gegenbeispiel zu Satz 3 verwandte Erweiterung $K(a)$ und wählen $L=K^{p^{-1}}$; dann ist $D=K$ aber $(LM):M=p$. Das von KRULL [6, S. 334] angegebene Gegenbeispiel benötigt einen Grundkörper vom Uvg 3. — Setzen wir neben $L|K$ noch $M|K$ als normal voraus, so gilt (8) auch noch allgemein bei $\mathrm{Uvg}(K)=2$, wie sofort zu erkennen ist aus

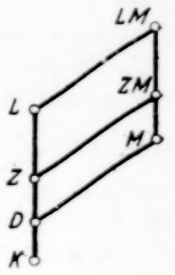


Fig. 3.

Satz 20. *Über dem Durchschnitt zweier in einem gemeinsamen Oberkörper liegender endlicher Erweiterungen des unvollkommenen Körpers K hat eine von beiden einen Inseparabilitätsrang* $<\mathrm{Uvg}(K)$.

Nichttrivial ist die Behauptung nur, wenn $L|K$ und $M|K$ beide den Inseparabilitätsrang $\mathrm{Uvg}(K)$ haben. Ist dann o. B. d. A. der letzte Exponent e von $L|K$ nicht größer als der letzte Exponent von $M|K$, so liegt nach Satz 19 $K^{p^{-e}}$ im Durchschnitt D von L und K, und L hat über $K^{p^{-e}}$ und damit auch über D einen Inseparabilitätsrang $<\mathrm{Uvg}(K)$. Das Gegenstück zu Satz 20 bildet in Verallgemeinerung einer bei DEURING [4, S. 165] bewiesenen Tatsache der

Satz 21. *Ein Kompositum zweier endlicher Erweiterungen des unvollkommenen Körpers K hat über mindestens einer von ihnen einen Inseparabilitätsrang* $<\mathrm{Uvg}(K)$.

Denn sonst lägen nach Satz 19 beide Erweiterungen in der p-ten Potenz des Kompositums, die nach Satz 11 aber echter Unterkörper ist.

Zu unserer Frage nach der Gültigkeit von (8) zurückkehrend geben wir noch ein Gegenbeispiel mit normalem $L|K$ und $M|K$ aber $\mathrm{Uvg}(K)=3$: $K=P_p(u,v,w)$ mit u, v, w als über P_p algebraisch unabhängigen Transzendenten, $L=K(u^{p^{-1}}, v^{p^{-1}})$, $M=K(w^{p^{-1}}, (uw+v)^{p^{-1}})$; allgemeiner können aber auch für K irgend ein Körper mit $\mathrm{Uvg}(K)\geqq 3$ und für u, v, w irgend drei p-unabhängige seiner Elemente gewählt werden. Ist nämlich

$$a=\sum_{i,\,k=0}^{p-1}\alpha_{ik}\,w^{i/p}\,(uw+v)^{k/p},\quad \alpha_{ik}\,\varepsilon\,K$$

ein Element von M, so erhalten wir mit

$$A_n=\sum_{\substack{0\leqq i\leqq \mathrm{Min}\,(n,\,p-1)\\ n-i\leqq k\leqq p-1}}\alpha_{ik}^{p}\binom{k}{n-i}\,u^{n-i}\,v^{i+k-n}\qquad (n=0,1,\ldots,2p-2) \tag{9}$$

$$a^p=\sum_{n=0}^{2p-2}A_n\,w^n=\sum_{n=0}^{p-2}(A_n+w^pA_{n+p})\,w^n+A_{p-1}\,w^{p-1}.$$

Für $a \varepsilon L$ sind also notwendig und hinreichend die Gleichungen

$$A_n + w^p A_{n+p} = 0 \qquad (n = 1, \ldots, p-2) \tag{10}$$

$$A_{p-1} = 0. \tag{11}$$

Ist nun s die kleinste Zahl mit $\alpha_{ik} = 0$ für $i + k > s$, so folgt aus (9) $A_n = 0$ für $n > s$. Aus (11) und (9) erkennen wir $s < p-1$ wegen der p-Unabhängigkeit von u, v. Wäre nun $s > 0$, so ergäbe (10) $A_s = 0$, d. h. nach (9) $\sum_{i=0}^{s} \alpha_{i,s-i}^{p} u^{s-i} = 0$. Da u nicht in K^p liegt, wäre also $\alpha_{ik} = 0$ für $i + k = s$ im Widerspruch zur Definition von s. Daher ist $D = K$, während $(LM : M) = p$ gilt.

Daraus, daß (8) nicht immer gilt, lassen sich schon die Schwierigkeiten vermuten, die bei inseparablen Erweiterungen auftreten. Insbesondere ist eine Unterscheidung von „natürlichen" und „akzessorischen Irrationalitäten" nicht mehr sinnvoll. Um näheren Einblick zu gewinnen, gehen wir aus von der Beziehung, die bei einer separablen, nicht notwendig normalen Erweiterung $L|K$ besteht zwischen der Kompositumbildung aus L und M und der Grundkörpererweiterung $L_M = M_L$, d. h. der Bildung des direkten Produkts $L \times M$ der als Algebren über K aufgefaßten Körper L und M [3, S. 6—7]: L_M ist direkte Summe aus Oberkörpern von K, die gerade alle möglichen Kompositа von L und M darstellen. Im Gegensatz hierzu gilt

Satz 22. *Bei endlicher, rein-inseparabler Erweiterung $L|K$ und beliebiger Erweiterung $M|K$ ist L_M eine primäre Algebra, deren Radikalrestklassenkörper mit LM relativ zu M isomorph ist.*

Zum Beweis benutzen wir eine Basis $a_1, a_2, \ldots, a_n$ von $L|K$ und die mit derselben Multiplikationsvorschrift versehene Basis $b_1, \ldots, b_n$ von $L_M|M$. Mit e als Exponenten von $L|K$ und $p^e = q$ ist also insbesondere $a_i^q = b_i^q \varepsilon K$. Durch $\sum \alpha_i b_i \to \sum \alpha_i a_i$ $(\alpha_i \varepsilon M)$ wird nun ein Homomorphismus von L_M auf LM hergestellt, bei dem die Elemente von M fest bleiben. Für die Elemente des Ideals $\mathfrak{n}$ von L_M mit $L_M/\mathfrak{n} \cong LM$ verschwindet also die q-te Potenz, da sie in M liegt. Deshalb ist $\mathfrak{n}$ im Radikal $\mathfrak{w}$ von L_M enthalten und, da der Restklassenring nach $\mathfrak{n}$ ein Körper ist, sogar $= \mathfrak{w}$. Ersetzt man wie üblich die Restklassen von Grundkörperelementen nach einem Ideal einer Algebra durch die Elemente selbst, so handelt es sich bei $L_M/\mathfrak{w} \cong LM$, wonach L_M primär ist [3, S. 17], um einen Isomorphismus relativ zu M.

Mit Hilfe des m. s. Zk. S läßt sich jetzt auch die Struktur von L_M bei beliebigem endlichen L in ihrem Zusammenhang mit den möglichen Kompositumbildungen beschreiben: Wir haben einmal

$$M_S = M' \dotplus \cdots \dotplus M^{(s)},$$

worin die $M^{(i)}$ als Oberkörper von S aufgefaßt seien. Anwendung von Satz 22 ergibt dann wegen $L_{M^{(i)}} = M_L^{(i)}$

$$L_M = M_L' \dotplus \cdots \dotplus M_L^{(s)}$$

als direkte Summe primärer Algebren, deren Radikalrestklassenkörper gerade alle möglichen Komposita von L und M erschöpfen. Diese Komposita können unter Verwendung des in $M^{(i)}$ liegenden Körpers $\varepsilon_i M = M_i \cong M(\sum \varepsilon_i = 1,$ ε_i in $M^{(i)})$ als LM_i geschrieben werden (Fig. 4). Mit T_i als m. s. Zk. von $M_i | K$ ist nach Satz 2 eine Basis von $M_i | T_i$ auch eine Basis von $M^{(i)}$ über dem m. s. Zk. $K^{(i)} = T_i S$ von $M^{(i)} | S$. Ebenso ist eine Basis von $L | S$ auch eine solche des Körpers $L^{(i)} = K_L^{(i)}$ über $K^{(i)}$. Die Bildung des direkten Produkts zweier durch die rein-inseparablen Anteile von $L | K$ und $M | K$ gegebener Algebren über $K^{(i)}$ führt also zu

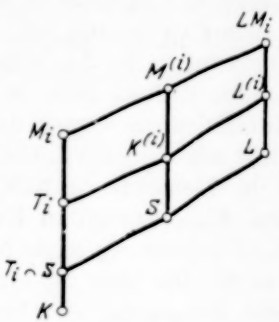


Fig. 4.

$$M_L^{(i)} = M^{(i)} \times L^{(i)}$$

und zu $LM_i = M^{(i)} L^{(i)}$ als Radikalrestklassenkörper. Wir können uns daher im Folgenden auf rein-inseparable Erweiterungen $L | K$, $M | K$ beschränken.

Bevor wir nun im nächsten Paragraphen daran gehen, aus der Betrachtung von L_M Strukturinvarianten unserer rein-inseparablen Erweiterungen zu gewinnen, wollen wir die im vorigen Paragraphen angegebene ausgezeichnete Erzeugung von $L | K$ für diese Aufgabe zweckmäßig spezialisieren.

Satz 23. *Es gibt eine ausgezeichnete Erzeugung*

$$L = K(a_1, \ldots, a_m),$$

so daß $M(a_1, \ldots, a_{m'})$ *mit* $m' \leqq m$ *eine ausgezeichnete Erzeugung von* $LM | M$ *ist.*

Hierzu führen wir folgende Bezeichnungen ein (Fig. 5):

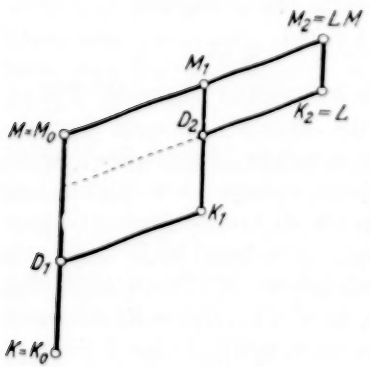


Fig. 5.

$$K_i = K(a_1, \ldots, a_i), \quad K_0 = K$$
$$M_i = M K_i = M(a_1, \ldots, a_i)$$
$$D_i = M_{i-1} \cap K_i$$
$$(K_i : D_i) = q_i' = p^{e_i'}$$
$$(D_i : K_{i-1}) = \bar{q}_i = p^{\bar{e}_i}, \text{ also } q_i' \cdot \bar{q}_i = q_i.$$

Nach dem oben über die Gültigkeit von (8) Gesagten ist dann auch $(M_i : M_{i-1}) = q_i'$. Auf Grund des Beweisganges von Satz 14 genügt es, die $a_1, \ldots, a_m$ so zu bestimmen, daß die Exponenten von a_i und L bez. K_{i-1} sowie die Exponenten von a_i und LM bez. M_{i-1} jeweils übereinstimmen. Es sei die Wahl der a_i in Übereinstimmung mit dieser Vorschrift bis $i = n - 1$ bereits erfolgt, was also für $n = 1$ bedeutet, daß noch kein a_i bestimmt ist. Dann wird ein $b \varepsilon L$ gewählt,

das bez. K_{n-1} denselben Exponenten hat wie L, und ein $c \varepsilon L$, dessen Exponent bez. M_{n-1} gleich dem von $LM|M_{n-1}$ ist. Hat nun b einen kleineren Exponenten bez. M_{n-1}, so stimmen für beliebiges $\xi \neq 0$ aus K die Exponenten bez. M_{n-1} der Elemente c und $b + \xi c$ überein. Die Forderung, $b + \xi c$ solle einen kleineren Exponenten bez. K_{n-1} als b haben, drückt sich in algebraischen Gleichungen für ξ aus, deren Koeffizienten wegen des Nichterfülltseins dieser Forderung für $\xi = 0$ nicht alle verschwinden. Da K als unvollkommener Körper unendlich viele Elemente enthält, gibt es also ein $\xi = \alpha \neq 0$ so, daß $b + \alpha c$ bez. K_{n-1} denselben Exponenten hat wie b. Somit erfüllt entweder die Festsetzung $a_n = b$ oder $a_n = b + \alpha c$ unsere Forderung auch für $i = n$. Dadurch ist eine Konstruktionsvorschrift für eine ausgezeichnete Erzeugung der verlangten Art angegeben. In einer solchen gilt für die Invarianten q_i'

$$q_1' \geqq q_2' \geqq \cdots \geqq q_{m'}' > q_{m'+1}' = \cdots = q_m' = 1.$$

Die $\bar{q}_i$ sind zwar ebenfalls Invarianten, jedoch i. a. nicht der Größe nach geordnet. Eine Folgerung aus Satz 23 sei noch besonders formuliert:

Satz 24. *Die Exponenten von $LM|M$ sind nicht größer als die gleichbezifferten Exponenten von $L|K$.*

Trivial ist diese Aussage ja nur für den ersten Exponenten, da nur dieser nichtrekursiv und ohne Verwendung der a_i definiert ist.

Bei den bisherigen Entwicklungen konnte $M|K$ noch als beliebige algebraische Erweiterung angenommen werden. Erst im nächsten Paragraphen, wo wir die Beziehung $L_M = M_L$ ausnutzen, also die Rollen von L und M vertauschen werden, wird die oben als möglich erkannte Beschränkung auf rein-inseparable, endliche $M|K$ notwendig werden. Ist dann speziell $M|K$ einfach, so ist mit $M_k \cap D_i = D_i^{(i-k-1)}$ (für $k < i$) nach dem über die Gültigkeit von (8) Gesagten

$$D_i^{(h)} = D_i^{(h+1)} K_{i-h-1} \quad (h = 0, \ldots, i-2),$$

woraus durch fortgesetzte Anwendung die Beziehung $D_i = D_i^{(i-1)} K_{i-1}$ entsteht. In Fig. 5 kann also die gestrichelte Linie ausgezogen werden. Daß dieser Übergang zu dem aus der Galoisschen Theorie der separablen Erweiterungen bekannten einfacheren Schema i. a. nicht ausgeführt werden kann, ergibt sich aus den zu (8) konstruierten Gegenbeispielen. Zum Nachweis, daß selbst bei einfachem $M|K$ mehr als ein $\bar{q} > 1$ sein kann, d. h. tatsächlich verschiedene $D_i^{(i-1)} \supset K$ auftreten können, sei mit $K = P_p(u, v)$ $M = K((u + v^p)^{p^{-2}})$, $K_1 = K(u^{p^{-2}})$ und $L = K_2 = K_1(v^{p^{-1}})$ gebildet. Dann ist $D_1 = K(u^{p^{-1}})$, $D_2 = L = LM$, $D_2' = M$ also $\bar{q}_2 = \bar{q}_1 = p$. Dieses Beispiel zeigt zugleich, daß — obwohl bei $M \subseteq L$ immer $\prod_{i=1}^{m} \bar{q}_i = (M : K)$ ist — durchaus nicht die von 0 verschiedenen $\bar{e}_i$ die Exponenten von $M|K$ zu sein brauchen.

§ 5.

Strukturuntersuchungen mittels Grundkörpererweiterung.

Unter Verwendung der Bezeichnungen von Satz 23 wollen wir die Struktur der primären Algebra L_M näher untersuchen. Dazu führen wir entsprechend Satz 14 die (für $i = 1$ als Konstanten zu verstehenden) Polynome

$$f_i(x_1, \ldots, x_{i-1}) \varepsilon K[x_1, \ldots, x_{i-1}] \text{ (in } x_k \text{ vom Grad } < q_k/q_i)$$
$$g_i(x_1, \ldots, x_{i-1}) \varepsilon M[x_1, \ldots, x_{i-1}] \text{ (in } x_k \text{ vom Grad } < q'_k/q'_i)$$

ein mit

$$a_i^{q_i} = f_i(a_1^{q_i}, \ldots, a_{i-1}^{q_i}) \quad (i = 1, \ldots, m) \tag{12}$$

$$a_i^{q'_i} = g_i(a_1^{q'_i}, \ldots, a_{i-1}^{q'_i}) \quad (i = 1, \ldots, m). \tag{13}$$

Es gibt nun in L_M Elemente $b_1, \ldots, b_m$, die bei dem Homomorphismus (s. Satz 22) auf LM in die $a_1, \ldots, a_m$ übergehen und ebenfalls den Beziehungen (12) genügen. Ihre Potenzprodukte $b_1^{i_1} \ldots b_m^{i_m}$ $(0 \leqq i_k < q_k)$ bilden eine Basis von $L_M | M$. Um daraus entsprechend den in [10, S. 231—232] durchgeführten algebrentheoretischen Entwicklungen eine dem Aufbau von L_M aus LM und dem Radikal $\mathfrak{w}$ angepaßte Basis zu gewinnen, beachten wir, daß der M-Modul $M_b = \sum_{0 \leqq i_k < q'_k} M \cdot b_1^{i_1} \ldots b_m^{i_m}$ ein additionstreues Repräsentantensystem der Restklassen von L_M mod. $\mathfrak{w}$ ist. Mit großen lateinischen Buchstaben bezeichnete Polynome sollen im Folgenden immer Polynome über M_b sein. Zum Aufbau von L_M über M_b führen wir die wegen (13) in $\mathfrak{w}$ liegenden Elemente

$$w'_i = b_i^{q'_i} - g_i(b_1^{q'_i}, \ldots, b_{i-1}^{q'_i}) \qquad (i = 1, \ldots, m) \tag{14}$$

ein. Bei $\bar{q}_i = 1$ ist wegen (12) $f_i = g_i$, also $w'_i = 0$. Daher führen wir für den k-ten Index i in der Reihe $1, \ldots, m$ mit $\bar{q}_i > 1$ die Bezeichnung $\{k\}$ ein und setzen $\bar{q}_i = r_k$, $w'_i = w_k$. Die Anzahl der so erhaltenen w_k sei n. Jedes Potenzprodukt der $b_1, \ldots, b_i$ aus unserer Basis von $L_M | M$ läßt sich nun als Polynom über M_b in den w_k mit $\{k\} \leqq i$ schreiben, wobei in den Koeffizienten nur die $b_1, \ldots, b_i$ vorkommen. Für $i = 1$ ist dies nämlich wegen $g_1 \varepsilon M$ trivial. Die Reduzierung des Exponenten von b_i $(i > 1)$ auf einen Wert $< q'_i$ liefert ferner nach (14) eine Linearkombination von Potenzprodukten der $b_1, \ldots, b_i$ und des w_k mit $\{k\} = i$ (falls es ein solches gibt), die in b_i bereits vom Grad $< q'_i$ sind. Damit aber ist die Behauptung für i auf diejenige für $i - 1$ zurückgeführt. Wir behaupten ferner: Jedes Polynom über M_b in den $w_1, \ldots, w_i$ läßt sich als Polynom von einem Grad $< r_k$ in w_k $(k = 1, \ldots, i)$ schreiben — ein solches heiße im folgenden *reduziert* —, in dessen Koefizienten außer den ursprünglich vorkommenden nur die b_k mit $k < \{i\}$ auftreten; dabei gilt speziell

$$w_i^{r_i} = F_i(w_1, \ldots, w_{i-1}) \qquad (i = 1, \ldots, n), \tag{15}$$

worin F_i ein reduziertes Polynom mit verschwindendem Absolutglied ist, in desssen Koeffizienten nur die b_k mit $k < \{i\}$ vorkommen. Für $i = 1$ ist diese Behauptung mit $F_1 = 0$ richtig; denn nach der aus (12) und (14) folgenden Beziehung

$$w_i'^{\bar{q}_i} = f_i(b_1^{q_i}, \ldots, b_{i-1}^{q_i}) - g_i^{\bar{q}_i}(b_1^{q_i}, \ldots, b_{i-1}^{q_i}) \tag{16}$$

— in der g^q dasjenige Polynom bedeute, dessen Koeffizienten die q-ten Potenzen der Koeffizienten von g sind — liegt $w_1'^{r_1}$ bereits in M. Wir nehmen sie weiter als richtig für $i-1\,(1 < i \leqq n)$ an. Nach (16) und dem bereits gewonnenen Ergebnis über die Umformung von Potenzprodukten der b ist nun $w_i'^{r_i}$ Polynom über M_b in den w_k mit $\{k\} \leqq \{i\} - 1$, also $k \leqq i-1$, wobei in den Koeffizienten nur solche b mit einem Index $< \{i\}$ vorkommen. Nach dem ersten Teil der Behauptung für $i-1$ ist daher der zweite Teil für i bewiesen, wenn wir noch beachten, daß wegen $M_b \cap \mathfrak{w} = 0$ der Wert $F(w_1, \ldots, w_n)$ eines Polynoms dann und nur dann in $\mathfrak{w}$ liegt, falls dessen Absolutglied verschwindet. Wegen der Form von (15) treten bei einer Reduktion des Exponenten von w_i zusätzlich nur solche b mit einem Index $< \{i\}$ auf. Die für sie durchzuführende Reduzierung der Exponenten liefert aber nur w_k mit $\{k\} < \{i\}$, also $k < i$, so daß nach Induktionsvoraussetzung auch der erste Teil der Behauptung für i bewiesen ist. Da ferner die Anzahl der nicht in M_b liegenden reduzierten Potenzprodukte

$$b_1^{i'_1} \ldots . b_{m'}^{i'_{m'}} w_1^{i_1} \ldots . w_n^{i_n} \,(0 \leqq i'_k < r'_k,\ 0 \leqq i_k < r_k,\ \sum_{\nu=1}^{n} i_\nu > 0)$$

gleich $\prod q'_k (\prod r_k - 1) = (L_M : M) - (L\,M : M) = (\mathfrak{w} : M)$, dem Rang von $\mathfrak{w}$ über M, ist, bilden sie eine Basis von $\mathfrak{w} \mid M$, so daß die Zuordnung der Elemente von $\mathfrak{w}$ zu den reduzierten Polynomen über M_b mit verschwindendem Absolutglied eindeutig ist.

Wir wollen nun die Gestalt der Beziehungen (15) in Verbindung bringen mit denjenigen Invarianten der Algebra $L_M \mid M$, die in [10, S. 233] zum *Geschlecht* $(m_1, \ldots, m_{\varrho-1})$ der *zugeordneten Algebren* zusammengefaßt worden sind: Dabei ist ϱ der durch $\mathfrak{w}^{\varrho-1} \supset \mathfrak{w}^\varrho = 0$ charakterisierte *Index* der Algebra und m_i der Rang des $L\,M$-Moduls $\mathfrak{w}^i/\mathfrak{w}^{i+1}$, also $m_i = 0$ für $i \geqq \varrho$. Nun ist $m_i = \dfrac{(\mathfrak{w}^i : M) - (\mathfrak{w}^{i+1} : M)}{(L\,M : M)}$, und $\mathfrak{w}_i$ enthält den M-Modul $\mathfrak{w}_i$ derjenigen Polynome über M^b, in denen kein Glied von einem Grad $< i$ vorkommt. Mit Hilfe der Funktion $\varphi(x; u_1, \ldots, u_n)$ als Anzahl der ganzzahligen Lösungen $y_1, \ldots, y_n$ des Gleichungssystems $\sum_{i=1}^{n} y_i = x$ mit den Bedingungen $0 \leqq y_i < u_i$ finden wir nun

$$\frac{(\mathfrak{w}^i : M)}{(L\,M : M)} \geqq \frac{(\mathfrak{w}_i : M)}{(L\,M : M)} = \sum_{k=i}^{r-1} \varphi(k; r_1, \ldots, r_n),$$

also im Grenzfall $\mathfrak{w}^s = \mathfrak{w}_i$, $\mathfrak{w}^{i+1} = \mathfrak{w}_{i+1}$:

$$m_i = \varphi(i; r_1, \ldots, r_n).$$

Wie sich das Auftreten des *Extremfalles* $\mathfrak{w}_i = \mathfrak{w}^i$ $(i = 1, 2, \ldots)$ bzw die Abweichung von ihm aus den F_k erkennen läßt, formuliert

Satz 25. *Ist* $m_i = \varphi(i; r_1, \ldots, r_n)$ $(i = 1, 2, \ldots)$, *so enthält kein* $F_k (k = 1, \ldots, n)$ *ein Glied vom Grad* $< r_k$. *Gibt es dagegen ein* i *mit* $m_i \neq \varphi(i; r_1, \ldots, r_n)$, *so enthält mit* h *als dem kleinsten derartigen* i*-Wert mindestens ein* F_k *ein Glied vom Grad* $h < r_k$ *aber kein* F_k *Glieder vom Grad* $< \mathrm{Min}(h, r_k)$, *und es gilt* $m_h < \varphi(h; r_1, \ldots, r_n)$.

Zusatz A. *Der Extremfall tritt insbesondere dann ein, wenn alle* $q_k' < q_k$ *denselben Wert haben, und zwar ist dann jedes* F_k *bereits Polynom in den* r_k*-ten Potenzen seiner Unbestimmten.*

Zusatz B. *Allgemein ist* F_k *bereits Polynom in den* r_k*-ten Potenzen derjenigen seiner Unbestimmten, für deren Index* j *die Ungleichung* $\{j\} > m'$ *gilt.*

Zum Beweis zeigen wir zunächst, daß $\mathfrak{w}^i \subseteq \mathfrak{w}_i$ für $i \leqq h$, wenn kein F_k Glieder von einem Grad $< \mathrm{Min}(h, r_k)$ enthält. Jedes Element von $\mathfrak{w}^i$ läßt sich nämlich als — nicht notwendig reduziertes — Polynom über M_b schreiben, das kein Glied von einem Grad $< i$ enthält. Bei einer Reduktion der Exponenten mittels (15) entstehen aber für $h < r_k$ stets Glieder von einem Grad $\geqq h \geqq i$, und bei $h \geqq r_k$ können aus einem Glied nur Glieder von nicht kleinerem Grad hervorgehen:

$$w_k^{i_k} = w_k^{i_k - r_k} \sum_{i_1 + \cdots + i_{k-1} \leqq r_k} {}^{*}\, w_1^{i_1} \ldots\ldots w_{k-1}^{i_{k-1}} \quad (* = \text{Elemente von } M_b)$$

Damit ist dann auch $m_i = \varphi(i; r_1, \ldots, r_n)$ für $i < h$ bewiesen. Gibt es nun ein maximales h der beschriebenen Eigenschaft, also ein k so, daß F_k ein Glied vom Grad $h < r_k$ besitzt, so erzeugen die $\varphi(h; r_1, \ldots, r_n)$ Potenzprodukte $w^{i_1} \ldots\ldots w_n^{i_n}$ $(i_1 + \cdots + i_n = h)$ zwar noch wegen $\mathfrak{w}^h = \mathfrak{w}_h$, $\mathfrak{w}^{h+1} \supseteq \mathfrak{w}_{h+1}$ den LM-Modul $\mathfrak{w}^h/\mathfrak{w}^{h+1}$, sind aber nicht mehr linearunabhängig: (15) ergibt nämlich wegen $h + 1 \leqq r_k$ nach Restklassenbildung mod. $\mathfrak{w}^{h+1}$ eine lineare Beziehung zwischen ihnen mit nichtverschwindenden Koeffizienten aus LM. Also ist $m_h < \varphi(h; r_1, \ldots, r_n)$. $m_i = \varphi(i; r_1, \ldots, r_n)$ $(i = 1, 2, \ldots)$ ist daher gleichbedeutend damit, daß es kein maximales h der beschriebenen Eigenschaft gibt. Das heißt aber: Kein F_k enthält Glieder vom Grad $< r_k$. Damit ist Satz 25 in vollem Umfang bewiesen. Seine Bedeutung liegt darin, daß er einmal das Auftreten des Extremfalles allein aus der Gestalt der F zu erkennen gestattet und zum andern bei Nichtvorliegen des Extremfalles die Abweichung von demselben durch die bereits aus der Gestalt der F zu bestimmende Invariante h beschreibt. Durch den Zusatz A werden diese Fragen mit den Werten der Exponenten von $LM|M$ und $L|K$ verknüpft. Die zu beweisende Behauptung fassen wir als Spezialfall $k = 0$ der folgenden Aussage auf: (A_k) „*Unter der Voraus-*

setzung $q\,r_j = q^{r_j}_{\{j\}} r_i\,(j = 1, \ldots, i-1;\ q = q^{r_i}_{\{i\}})$ *läßt sich* $w_i^{r_i}$ *als Polynom über* M *in den*

$$b_1^q, \ldots, b^q_{\{k\}},\ b_{\{k\}+1}, \ldots, b_{\{i\}-1},\ w^{r_i}_{k+1}, \ldots, w^{r_i}_{i-1}$$

schreiben, das in den $b_{\{k\}+1}, \ldots, b_{\{i\}-1}, w_{k+1}, \ldots, w_{i-1}$ *reduziert ist.*" (A_{i-1}) ist richtig, da in (16) die Exponenten der $b_{\{i-1\}+1}, \ldots, b_{\{i\}-1}$ ohne Auftreten von w-Gliedern reduziert werden. Unter Voraussetzung von (A_k), $k \geqq 1$ kann man nun mittels (12) erreichen, daß das Polynom für $w_i^{r_i}$ in $b^q_{\{k\}}$ einen Grad $< r_k/r_i$ besitzt. (14) ergibt

$$b^q_{\{k\}} = w_k^{r_i} + g(b_1^q, \ldots, b^q_{\{k\}-1}).$$

womit unser Polynom auch in $b_{\{k\}}$ und w_k reduziert ist. Da es in den $b_{\{k-1\}+1}, \ldots, b_{\{k\}-1}$ ohne Auftreten neuer w-Glieder reduziert werden kann, wobei nur q-te Potenzen der b vorkommen, haben wir (A_{k-1}) aus (A_k) hergeleitet. Damit ist (A_k) allgemein für $0 \leqq k < i$ bewiesen. Dieselben Überlegungen zeigen ohne die über die q' gemachten Voraussetzungen die Richtigkeit der Behauptung von (A_k) für das kleinste k mit $\{k\} > m'$; denn für alle j mit $j \geqq k$ gilt dann $q_{\{j\}} = r_j$. Die Reduktion der restlichen $b_1^q, \ldots, b_{k-1}^q$ ergibt aber keine w_j mit $\{j\} > m'$, weshalb damit auch Zusatz B bewiesen ist.

Der Fall von Zusatz A liegt speziell bei $L \subseteq M$ vor, da dann alle q_i' gleich 1 sind. Unsere allgemeinen Entwicklungen liefern so den in § 3 beim Beweis von Satz 14 erwähnten Nachweis der Invarianz der Exponenten von $L|K$. Aus den Invarianten m_i bestimmen sich nämlich mit Hilfe der Beziehungen $m_i = \varphi(i; q_1, \ldots, q_m)$ $(i = 1, 2, \ldots)$ eindeutig die q_k sowohl wie ihre Anzahl m [10, S. 230]. Diese Eigenschaft der Funktion φ führt weiter zu

Satz 26. *Sind* $e_1, \ldots, e_m$ *die Exponenten von* $L|K$ *und* $e_1', \ldots, e_{m'}'$ *die von* L *bezogen auf einen Zwischenkörper* M, *so hat* $M|K$ *im Extremfall genau die* e_i $(i = m'+1, \ldots, m)$ *und die von Null verschiedenen unter den* $e_i - e_i'$ $(i = 1, \ldots, m')$ *zu Exponenten.*

Einerseits sind nämlich die m_i der Algebra L_M durch

$$m_i = \varphi(i; r_1, \ldots, r_n)$$

gegeben, da ja der Extremfall vorliegen sollte. Andererseits kann man aber auch die m_i durch Bildung von $M_L = L_M$ bestimmen. Dabei liegt nach Zusatz A wieder der Extremfall vor, so daß die Exponenten der r_i tatsächlich bis auf die Reihenfolge die Exponenten von $M|K$ sind.

Auf Zusatz A von Satz 25 angewandt erhalten wir aus Satz 26

Satz 27. *Sind* $e_1, \ldots, e_m$ *die Exponenten von* $L|K$ *und* $e_1', \ldots, e_{m'}'$ *die von* L *bezogen auf einen Zwischenkörper* M, *so hat* $M|K$ *im Falle*

a) $m' < m$, $e_i' = e_i$ $(i = 1, \ldots, m')$:

die Vielfachheit $m - m'$ *und die Exponenten* $e_{m'+1}, \ldots, e_m$,

b) $m' = m$, $e_i' = e_i$ für $i < s$, $e_i' = e$ für $i \geqq s$ $(0 < s \leqq m,\ 0 < e < e_m)$:
die Vielfachheit $m - s + 1$ *und die Exponenten* $e_s - e, \ldots, e_m - e$,

c) $m = m'$, $e_i' = e$ für $s \leqq i < t$, $e_i' = e_i$ sonst $(e_t \leqq e < e_{t-1},\ 0 < s < t \leqq m)$:
die Vielfachheit $t - s$ *und die Exponenten* $e_s - e, \ldots, e_{t-1} - e$.

Zum Beweis ist lediglich zu beachten, daß wir unter Benutzung der Zuordnung von Satz 4 den Beweis nur für rein-inseparable Erweiterungen $L|K$ und $M|K$ zu führen brauchen, und daß a), b), c) von der trivialen Ausnahme $L = M$ abgesehen genau die möglichen Unterfälle von A sind. Besonders hervorgehoben sei noch der Sonderfall $s = 1$ von b), der dadurch ausgezeichnet ist, daß $M|K$ dieselbe Vielfachheit m wie $L|K$ besitzt. Daß selbst hier die Schlußrichtung von Satz 26 nicht umgekehrt werden darf, zeigt das einfache Beispiel:

$$K = P_p(u, v),\ L = K(u^{p^{-1}}, v^{p^{-2}}),\ M = K(v^{p^{-2}}, u^{p^{-1}}).$$

Es liegen hier besonders einfache Verhältnisse vor: $a_i^{q_i} \in K$, $a_i^{q_i'} \in M$, also g_i und f_i konstant. Unter diesen Voraussetzungen ist aber $F_i = 0$, d. h. wir haben nach Satz 25 den Extremfall.

Das Beweisprinzip von Satz 26 führt uns ferner noch zu der Verallgemeinerung des in § 3 erwähnten Steinitzschen Satzes.

Satz 28. *Jeder Zeichenkörper einer Erweiterung der Vielfachheit* m *hat eine Vielfachheit* $\leqq m$.

Nach Satz 15 können wir uns beim Beweis auf rein-inseparable Erweiterungen beschränken. Die Berechnung von $m_1 = (\mathfrak{w}/\mathfrak{w}^2 : LM)$ entsprechend der Erzeugung des direkten Algebrenproduktes in der Form L_M liefert nach Satz 25 $m_1 \leqq n \leqq m$, während die andere Möglichkeit der Erzeugung in der Form M_L nach dem Zusatz A von Satz 25 — wie schon weiter oben erwähnt — m_1 als Vielfachheit von $M|K$ erkennen läßt.

Die somit für Vielfachheitsfragen bei Zwischenkörpern wesentliche Invariante m_1 — in [10, S. 233] als *Defekt* der Algebra L_M bezeichnet — läßt sich nun sehr einfach aus den F_i bestimmen. Mit der Abkürzung $f(x)$ für ein Polynom $f \in M[x_1, \ldots, x_m]$, das in x_k einen Grad $< q_k'$ hat, behaupten wir

Satz 29. *Ist* $\sum_k u_{ik}(b)\, z_k$ *mit* $u_{ik} = 0$ für $i \leqq k$ *der Linearanteil von* $F_i(z_1, \ldots, z_{i-1})$, *so hat die Matrix*

$$(u_{ik}(a))_{\substack{i = 2, \ldots, n \\ k = 1, \ldots, n-1}}$$

den Rang $n - m_1$.

Zum Beweis bezeichnen wir mit $\overline{w}_i$ die Restklasse mod $\mathfrak{w}^2$ von w_i. Die $\overline{w}_i$ bilden dann eine Modulbasis des LM-Moduls $\mathfrak{w}/\mathfrak{w}^2$. Um dessen Rang m_1 zu bestimmen, untersuchen wir die Gesamtheit der bestehenden linearen Abhängigkeiten $\sum_i v_i(a)\, \overline{w}_i = 0$, wobei gemäß unserer

Bezeichnungsfestsetzung die $v_i(a)$ Elemente von LM sind. Es gibt dann ein Polynom $H(z_1, \ldots, z_n)$ ohne Absolutglied und ohne lineare Glieder, so daß $\sum v_i(b) w_i = H(w_1, \ldots, w_n)$ ist. Diese Gleichung drückt die Reduktion von H, d. i. die im Beweis von Satz 25 verwandte Reduktion der Exponenten der w, aus. Wir ersetzen nun die b durch Unbestimmte x. Die entsprechend (14) dadurch an die Stelle der w_i' tretenden Polynome $x_i^{q_i'} - (g_i^{q_i'}, \ldots, x_{i-1}^{q_i'})$ bezeichnen wir für $q_i' < q_i$ den w_k entsprechend mit $z_1, \ldots, z_n$, die übrigen mit $y_1, \ldots, y_{m-n}$. Im Polynomring $R = M[x_1, \ldots, x_m]$ bedeutet dann die vorliegende Reduktion von H, die sich nach dem zu Anfang des Paragraphen Entwickelten allein auf (14) und (15) stützt, eine Identität

$$-H(z_1, \ldots, z_n) + \sum v_i(x) z_i = \sum \varphi_k(x)(z_k^{r_k} - F_k(z_1, \ldots, z_{k-1})) + \sum \psi_k(x) y_k.$$

Die φ und ψ sollen dabei Polynome ohne jede Gradbeschränkung bedeuten, und in H sowohl wie in den F sind die b durch die x ersetzt zu denken. Jedes Element von R läßt sich offenbar als Polynom in den y, z mit Koeffizienten aus dem analog zu M_b gebildeten Modul M_x darstellen. Daß diese Darstellung eindeutig bestimmt ist, sieht man so: Über dem Polynomring $M[\bar{y}_1, \ldots, \bar{y}_{m-n}, \bar{z}_1, \ldots, \bar{z}_n]$ konstruieren wir eine Algebra A mit den Basiselementen $\bar{x}_1^{i_1} \ldots \bar{x}_m^{i_m}$ $(0 \leqq i_k < q_k')$, deren Multiplikationstafel durch die den Definitionsgleichungen der y, z entsprechenden Beziehungen zwischen den $\bar{x}$, $\bar{y}$, $\bar{z}$ bestimmt ist. Da jedes Element von R Polynom in den y, z über M_x ist, wird A durch $\bar{x}_i \to x_i$, $\bar{y}_i \to \bar{y}_i$, $\bar{z}_i \to z_i$ homomorph auf R abgebildet. Die $\bar{x}_i$ als Erzeugende von A über M sind somit freie Erzeugende und der Homomorphismus ein Isomorphismus. Damit ist die behauptete Eindeutigkeit der Darstellung als Polynom über M_x bewiesen. Bezeichnen wir nun mit $h_{ki}(x)$ das Absolutglied in dieser Darstellung für $\varphi_k(x) u_{ki}(x)$, so ergibt der Koeffizientenvergleich von z_i in unserer Identität

$$v_i(x) = \sum_k h_{ki}(x).$$

Setzen wir noch $\varphi_k(b) \equiv h_k(b) \mod . \mathfrak{w}$, so folgen wegen

$$h_{ki}(b) \equiv \varphi_k(b) u_{ki}(b) \mod . \mathfrak{w}$$

die Beziehungen $v_i(a) = \sum_k h_k(a) u_{ki}(a)$. Damit haben wir die offenbar geltenden Gleichungen $\sum_i u_{ki}(a) \bar{w}_i = 0$ als die bis auf Linearkombinationen einzigen Abhängigkeiten zwischen den $\bar{w}_i$ erkannt, woraus sofort die Behauptung folgt. Daraus leiten wir nun her

Satz 30. *Ist $M|K$ einfach und Zwischenkörper der Erweiterung $L|K$ mit den Exponenten $e_1, \ldots, e_m$, so bestehen für die Exponenten e_i' von $L|M$ die Ungleichungen $e_1 \geqq e_1' \geqq e_2 \geqq \ldots \geqq e_{m-1}' \geqq e_m$.*

Gemäß der in Satz 4 angegebenen Zuordnung können wir uns beim Beweis auf rein-inseparable Erweiterungen beschränken. Aus

dem Beweis von Satz 28 wissen wir, daß wegen der Einfachheit von $M|K$ $m_1 = 1$ ist. Nach Satz 29 sind daher die $u_{i,i-1} \neq 0$ $(i = 2, \ldots, m)$. In $F_i(w_1, \ldots, w_{i-1})$ tritt also w_{i-1} nicht nur in der Form w_{i-1}^p auf. Führen wir nun die beim Beweis des Zusatzes von Satz 25 beschriebene Reduktion mit $k = i - 1$ durch, so haben wir im Falle $q'_{\{i-1\}} < q_{\{i\}}$, also $q \cdot q'^{-1}_{\{k\}} = q' \equiv 0 (p)$,

$$b^q_{\{k\}} = w_k^{q'} + g(b_1^q, \ldots, b^q_{\{k\}-1}).$$

Mit dieser Ersetzung ist die Reduktion bez. w_k bereits durchgeführt, da das Ausgangspolynom in $b_{\{k\}}$ einen Grad $< q_{\{k\}}$, also nach der Ersetzung einen Grad $< r_k$ in w_k hat, was auch durch die nachfolgenden Reduktionen in den b_j mit $j < \{k\}$ nicht geändert wird. Bei $m_1 = 1$ muß daher $q_{\{i\}} \leqq q'_{\{i-1\}}$ sein. Für $j = \{i-1\} + 1 < \{i\}$ ist diese Ungleichung wegen $q'_{j-1} \geqq q'_j = q_j \geqq q_{\{i\}}$ immer erfüllt. Im andern Falle folgt $q_{j-1} \geqq q_j$ für $j = \{i-1\} + 1 = \{i\}$. Diese Beziehung gilt aber sowieso, wenn j nicht diese Bedeutung besitzt, also $q'_{j-1} = q_{j-1}$ oder $q'_j = q_j$ ist. Daß die damit für einfache $M|K$ bewiesenen Ungleichungen durchaus nicht hinreichend für die Einfachheit von $M|K$ sind, zeigt bereits das Beispiel $K = P_p(u, v)$, $L = K(u^{p^{-1}}, v^{p^{-1}})$, $M = K(u^{p^{-1}}, v^{p^{-1}})$.

Aus Satz 30 ergibt sich noch eine Charakterisierung der Exponenten von $L|K$ ohne Benutzung einer ausgezeichneten Erzeugung von L aus dem m. s. Zk.:

Satz 31. *Der i-te Exponent $(i = 2, \ldots, m)$ von $L|K$ ist das Minimum der ersten Exponenten von L über den Unterkörpern, die $(i-1)$-fache Erweiterungen von K sind.*

O. B. d. A. können wir wieder $L|K$ als rein-inseparabel annehmen. Da nach Definition e_i der Exponent von $L|K(a_1, \ldots, a_{i-1})$ in einer ausgezeichneten Erzeugung $L = K(a_1, \ldots, a_m)$ ist, genügt es zu zeigen, daß für einen über K $(i-1)$-fachen Unterkörper M von L der Exponent $\geqq e_i$ ist. Für $i = 2$ folgt das sofort aus Satz 30. Ist nun die Behauptung für ein $i < m$ richtig und $N \subset L$ eine i-fache Erweiterung von K, so wird $M = K(a) \subset N$ so gewählt, daß $N|M$ die Vielfachheit $i - 1$ hat. Betrachten wir M als Grundkörper, so ist also der Exponent von $L|N$ nicht kleiner als der i-te Exponent e'_i von $L|M$. Da nach Satz 30 aber $e'_i \geqq e_{i+1}$ gilt, ist die Behauptung unter Voraussetzung ihrer Richtigkeit für i auch für $i + 1$ bewiesen und damit allgemein für $i = 2, \ldots, m$.

Mit Hilfe dieses Ergebnisses gelingt der Beweis des Gegenstückes zu Satz 30, nämlich

Satz 32. *Hat $L|K$ die Exponenten $e_1, \ldots, e_m$, und ist L einfache Erweiterung des Oberkörpers M von K, so gilt für die Exponenten e_i^* von $M|K$ die Ungleichung $e_1 \geqq e_1^* \geqq e_2 \geqq \ldots \geqq e_{m-1}^* \geqq e_m$ $(\geqq e_m^*$, falls $M|K$ ebenfalls m-fach).*

$L|K$ sei o. B. d. A. als rein-inseparabel vorausgesetzt und K' eine i-fache, in M enthaltene Erweiterung von K, bez. der M den Exponenten e_i^* hat. Dann ist wegen der Einfachheit von $L|M$ auch $L^{p^{e_i^*}}K' = L'$ einfache Erweiterung von K'. $L'|K$ hat also höchstens die Vielfachheit i, weshalb nach Satz 31 für den Exponenten e von $L|L'$ die Ungleichung $e \geqq e_{i+1}$ gilt. Andererseits ist aber $e \leqq e_i^*$, also $e_i^* \geqq e_{i+1}$ $(i = 1, \ldots, m-1)$. Die übrigen Ungleichungen lassen sich ohne Berufung auf Satz 31 und bei beliebiger Vielfachheit von $L|M$ beweisen. Es genügt offensichtlich, den Beweis für den Fall $L = M(a)$, $a^p \varepsilon M - M^p$ zu führen. Es sei $M = K(a_1, \ldots, a_{m^*})$ eine ausgezeichnete Erzeugung. Wir betrachten nun zuerst den Fall, daß für kein i der Exponent von a bez. $K(a_1, \ldots, a_{i-1})$ größer als e_i^* ist. Dann hat $L|K(a_1, \ldots, a_{i-1})$ den Exponenten e_i^* und $L|K(a_1, \ldots a_{m^*})$ den Exponenten 1. Nach Satz 14 ist daher $L = K(a_1, \ldots, a_{m^*}, a)$ eine ausgezeichnete Erzeugung von $L|K$, also $m^* = m-1$, $e_i = e_i^*$ für $i < m$ und $e_m = 1$. Im anderen Fall sei h das kleinste i, für das a bez. $K(a_1, \ldots, a_{i-1})$ einen Exponenten $> e_i^*$ hat. Wir setzen $K(a_1, \ldots, a_{i-1}) = K'$. Dann gilt also für den Exponenten e von a^p bez. K' einerseits $e \leqq e_h^*$, andererseits $e > e_h^* - 1$, also $e = e_h^*$. Nach Satz 14 lassen sich daher die $\bar{a}_1, \ldots \bar{a}_{\bar{m}}$ $(\bar{m} = m^* - h)$ so unter den $a_h, \ldots, a_{m^*}$ auswählen, daß

$$M = K(a_1, \ldots, a_{h-1}, a^p, \bar{a}_1, \ldots, \bar{a}_{\bar{m}})$$

eine ausgezeichnete Erzeugung ist. $K(a_1, \ldots, a_{h-1}, a)$ ist nun nach Satz 14 eine ausgezeichnete Erzeugung von $K'(a)|K$ mit den Exponenten $e_1^*, \ldots, e_{h-1}^*, e_h^* + 1$, weil a bez. $K(a_1, \ldots, a_{i-1})$ für $i < h$ einen Exponenten $\leqq e_i^*$ und bez. K' den Exponenten $e_h^* + 1$ besitzt. Wegen $K'(a^p) = M \cap K'(a)$ ist nach (8) eine Basis von $M|K'(a^p)$ auch eine solche von $L|K'(a)$. Bedingungen I, II aus Satz 14 für die $\bar{a}_i$ bleiben also auch bei Ersetzung von a^p durch a erhalten:

$$L = K(a_1, \ldots, a_{h-1}, a, \bar{a}_1, \ldots, \bar{a}_{\bar{m}})$$

ist eine ausgezeichnete Erzeugung. Daher haben wir $m = m^*$, $e_i = e_i^*$ für $i \neq h$, $e_h = e_h^* + 1$. Damit ist aber alles bewiesen. Zugleich haben wir die Frage beantwortet, wie sich die Exponenten einer Erweiterung bei Adjunktion einer p-ten Wurzel verändern.

§ 6.

Spezialfälle.

Zur Verdeutlichung der im vorigen Paragraphen allgemein dargestellten Methode und zur Gewinnung interessanter Einzelheiten wenden wir uns einigen Spezialfällen und zwar zuerst dem fast trivialen Fall $n = 1$ zu. Hier ist $m_1 = 1$ und damit nach [10, S 235]

auch $m_2 = \cdots = m_{\varrho-1}$, woraus sich wegen

$$1 + \sum_{i=1}^{\varrho-1} m_i = \prod_{k=1}^{n} r_k \tag{17}$$

sofort $\varrho = r_1$ ergibt. Die aus $m_1 = 1$ folgende Einfachheit wurde schon am Ende des vorigen Paragraphen betont. Anwendung von Satz 27 liefert nur den bereits aus der Einfachheit durch Gradbetrachtung folgenden Wert $e'_{(1)} - e'_{(1)}$ für den Exponenten von $M \mid K$.

Bei $n = 2$ schließen wir zuerst einmal den Extremfall aus. Dann ergeben sich als Spezialisierungen von (15) die Gleichungen

$$w_1^{r_1} = 0 \tag{18}$$

$$w_2^{r_2} = v(b) w_1^h + \cdots \qquad (v(b) \neq 0,\ h < \mathrm{Min}\,(r_1, r_2)) \tag{19}$$

$\mathfrak{w}^i$ besteht nun aus allen Linearkombinationen der Produkte

$$w_1^{i_1} w_2^{i_2} \quad (i_1 + i_2 \geqq i)$$

mit Koeffizienten aus M_b. Mit $i_\varkappa = r_\varkappa k + u\,(k \geqq 0,\ 0 \leqq u < r_\varkappa)$ ist nach (19)

$$w_1^{i_1} w_2^{i_2} = v(b)^k w_1^{i_1 + hk} w_2^u + W,$$

wobei W in $\mathfrak{w}^{j+1}$ liegt, wenn das erste Summenglied in $\mathfrak{w}^j$ liegt. Also liegt dieses in $\mathfrak{w}^i$, und es ist

$$w_1^{i_1} w_2^{i_2} \equiv v(a)^k w_1^{i_1 + hk} w_2^u \mod \mathfrak{w}^{i+1}.$$

Setzen wir noch wegen (18) mit der Abkürzung $-\left[-\frac{r_1}{h}\right] = s$

$$i_1 + hk = zh + y \qquad (0 \leqq z < s,\ 0 \leqq y < h),$$

so spannen also über M_b diejenigen Potenzprodukte

$$w_1^{zh+y} w_2^u \qquad (0 \leqq u < r_2,\ 0 \leqq y < h,\ 0 \leqq z < s) \tag{20}$$

für die es ein nichtnegatives $k \leqq z$ mit

$$u + y + (r_2 - h)k + zh \geqq i \tag{21}$$

gibt, mod $\mathfrak{w}^{i+1}$ den Modul $\mathfrak{w}^i$ auf. Wegen $r_2 - h > 0$ kann man in (21) k durch seinen maximalen Wert z ersetzen. Mit Hilfe der durch $u + r_2 z = x$ zwischen den Paaren u, z $(0 \leqq u < r_2,\ 0 \leqq z < s)$ und den Zahlen x $(0 \leqq x < s r_2)$ vermittelten eineindeutigen Zuordnung schreibt sich dann die Bedingung (21) für die Produkte (20) als

$$x + y \geqq i \qquad (0 \leqq x < s r_2,\ 0 \leqq y < h). \tag{22}$$

Nun liegen aber diejenigen Produkte (20), die (21) auch mit $i+1$ statt i erfüllen, nach dem eben Bewiesenen in $\mathfrak{w}^{i+1}$. Nach Definition von φ gibt es also $\mu_i = \varphi(i; s r_2, h)$ Produkte (20), die mod $\mathfrak{w}^{i+1}$ über M_b den Modul $\mathfrak{w}^i$ aufspannen. Daher ist $\mu_i \geqq m_i$. Da aber in (20) jedes reduzierte Potenzprodukt vorkommt, und jedes entsprechend

(22) zu genau einem maximalen $i = x + y$ gehört, ist nach (17) die Summe aller μ_i gleich der Summe der m_i, d. h. $\mu_i = m_i$, also

$$m_i = \varphi\left(i; -\left[-\frac{r_1}{h}\right] r_2, h\right). \tag{23}$$

Die Potenzprodukte (20) bilden also, wenn wir in ihnen w_i durch seine Restklasse mod $\mathfrak{w}^{i+1}$ ersetzen, eine linear-unabhängige Basis von $\mathfrak{w}^i/\mathfrak{w}^{i+1}$ über LM. Wie man leicht nachrechnet, gilt mit $u_2 \leqq u_1$

$$\varphi(x; u_1, u_2) = \begin{cases} x+1 & \text{für } 0 \leqq x < u_2 \\ u_2 & \text{für } u_2 \leqq x < u_1 \\ u_2 + u_1 - 1 - x & \text{für } u_1 \leqq x < u_1 + u_2 - 1 \\ 0 & \text{für } u_1 + u_2 - 1 \leqq x. \end{cases}$$

Insbesondere hat der Index ϱ von L_M den Wert

$$\varrho = h - \left[-\frac{r_1}{h}\right] r_2 - 1. \tag{24}$$

Setzen wir im Extremfall noch $h = \mathrm{Min}(r_1, r_2)$, so gilt (23) — und damit (24) — offenbar allgemein.

Wählen wir jetzt speziell $M \subseteq L$, so ergibt das Beweisprinzip von Satz 26 aus (23) die Beziehungen

$$h = q_2^*, \quad \frac{r_1 r_2}{h} = q_1^*, \tag{25}$$

worin $q_i^* = p^{e_i^*}$ ist und e_1^*, e_2^* die Exponenten von $M|K$ sind; denn wegen $h \leqq \mathrm{Min}(r_1, r_2)$ ist ja $h \leqq \frac{r_1 r_2}{h}$. Unter Benutzung von (25) können wir nun beweisen

Satz 33. *Die zweifache Erweiterung $L|K$ mit den Exponenten e_1, e_2 ist einfach über dem bez. K zweifachen Zwischenkörper M, wenn der zweite Exponent e_2 von $L|K$ mit dem von $M|K$ übereinstimmt.*

Wie bei den Sätzen des vorigen Paragraphen können wir uns auch hier auf rein-inseparable Erweiterungen beschränken. Nach (25) ist nun

$$q_2^* \leqq \frac{q_2}{q_2'}, \tag{26}$$

also $q_2' = 1$ wegen $e_2^* = e_2$, d. h. $L|M$ ist einfach. Dies ist das Gegenstück zu der sich aus Satz 16 ergebenden Einfachheit von $L|M$ im Falle des Übereinstimmens der ersten Exponenten.

Da nach dem am Ende von § 5 Bewiesenen $e_2^* \leqq e_2$ gilt — was übrigens auch aus (26) folgt — läßt sich außer im Fall $e_1 > e_1^* \geqq e_2$ ($> e_2^*$ falls $M|K$ zweifach) mit Hilfe der Sätze 16, 32, 33 die Vielfachheit von $L|M$ aus den e^*, e allein bestimmen. Eine solche Bestimmung ist in dem Ausnahmefall nun tatsächlich unmöglich. Zum Beweis geben wir mit $K = P_p(u, v)$ zu $M = K(u^{p^{-3}}, v^{p^{-1}})$, also $e_1^* = 3$, $e_2^* = 1$,

die Oberkörper $L = K((u + v^p)^{p^{-1}}, v^{p^{-1}})$ und $L' = K(u^{p^{-1}}, v^{p^{-2}})$ an, die beide die Exponenten $e_1 = 4$, $e_2 = 2$ haben. $L|M$ ist einfach, $L'|M$ dagegen zweifach. Zur Verdeutlichung der Methode stellen wir für L noch die Formeln (14), (15) auf, wobei wir für $L_M = M_L$ als Algebra über K die Basis aus den Potenzprodukten

$$b_1^{i_1} b_2^{i_2} c_1^{k_1} c_2^{k_2} \quad (0 \leqq i_1 < p^4,\ 0 \leqq i_2 < p^3,\ 0 \leqq k_1 < p^3,\ 0 \leqq k_2 < p)$$

mit

$$b_1^{p^4} = u + v^p, \quad b_2^{p^3} = v, \quad c_1^p = u, \quad c_2^p = v$$

verwenden:

$$w_1 = b_1^{p^3} - c_2^p - c_2, \quad w_2 = b_2 - b_1^p + c_1, \quad w_1^{p^3} = 0, \quad w_2^{p^2} = -w_1^p,$$

woraus sich in Übereinstimmung mit (25) $h = p$ ergibt.

Für $n \geqq 3$ läßt sich die bei $n = 2$ befolgte Methode nicht mehr allgemein anwenden, weil in einem F_i mit $i > 2$ mehrere Glieder kleinsten Grades auftreten können. Wir beschränken uns daher, um über $n = 2$ hinaus Aussagen machen zu können, auf den Fall $m' = 1$, in welchem nach Satz 25, Zusatz B in F_i nur Glieder der Form $v(b)\, w_1^k$ einen Grad $< r_i$ haben können. Zur Vermeidung umständlicher Fallunterscheidungen behandeln wir auch davon nur einen Spezialfall, nämlich den einer dreifachen Erweiterung $L|K$ von den Exponenten e_1, e_2, e_3 mit einem Zwischenkörper M, der über K die Exponenten e_1^*, e_2^* besitzt, und über dem L ein ach mit dem Exponenten e ist. Dabei nehmen wir o. B. d. A. $L|K$ als rein-inseparabel an. $n = 1$ ist unmöglich, da ja sonst $M|K$ einfach wäre. Ist $n = 2$, so muß $q_1' = q_1$, also $e = e_1$ sein, da ja $q_2' = 1 < q_2$ und $q_3' = 1 < q_3$ gilt. Also haben wir $r_1 = q_2$ und $r_2 = q_3$. Nach Satz 27 a) gilt dann für die $q_i^* = p^{e_i^*}$ von $M|K$

$$(27_1) \qquad q_1^* = q_2, \quad q_2^* = q_3.$$

Für $n = 3$ ist nun nach Satz 25 wegen $m_1 = 2 < n$ notwendigerweise $h = 1$. Wir können daher die Numerierung von w_2, w_3 noch so ändern, daß $w_2^{r_2} = v(b)\, w_1 + \cdots$, $(v(b) \neq 0)$ und $w_3^{r_3} = v^*(b)\, w_1^k + \cdots$, $(1 \leqq k < \mathrm{Min}(r_1, r_3),\ v^*(b) \neq 0)$ ist, falls F_3 überhaupt Glieder vom Grad $< r_3$ enthält. Wie beim Beweis von Satz 30 wird dann ein Produkt $w_1^{i_1} w_2^{i_2} w_3^{i_3}$ mit $\sum_\nu i_\nu \geqq i$ auf reduzierte Potenzprodukte zurückgeführt. Mit

$$i_1 + u_2 + u_3 k = x_1, \quad i_\nu = r_\nu u_\nu + x_\nu \qquad (0 \leqq u_\nu,\ 0 \leqq x_\nu < r_\nu;\ \ \nu = 2, 3)$$

ergibt das mod $\mathfrak{w}^{i+1}$ eine Linearkombination von Potenzprodukten $w_1^{x_1} w_2^{x_2} w_3^{x_3}$ $(0 \leqq x_\nu < r_\nu)$, deren Exponenten der Bedingung genügen: Es gibt ein Paar nichtnegativer ganzer Zahlen u_2, u_3 mit

$$(28) \qquad u_2 + k u_3 \leqq x_1, \quad \sum_{\nu=1}^{3} x_\nu + (r_2 - 1) u_2 + (r_3 - k) u_3 \geqq i.$$

Der Ausnahmefall, daß F_3 keine Glieder vom Grad $< r_3$ enthält, ordnet sich dieser Formulierung unter, wenn wir dafür $k = \mathrm{Min}(r_1, r_3)$ setzen.

In diesem Fall nämlich ergibt die Reduktion von i_3 nur Glieder von nichtkleinerer Exponentensumme, so daß von vornherein $i_3 = x_3$ angenommen werden kann. Statt (28) haben wir dann

$$u_2 \leqq x_1, \quad \sum x_\nu + (r_2 - 1)\, u_3 \geqq i,$$

was — wie man leicht überlegt — mit Bedingung (28) für $k = \mathrm{Min}(r_1, r_3)$ gleichbedeutend ist. Zur Elimination von u_2, u_3 aus (28) bestimmen wir nun mit der ersten Ungleichung von (28) als Nebenbedingung das Maximum von $U = (r_2 - 1)\, u_2 + (r_3 - k)\, u_3$. Bei festem u_3 hat U offenbar den Maximalwert $(r_3 - r_2 k)\, u_3 + (r_2 - 1)\, x_1$. Im Falle $r_3 \leqq k r_2$ erhalten wir daher $\mathrm{Max}(U) = (r_2 - 1)\, x_1$ und (28) kann durch $(r_2 x_1 + x_2) + x_3 \geqq i$ ersetzt werden. Daraus aber ergibt sich ähnlich wie beim Beweis von (23) $m_i = \varphi(i; r_1 r_2, r_3)$. Im Falle $r_2 = q_2$, $r_3 = q_3$ folgt daraus

$$(27_2) \qquad q_1^* = \frac{q_1}{q_1'}\, q_2, \quad q_2^* = q_3$$

und im Falle $r_2 = q_3$, $r_3 = q_2$

$$(27_3) \qquad q_1^* = \frac{q_1}{q_1'}\, q_3, \quad q_2^* = q_2,$$

da ja $r_3 \leqq r_1 r_2$ ist. Gilt dagegen $r_3 > k r_2$, so setzen wir $x_1 = x_0 k + x$ $\left(0 \leqq x_0 < -\left[-\frac{r_1}{k}\right],\ 0 \leqq x < k\right)$ und erhalten wegen $\mathrm{Max}(u_3) = x_0$ den Wert $\mathrm{Max}(U) = (r_3 - k)\, x_0 + (r_2 - 1)\, x$. (28) läßt sich dann durch $(r_3 x_0 + x_3) + (r_2 x + x_2) \geqq i$ ersetzen, woraus wir $m_i = \varphi\left(i; -\left[-\frac{r_1}{k}\right] r_3, k r_2\right)$ erhalten. Da die beiden letzten Argumente von φ die Werte der q^* angeben, ist k ein Teiler von r_1 (und damit p-Potenz). Wegen

$$\frac{r_1 r_3}{k} > r_1 r_3 \geqq k r_2$$

folgt daher mit Beachtung von $r_2 = q_3$, $r_3 = q_2$

$$(27_4) \qquad q_1^* = \frac{q_1 q_2}{q_1' k}, \quad q_2^* = k q_3.$$

Aus den Gleichungen (27) lassen sich aber lediglich die bereits aus Satz 32 bekannten Ungleichungen ablesen.

II. Funktionenkörper.

§ 7.

Vielfachheit.

Unter einem *Funktionenkörper* sei im Folgenden eine endliche Erweiterung K einer einfachen, rein-transzendenten Erweiterung $k(x)$ des Körpers k der Charakteristik $p > 0$ verstanden. k wird als der *Konstantenkörper* bezeichnet, während die in K algebraisch-abge-

schlossene Hülle von k, d. h. die Gesamtheit der bez. k algebraischen Elemente von K, der *genaue Konstantenkörper* genannt wird. x läßt sich nun bekanntlich durch jedes über k transzendente Element von K ersetzen. Von einer *zur unabhängigen Variablen x gehörigen Erzeugung*

$$K = k(x; y_1, \ldots, y_m), \tag{29}$$

wollen wir sprechen, wenn m die Vielfachheit von $K|k(x)$ ist. Die y seien dann kurz als zur unabhängigen Variablen x gehörige Erzeugende des Funktionenkörpers K bezeichnet. Dann gilt nach Satz 12 und dem Ergebnis $\mathrm{Uvg}(k(x)) = \mathrm{Uvg}(k) + 1$ von TEICHMÜLLER [15, S. 370, Satz 18]

$$m \leqq \mathrm{Uvg}(k) + 1 \tag{30}$$

woraus sich speziell die bekannte Tatsache ergibt, daß über vollkommenem k jede Erzeugung (29) einfach ist. In diesem Falle kann man darüber hinaus bekanntlich noch zeigen, daß für passendes x das y separabel über $k(x)$, d. h. K separabel erzeugbar ist. Wir wollen nun versuchen, auch bei unvollkommenem k Aussagen zu gewinnen, die über (30) hinausgehen.

Fragen wir nach der Änderung von m bei Übergang zur neuen unabhängigen Variablen x', so ist wegen $K = k(x'; x, y_1, \ldots, y_m)$ die zu x' gehörige Vielfachheit $m' \leqq m + 1$, und da m, m' natürlich auch ihre Rollen tauschen können, gilt $|m - m'| \leqq 1$, d. h. m kann höchstens zwei, zudem noch unmittelbar benachbarte Werte annehmen. Den kleineren von beiden, also die Minimalzahl von Erzeugenden, nennen wir die *Vielfachheit von K bez. k*, so daß $m = 0$ charakteristisch ist für den Körper der rationalen Funktionen. Ob das m in (29) bereits diese Vielfachheit ist — in welchem Falle wir von einer *Minimalerzeugung* reden wollen, — läßt sich jedenfalls dann bejahend entscheiden, wenn eine andere unabhängige Variable x' mit $m' = m + 1$ bekannt ist. Das ist z. B. mit $m \leqq \mathrm{Uvg}(k) \geqq 1$ der Fall für

$$K_m = k(x; a^{p^{-1}}, \ldots, a_m^{p^{-1}}),$$

wo die a_i p-unabhängige Elemente aus k sind: Dies ist eine Erzeugung (29), da sie nach § 3 eine ausgezeichnete Erzeugung von $K_m|k(x)$ darstellt. Mit $x' = x^p$ haben wir aus dem gleichen Grunde, da x' als Transzendente trivialerweise von den a_i p-unabhängig ist, die zu x' gehörige Erzeugung $K_m = k(x'; x'^{p^{-1}}, a_1^{p^{-1}}, \ldots, a_m^{p^{-1}})$, also $m' = m + 1$. Für $m = \mathrm{Uvg}(k) + 1$ können wir jedoch auf diese Art jedenfalls keinen Funktionenkörper der Vielfachheit m konstruieren. Daß dies auch allgemein unmöglich ist, zeigt

Satz 34. *Über unvollkommenem k hat jeder Funktionenkörper eine Vielfachheit* $\leqq \mathrm{Uvg}(k)$.

Mit m als Vielfachheit von K bez. k können wir $m \geqq 2$ annehmen, da für $m \leqq 1$ nichts zu beweisen ist. Nach Satz 7 sind nun die y einer Erzeugung (29) p-unabhängig in K. Wäre x von ihnen p-ab-

hängig, so ergäbe eine Überlegung wie beim Beweis von Satz 7 die Separabilität von x über $k(y_1, \ldots, y_m)$. Da, falls alle y über k algebraisch sind, $m \leqq \mathrm{Uvg}(k)$ wegen Satz 12 gilt, können wir o. B. d. A. y_1 als transzendent über k annehmen. Aus Satz 5 und $m \geqq 2$ würde dann im Widerspruch zur Definition von m die Erzeugung

$$K = k(y_1; y_2, \ldots, y_{m-1}, z)$$

folgen. Wegen $K^p(x, y_1, \ldots, y_m) = k^p(x; y_1, \ldots, y_m)$ ist also zufolge der Definition der p-Unabhängigkeit

$$(k^p(x; y_1, \ldots, y_m) : K^p) = p^{m+1}, \tag{31}$$

während aus (7), $\mathrm{Uvg}(k(x)) = \mathrm{Uvg}(k) + 1$ und Satz 11

$$(K : K^p) \leqq p^{\mathrm{Uvg}(k)+1} \tag{32}$$

folgt. Wegen $k^p(x; y_1, \ldots, y_m) \subseteq K$ ergibt der Vergleich von (31) und (32) schließlich die Behauptung $m \leqq \mathrm{Uvg}(k)$. Für maximale Vielfachheit $m = \mathrm{Uvg}(k)$ erkennen wir zugleich noch die Richtigkeit von

$$k^p(x; y_1, \ldots, y_m) = K. \tag{33}$$

Ferner zeigt wie bei Satz 7 eine genauere Betrachtung des Anfangs unseres Beweises, daß ein Funktionenkörper der Vielfachheit m bez. seines Konstantenkörpers den relativen Unvollkommenheitsgrad $m+1$ besitzt, mit alleiniger Ausnahme des separabel erzeugbaren, nichtrationalen Funktionenkörpers ($m = 1$), der — wie schon Teichmüller [15, S. 370] bemerkt hat — den relativen Unvollkommenheitsgrad 1 besitzt.

Unter gewissen Voraussetzungen ist für einen Funktionenkörper maximaler Vielfachheit jede Erzeugung (29) eine Minimalerzeugung, denn es gilt

Satz 35. *Ist $k^{p^{-1}}$ nicht in K enthalten, so ist die Erzeugendenanzahl bei jeder Wahl der unabhängigen Variablen $\leqq Uvg(k)$.*

Liegt nämlich $k^{p^{-1}}$ nicht in K, so gibt es ein $a \in k$, so daß $z^{p^e} - a$ in $K[z]$ irreduzibel ist. Mit $\bar{k} = k(a^{p^{-e}})$ und $\bar{K} = K(a^{p^{-e}}) = \bar{k}(x; y_1, \ldots, y_m)$ gilt daher

$$(\bar{K} : \bar{k}(x)) = \frac{(\bar{K} : K) \cdot (K : k(x))}{(\bar{k}(x) : k(x))} = (K : k(x)). \tag{34}$$

Da wegen $\mathrm{Uvg}(k) \geqq 1$ für separabel erzeugbares K nichts bewiesen zu werden braucht, können wir $K = k(x; y, y_1, \ldots, y_m)$ setzen mit der über $k(x)$ irreduziblen Gleichung für y

$$f(y) = 0 \tag{35}$$

und — nach Satz 14 — der über $k(x; y, y_1, \ldots, y_{i-1})$ irreduziblen Gleichung für y_i $(i = 1, \ldots, m)$

$$y_i^{q_i} = f_i(y_1^{q_i}, \ldots, y_{i-1}^{q_i}) \tag{36}$$

mit $q_i = p^{e_i}$, $e_i > 0$, $f_i(z_1, \ldots, z_{i-1}) \varepsilon k(x; y)[z_1, \ldots, z_{i-1}]$. Wegen (34) bleiben nun die Gleichungen (35) und (36) irreduzibel bei Ersetzung von k durch $\bar{k}$, also, da e beliebig gewählt war, auch bei Ersetzung durch das Kompositum k^* aller $\bar{k}$ mit $e = 1, 2, \ldots$. Schreiben wir entsprechend K^* für das Kompositum aller $\bar{K}$ mit $e = 1, 2, \ldots$, so gilt mit den irreduziblen Gleichungen (35), (36) $K^* = k^*(x; y, y_1, \ldots, y_m)$. Weil dies nach Satz 14 eine ausgezeichnete Erzeugung von $K^* | k^*(x; y)$ ist, haben wir zufolge (30) $m \leqq \mathrm{Uvg}(k^*) + 1$ und dies ist nach dem in Abschnitt III zu beweisenden Satz 48 gleich $\mathrm{Uvg}(k)$.

Nehmen wir k speziell als fastvollkommen, also $\mathrm{Uvg}(k) \leqq 1$ an, so ergibt Satz 34 die einfache Erzeugbarkeit jedes Funktionenkörpers. Die Voraussetzung von Satz 35 ist bei fastvollkommenem, aber unvollkommenem k nach Satz 19 gleichbedeutend mit der Separabilität des genauen Konstantenkörpers k' über k. Wir können ferner in Erweiterung des über vollkommene Körper Bekannten zeigen

Satz 36. *Über fastvollkommenem k ist ein Funktionenkörper dann und nur dann separabel erzeugbar, wenn sein genauer Konstantenkörper separabel über k ist.*

Das „nur dann" ist trivial. Da bekanntlich jeder Funktionenkörper über vollkommenem k separabel erzeugbar ist, dürfen wir für den weiteren Beweis $\mathrm{Uvg}(k) = 1$ annehmen. Nach Satz 35 und dem oben Ausgeführten ist bei separablem $k'|k$ eine einfache Erzeugung $K = k(x; y)$ sogar bei beliebig gewählter unabhängiger Variablen x gesichert. Das irreduzible Polynom $f(z, w) \varepsilon k[z, w]$ mit $f(x, y) = 0$ ist nun aber entweder in x über $k(y)$ oder in y über $k(x)$ separabel. Denn sonst wäre es bereits Polynom in z^p und w^p, also in $\bar{k}(x)[z, w]$ mit $\bar{k} = k^{p^{-1}} = k(a^{p^{-1}})$, $a \varepsilon k - k^p$ reduzibel, woraus mit $\bar{K} = K(a^{p^{-1}}) = \bar{k}(x; y)$ ein Widerspruch zu (34) folgen würde. Bietet daher nicht schon die unabhängige Variable x eine separable Erzeugung, so erhalten wir eine solche mit der unabhängigen Variablen y. Einen wesentlich kürzeren Beweis, der zudem auch bei Übergang zu beliebigem endlichen Transzendenzgrad gültig bleibt, erhält man unter Benutzung von Theorem 14 bei Mac Lane [8]; denn eine in k p-unabhängige Menge, die ja bei $\mathrm{Uvg}(k) = 1$ aus genau einem nicht in k^p liegenden Element besteht, behält hier diese Eigenschaft in K, wenn der genaue Konstantenkörper separabel über k ist.

Satz 36 gestattet nun auch bei nichtseparablem $k'|k$ eine Minimalerzeugung anzugeben, also eine einfache Erzeugung zu finden: Mit e als Exponenten von $k'|k$ erfüllt nach der im Anschluß an Satz 13 gezogenen Folgerung K über $k^{p^{-e}} = \bar{k}$ die Voraussetzungen von Satz 35. Aus einer entsprechend dem Beweis von Satz 36 gefundenen separablen Erzeugung $K = \bar{k}(x; \bar{y})$ gewinnen wir dann nach Satz 5 ein y mit $K = k(x; y)$.

Es taucht nun die Frage auf, ob man aus der Vielfachheit eines Funktionenkörpers K auch Aussagen gewinnen kann über die Vielfachheit seines Restklassenkörpers nach einem Primdivisor $\mathfrak{p}$, also des Körpers $K_\mathfrak{p}/\bar{\mathfrak{p}}$, der durch Restklassenbildung nach dem Ideal $\bar{\mathfrak{p}}$ der durch $\mathfrak{p}$ teilbaren Elemente im Ring $K_\mathfrak{p}$ der $\mathfrak{p}$-ganzen Elemente entsteht und als Oberkörper des Konstantenkörpers k aufgefaßt werden kann. Bezüglich der dabei sowie im folgenden Paragraphen verwandten Begriffsbildungen aus der Verzweigungstheorie bewerteter Körper sei auf die Arbeiten von Deuring [2] und Ostrowski [9] verwiesen. In der Bezeichnung schließen wir uns dabei Deuring an. Ist nun die Vielfachheit m von K über k Null, so kann der Restklassenkörper trivialerweise nur die Vielfachheit 0 oder 1 haben. Die danach naheliegende Vermutung, daß für die Vielfachheit n des Restklassenkörpers die Ungleichung $n \leqq m+1$ gilt, bestätigt sich jedoch nicht. Wir geben nämlich ein Gegenbeispiel an, aus dem hervorgeht, daß schon bei $m = 1$ noch jedes $n \leqq \mathrm{Uvg}(k)$ möglich ist. Sind $a_1, \ldots, a_n$ $(n \leqq \mathrm{Uvg}(k))$ in k p-unabhängig, so definieren wir durch

$$y^{p^n} = a_1^{p^{n-1}} + \sum_{i=2}^{n} a_i^{p^{n-i}} x^{p^{n+i-3}} + x^{p^{2n-3}+1} \tag{37}$$

den Funktionenkörper $K = k(x; y)$. Ist $\mathfrak{p}_0$ der Zählerdivisor von x in $k(x)$, so ist in K mit $\mathfrak{p}$ als Primdivisor $\mathfrak{p}_0 = \mathfrak{p}^e$ und $(K_\mathfrak{p}/\bar{\mathfrak{p}} : k) = \frac{p^n}{e}$. Andererseits ist aber $(y^p - a_1)^{p^{n-1}} \equiv 0(\mathfrak{p})$, also $y^p \equiv a_1(\mathfrak{p})$, und mit $h \geqq 2$ und

$$(y^{p^{h-1}} - a_1^{p^{h-2}} - \sum_{i=2}^{h-1} a_i^{p^{h-i-1}} x^{p^{h+i-4}})\, x^{-p^{2h-4}} = y_h$$

ist

$$y_h^{p^{n-h+1}} = \sum_{i=h}^{n} a_i^{p^{n-i}} x_i^{p^{n+i-3} - p^{n+h-3}} + x^{p^{2n-3} - p^{n+h-3}+1}\, \varepsilon\, k[x],$$

woraus einmal $y_h \varepsilon K_\mathfrak{p}$, zum andern $(y_h^p - a_h)^{p^{n-h}} \equiv 0(\mathfrak{p})$, also $y_h^p \equiv 0(\mathfrak{p})$ folgt. Damit haben wir $k(a_1^{p^{-1}}, \ldots, a_n^{p^{-1}}) \subseteq K_\mathfrak{p}/\bar{\mathfrak{p}}$, also $e = 1$ und $k(a_1^{p^{-1}}, \ldots, a_n^{p^{-1}}) = K_\mathfrak{p}/\bar{\mathfrak{p}}$. Es gibt somit im Allgemeinen zu einem Primdivisor $\mathfrak{p}$ keine Erzeugung (29), deren Restklassen $\bar{x}, \bar{y}_1, \ldots, \bar{y}_m$ den Restklassenkörper $K_\mathfrak{p}/\bar{\mathfrak{p}}$ über k erzeugen. Auf Grund unseres Beispiels braucht das selbst dann nicht der Fall zu sein, wenn die Klasse von $\mathfrak{p}$ eine Dimension $\geqq 2$ besitzt, also ein nur durch $\mathfrak{p}$ teilbares Primelement vorhanden ist. Bemerkt sei noch, daß das letzte Glied der rechten Seite in (37) nur dazu dient, k zugleich als genauen Konstantenkörper zu erhalten und zwar auf Grund von

Satz 37. *Der durch $y^{p^n} = f(x^p) + x\,g(x^p)$ mit $f(z), g(z) \varepsilon k[z]$ und $g \neq 0$ definierte Funktionenkörper $K = k(x; y)$ hat den genauen Konstantenkörper k.*

Da x transzendent über k ist, gilt $(K : k(x)) = p^n$. Wäre nun der genaue Konstantenkörper $\supset k$, so gäbe es ein $a \varepsilon k - k^p$ mit $a \varepsilon K^p$,

nach Satz 6 also mit $a^{p-1}\varepsilon k(x, y^{p^n-1})$. Zum Beweis unserer Behauptung genügt es daher, aus

$$(38) \qquad a^{p-1}\sum_{k=0}^{N} b_k x^k = \sum_{i,k=0}^{p-1,N} a_{ik} x^k y^{ip^n-1} \qquad (a_{ik},\ b_k \varepsilon k)$$

$a_{ik} = 0$ für $i > 0$ zu folgern. Sei dies für $i > h$ mit $0 < h < p$ bereits erfolgt. Potenzieren von (38) mit p muß nun auf der rechten Seite ebenfalls ein Polynom nur in x^p geben, so daß der sich für x^h ergebende, in $k(x^p)$ liegende Koeffizient verschwindet. Da in diesem nur Glieder mit $i = h$ auftreten, bedeutet das $\sum_{k=0}^{N} a_{hk}^p x^{kp} = 0$, also auch $a_{hk} = 0$, womit die Behauptung bewiesen ist.

Die aus unserem Gegenbeispiel gezogene Folgerung ergibt noch die Fehlerhaftigkeit des vom Verfasser in [10, S. 372] formulierten Satzes 2: Beim Beweis ist wesentlich die Existenz einer Erzeugung mit $k(\bar{x}, \bar{y}_1, \ldots, \bar{y}_m)$ als Restklassenkörper benutzt, wobei L, K statt der hier verwendeten Buchstaben K, k auftreten. Im weiteren Verlauf des Beweises (S. 273, Mitte) findet sich außerdem noch ein weiterer Fehler, denn das Ideal der dort eingeführten inseparablen Polynome F, F_i ergibt durch Restklassenbildung aus $k[x, y_1, \ldots, y_m]$ i. a. nicht den Restklassenkörper $K_\mathfrak{p}/\bar{\mathfrak{p}}$ sondern eine Algebra. In der Tat gibt es denn auch ein Beispiel, wo trotz $K_\mathfrak{p}/\bar{\mathfrak{p}} = k(\bar{x}, \bar{y}_1, \ldots, \bar{y}_m)$ und der Vielfachheit $m+1$ dieses Restklassenkörpers der Restklassenring des Funktionenkörpers nach $\mathfrak{p}^r$, d. h. $K_\mathfrak{p}/\bar{\mathfrak{p}}^r$, nicht der ersten Typenklasse angehört: Wir bilden mit $k = P_p(u, v)$, $p > 2$ und $y^{p^2} = u^p + (x^p - v)^2$ den Funktionenkörper $K = k(x; y)$, in dem der Zähler von $x^p - v$ die Primdivisorzerlegung $\mathfrak{p}^p$ besitzt. Dann ist $x^p \equiv v\,(\mathfrak{p}^p)$ und $y^p \equiv u\,(\mathfrak{p}^2)$, also $K_\mathfrak{p}/\bar{\mathfrak{p}} = k(u^{p-1}, v^{p-1}) = k(\bar{x}, \bar{y})$. In der Algebra $K_\mathfrak{p}/\bar{\mathfrak{p}}^r$ $(r > 1)$ gibt es daher für die Restklassen nach dem Radikal $\mathfrak{w}$ ein mod $\mathfrak{w}^2$ relationstreues Repräsentantensystem. Nach Definition (a. a. O., S. 266) bedeutet das aber: Die Algebra gehört nicht zur ersten Typenklasse.

Der nachfolgende Satz 3 bleibt bestehen (a. a. O., S. 274):

Eine primäre Algebra vom Defekt δ und Inseparabilitätsrang λ ist dann und nur dann Polynomrestklassenring, wenn $\delta \leqq 1$, $\lambda \leqq 1$ und im Falle $\delta = 1$, $\lambda = 1$ die Algebra der ersten Typenklasse angehört.

Den Beweis führen wir nun so: Ist $m = 0$, also $K = k(x)$, so ergibt sich $\lambda = 0$ oder $\lambda = 1$, jenachdem $\mathfrak{p}$ der Zähler eines separablen oder inseparablen Polynoms $f(x)$ aus $k[x]$ ist. Im ersten Fall liegt trivialerweise die Grundalgebra (a. a. O., S. 268) vor. Im zweiten Fall gehört die entstehende Algebra für $\delta = 1$, also $r > 1$, der ersten Typenklasse an. Denn mit $f = g(x^q)$, $q = p^e$, g separabel aus $k[x]$, bestimmt sich der Repräsentant für ein α_i (Bezeichnung wie a. a. O., S. 236) zu $x^q + f(x)F(x)$ aus der Bedingung $g(x^q + f(x)F(x)) \equiv 0\,(f(x)^r)$. Wegen $r > 1$ folgt daraus $1 + g'(x^q)F(x) \equiv 0\,(f(x))$, also $F(x) \not\equiv 0\,(f(x))$. Da x als Repräsentant für α_i betrachtet werden kann, ist $-f(x)F(x)$ Repräsen-

tant für $f_1(a_1)$. Dieses liegt also nicht im Radikalquadrat, w. z. b. w. Da für $\delta = 1$, $\lambda = 1$ alle Algebren der ersten Typenklasse mit gleichem Radikalrestklassenkörper und gleichem Index r isomorph sind (a. a. O., S. 269, Satz 2), ist damit auch gezeigt, daß eine derartige Algebra Polynomrestklassenring ist.

§ 8.

Primdivisorzerlegung bei Konstantenerweiterung.

Eine Bewertung, also ein Primdivisor $\mathfrak{p}$ eines Körpers K besitzt bekanntlich in einer endlichen Erweiterung $L|K$ eine endliche Anzahl s von Fortsetzungen $\mathfrak{P}_1, \ldots, \mathfrak{P}_s$, eine Tatsache, die mit gewissen Exponenten e_i durch die Divisorenbeziehung

$$\mathfrak{p} = \mathfrak{P}_1^{e_1} \cdot \ldots \cdot \mathfrak{P}_s^{e_s} \tag{39}$$

ausgedrückt wird. Die $\mathfrak{P}_i$ werden am einfachsten konstruiert durch Übergang von K zu einer perfekten Hülle $\overline{K}$ bez. $\mathfrak{p}$. Mit der Bezeichnung von Seite 22 oben bildet man

$$L_{\overline{K}} = \overline{K}_L^{(1)} \dotplus \overline{K}_L^{(2)} \dotplus \cdots \dotplus \overline{K}_L^{(g)},$$

und die aus $\mathfrak{p}$ hervorgehende Bewertung des perfekten Körpers $\overline{K}_i \cong \overline{K}$ liefert dann genau eine Fortsetzung auf den zum Radikalrestklassenkörper von $\overline{K}_L^{(i)}$ isomorphen Körper $L\,\overline{K}_i$, die wir mit $\mathfrak{P}_i$ bezeichnen. Der Grad f_i^* des Körpers

$$L_{\mathfrak{P}_i}/\overline{\mathfrak{P}}_i \cong L_{\mathfrak{p}}/\mathfrak{P}_i^* \tag{40}$$

als Oberkörper von $K_{\mathfrak{p}}/\overline{\mathfrak{p}}$ wird als *Relativgrad* von $\mathfrak{P}_i$ bezeichnet. Dabei bedeutet $L_{\mathfrak{p}}$ den Ring der von $K_{\mathfrak{p}}$ ganz-abhängigen Elemente von L und $\mathfrak{P}_i^* = \overline{\mathfrak{P}}_i \cap L_{\mathfrak{p}}$ das Ideal der durch $\mathfrak{P}_i$ teilbaren Elemente dieses Ringes. Dann existiert die p-Potenz $\delta_2^{(i)}$, der *zweite Defekt* [9, S. 360] von $\mathfrak{P}_i$, so daß

$$(L\,\overline{K}_i : \overline{K}_i) = \delta_2^{(i)}\, e_i\, f_i^* \tag{41}$$

gilt. Andererseits ist nach unsern Entwicklungen in § 4 der Quotient der Ränge $(\overline{K}_L^{(i)} : \overline{K}_i)$ und $(L\,\overline{K}_i : \overline{K}_i)$ eine p-Potenz $\delta_1^{(i)}$, die man den *ersten Defekt* [9, S. 308] von $\mathfrak{P}_i$ nennt. Mit (41) ist also

$$(L : K) = \sum_{i=1}^{s} \delta_1^{(i)}\, \delta_2^{(i)}\, e_i\, f_i^* \tag{42}$$

Bei diskreter Bewertung, also endlicher Maximalordnung $K_{\mathfrak{p}}$ — ein Fall, der insbesondere bei Funktionenkörpern vorliegt — ist nun immer $\delta_2 = 1$, wie man etwa aus Hilfssatz 4 bei Teichmüller [16, S. 143] entnimmt. Der erste Defekt kann nach Definition nur bei inseparablem $L|K$ größer als 1 sein. Für den uns hier allein interessierenden Fall gilt aber

Satz 38. *Bei Funktionenkörpern ist der erste Defekt gleich* 1.

Dieser Satz ist nicht neu: Er ist ja nur eine Teilaussage des Ergebnisses von F. K. Schmidt [13], daß bei Funktionenkörpern neben die Divisorenbeziehung (39) die Primidealzerlegung

$$\bar{\mathfrak{p}}\, L_{\mathfrak{p}} = \mathfrak{P}_1^{*e_1} \cdot \ldots \cdot \mathfrak{P}_g^{*e_g} \tag{43}$$

tritt, aus der (42) in der Form

$$(L:K) = \sum_{i=1}^{g} e_i f_i^* \tag{44}$$

abzulesen ist. Wir wollen aber hier den Satz 38 direkt im Rahmen unserer Untersuchungen über inseparable Erweiterungen beweisen. Offenbar genügt es, $K = k(x)$ und $\mathfrak{p}$ als den Zählerdivisor von x zu nehmen. Wir brauchen dann nur noch zu zeigen, daß für jeden Körper $M = K(y_1, \ldots, y_m) \subset \bar{K} = k\{x\}$ und eine algebraische Erweiterung $L|K$ die Algebra L_M halbeinfach ist. Nun bleibt mit B_0 als p-Basis von k die p-Basis $B = B_0 + \{x\}$ von K in $\bar{K}$ und damit in M p-unabhängig; denn $x \in \bar{K}^p(B_0) \subseteq k\{x^p\}$ ist genau so unmöglich wie mit $B_0 = \{b\} + B'$ die Beziehung $b \in \bar{K}^p(x, B') \subseteq k^p(B')\{x\}$, aus der ja $b \in k(B')$ folgen würde. Daher kann B zu einer p-Basis $B + X$ von M ergänzt werden. Da $K(X_i)$ $(i = 1, 2)$ mit $X_1 \subset X_2 \subseteq X$ die p-Basis $B + X_i$ hat, ist nach Satz 8 und wegen des Erhaltenbleibens der p-Basis bei separabler Erweiterung $K(X_2)|K(X_1)$ nicht algebraisch, also X algebraisch unabhängig über K und somit zu einer Transzendenzbasis $X + Y$ von $M|K$ ergänzbar. Wegen der Endlichkeit von $M|K(X+Y)$ gibt es dann ein e, so daß jedes Element von M^{p^e} und wegen (6) daher auch M separabel über $K(X+Y)$ ist. Nebenbei folgt daraus noch $Y = 0$, da ja $B + X + Y$ p-Basis von M ist. Die Existenz der damit gewonnenen separierenden Transzendenzbasis X für $M|K$ kann auch aus dem Theorem 14 bei Mac Lane [8] gefolgert werden. Nun ist trivialerweise $L_{K(X)}$ ein Körper und daher L_M wegen der Separabilität von $M|K(X)$ halbeinfach, w. z. b. w.

Wesentlich für die Gültigkeit von Satz 38 ist nun, daß wir unter „Funktionenkörper" nur Erweiterungen vom Transzendenzgrad 1 verstehen. Selbst beim Körper $K = k(x, y)$ der rationalen Funktionen zweier Variablen und einer zu $L = k'(x, y)$ führenden Konstantenerweiterung $k'|k$ können wir bei unvollkommenem k einen Primdivisor mit $\delta_1 > 1$ angeben. Zu diesem Zweck nehmen wir auf einer Bemerkung Deurings fußend in $k\{x\}$ ein über $k(x)$ transzendentes Element z. Die Existenz eines solchen folgt aus einem Satz von F. K. Schmidt [12, S. 23] über Potenzreihen mit Lücken oder auch aus unserm in Abschnitt III zu beweisenden Satz 54. In der mit $a \in k - k^p$ gebildeten Erweiterung $\bar{K} = k(a^{p^{-1}})\{x\}$ ist nun $a^{p^{-1}} + z$ ebenfalls transzendent über $k(x)$, weshalb wir durch Identifizierung dieses Elementes mit y den Körper $k(x, y)$ in $\bar{K}$ einbetten können. Die natürliche Exponentenbewertung von $\bar{K}$

durch den kleinsten mit nichtverschwindendem Koeffizienten in einer Potenzreihe auftretenden Exponenten ergibt nun in dem Unterkörper $k(x, y)$ den gewünschten Primdivisor $\mathfrak{p}$, wenn wir noch $k' = k(a^{p^{-1}})$ setzen. $\overline{K}$ ist nämlich — wie sofort einzusehen — die perfekte Hülle von $k(x, y) = K$, so daß $\delta_1 = p$ gilt.

Wir gehen jetzt speziell zu solchen endlichen Erweiterungen eines Funktionenkörpers K über, die sich durch Erweiterung k' des Konstantenkörpers k herstellen lassen. Dabei sei k zugleich der genaue Konstantenkörper. Dann gilt

Satz 39. *$K_{k'(x)} = k'_K$ ist primäre Algebra und bei einfachem $k'|k$ ein Körper.*

Nach den Entwicklungen von § 4 genügt es, den zweiten Teil dieser Behauptung zu beweisen. Ist nun $k' \cong k[z]/(f(z))$ und in $K[z]$ $f(z) = F(z)G(z)$, so sind die Koeffizienten von F und G algebraisch über k, liegen daher bereits in k. $f(z)$ ist also auch in $K[z]$ irreduzibel und daher $k'_K \cong K[z]/(f(z))$ ein Körper.

Da entsprechend dem Beweis von Satz 22 die Algebra k'_K homomorph auf jedes Kompositum von k' und K abgebildet wird und daher nach Satz 39 jedes Kompositum isomorph zum Radikalrestklassenkörper von k'_K ist, wird dieser mit Kk' bezeichnet und *der aus K durch die Konstantenerweiterung $k'|k$ hervorgehende Funktionenkörper* genannt. $L = Kk'$ hat nun nicht immer den genauen Konstantenkörper k'. Wir brauchen z. B. nur $k = P_p(u, v)$, $K = k(x; y)$, $y^p = ux^p + v$ und $k' = k(u^{p^{-1}})$ zu setzen. Daß k der genaue Konstantenkörper von K ist, ergibt sich, weil jede Konstante in $k^{p^{-1}}$ liegt, aus der nach den Entwicklungen von S. 95 unten für den Grundkörper $k(x^p)$ und $w = x^p$ geltenden Beziehung $k^{p^{-1}}(x^p) \cap K = k(x^p)$. $L = Kk'$ aber enthält die nicht zu k' gehörende Konstante $y - xu^{p^{-1}}$. Das ist auch der Grund, weshalb beim Übergang zu $k'' = k^{p^{-1}}$ — anders als bei einer einfachen Konstantenerweiterung — k''_K ein Radikal $\neq 0$ hat. Die Voraussetzung der Einfachheit ist also nicht überflüssig. Bezüglich des genauen Konstantenkörpers gilt aber

Satz 40. *Bei separablem $k'|k$ ist k' der genaue Konstantenkörper von Kk'.*

Wir beweisen diesen Satz auch für unendliche algebraische Erweiterungen $k'|k$, für die die Betrachtungen von Satz 39 ja ebenfalls gültig bleiben. Eine Konstante c von Kk' ist wegen der Separabilität von $k'|k$ enthalten in $Kk(a)$ mit einem in k' liegenden separablen Element a, und es gilt $k(a, c) = k(b) \supseteq k(a)$. Da aber $Kk(b) = Kk(a)$ ist, liefert Satz 39 die Gradbeziehung $(k(a) : k) = (Kk(a) : K) = (Kk(b) : K) = (k(b) : k)$, also $k(a) = k(b)$, $c \in k'$, w. z. b. w.

Mit $(k' : k) = n$ gibt es nun nach den Entwicklungen von § 4 eine p-Potenz r, so daß

$$(L : K) = \frac{n}{r} \tag{45}$$

gilt. Nach Satz 39 ist bei einfachem $k'|k$ stets $r = 1$. Falls wir wie üblich $(K_\mathfrak{p}/\bar{\mathfrak{p}} : k) = f$, $(L_{\mathfrak{P}_i}/\bar{\mathfrak{P}}_i : k') = f_i$ als die *Grade* der Primdivisoren $\mathfrak{p}, \mathfrak{P}_i$ einführen, also

$$n f_i = f_i^* f \tag{46}$$

haben, gilt betreffs der Zerlegung (39) der

Satz 41. *Bei separablem $k'|k$ ist ein Primdivisor $\mathfrak{p}$ aus K in $L = Kk'$ Produkt von lauter verschiedenen Primdivisoren, die unter Übereinstimmung der jeweiligen Grade bez. k' den einfachen Komponenten von $K_\mathfrak{p}/\bar{\mathfrak{p}} \times k'$ entsprechen.*

Zum Beweis benutzen wir eine normale, separable, $k' = k(a)$ umfassende Erweiterung $k^*|k$. Ein Element $z \in L$ läßt sich nun immer in der Form $z = \sum_{i=0}^{n-1} y_i a^i$ $(y_i \in K)$ darstellen. Anwendung der durch $a \to a^{(i)}$ $(i = 0, \ldots, n-1;\ a^{(0)} = a)$ beschriebenen Isomorphismen liefert daraus in $Kk^* \supseteq L$ die Beziehungen $z^{(k)} = \sum_{i=0}^{n-1} y_i a^{(k)i}$ $(k = 0, \ldots, n-1)$, also wegen $|a^{(k)i}|_{(i,k=0,\ldots,n-1)} \neq 0$ die y_i als ganz-rationale Funktionen der $z^{(k)}$. Da diese aber mit z zusammen ganz-abhängig von $K_\mathfrak{p}$ sind, trifft dasselbe auch für die y_i zu, die dann als Elemente von K sogar in $K_\mathfrak{p}$ liegen müssen. Es gilt also

$$L_\mathfrak{p} = K_\mathfrak{p} k', \tag{47}$$

wo die rechte Seite das in L gebildete Ringkompositum von $K_\mathfrak{p}$ und k' bezeichnet. Aus (47) folgt nun durch Restklassenbildung mod $\bar{\mathfrak{p}} L_\mathfrak{p}$ wegen der linearen Unabhängigkeit der Elemente $1, a, \ldots, a^{n-1}$ über K sofort

$$L_\mathfrak{p}/\bar{\mathfrak{p}} L_\mathfrak{p} \cong \bar{k} \times k', \tag{48}$$

wenn mit $\bar{k}$ der als Erweiterung von k aufgefaßte Körper $K_\mathfrak{p}/\bar{\mathfrak{p}}$ bezeichnet wird. Die Halbeinfachheit von $\bar{k} \times k'$ zusammen mit (40) und (43) ergibt dann die Behauptung. Es liegt nun die Vermutung nahe daß (47) allgemein gilt, woraus dann wenigstens für $r = 1$ (48) folgen würde. Bezeichnen wir die Ränge über k' der Primärkomponenten von $\bar{k} \times k'$ und ihrer Radikalrestklassenkörper mit g_i bzw. h_i, so würde unsere Vermutung für $r = 1$ bedeuten, daß

$$e_i = \frac{g_i}{h_i}, \quad f_i = h_i \tag{49}$$

sein müßte. Alle Primärkomponenten hätten zudem den Defekt 1 (s. S. 103). Daß dies i. a. falsch ist, erkennen wir aus dem Beispiel von Seite 41, wenn wir etwa $k' = k^{p^{n-1}}$ setzen: Es ist $r = 1$, doch hat nach Satz 25 $\bar{k} \times k'$ den Defekt n. Aber auch bei Defekt 1 braucht (49) nicht erfüllt zu sein. Bilden wir nämlich mit $k := P_p(u, v)$ den Funktionenkörper $K = k(x; y)$, $y^p = (v + x)x^p + u$, der nach Satz 37 den genauen Konstantenkörper k besitzt, so ist mit $k' = k(u^{p^{n-1}})$

$$L = k'(x, z), \quad z^p = v + x, \quad z = \frac{y - u^{p^{n-1}}}{x}.$$

Der Zählerdivisor von x ist also sowohl in K wie in L Primdivisor: $\mathfrak{p} = \mathfrak{P}$. Wegen $\bar{k} = k(u^{p^{r-1}})$ ist aber $\bar{k} \times k'$ kein Körper. Für den Restklassenkörper $\bar{k}' = L_{\mathfrak{P}}/\bar{\mathfrak{P}}$ gilt entgegen (48) $\bar{k}' = k'(v^{p^{r-1}}) \supset \bar{k}k'$. Für $r > 1$ ist (49) in jedem Fall falsch, denn (44), (45), (46) ergeben

$$r \sum_{i=1}^{n} e_i f_i = f. \tag{50}$$

Bemerkt sei noch, daß bei $r = 1$ (48) durchaus erfüllt sein kann, ohne daß (47) gilt: Mit dem gleichen k wie oben bilden wir den Funktionenkörper $K = k(x; y)$, $y^p = u + x^{p+1}$, der wieder nach Satz 37 den genauen Konstantenkörper k besitzt. Mit $k' = k(u^{p^{r-1}})$ und $z = (u^{p^{r-1}} - y)\, x^{-1}$ ist dann $L = k'(z)$, $z^p = x$. Daher ist der in K leicht als Primdivisor zu erkennende Zählerdivisor $\mathfrak{p}$ von x in L eine p-te Potenz: $\mathfrak{p} = \mathfrak{P}^p$. Deshalb ist $L_{\mathfrak{p}}/\bar{\mathfrak{p}}\, L_{\mathfrak{p}} \cong \sum_{i=0}^{p-1} k' w^i$ $(w^p = 0)$ und dasselbe gilt für $\bar{k} \times k'$. (48) ist also erfüllt, aber, da z zwar in $L_{\mathfrak{p}}$, jedoch — weil yx^{-1} nicht in $K_{\mathfrak{p}}$ — nicht in $K_{\mathfrak{p}} k'$ liegt, ist (47) falsch. Dabei ist die Isomorphie (48) durchaus nichttrivial, d. h. sie beruht nicht einfach darauf, daß die Restklassen von $K_{\mathfrak{p}} k'$ modulo dem Erweiterungsideal von $\bar{\mathfrak{p}}$ beim Übergang zum umfassenderen Ring $L_{\mathfrak{p}}$ inkongruent bleiben und nur durch Elemente von $L_{\mathfrak{p}}$ vergrößert werden, denn z. B. sind ja die in $K_{\mathfrak{p}} k'$ inkongruenten Elemente $u^{p^{r-1}}$ und y in $L_{\mathfrak{p}}$ kongruent. Deshalb kann wegen (48) auch nicht jedes Element von $L_{\mathfrak{p}}$ zu einem Element von $K_{\mathfrak{p}} k'$ kongruent sein, da eine Algebra von endlichem Rang niemals isomorph zu einer echten Unteralgebra ist.

Im inseparablen Fall liegen also gänzlich andere Verhältnisse vor als im separablen. Wir können über den Zusammenhang von $\bar{k} \times k'$ mit der Zerlegung (39) allgemein nur aussagen

Satz 42. *Bei endlichem $k'|k$ entsprechen die verschiedenen Primdivisoren $\mathfrak{P}_i$, in die ein Primdivisor $\mathfrak{p}$ aus K in $L = Kk'$ zerlegt wird, den primären Komponenten von $K_{\mathfrak{p}}/\bar{\mathfrak{p}} \times k'$, wobei $L_{\mathfrak{P}_i}/\bar{\mathfrak{P}}_i$ rein-inseparable Erweiterung des Radikalrestklassenkörpers der entsprechenden Primärkomponente ist. Zwischen den Rängen g_i, h_i dieser Primärkomponenten bzw. ihrer Radikalrestklassenkörper über k' und den Exponenten e_i und Graden f_i der $\mathfrak{P}_i$ bestehen die Beziehungen*

$$r e_i f_i = g_i \tag{51}$$

$$f_i \geqq h_i \tag{52}$$

$$e_i \leqq \frac{g_i}{h_i r}. \tag{53}$$

Zum Beweis beachten wir, daß die Behauptungen für separable Konstantenerweiterung auf Grund von Satz 41 jedenfalls richtig sind. Bei weiterer rein-inseparabler Konstantenerweiterung verändern nur die einzelnen Komponenten von $K_{\mathfrak{p}}/\bar{\mathfrak{p}} \times k'$ ihre Struktur: Ihre Anzahl sowie

die g_i bleiben unverändert. Wir beweisen nun den Satz durch vollständige Induktion nach m, wobei p^m der Inseparabilitätsgrad (s. S. 85) von $k'|k$ sei. Dabei kann (53) als einfache Folge von (51) und (52) unberücksichtigt bleiben. Für $m \geqq 1$ gibt es einen Zwischenkörper k_0 mit $k' = k_0(a)$, $a^q = \alpha \varepsilon k_0 - k_0^p$, auf den also die Induktionsvoraussetzung zutrifft. Der Funktionenkörper $L_0 = Kk_0$ wird dann allerdings nicht immer k_0 als genauen Konstantenkörper besitzen. Den i-ten Primdivisor von L_0, der in der Zerlegung von $\mathfrak{p}$ auftritt, bezeichnen wir unter Unterdrückung des Index i mit $\mathfrak{P}_0$, Grad und Exponent entsprechend mit f_0, e_0, seinen Restklassenkörper mit $\bar{k}_0$, den Radikalrestklassenkörper der entsprechenden i-ten Primärkomponente von $\bar{k} \times k_0$ mit k_0^* und dessen Grad über k_0 mit h_0. Bei der Konstantenerweiterung $k'|k_0$ gilt nach der allgemeinen Verzweigungstheorie $\mathfrak{P}_0 = \mathfrak{P}^{e^*}$ in $L = L_0 k'$. Die Zuordnung der Primdivisoren der Zerlegung von $\mathfrak{p}$ zu den Primärkomponenten von $\bar{k} \times k'$ überträgt sich also auch auf L. Wir bezeichnen nun mit f den Grad von $\mathfrak{P}$, mit e seinen Exponenten in der Zerlegung von $\mathfrak{p}$, seinen Restklassenkörper mit $\bar{k}'$, den Radikalrestklassenkörper der Primärkomponente mit k^* und dessen Grad über k' mit h. Mit $(L_0 : K) = (k_0 : k) r_0^{-1}$ ergibt sich nun nach (44) und (45) für den Relativgrad $f^* = (\bar{k}' : \bar{k}_0) = \frac{r_0 p}{r e^*} = \frac{p r_0 e_0}{r e}$, also nach (46) $pf = \frac{p r_0 e_0 f_0}{r e}$, d. h. (51) ist auch für k' richtig. Da f^* offenbar nur die Werte 1 oder p annehmen kann, ist nur $f = f_0$ oder $f = f_0 p^{-1}$ möglich. Wegen $h \leqq h_0$ ist im Falle $f_0 > h_0$ — also, da $\bar{k}_0 | k_0^*$ rein-inseparabel ist, $f_0 p^{-1} \geqq h_0$ — (52) auch für k' richtig. Im Falle $f_0 = h_0$, also $\bar{k}_0 = k_0^*$, müssen wir eine Fallunterscheidung vornehmen. Liegt α nicht in $\bar{k}_0^p$, so muß wegen $(\bar{k}' : \bar{k}_0) = (\bar{k}' : \bar{k}_0 k')p$ der Relativgrad $f^* = p$, also $f = f_0$ sein. Liegt aber α in $\bar{k}_0^p$, so haben wir $k^* = k_0^* k' = \bar{k}_0 k' = k_0^*$, also $h = h_0 p^{-1}$. In beiden Fällen ergibt sich die Gültigkeit von (52) auch für k'. Da schließlich $\bar{k}' \bar{k}_0^*$ rein-inseparabel ist, gilt dasselbe auch für $\bar{k}' | k_0^*$ und damit wegen $\bar{k}' \supseteq k'$ auch für $\bar{k}' | k^*$. Damit ist der Induktionsbeweis erbracht.

Als Anwendung dieses Satzes betrachten wir den Fall, daß eine Primärkomponente von $\bar{k} \times k'$ ein Körper ist. Dann ist also für den entsprechenden Index $g_i = h_i$, d. h. nach (53) $r = 1$, $e_i = 1$ und nach (51) $f_i = g_i$. Es ist somit für die betreffende Komponente $k^* = \bar{k}'$. Mit k_0 als m. s. Zk. von $k' | k$ ist aber k^* das direkte Produkt der als Algebren über k_0 aufgefaßten Körper $\bar{k}_0$ und k'. Daher ist eine Basis $a_1, \ldots, a_m$ von $k' | k_0$ auch eine Körperbasis von $\bar{k}'$ über $\bar{k}_0$, d. h. aus $\sum y_i a_i \equiv 0 (\mathfrak{P})$ mit $y_i \varepsilon L_{0 \mathfrak{P}_0}$ folgt $y_i \equiv 0 (\mathfrak{P}_0)$. Dabei seien die Bezeichnungen $\mathfrak{P}_0$, L_0 und $\bar{k}_0$ genau so verwandt, wie beim Beweis von Satz 42, nur daß eben der Körper k_0, auf den sie sich beziehen, ein anderer ist. Irgend ein Element von $L_{\mathfrak{P}}$ läßt sich nun in der

Form $y^{-1}\sum y_i a_i$ darstellen, wobei man noch erreichen kann, daß die in $L_{0\mathfrak{P}_0}$ liegenden y, y_i nicht sämtlich durch $\mathfrak{P}_0$ teilbar sind. Nach dem eben Hergeleiteten kann also in unserm Falle y nicht durch $\mathfrak{P}_0$ teilbar sein, d. h. $y^{-1}y_i$ liegt in $L_{0\mathfrak{P}_0}$, und wir haben $L_{\mathfrak{P}} = L_{0\mathfrak{P}_0}k'$. Mit diesem Ergebnis beweisen wir nun

Satz 43. *Die Halbeinfachheit von $\bar{k} \asymp k'$ ist hinreichend aber nicht notwendig für das Bestehen der Beziehungen* (47), (48).

Ist nämlich $\bar{k} \asymp k'$ halbeinfach, so gilt für jedes $i = 1, \ldots, s$ nach dem eben Bewiesenen $L_{\mathfrak{P}_i} = L_{0\mathfrak{P}_{0i}}k'$. Da ferner $r = 1$ ist, sind mit $a_1, \ldots, a_m$ als k_0-Basis von k' in der Darstellung $z = \sum y_i a_i$ $(y_i \in L_0)$ eines Elementes von L die y_i eindeutig bestimmt. Aus $z \in L_{\mathfrak{p}} \subseteq L_{\mathfrak{P}_i}$ folgt daher $y_i \in L_{0\mathfrak{P}_{0i}}$ $(i = 1, \ldots, s)$, also [2, S. 237, Satz 4] $y_i \in L_{0\mathfrak{p}}$, womit wegen der Gültigkeit von (47) für $k_0|k$ (47) auch für $k'|k$ bewiesen ist. Wegen $r = 1$ ist dann auch (48) erfüllt. Um Satz 43 vollständig zu beweisen, brauchen wir nur noch ein Beispiel anzugeben, bei dem (47), (48) erfüllt sind, ohne daß $\bar{k} \asymp k'$ halbeinfach ist. Mit der einfachen transzendenten Erweiterung $k = P_p(u)$ bilden wir den Funktionenkörper $K = k(x; y)$, $y^p = x + u$, der als $k(y)$ den genauen Konstantenkörper k besitzt, und setzen $k' = k(a)$, $a^p = u$, woraus sich $L = k'(x; x^{p^{-1}})$ ergibt. Der leicht als Primdivisor von K erkennbare Zählerdivisor von x besitzt daher in L die Zerlegung $\mathfrak{p} = \mathfrak{P}^p$. Wegen $\bar{k} = k(u^{p-1})$ hat $\bar{k} \asymp k'$ ein nichtverschwindendes Radikal. $L_{\mathfrak{p}} = L_{\mathfrak{P}}$ besteht aus allen $\frac{f(y)}{g(y)}$ mit $f(y), g(y) \in k'[y]$, $g(a) \neq 0$. Dieser Ausdruck läßt sich umformen zu

$$\frac{f(y)\,g(y)^{p-1}}{g^p(x+u)} = G(x)^{-1}\sum_{i=0}^{n-1} F_i(x, y)\,a^i.$$

worin G und F_i Polynome mit Koeffizienten aus k sind und $G(0) \neq 0$ ist. Also ist (47) erfüllt und wegen $r = 1$ daher auch (48).

Als weitere Anwendung von Satz 42 erwähnen wir noch, daß bei maximaler Zerfällung des Primdivisors — also $f_1 = \cdots = f_s = 1$, was durch passende Wahl von k' immer erreicht werden kann — k' Zerfällungskörper von $\bar{k}$ ist; denn aus (52) folgt $h_i = 1$. Das Umgekehrte gilt jedoch i. a. nicht, wie das Beispiel von S. 119 unten zeigt. Zum Schluß sei noch hervorgehoben, daß i. a. durchaus kein Zusammenhang zwischen den e_i und den Indizes ϱ_i der Primärkomponenten von $\bar{k} \asymp k'$ besteht: Die Algebrentheorie liefert ja nur die Abschätzung $\varrho_i \leqq \frac{g_i}{h_i}$ und (53) ebenfalls nur eine obere Schranke für e_i. In der Tat ist auch nicht nur $e_i < \varrho_i$ (siehe das Beispiel S. 119 unten!) sondern auch $> \varrho_i$ möglich, wie für genügend umfassende Konstantenerweiterung der mit $n = 2$ nach (37) konstruierte Körper auf Grund von (24) und (50) zeigt.

III. Unendliche Erweiterungen.

§ 9.

Rein-unendliche Erweiterungen.

Der am einfachsten zu überblickende Typ unendlicher, rein-inseparabler Erweiterungen entsteht offenbar durch Adjunktion sämtlicher p^n-ter Wurzeln ($n = 1, 2, \ldots$) aus den Elementen einer gewissen Menge $M \subseteq K$ zum Körper K. O. B. d. A. können wir dabei $M \cap K^p = 0$, also $M \subseteq K - K^p$ annehmen. Die so durch M bestimmte Erweiterung schreiben wir $K_{(M)}$ und nennen sie *rein-unendlich*. Verschiedentlich, z. B. in [7] und [8], findet man hierfür auch die Bezeichnung $K(M^{p^{-\infty}})$. Ist $M = \{a_1, a_2, \ldots\}$, so wollen wir statt $K_{(M)}$ auch $K_{(a_1, a_2, \ldots)}$ schreiben. Mit B als p-Basis von K ist $K_{(B)}$ der kleinste vollkommene Oberkörper von K, wie sofort aus Gleichung (6) folgt. Ferner gilt (zur Bezeichnung siehe S. 88)

Satz 44. *Eine rein-unendliche Erweiterung ist relativ vollkommen.*

Denn mit $L = K_{(M)}$ ist $M^{p^{-\infty}} \subseteq L^p$, also $L = K L^p = L^p(B)$, wenn B p-Basis von K ist. Wie bei relativ vollkommenen Erweiterungen stets läßt sich also aus jeder p-Basis von K eine Teilmenge auswählen, die p-Basis von L ist. Dabei ist zu beachten, daß zwei verschiedene rein-unendliche Erweiterungen von K durchaus dieselbe in K liegende p-Basis besitzen können; z. B. haben $P_p(u, v)_{(u\,v)}$ und $P_p(u, v)_{(u)}$ beide die p-Basis $\{v\}$.

Wir definieren ferner bei einer rein-inseparablen Erweiterung $L|K$: Gibt es zu dem Element $a \varepsilon K - K^p$ ein n so, daß $a^{p^{-n}} \varepsilon L - L^p$ gilt, so heißt n der *Erweiterungsexponent* von a bez. L. $K_{(M)}$ kann dann auch charakterisiert werden als kleinste rein-inseparable Erweiterung von K, bez. derer kein Element von M einen Erweiterungsexponenten besitzt. Die Frage nach der einfachsten Erzeugung einer rein-unendlichen Erweiterung legt es nun nahe, den folgenden Abhängigkeitsbegriff einzuführen:

$a \varepsilon K - K^p$ heißt *U-abhängig* von der Menge $M \subseteq K - K^p$, wenn für eine endliche Menge $N \subseteq M$

$$K_{(a)} \subseteq K_{(N)} \tag{54}$$

gilt.

Dieser Begriff genügt nun den vier Abhängigkeitsaxiomen (s. S. 87), wobei die Gültigkeit von I, II und IV ohne weiteres einzusehen ist. Für I ist dabei wesentlich, daß in (54) die endliche Teilmenge N statt der Menge M vorkommt: Ist nämlich mit vollkommenem k und darüber algebraisch-unabhängigen $x, x_1, \ldots$ $K = k(x, x_1, \ldots)$ und

$$M = \{x x_1^p,\ x x_2^{p^2}, \ldots\},$$

so gilt zwar $K_{(x)} \subset K_{(M)}$, jedoch ist mit

$$N = \{x x_1^p, \ldots, x x_n^{p^n}\}$$

$K_{(x)}$ nicht in $K_{(N)}$ enthalten; sonst wäre nämlich schon $k(x, x_1, \ldots, x_n)_{(N)}$ vollkommen, was wegen $\mathrm{Uvg}(k(x, \ldots, x_n)) = n+1$ und dem später zu beweisenden Satz 49 unmöglich ist. Der Grund für diese Erscheinung liegt darin, daß (54) ja eine unendliche Anzahl von Gleichungen repräsentiert. Zum Beweis von III setzen wir $\{a_1, \ldots, a_n\} = M$ und $K_{(M)} = L$. Wenn b U-abhängig von $\{a\} + M$, aber U-unabhängig von M ist, so muß wegen II und IV auch a U-unabhängig von M sein, also einen Erweiterungsexponenten m bez. L besitzen: $a' = a^{p^m} \varepsilon L - L^p$. b besitzt ebenso einen Erweiterungsexponenten n bez. L: $b' = b^{p^n} \varepsilon L - L^p$, und die U-Abhängigkeit von des b von $\{a\} + M$ ergibt die U-Abhängigkeit des b' von a' in L. Umgekehrt folgt aus der U-Abhängigkeit einer solchen Wurzel a' von einer solchen b' in $L - L^p$ die U-Abhängigkeit des a von $\{b\} + M$ im K. Die daher allein noch nachzuweisende Vertauschbarkeit von a' und b' in der Abhängigkeitsaussage ergibt sich nun aus

Satz 45. *Die U-Abhängigkeit des Elementes a von dem Element b aus $K - K^p$ ist gleichbedeutend mit den Beziehungen*

$$K^{p^n}(a) = K^{p^n}(b) \qquad (n = 1, 2, \ldots).$$

Daß diese Beziehungen die U-Abhängigkeit zur Folge haben, ist trivial. Umgekehrt folgt aus der U-Abhängigkeit $a^{p^{-n}} \varepsilon K(b^{p^{-m_n}})$. Wegen $a \varepsilon K^p$ ist aber $(K(a^{p^{-n}}) : K) = p^n$, also nach Satz 6 — da b nicht in K^p liegt — $K(a^{p^{-n}}) = K(b^{p^{-n}})$, w. z. b. w.

Den Zusammenhang von U-Abhängigkeit und p-Abhängigkeit stellt her

Satz 46. *Aus der p-Unabhängigkeit einer Menge folgt auch ihre U-Unabhängigkeit.*

Sind nämlich die $a, a_1, \ldots, a_n$ p-unabhängig in K, also $\varepsilon K - K^p$, und wäre etwa a U-abhängig von den $a_1, \ldots, a_n$, so gälte für ein bestimmtes e $a^{p^{-1}} \varepsilon K(a_1^{p^{-e}}, \ldots, a_n^{p^{-e}})$, was der Tatsache widerspricht, daß nach Satz 18 $K(a_1^{p^{-e}}, \ldots, a_n^{p^{-e}}, a^{p^{-1}})$ die Vielfachheit $n+1$ hat.

Jedoch zieht eine U-Abhängigkeit i. a. nicht die entsprechende p-Abhängigkeit nach sich: Sind a, b in K p-unabhängig, so ist zwar b von a und ab^p U-abhängig, jedoch nicht p-abhängig. Daß schließlich eine U-unabhängige Menge von mehr als einem Element nicht immer p-unabhängig zu sein braucht, wird am besten durch den in Satz 42 behandelten Fall einer Menge von zwei Elementen klargestellt. Führen wir den größten vollkommenen Unterkörper W_K von K ein, so läßt sich noch aussprechen

Satz 47. *Eine algebraische Abhängigkeit über W_K von Elementen aus $K - K^p$ zieht die entsprechende U-Abhängigkeit nach sich.*

Denn ist a algebraisch über $W_K(a_1, \ldots, a_n)$, so ist es separabel über $W_K(a_1, \ldots, a_n)_{(a_1, \ldots, a_n)}$, da dieser Körper vollkommen ist. Also ist auch $W_K(a, a_1, \ldots, a_n)_{(a_1, \ldots, a_n)}$ vollkommen:
$a^{p^{-n}} \varepsilon W_K(a, a_1, \ldots, a_n)_{(a_1, \ldots, a_n)}$, d. h. $K_{(a)} \subseteq K_{(a_1, \ldots, a_n)}$, w. z. b. w.

Bezeichnen wir zwei gegenseitig voneinander U-abhängige Mengen als *U-äquivalent*, so folgt aus der allgemeinen Theorie der Abhängigkeit, daß es zu jeder Menge $M \subseteq K - K^p$ U-äquivalente, U-unabhängige Mengen gibt, die wir als *U-Basen* bezeichnen; diese haben alle dieselbe Mächtigkeit, die die *U-Länge* von M genannt werden soll. Betrachten wir die durch M erzeugte rein-unendliche Erweiterung $L = K_{(M)}$, so wollen wir in diesem Sinne von den U-Basen und U-Längen der Erweiterung $L|K$ sprechen. Wir müssen dabei die Möglichkeit in Betracht ziehen, daß zu einer Erweiterung verschiedene U-Längen gehören, denn aus $K_{(M)} = K_{(N)}$ folgt ja auf Grund des auf Seite 123 angegebenen Beispiels noch nicht die U-Äquivalenz von M und N. Als *U-Grad* von $L|K$ definieren wir daher das Minimum der U-Längen, also die kleinste Mächtigkeit, die eine Menge M mit $L = K_{(M)}$ haben kann. Wissen wir jedoch, daß *eine* U-Länge endlich ist, so können wir schließen, daß alle andern den gleichen Wert haben. Da ferner nach Satz 47 jedes Element von $K - K^p$ U-abhängig ist von einer Transzendenzbasis für $K|W_K$, so gilt für die U-Längen und damit auch für die U-Grade n aller über K rein-unendlichen Erweiterungen die Abschätzung

$$n \leqq t_K \tag{55}$$

mit t_K als Transzendenzgrad von $K|W_K$. Für den U-Grad n der kleinsten vollkommenen Erweiterung von K gilt trivialerweise

$$n \leqq \mathrm{Uvg}(K). \tag{56}$$

Nach Satz 46 ist sogar eine p-Basis von K eine U-Basis für den kleinsten vollkommenen Erweiterungskörper von K. Daß (56) eine Verschärfung von (55) bedeutet, geht aus der Ungleichung

$$\mathrm{Uvg}(K) \leqq t_K \tag{57}$$

hervor. Sie wurde von Teichmüller [15, S. 369] aus der Tatsache erschlossen, daß aus der p-Unabhängigkeit in K die algebraische Unabhängigkeit über W_K folgt. Dieser Zusammenhang ergibt sich übrigens hier sofort aus unseren Sätzen 46 und 47. Ferner enthält der später zu beweisende Satz 50 die Ungleichung (57) als Spezialfall, wenn man beachtet, daß der Uvg einer rein-transzendenten Erweiterung eines vollkommenen Körpers gleich dem Transzendenzgrad ist [15, S. 370]. Ob es eine Erweiterung vom U-Grad n gibt, für die (56) nicht gilt, oder ob allgemein (55) durch (56) ersetzt werden kann, konnte nicht entschieden werden. Bei endlichem $\mathrm{Uvg}(K)$ sind jedenfalls alle Elemente von $K - K^p$ U-abhängig von einer p-Basis von K. In diesem Falle gilt daher nicht nur (56) für die U-Grade, sondern es stimmen darüber hinaus alle U-Längen einer Erweiterung überein.

Die im nächsten Paragraphen behandelten Beispiele für endlichen $\mathrm{Uvg}(K) < t_K$ zeigen, daß aus der algebraischen Unabhängigkeit über W_K i. a. nicht die U-Unabhängigkeit in K folgt; denn eine in $K - K^p$ liegende Transzendenzbasis von $K|W_K$ ist ja in diesem Falle U-abhängig

von einer p-Basis von K, also einer Menge von kleinerer Elementezahl. Daher kann also Satz 47 nicht umgekehrt werden. Die Nichtumkehrbarkeit von Satz 46 führt noch zu der Frage, ob nicht immer zu einer U-unabhängigen Menge wenigstens eine U-äquivalente, p-unabhängige Menge gefunden werden kann. Für $\mathrm{Uvg}(K) = 2$ ist dies zu bejahen, denn da eine p-Basis zugleich U-Basis für $K - K^p$ ist, ist jede U-unabhängige Menge von zwei Elementen zu ihr U-äquivalent. Für $\mathrm{Uvg}(K) = 3$ jedoch können wir bereits ein Gegenbeispiel angeben: Wir nehmen den rationalen Funktionenkörper $K = P_p(u, v, w)$ und die aus u und $x = v^p + uw^p$ bestehende, leicht als U-unabhängig nachzuweisende Menge. Irgendein von u, x U-abhängiges y liegt nun wegen $K_{(y)} \subseteq K_{(u,x)} = L$ in $W_{(L)}$. Da aber L durch Adjunktion von v aus dem vollkommenen Körper $P_p(u, x)_{(u,x)}$ entsteht, ist dieser $= W_{(L)}$. Bis auf einen in u, v^p, w^p rationalen Nenner ist also y ein Polynom $f(u^{p^{-n}}, x^{p^{-n}})$ mit Koeffizienten aus P_p und minimalem n. Dieses muß aber wegen $y \varepsilon K$ auch Polynom in u, v, w sein, weshalb $n \leqq 1$ ist. Daraus ergibt sich mit $z = u^{p^{-1}}$

$$f = \sum_{i,k=0}^{N} a_{ik} z^i (v + zw)^k \qquad (a_{ik} \varepsilon P_p)$$
$$= \sum_{n=0}^{2N} z^n \sum_{i,k} \binom{k}{n-i} a_{ik} u^{n-i} v^{i+k-n}.$$

Da hierin aber nur Potenzen von z^p auftreten dürfen, ergibt sich aus der algebraischen Unabhängigkeit von v und w $a_{ik} = 0$ für $i \not\equiv 0(p)$ sowohl wie für $i \equiv 0(p)$ und $k \not\equiv 0(p)$, wenn wir $n = i$ bzw. $n = i+1$ betrachten. Also ist f Polynom in u, v^p, w^p und y ist p-abhängig von u.

Die Bedeutung des U-Grades für die Struktur der rein-unendlichen Erweiterungen ergibt sich aus

Satz 48. *Für eine rein-unendliche Erweiterung vom U-Grad n gilt*

$$\mathrm{Uvg}(L) + n \geqq \mathrm{Uvg}(K) \tag{58}$$

und, falls $\mathrm{Uvg}(K)$ *endlich oder* $n \leqq \aleph_0$ *ist,*

$$\mathrm{Uvg}(L) + n = \mathrm{Uvg}(K). \tag{59}$$

Zum Beweis wird eine Menge $M \subset K$ der Mächtigkeit n mit $L = K_{(M)}$ so ausgewählt und wohlgeordnet — wobei $M_\mu \subseteq M$ $(\mu \leqq \nu, M_\nu = M)$ ähnlich dem Abschnitt $< \mu$ der Reihe der Ordnungszahlen werde —, daß mit der Abkürzung $K_{(M_\mu)} = L_\mu$ stets $L_\mu \subset L_{\mu+1}$ gilt. Dies ist trivialerweise möglich. Nach Wahl einer wohlgeordneten p-Basis B von K konstruieren wir nun eine wohlgeordnete Menge von bzw. in L_μ p-unabhängigen Untermengen $B_\mu (\mu \leqq \nu)$ von B durch die transfinite Rekursion:

a) $B_1 = B$

b) $\mu = \lambda + 1$. Mit $M_\mu = \{a\} + M_\lambda$ ist nach Voraussetzung über M $K_{(a)}$ nicht Unterkörper von L_λ, sodaß a bez. L_λ einen Erweiterungsexponenten e hat. Dann ist eine Fallunterscheidung notwendig:

1. $a^{p^{-e}}$ ist in L_λ p-abhängig von B_λ. Es gibt also ein Polynom f aus $L_\lambda^p[z_1, \ldots, z_m]$, daß in jeder Unbestimmten einen nichtverschwindenden Grad $< p$ besitzt, so daß $a^{p^{-e}} = f(b_1, \ldots, b_m)$, $b_i \in B_\lambda$ gilt. f sowohl wie die b_i sind dabei eindeutig durch $a^{p^{-e}}$ bestimmt, da sonst B_λ nicht p-unabhängig wäre. Es sei b das in der Wohlordnung von B erste der b_i. Dann ist $\{a^{p^{-e}}\} + B_\lambda - \{b\}$ in B_λ p-unabhängig und daher auch $B_\mu = B_\lambda - \{b\}$ in $L_\mu = L_{\lambda(a^{p^{-e}})}$, da eine p-Abhängigkeit als zwischen endlich vielen Elementen bestehend ja schon in einem über L_λ endlichen Zwischenkörper $L_\lambda(a^{p^{-e-s}})$ stattfinden müßte, was nach Satz 9 unmöglich ist.

2. $a^{p^{-e}}$ ist in L_λ p-unabhängig von B_λ. Wie bei 1. ergibt sich nach Satz 9 die p-Unabhängigkeit von B_λ auch in L_μ, so daß wir $B_\mu = B_\lambda$ setzen können.

c) $\mu = \lim_{\lambda < \mu} \lambda$. B_μ gleich dem Durchschnitt aller B_λ mit $\lambda < \mu$ gesetzt ist p-unabhängig in L_μ, denn eine p-Abhängigkeit als zwischen endlich vielen Elementen bestehend müßte schon in einem gewissen $L_\iota (\iota < \mu)$ stattfinden, was wegen der p-Unabhängigkeit von B_ι in L_ι unmöglich ist.

Wir beweisen nun durch transfinite Induktion, daß M_μ für $\mu \leqq \nu$ eindeutig so auf $B - B_\mu$ abgebildet werden kann, daß das Bild von $x \in M_\mu$ in B unabhängig vom Index μ ist. Für a) ist nichts zu beweisen. Für b) wird im ersten Fall $M_\mu \to B - B_\mu$ in der geforderten Weise durch $M_\lambda \to B - B_\lambda$, $a \to b$ bewerkstelligt, da $B - B_\lambda + \{b\} = B - B_\mu$ ist, und im zweiten Fall neben $M_\lambda \to B - B_\lambda = B - B_\mu$ durch die Festsetzung, daß a auf das in der Wohlordnung von B erste Element von $B - B_\mu$ abgebildet werde. Für c) liefern die Abbildungen $M_\lambda \to B - B_\lambda$ zusammengenommen eine der gestellten Forderung genügende Abbildung von M_μ auf die Vereinigungsmenge der $B - B_\lambda$ $(\lambda < \mu)$, die ja mit der Menge der nicht im Durchschnitt der B_λ $(\lambda < \mu)$ liegenden Elemente von B, also mit $B - B_\mu$ zusammenfällt. Wegen der Abbildung von $M = M_\nu$ auf $B - B_\nu$ ist nun die Mächtigkeit n von M vermehrt um die Mächtigkeit von B_ν nicht kleiner als die Mächtigkeit $\mathrm{Uvg}(K)$ von B, womit wegen der p-Unabhängigkeit von B_ν in $L = L_\nu$ die Ungleichung (58) bewiesen ist. Setzen wir speziell n als endlich voraus, so kommt c) nicht vor. Durch vollständige Induktion beweist man daher, daß B_μ sogar p-Basis von L_μ und die Abbildung $M_\mu \to B - B_\mu$ umkehrbar eindeutig ist: Bei b) scheidet nämlich nach Induktionsvoraussetzung der zweite Fall aus; im ersten Fall aber ist $\{a^{p^{-e}}\} + B_\mu$ p-Basis von L_λ, weil b nach Abhängigkeitsaxiom III von dieser Menge p-abhängig ist, und daher gilt $L_\mu^p(B_\mu) = L_\lambda^p(a^{p^{-e}})_{(a^{p^{-e}})}(B_\mu) = L_{\lambda(a^{p^{-e}})} = L_\mu$. Auf Grund dieser Verschärfung erhalten wir entsprechend unserer Herleitung von (58) bei endlichem n die Gleichung (59). Ist $\mathrm{Uvg}(K)$ endlich, so kann n nicht unendlich sein, da sonst $L|K$ einen

Zwischenkörper von endlichem U-Grad $> \mathrm{Uvg}(K)$ besäße, was dem eben Bewiesenen widerspräche. Also ist (59) auch für endlichen $\mathrm{Uvg}(K)$ richtig. Bei $n = \aleph_0$ muß $\mathrm{Uvg}(K)$ unendlich, also $\geqq n$ sein. Da nach Satz 44 $\mathrm{Uvg}(L) \leqq \mathrm{Uvg}(K)$ ist, ergibt sich daraus $\mathrm{Uvg}(L) + n \leqq 2\,\mathrm{Uvg}(K) = \mathrm{Uvg}(K)$, also in Verbindung mit (58) wieder (59).

Aus dem letzten Teil des Beweises erkennen wir sofort, daß die zu vermutende allgemeine Gültigkeit von (59) gleichbedeutend ist mit der Richtigkeit von (56) für die U-Grade. Selbst (59) gestattet aber i. a. nicht die eindeutige Bestimmung von $\mathrm{Uvg}(L)$ aus n und $\mathrm{Uvg}(K)$. Daß eine solche i. a. tatsächlich unmöglich ist, zeigen etwa die beiden Erweiterungen $L_1 = K_{(x_1, x_2, \ldots)}$ und $L_2 = K_{(x_2, x_3, \ldots)}$ der rein-transzendenten Erweiterung $K = P_p(x_1, x_2, \ldots)$ von P_p mit $n_1 = n_2 = \mathrm{Uvg}(K) = \aleph_0$ aber $\mathrm{Uvg}(L_1) = 0$, $\mathrm{Uvg}(L_2) = 1$. Bezüglich (56) können wir sagen, daß jedenfalls für die U-Grade keine kleinere obere Schranke als $\mathrm{Uvg}(K)$ möglich ist, denn es gilt

Satz 49. *Der U-Grad des kleinsten vollkommenen Oberkörpers von K ist gleich $Uvg(K)$.*

Wie bei (56) bemerkt, ist diese Ungleichung in unserm Fall erfüllt. Aus (58) mit $\mathrm{Uvg}(L) = 0$ folgt aber $n \geqq \mathrm{Uvg}(K)$, d. h. $n = \mathrm{Uvg}(K)$, w. z. b. w. Mit Hilfe dieses Ergebnisses gelingt der Beweis des für endlichen $\mathrm{Uvg}(K)$ bereits von Becker und MacLane [1] hergeleiteten

Satz 50. *Bei algebraischem $L|K$ ist $Uvg(L) \leqq Uvg(K)$.*

Wir bemerken zuerst, daß wir uns wegen der Unveränderlichkeit des Uvg bei separablen Erweiterungen (s. S. 11) auf rein-inseparable Erweiterungen beschränken können. Dann ist der kleinste vollkommene Oberkörper $V = K_{(B)}$ von K (mit B als p-Basis von K) zugleich auch der kleinste vollkommene Oberkörper von L, und es gilt $V = L_{(B)}$. Der U-Grad von $V|L$ ist also nicht größer als die Mächtigkeit $\mathrm{Uvg}(K)$ von B. Damit ist wegen Satz 49 die Behauptung bewiesen. Als eine einfache Anwendung davon zeigen wir noch

Satz 51. *Hat die algebraische Erweiterung $L|K$ einen Exponenten, so ist $Uvg(L) = Uvg(K)$.*

O. B. d. A. können wir wieder $L|K$ als rein-inseparabel annehmen, so daß $L \subseteq K^{p^{-e}} = K'$ ist. Wegen $K \cong K'$ gilt natürlich $\mathrm{Uvg}(K) = \mathrm{Uvg}(K')$, so daß die aus Satz 50 folgende Ungleichung $\mathrm{Uvg}(K') \leqq \mathrm{Uvg}(L) \leqq \mathrm{Uvg}(K')$ die Behauptung ergibt.

§ 10.

Halbendliche Erweiterungen.

Bilden wir für eine rein-inseparable Erweiterung $L|K$ die Menge $M \subsetneq K - K^p$ der Elemente ohne Erweiterungsexponenten bez. L, so ist — vom Ausnahmefall $M = 0$ abgesehen — die rein-unendliche Erweiterung $Z = K_{(M)}$ Zwischenkörper. Jedes Element $a \in Z - Z^p$ besitzt

nun einen Erweiterungsexponenten bez. L, denn sonst wäre mit e als Exponent von a bez. K $a^{p^e} \varepsilon M \subset Z^{p^{e+1}}$, $a \varepsilon Z^p$. Diese Eigenschaft von $L|Z$ führt uns zur Definition: Eine rein-inseparable Erweiterung $L|K$ ist *halbendlich*, wenn jedes Element von $K - K^p$ einen Erweiterungsexponenten bez. L hat. Der Name ist deshalb gewählt, weil speziell die Erweiterungen mit Exponenten und damit die endlichen Erweiterungen diese Eigenschaft besitzen. Der oben konstruierte Körper Z ist nun als der *maximale rein-unendliche Zwischenkörper* von $L|K$ zu bezeichnen, da er jeden über K rein-unendlichen Zwischenkörper enthält. Es gilt

Satz 52. *Der maximale rein-unendliche Zwischenkörper einer rein-inseparablen, nicht halbendlichen Erweiterung von K ist der einzige über K rein-unendliche Zwischenkörper, über dem die Erweiterung halbendlich ist.*

Denn ist $U = K_{(N)} \subset Z = K_{(M)}$, so besitzt mindestens ein Element $a \varepsilon M$ einen Erweiterungsexponenten e bez. U: $b = a^{p^{-e}} \varepsilon U - U^p$. Da aber a keinen Erweiterungsexponenten bez. L besitzt, hat auch b keinen, d. h. $L|U$ ist nicht halbendlich, w. z. b. w. Jede nicht halbendliche, rein-inseparable Erweiterung läßt sich also auf genau eine Weise als halbendliche Erweiterung einer rein-unendlichen aufbauen. Als U-Grad der Erweiterung bezeichnen wir dabei den U-Grad von $Z|K$, während wir den halbendlichen Erweiterungen den U-Grad Null beilegen. Strukturfragen unendlicher rein-inseparabler Erweiterungen lassen sich immer auf solche über rein-unendliche und über halbendliche zurückführen. Daher wenden wir uns im Folgenden den halbendlichen Erweiterungen zu.

Eine einfache Charakterisierung der halbendlichen Erweiterungen mittels des auf Seite 124 eingeführten größten vollkommenen Unterkörpers liefert

Satz 53. *Die rein-inseparable Erweiterung $L|K$ ist dann und nur halbendlich, wenn $W_{(L)} = W_{(K)}$ gilt.*

Dies folgt sofort daraus, daß mit M als der Menge der Elemente von $K - K^p$ ohne Erweiterungsexponent bez. L die Gleichung

$$W_L = W_K(M)_{(M)} \tag{60}$$

gilt. Zum Beweis von (60) beachten wir, daß $W_K(M)_{(M)}$ als vollkommener Unterkörper von L in W_L enthalten ist. Andererseits liegt ein Element von W_L entweder in W_K oder aber eine gewisse p^e-te Potenz ($e \gtreqless 0$) davon in $K - K^p$ und damit in M. Daraus schließen wir $W_L \subseteq W_K(M)_{(M)}$. Bei Verwendung von Satz 53 zum Nachweis der Halbendlichkeit braucht natürlich nur $W_L \subseteq W_K$ bewiesen zu werden, da $W_K \subseteq W_L$ trivialerweise immer erfüllt ist.

Mit T als Transzendenzbasis von $K|W_K$ und S als m. s. Zk. von $K|W_K(T)$ ist nach Satz 53 $K|S$ halbendlich. Diese Bemerkung liefert

uns Beispiele für halbendliche Erweiterungen ohne Exponenten: Mit $K = k\{x\}$ als Potenzreihenkörper über dem vollkommenen Körper k ist $K|S$ halbendlich, aber zufolge Satz 51 ohne Exponent, denn nach TEICHMÜLLER [15, S. 371] ist $\mathrm{Uvg}(S) = t_K > 1 = \mathrm{Uvg}(K)$. Die so mit Potenzreihenkörpern gebildeten Beispiele haben aber den Nachteil, daß sie in ihrem Aufbau nicht explizit gegeben sind. Außerdem besitzen ihre Grundkörper alle unendlichen Uvg, was hervorgeht aus dem die Verwendung des F. K. SCHMIDTschen Lückensatzes [12, S. 23] zum Nachweis von $t_K > 1$ erübrigenden

Satz 54. *Der Transzendenzgrad von $k\{x\}|k$ ist $> \aleph_0$.*

Genügt nämlich die Elementezahl m von k der Bedingung

$$m < m^{\aleph_0}, \tag{61}$$

so hat $k\{x\}|k$ den Transzendenzgrad $t = m^{\aleph_0}$, da die Elementezahl von $k\{x\}$ einerseits gleich dem Maximum von m, t und $\aleph_0$, andererseits aber gleich $m^{\aleph_0}$ ist. Gilt aber (61) nicht, so folgt $m > \aleph_0$. Wir betrachten dann diejenigen Potenzreihen, die über k von vorgegebenen abzählbar vielen Potenzreihen, deren Koeffizienten wir in der Folge $a_1, a_2, \ldots$ anordnen, algebraisch abhängen. Die Koeffizienten $u_1, u_2, \ldots$ einer solchen Potenzreihe w sind nun über dem Primkörper P von k algebraisch abhängig von den $a_1, a_2, \ldots$ und den in der algebraischen Gleichung $F(w) = 0$ noch auftretenden Elementen $c_1, \ldots, c_N \; \varepsilon k$. Nehmen wir nämlich einmal im Gegenteil an, eine nichtleere Teilmenge $v_1, v_2, \ldots$ der u_i sei algebraisch unabhängig und alle anderen u_i von ihr algebraisch abhängig über $k' = P(c_1, \ldots, c_N, a_1, a_2, \ldots)$. Mit $k''|k'$ als irgendeiner rein-transzendenten Erweiterung vom Transzendenzgrad $\aleph_0$, über der x noch transzendent ist, können wir nun die $v_1, v_2, \ldots$ auf unendlich viele verschiedene Weisen durch über k' algebraisch-unabhängige Elemente von k'' ersetzen. So erhalten wir aus w unendlich viele verschiedene Potenzreihen aus $k''\{x\}$, die alle der Gleichung $F = 0$ genügen, was aber unmöglich ist. Somit ist der Transzendenzgrad von $P(a_1, a_2, \ldots; u_1, u_2, \ldots)|P(a_1, a_2, \ldots)$ endlich, nämlich $\leqq N$. Wegen $m > \aleph_0$ hat aber $k|P$ einen Transzendenzgrad $> \aleph_0$, so daß es in k eine Folge $u_1', u_2', \ldots$ über $P(a_1, a_2, \ldots)$ algebraisch unabhängiger Elemente gibt. Die mit den u_i' als Koeffizienten gebildete Potenzreihe ist dann keine Potenzreihe w. Da wir von einer beliebigen abzählbaren Menge von Potenzreihen ausgegangen sind, ist damit $t > \aleph_0$ bewiesen.

Einen Einblick in die Kompliziertheit der Erweiterungen $K|S$ unserer Beispiele gibt

Satz 55. *Eine algebraische Erweiterung $L|K$ mit*

$$Uvg(K) > \aleph_0 \geqq Uvg(L)$$

kann nicht durch Adjunktion von abzählbar vielen Elementen erzeugt werden.

Setzen wir nämlich einmal im Gegenteil $L = K(M)$ mit abzählbarem M voraus. Ist dann B eine p-Basis von L, so kann jedes Element von L und damit erst recht jedes Element von K als Polynom in endlich vielen Elementen von $B+M$ mit Koeffizienten aus K^p geschrieben werden. K ist also enthalten in der Vereinigung aller $K^p(N)$, wenn N die höchstens abzählbar unendlich vielen endlichen Teimengen von $B+M$ durchläuft. Bilden wir zu jedem Körper $K \cap K^p(N)$ eine p-Basis, so enthält deren Vereinigungsmenge demnach eine p-Basis von K. Es gibt also wegen $\mathrm{Uvg}(K) > \aleph_0$ ein N mit $\mathrm{Uvg}(K \cap K^p(N)) > \aleph_0$. In diesem Körper $K \cap K^p(N)$ wählen wir nun eine unendliche, p-unabhängige Menge A aus. Diese ist nach Konstruktion in $Z = K(N)$ p-abhängig von der Menge $N = \{b_1, \ldots, b_n\}$. Das ist aber unmöglich. Ist nämlich $\beta = b_1^{p^e} \varepsilon K - K^p$ in K p-unabhängig von A, so ist nach Satz 9 A auch in $K(b_1)$ p-unabhängig. Im entgegengesetzten Falle ist β nach passender Wahl der $a_i \varepsilon A$ p-abhängig von $a_1, \ldots, a_m$, aber nicht von $a_2, \ldots, a_m$. Nach Abhängigkeitsaxiom III ist dann a_1 p-abhängig von $\beta, a_2, \ldots, a_m$. Wegen der p-Unabhängigkeit von A ist also β p-unabhängig von $A - \{a_1\}$ und daher diese Menge nach Satz 9 p-unabhängig in Z. Durch n-fache Anwendung dieses Verfahrens gewinnen wir eine in Z p-unabhängige unendliche Teilmenge von A, weshalb A in Z nicht von N p-abhängig sein kann.

Eine im Gegensatz zu den bisher betrachteten zugleich in ihrem Aufbau explizit angebbaren halbendlichen Erweiterungen ohne Exponenten hat bei $\mathrm{Uvg}(K) = 2$ MacLane [8, S. 389—392] konstruiert: k sei irgendein vollkommener Körper, $Z = \{z_1, z_2, \ldots\}$ eine abzählbare Menge von über k unabhängigen Elementen, u, v algebraisch unabhängig über $Q = k(Z)_{(Z)}$ und

$$u_n = v^{p^{n-1}} + z_n u_{n-1} \qquad (n = 1, 2, \ldots;\ u_0 = u); \tag{62}$$

dann ist mit

$$M = Q(v, u, u_1^{p-1}, u_2^{p-2}, \ldots)$$

$M \mid Q(u, v)$ halbendlich und $\mathrm{Uvg}(M) = 1$, denn nach MacLane ist $W_{(M)} = Q$, und $\{v\}$ ist eine p-Basis von M. Dieses Beispiel zeigt zugleich, daß über einem Körper von endlichem Uvg durchaus nicht jede halbendliche Erweiterung endlich sein muß. Diese Tatsache überrascht, da in zwei häufigen Sonderfällen keine unendlichen halbendlichen Erweiterungen auftreten. Einmal ist nämlich wegen (6) bei endlichem $\mathrm{Uvg}(K)$ jede rein-inseparable Erweiterung von K mit Exponent endlich. Zum andern sind bei $\mathrm{Uvg}(K) = 1$ die Körper $K^{p^{-e}}$ $(e = 1, 2, \ldots)$ die einzigen endlichen rein-inseparablen Erweiterungen von K [13, S. 371[, deren über K rein-unendliche Vereinigung also die einzige unendliche rein-inseparable Erweiterung von K.

In den angegebenen Beispielen für halbendliche Erweiterungen ohne Exponenten war der Uvg der Erweiterung immer kleiner als der des

Grundkörpers. Daß dies durchaus nicht immer der Fall zu sein braucht, zeigt über einem K mit $\mathrm{Uvg}(K) \geqq \aleph_0$ und den p-unabhängigen Elementen $a_1, a_2, \ldots$ die Erweiterung $L = K(b_1, b_2, \ldots)$, wenn $b_1^{p^{n_i}} = a_i$ gilt und die Folge der n_i unbeschränkt ist. Ergänzen wir $A = \{a_1, a_2, \ldots\}$ durch A' zu einer p-Basis von K, so ergibt sich durch mehrmalige Anwendung von Satz 9, daß $\{b_1, \ldots, b_k\} + A'$ in $K(b, \ldots, b_k)$ und damit $B + A' = \{b_1, b_2, \ldots\} + A$ in L p-unabhängig ist. Wegen $L = K^p(A, A', B) = K^p(A', B) = L^p(A', B)$ ist also $B + A'$ p-Basis von L und somit $\mathrm{Uvg}(L) = \mathrm{Uvg}(K)$. Enthielte nun $L|K$ eine rein-unendliche Erweiterung $Z|K$, so müßte nach dem beim Beweis von Satz 44 Gesagten eine Teilmenge von $A + A'$ p-Basis von Z sein, die wir mit $\bar{A} \subseteq A$, $\bar{A}' \subseteq A'$ als $\bar{A} + \bar{A}'$ schreiben. Mit $\bar{B}$ als der $\bar{A}$ entsprechenden Teilmenge von B ergibt sich wie oben $\bar{B} + \bar{A}'$ als p-Basis von $L' = Z(\bar{B}) \subseteq L$. Nach Satz 8 muß Menge wegen der p-Unabhängigkeit dieser in L dann $L = L'$, also auch $\bar{B} + \bar{B}' = B + A'$ und damit $\bar{A} + \bar{A}' = A + A'$ sein. Das ist aber wegen der Inseparabilität von $Z|K$ nach Satz 8 nicht möglich. Also ist — wenn wir noch die Unbeschränktheit der n_i beachten — die Erweiterung $L|K$ halbendlich ohne Exponent. Daß wir zur Konstruktion dieses Beispieles einen Körper von unendlichem Uvg benötigten, erklärt sich aus dem bereits von Becker uud MacLane [1, Theorem 4] bewiesenen

Satz 56. *Eine rein-inseparable Erweiterung $L|K$ mit $Uvg(L) = Uvg(K) < \aleph_0$ ist endlich.*

Wir wollen hier einen Beweis durch vollständige Induktion nach $\mathrm{Uvg}(K) = n$ geben. Für $n = 1$ ist, wie schon weiter oben bemerkt, der kleinste vollkommene Oberkörper von K die einzige unendliche rein-insepararable Erweiterung, die Behauptung also richtig. Zum Schluß von n auf $n+1$ nehmen wir $\mathrm{Uvg}(K) = n + 1$ an. O. B. d. A. können wir voranssetzen, daß K nicht in L^p enthalten ist; denn wegen $\mathrm{Uvg}(L) = \mathrm{Uvg}(K)$ gibt es ein maximales e mit $K^{p^{-e}} \subseteq L$, und der Übergang zum neuen Grundkörper $K^{p^{-e}}$ ändert weder an Voranssetzung noch Behauptung etwas. Mit $a \in K - K \cap L^p$ bilden nun die $a^{kp^{-i}}$ — mit $i = 1, 2, \ldots$, $k = 0, 1, \ldots$, $k \not\equiv 0\,(p)$ für $k > 0$ — eine Basis von $L_{(a)}|L$ sowohl wie von $K_{(a)}|K$, sodaß eine Basis von $L|K$ auch eine solche von $L_{(a)}|K_{(a)}$ ist. Nach Satz 48, Gl. (59) ist aber $\mathrm{Uvg}(L_{(a)}) = \mathrm{Uvg}(K_{(a)}) = n$, also $L_{(a)}|K_{(a)}$ nach Induktionsvoraussetzung endlich. Daher ist auch $L|K$ endlich, w. z. b. w.

Die so als Kriterium für Endlichkeit auftretende Gleichheit der Unvollkommenheitsgrade besitzt in einem Spezialfall auch Interesse für die Theorie der separierenden Transzendenzbasen [8]:

Satz 57. *Ein Körper mit endlichem $t_{(K)}$ besitzt über $W_{(K)}$ dann und nur dann eine separierende Transzendenzbasis, wenn $Uvg(K) = t_{(K)}$ ist.*

Nach Theorem 13 bei MacLane [8] ist nämlich die Existenz einer separierenden Transzendenzbasis gleichbedeutend mit der Existenz

einer in K p-unabhängigen Transzendenzbasis. Diese Bedingung ergibt mit (57) zusammen $\mathrm{Uvg}(K) = t_K$, und umgekehrt ist in diesem Falle wegen der Endlichkeit von t_K jede p-Basis von K auch Transzendenzbasis.

Eine merkwürdige Eigenschaft der halbendlichen Erweiterungen ist es, daß das Kompositum von halbendlichen Erweiterungen eines Körpers nicht wieder halbendlich zu sein braucht. Als Beispiel nehmen wir mit vollkommenem k und darüber algebraisch unabhängigen $x, x_1, \ldots$ den Körper $K = k(x, x_1, x_2, \ldots)$ und seine Erweiterungen $L = K(\ldots, (x x_n)^{p^{-n}}, \ldots)$, $M = K(\ldots, x_n^{p^{-n}}, \ldots)$, die beide nach den Ausführungen von Seite 132 halbendlich sind, und erhalten $LM = M_{(x)} = L_{(x)}$. Diese Erscheinung tritt sogar bei endlichem $\mathrm{Uvg}(K)$ auf: Mit $K = Q(u, v)$ bilden wir neben dem M des MacLaneschen Beispiels noch die durch Vertauschung von u und v entstehende, ebenfalls halbendliche Erweiterung $L = Q(u, v, v_1^{p^{-1}}, v_1^{p^{-2}}, \ldots)$. Nach (62) gilt dann

$$u_n = v^{p^{n-1}} + z_n v^{p^{n-2}} + \ldots + z_n \ldots z_2 v + z_n \ldots z_1 u \quad (n = 1, 2, \ldots) \tag{63}$$

sowie die durch Vertauschen von u und v daraus entstehende Gleichung. Aus beiden zusammen folgt nach Potenzieren mit p^{-n}

$$u^{p^{-n}} \varepsilon LM\,(u^{p^{-n+1}}, v^{p^{-n+1}}),\ v^{p^{-n}} \varepsilon LM\,(u^{p^{-n+1}}, v^{p^{-n+1}}),$$

und sukzessive Anwendung dieser Beziehungen liefert, da trivialerweise $LM \subseteq K_{(u,v)}$ ist, $LM = K_{(u,v)}$. Hier ist sogar das Kompositum zweier halbendlicher Erweiterungen rein-unendlich. Besitzt jedoch eine der beiden ein Kompositum bildenden halbendlichen Erweiterungen einen Exponenten, so ist das Kompositum halbendlich, da ja eine gewisse p^e-te Potenz desselben in der andern Erweiterung liegt. Sofort einzusehen ist noch, daß mit $M|L$ und $L|K$ auch $M|K$ halbendlich ist und umgekehrt, so daß die oben von uns betrachtete Erscheinung auch so zu charakterisieren ist: Bei halbendlicher Grundkörpererweiterung kann die Halbendlichkeit einer Erweiterung verloren gehen.

Das MacLanesche Beispiel zeigt noch, daß das Kompositum einer halbendlichen Erweiterung $M|K$ mit einer rein-unendlichen Erweiterung $L|K$ über L nicht notwendig ebenfalls halbendlich ist: Wir brauchen ja mit $K = Q(u, v)$ und dem oben erklärten M nur $L = K_{(v)}$ zu setzen und haben $LM = K_{(u,v)} = L_{(u)}$. Es gilt jedoch

Satz 58. *Ist $S|K$ separabel und $L|K$ halbendlich, so ist auch $LS|S$ halbendlich.*

Zum Beweis sei $a \varepsilon S - S^p$, $f(x)$ das irreduzible separable Polynom aus $K[x]$ mit $f(a) = 0$ und $g(x)$ das irreduzible separable Polynom aus $L[x]$ mit $g(a^{p^{-n}}) = 0$, falls $a^{p^{-n}} \varepsilon LS$. Da $L|K$ rein-inseparabel ist, erhalten wir für das irreduzible Polynom aus $K[x]$, dem $a^{p^{-n}}$ genügt, den Ausdruck $(g(x))^{p^e} = f(x^{p^n})$. Also ist $e = n$. Wäre nun n nicht beschränkt, so lägen wegen der Halbendlichkeit von $L|K$ die Koeffizienten von f alle in $W_{(K)}$. a wäre damit algebraisch über W_K, $W_{(K)}(a)$

daher vollkommen und also $a \in W_S$, was ja von vornherein ausgeschlossen war. — Ferner haben wir

Satz 59. *Ist $L|K$ halbendlich und $K' = K(X, Y)_{(Y)}$ mit über K algebraisch unabhängiger Menge $X + Y$, so ist $LK'|K'$ halbendlich.*

Zum Beweis gehen wir so vor: Zu jedem Element $a \in LK' = L(X, Y)_{(Y)}$ gibt es ein e_a, so daß sich a für jedes $e \geqq e_a$ bis auf einen Faktor aus L eindeutig als Quotient zweier teilerfremder Polynome in Elementen von $X + Y^{p^{-e}}$ mit Koeffizienten aus L darstellen läßt. Bei Änderung von e ändern sich in dieser Darstellung nur die Exponenten der Elemente von $Y^{p^{-e}}$. Liegt nun a in $W_{LK'}$, so ist a für jedes n die p^n-te Potenz eines Elementes $b_n \in LK'$. Mit $e \geqq \mathrm{Max}(e_a, e_{b_n})$ und $f, g, f_n, g_n \in L[X, Y^{p^{-e}}]$ haben wir dann $a = \frac{f}{g} = b_n^{p^n} = \left(\frac{f_n}{g_n}\right)^{p^n}$. Da mit f_n, g_n auch ihre p^n-ten Potenzen teilerfremd sind, stimmen die Polynome f, g bis auf einen Faktor c aus L mit den Polynomen $f_n^{p^n}$ bzw. $g_n^{p^n}$ überein: $c \cdot f = f_n^{p^n}$, $c \cdot g = g_n^{p^n}$. Danach liegen die Koeffizienten von cf und cg alle in $W_L = W_K$, und in f und g kommt kein Element aus X vor. Das bedeutet aber $a \in W_K(Y)_{(Y)} = W_{K'}$, also $W_{LK'} \subseteq W_{K'}$, womit nach Satz 50 die Halbendlichkeit von $LK'|K'$ nachgewiesen ist.

Mit Hilfe der Sätze 58 und 59 gelingt nun eine Verallgemeinerung des MacLaneschen Beispiels. Dies erscheint aus folgendem Grunde wünschenswert: Nähere Betrachtung zeigt, daß es für den Grundkörper K des betreffenden Beispiels vor allem wesentlich ist, ein W_K mit unendlichem absoluten Transzendenzgrad (= Transzendenzgrad über dem Primkörper P) zu besitzen; es liegt daher die Vermutung nahe, daß es bereits unter dieser Voraussetzung — neben der selbstverständlichen Bedingung $\mathrm{Uvg}(K) > 1$ — gelingt, über K eine unendliche halbendliche Erweiterung L zu konstruieren. Dieses Ziel erreichen wir hier allerdings nicht ganz, da wir noch die Existenz einer separierenden Transzendenzbasis von $K|W_K$ voraussetzen. Wegen $\mathrm{Uvg}(K) > 1$ kann eine solche, die ja zugleich p-Basis von K ist, als $\{u, v\} + X$ geschrieben werden. Eine Transzendenzbasis von $W_K|P$ sei ferner durch $Z + Y$ mit $Z = \{z_1, z_2, \ldots\}$ gegeben. Wir setzen jetzt $Q = P(Z)_{(Z)}$ und bilden über $Q(u, v)$ die Erweiterung M des MacLaneschen Beispiels. Nach Satz 59 ist dann $MQ(u, v, X, Y)_{(Y)}|Q(u, v, X, Y)_{(Y)}$ halbendlich. Da der Körper $Q(Y)_{(Y)}$ vollkommen und W_K über ihm algebraisch ist, muß $W_K(u, v, X)$ und damit auch K über $Q(u, v, X, Y)_{(K)}$ separabel sein. Deshalb ist nach Satz 58 $MK|K$ halbendlich. Da es zu endlich vielen Elementen von K stets einen sie enthaltenden Zwischenkörper von $K|Q(u, v)$ mit einer separierenden Transzendenzbasis über $Q(u, v)$ gibt, ein rein-inseparables, irreduzibles Polynom aber weder durch reintranszendente noch durch separable Erweiterung des Koeffizientenkörpers reduzibel wird, ist eine Basis von $M|Q(u, v)$ auch eine solche von $MK|K$. Diese Erweiterung ist also unendlich und in derselben

Weise erzeugt wie das MAC LANEschen Beispiel. Somit haben wir in MK einen Körper L der gewünschten Art gewonnen. Da nach einer Bemerkung von Seite 133 eine Grundkörpererweiterung mit Exponent die Halbendlichkeit nicht zerstört, führt diese Konstruktion auch dann noch zum Ziel, wenn mit einem gewissen e K^{p^e} in einem Körper enthalten ist, der über W_K eine separierende Transzendenzbasis besitzt. Dann ist nach Satz 51 $\mathrm{Uvg}(K) = t_K$. In dem hauptsächlich interessierenden Fall endlichen Unvollkommenheitsgrades besitzt daher nach Satz 57 auch $K|W_K$ eine separierende Transzendenzbasis, so daß keine weitere Verallgemeinerung gewonnen ist.

(Eingegangen am 12. Februar 1948.)

Literaturverzeichnis.

M. T. BECKER-S. MACLANE.

[1] The minimum number of generators for inseparable algebraic extensions. Bull. Am. Math. Soc. 46 (1940), S. 182.

M. DEURING.

[2] Verzweigungstheorie bewerteter Körper. Math. Ann. 105 (1931).

[3] Algebren. Ergebn. d. Math. IV_1 (1935).

[4] Arithm. Theorie d. Korrespondenzen algebraischer Funktionenkörper I. Journal f. Math. 177 (1937).

N. JACOBSON.

[5] Abstract derivation and Lie algebras. Transactions Am. Math. Soc. 42 (1937), S. 206.

W. KRULL.

[6] Beiträge zur Arithmetik kommutativer Integritätsbereiche VII. Math. Zeitschrift 45 (1939).

S. MACLANE.

[7] Steinitz field towers for modular fields. Transact. Am. Math. Soc. 46 (1939).

[8] Modular fields I. Duke Math. Journal 5 (1939), S. 372.

A. OSTROWSKI.

[9] Untersuchungen zur arithmetischen Theorie der Körper. Math. Zeitschrift 39 (1935).

G. PICKERT.

[10] Neue Methoden i. d. Strukturtheorie d. kommutativ-assoziativen Algebren. Math. Ann. 116 (1939).

[11] Veränderung des Unvollkommenheitsgrades bei unendlichen reininseparablen Erweiterungen. Bericht über die Mathematiker-Tagung in Tübingen vom 23. bis 27. Sept. 1946, S. 118.

F. K. Schmidt.
[12] Mehrfach perfekte Körper. Math. Ann. 108 (1933).
[13] Über die Erhaltung der Kettensätze der Idealtheorie bei beliebigen endlichen Körpererweiterungen. Math. Zeitschrift 41 (1936).

E. Steinitz.
[14] Algebraische Theorie der Körper. Journal f. Math. 137 (1910).

O. Teichmüller.
[15] p-Algebren. Deutsche Math. 1 (1936).
[16] Diskret bewertete perfekte Körper mit unvollkommenem Restklassenkörper. Journal f. Math. 176 (1937).

B. L. van der Waerden.
[17] Moderne Algebra I (1937).

Zur Theorie der Interpolation.

Von

A. Kneschke in Meerane.

Aus dem NEWTONschen Interpolationstheorem kann man nach einem von G. KOWALEWSKI angegebenen Verfahren [1]) ein Interpolationstheorem herleiten, das viele Einzelprobleme der Interpolationsrechnung und der numerischen Integration unter einheitlichem Gesichtspunkte erscheinen läßt.

Es sollen in § 1 insbesondere die Eigenschaften der in diesem allgemeinen Theorem auftretenden Entwickelungsfunktionen und der Restfunktion aufgezeigt werden. Darüber hinaus wird in § 2 erörtert, in welchem Umfange dieses erweiterte Interpolationstheorem als Hilfsmittel zur einheitlichen Entwickelung der klassischen Quadraturformeln verwendet werden kann. Es werden zwei sehr allgemeine Integrationstheoreme aufgestellt, die als Grundlage der genäherten Quadratur dienen können.

G. KOWALEWSKI schließt seine Betrachtungen an folgendes Ergebnis der Interpolationstheorie an: Ist $f(x)$ im Bereich (α, β) an den inneren Stellen $x_1, x_2, \ldots, x_n$ durch die Funktionswerte $f(x_1), f(x_2), \ldots, f(x_n)$ vertreten, so stellt das *NEWTONsche Interpolationstheorem* [2])

$$f(x) = \sum_{\mu=1}^{n} f(x_\mu)\, L_\mu(x) + \int_\alpha^\beta K(x,\xi)\, f^{(n)}(\xi)\, d\xi$$

(1)

$$K(x,\xi) = \frac{1}{2}\left\{ \frac{(x-\xi)^{n-1}}{(n-1)!}\operatorname{sgn}(x-\xi) - \sum_{\mu=1}^{n} L_\mu(x)\, \frac{(x_\mu-\xi)^{n-1}}{(n-1)!}\operatorname{sgn}(x_\mu-\xi)\right.$$

die Funktion $f(x)$ in (α, β) dar, wenn unter

$$L_\mu(x) = \frac{L(x)}{(x-x_\mu)\,L'(x_\mu)}, \quad L(x) = (x-x_1)(x-x_2), \ldots, (x-x_n)$$

die LAGRANGEschen Polynome zu verstehen sind. Diese Entwickelungs-

[1]) G. KOWALEWSKI, Entwickelung einer Funktion nach LAGRANGEschen Polynomen und ihren Integralen. Dtsche. Math. Jahrg. 3, Heft 3, S. 275.

[2]) G. KOWALEWSKI, Interpolation und genäherte Quadratur. B. G. TEUBNER, Berlin 1932, S. 74. In beiden Arbeiten wird das Restglied der Interpolationsformel in Integralform gegeben, die ausnahmslos den vorliegenden Untersuchungen zugrunde liegt.

polynome genügen der Identität

$$(1.1)\qquad \sum_{\mu=1}^{n} \frac{(x_\mu-\xi)^\lambda}{\lambda!} L_\mu^{(\varrho)}(x) = \frac{(x-\xi)^{\lambda-\varrho}}{(\lambda-\varrho)!}; \quad \lambda,\ \varrho = 0,\ \ldots,\ n-1.$$

Berücksichtigt man (1.1), so kann

$$\frac{\partial^\varrho K(x,\xi)}{\partial x^\varrho} = K^{(\varrho)}(x,\xi)$$
$$= \frac{1}{2}\left\{\frac{(x-\xi)^{n-\varrho-1}}{(n-\varrho-1)!}\operatorname{sgn}(x-\xi) - \sum_{\mu=1}^{n} L_\mu^{(\varrho)}(x)\frac{(x_\mu-\xi)^{n-1}}{(n-1)!}\operatorname{sgn}(x_\mu-\xi)\right\}:$$
$$\varrho = 1,\ \ldots,\ n-1$$

ausführlich in zweierlei Gestalt geschrieben werden; nämlich

$$K^{(\varrho)}(x,\xi) = \begin{cases} \frac{1}{2}\frac{(x-\xi)^{n-\varrho-1}}{(n-\varrho-1)!}[\operatorname{sgn}(x-\xi)-1]; & \alpha \leqq \xi \leqq x_1 \\ \frac{1}{2}\frac{(x-\xi)^{n-\varrho-1}}{(n-\varrho-1)!}[\operatorname{sgn}(x-\xi)-1] + \sum_{\mu=1}^{\lambda} L_\mu^{(\varrho)}(x)\frac{(x_\mu-\xi)^{n-1}}{(n-1)!} & \\ \qquad x_\lambda \leqq \xi \leqq x_{\lambda+1},\ \lambda = 1,\ \ldots,\ n-1 & \\ \frac{1}{2}\frac{(x-\xi)^{n-\varrho-1}}{(n-\varrho-1)!}[\operatorname{sgn}(x-\xi)+1] - \sum_{\mu=\lambda+1}^{n} L_\mu^{(\varrho)}(x)\frac{(x_\mu-\xi)^{n-1}}{(n-1)!} & \\ \frac{1}{2}\frac{(x-\xi)^{n-\varrho-1}}{(n-\varrho-1)!}[\operatorname{sgn}(x-\xi)+1]; & x_n \leqq \xi \leqq \beta. \end{cases}$$

Hiernach stellt man fest, daß $K^{(\varrho)}(x,\xi)$ mit den ersten $n-1$ Ableitungen nach ξ bei $\xi = \alpha$ und $\xi = \beta$ verschwindet, daß ferner an den Stellen $\xi = x_1, x_2, \ldots, x_n$ die Kernfunktion und ihre ersten $n-2$ Ableitungen stetig sind, während dort die $(n-1)$-te Ableitung nach ξ die Sprünge

$$\frac{\partial^{n-1}}{\partial \xi^{n-1}} K^{(\varrho)}(x,\xi)\Big|_{\xi=x_\mu-0}^{\xi=x_\mu+0} = (-1)^{n-1} L_\mu(x); \quad \mu = 1,\ \ldots,\ n$$

aufweist. An der Stelle $\xi = x$ ist $K^{(\varrho)}(x,\xi)$ mit den ersten $n-\varrho-2$ Ableitungen nach ξ stetig und hat dort in der $(n-\varrho-2)$-ten Ableitung den Sprung

$$\frac{\partial^{n-\varrho-1}}{\partial \xi^{n-\varrho-1}} K^{(\varrho)}(x,\xi)\Big|_{\xi=x-0}^{\xi=x+0} = (-1)^{n-\varrho}; \quad \varrho = 0,\ \ldots,\ n-1,$$

während die Sprünge höherer Ableitungen wieder verschwinden. In derselben Weise können wir für $x = \xi$ bestätigen, daß $K^{(\varrho)}(x,\xi)$ mit den ersten $n-\varrho-2$ Ableitungen nach x stetig ist, während die $(n-\varrho-2)$-te Ableitung den Sprung

$$\frac{\partial^{n-\varrho-1}}{\partial x^{n-\varrho-1}} K^{(\varrho)}(x,\xi)\Big|_{x=\xi-0}^{x=\xi+0} = 1; \qquad \varrho = 0,\ \ldots,\ n-1$$

zeigt. Dabei ist $x \neq x_\mu$ vorauszusetzen.

Integriert man (1) von $x = \alpha$ bis $x = \beta$ und setzt $\int_\alpha^\beta L_\mu(x)\,dx = L_\mu$, so stellt

$$(2) \qquad \int_\alpha^\beta f(x)\,dx = \sum_{\mu=1}^{n} L_\mu f(x_\mu) + \int_\alpha^\beta \mathfrak{R}(\xi)\, f^{(n)}(\xi)\,d\xi$$

$$\mathfrak{R}(\xi) = \int_\alpha^\beta K(x,\xi)\,d(x)$$

$$= \frac{1}{2}\left\{\frac{(\alpha-\xi)^n + (\beta-\xi)^n}{n!} - \sum_{\mu=1}^{n} L_\mu \frac{(x_\mu-\xi)^{n-1}}{(n-1)!}\operatorname{sgn}(x_\mu-\xi)\right\}$$

die *Newtonsche Quadraturformel* dar.

§ 1.

Das Interpolationsverfahren und die Entwickelungsfunktionen.

Differenzieren wir (1), so wird

$$f^{(\varrho)}(x) = \sum_{\mu=1}^{n} f(x_\mu)\, L_\mu^{(\varrho)}(x) + \int_\alpha^\beta K^{(\varrho)}(x,\xi)\, f^{(n)}(\xi)\,d\xi; \quad \varrho = 0, \ldots, n-1.$$

Nach dieser Entwickelungsvorschrift schreiben wir entsprechende Relationen für $f^{(\varrho)}(x)$, $f^{(n)}(x)$, $f^{(2n-\varrho)}(x)$, ..., $f^{[(\nu-1)(n-\varrho)+\varrho]}(x)$ auf, ersetzen für $n-\varrho = \varepsilon$ die Ableitungen von f in der Restfunktion schrittweise jeweils durch die folgende Gleichung unter gleichzeitiger Vertauschung der Integrationen in den Doppelintegralen und gelangen so zu dem *Kowalewskischen Interpolationstheorem*

$$(3) \qquad f^{(\varrho)}(x) = S(x) + \int_\alpha^\beta K_{\nu-1}^{(\varrho)}(x,\xi)\, f^{(\nu\varepsilon+\varrho)}(\xi)\,d\xi$$

mit der Interpolationsfunktion

$$S(x) = \sum_{\mu=1}^{n} f(x_\mu)\, I_{\mu 0}(x) + \sum_{\mu=1}^{n} f^{(\varepsilon)}(x_\mu)\, I_{\mu 1}(x) + \cdots + \sum_{\mu=1}^{n} f^{[(\nu-1)\varepsilon]}(x_\mu)\, I_{\mu,\nu-1}(x).$$

Dabei haben wir mittels der Kerniterationen

$$K_i^{(\varrho)}(x,\xi) = \int_\alpha^\beta K_{i-1}^{(\varrho)}(x,\eta)\, K^{(\varrho)}(\eta,\xi)\,d\eta = \int_\alpha^\beta K^{(\varrho)}(x,\eta)\, K_{i-1}^{(\varrho)}(\eta,\xi)\,d\eta$$

die Entwickelungsfunktionen in der Form

$$I_{\mu 0}(x) = L_\mu^{(\varrho)}(x), \quad I_{\mu 1}(x) = \int_\alpha^\beta K^{(\varrho)}(x,\xi)\, L_\mu^{(\varrho)}(\xi)\,d\xi,$$

$$I_{\mu 2}(x) = \int_\alpha^\beta K_1^{(\varrho)}(x,\xi)\, L_\mu^{(\varrho)}(\xi)\,d\xi \ldots$$

erhalten. In der Entwickelung (3) erkennen wir ein sehr allgemeines

Interpolationstheorem. Wir sind bei seiner Herleitung von der Newtonschen Grundformel ausgegangen und haben schrittweise das neue, wesentlich allgemeinere Theorem gewonnen. In diesem schrittweisen Vorgehen liegt die Eigenart des Kowalewskischen Interpolationsverfahrens.

Die *Entwickelungspolynome* $l_{\mu\sigma}(x)$ sind also schrittweise aus $l_{\mu 0}(x) = L_\mu^{(\varrho)}(x)$ durch Vermittelung des Kernes $K^{(\varrho)}(x,\xi)$ und seiner Iterationen zu gewinnen. Man bestätigt ihre Integraldarstellung

$$l_{\mu\sigma}(x) = \int_\alpha^\beta K_{\sigma-1}^{(\varrho)}(x,\xi)\, l_{\mu 0}(\xi)\, d\xi = \int_\alpha^\beta K^{(\varrho)}(x,\xi)\, l_{\mu,\sigma-1}(\xi)\, d\xi; \quad \sigma = 1, 2, \ldots.$$

Jedes Entwickelungspolynom läßt sich demnach als Kernintegral seines vorangehenden Polynomes auffassen. Weiterhin ist es auch möglich, die zu dieser Integralbeziehung äquivalente Differentialrelation zu finden. Unter Beachtung der Stetigkeitseigenschaften von $K^{(\varrho)}(x,\xi)$ bei $\xi = x$ folgt, weil $K^{(\varrho)}(x,\xi)$ in x vom $(n-\varrho-1)$-ten Grade ist,

$$l_{\mu\sigma}^{(n-\varrho)}(x) = l_{\mu,\sigma-1}(x); \qquad \sigma = 1, 2, \ldots.$$

Führen wir

$$S^\varrho l_{\mu\sigma}(x) = \int_\alpha^\beta K(x,\xi)\, l_{\mu,\sigma-1}(\xi)\, d\xi$$

als ϱ-te Stammfunktion von $l_{\mu\sigma}(x)$ ein, so muß diese an den Stellen $x = x_1, x_2, \ldots, x_n$ verschwinden, weil $K(x,\xi)$ dort Nullstellen hat. Wir sehen also, daß die Integraldarstellung

$$(3.1) \qquad l_{\mu\sigma}(x) = \int_\alpha^\beta K^{(\varrho)}(x,\xi)\, l_{\mu,\sigma-1}(\xi)\, d\xi, \quad l_{\mu 0}(x) = L_\mu^{(\varrho)}(x); \quad \begin{matrix}\sigma = 1,2,\ldots \\ \mu = 1,\ldots,n\end{matrix}$$

dem Lagrangeschen Integrationsproblem

$$(3.2) \quad l_{\mu\sigma}^{(n-\varrho)}(x) = l_{\mu,\sigma-1}(x), \; l_{\mu 0}(x) = L_\mu^{(\varrho)}(x), \; S^\varrho l_{\mu\sigma}(x_\nu) = 0; \quad \begin{matrix}\varrho = 1,2,\ldots \\ \mu,\nu = 1,\ldots,n\end{matrix}$$

äquivalent ist.

Es bleibt noch übrig, den Kern $K_i^{(\varrho)}(x,\xi)$ in der *Restfunktion*

$$R(x) = \int_\alpha^\beta K_{i-1}^{(\varrho)}(x,\xi)\, f^{(i\varepsilon+\varrho)}(\xi)\, d\xi$$

als Iteration zu

$$K^{(\varrho)}(x,\xi) = \frac{1}{2}\left\{\frac{(x-\xi)^{n-\varrho-1}}{(n-\varrho-1)!}\operatorname{sgn}(x-\xi) - \sum_{\mu=1}^{n} L_\mu^{(\varrho)}(x)\,\frac{(x_\mu-\xi)^{n-1}}{(n-1)!}\operatorname{sgn}(x_\mu-\xi)\right\}$$

zu berechnen. Man wird vermuten, daß $K_{i-1}^{(\varrho)}(x,\xi)$ in der Form

$$(3.3) \qquad \begin{aligned} K_{i-1}^{(\varrho)}(x,\xi) = \frac{1}{2}\Bigg\{ & \frac{(x-\xi)^{i\varepsilon-1}}{(i\varepsilon-1)!}\operatorname{sgn}(x-\xi) \\ & - \sum_{\mu=1}^{n}\sum_{\nu=0}^{i-1} l_{\mu\nu}(x)\,\frac{(x_\mu-\xi)^{i\varepsilon+\varrho-\nu\varepsilon-1}}{(i\varepsilon+\varrho-\nu\varepsilon-1)!}\operatorname{sgn}(x_\mu-\xi)\Bigg\} \end{aligned}$$

darstellbar ist. Wir bilden hieraus

$$K_i^{(\varrho)}(x,\xi) = \int_\alpha^\beta K^{(\varrho)}(x,\eta)\, K_{i-1}^{(\varrho)}(\eta,\xi)\, d\eta$$

und erhalten unter Berücksichtigung von (1) und (3.1)

$$K_i^{(\varrho)}(x,\xi) = \frac{1}{2}\left\{\frac{(x-\xi)^{i\varepsilon+n-\varrho-1}}{(i\varepsilon+n-\varrho-1)!}\operatorname{sgn}(x-\xi) - \sum_{\mu=1}^{n}\sum_{\nu=0}^{i} l_{\mu\nu}(x)\frac{(x_\mu-\xi)^{i\varepsilon+n-\nu\varepsilon-1}}{(i\varepsilon+n-\nu\varepsilon-1)!}\operatorname{sgn}(x_\mu-\xi)\right\}.$$

Die Kerniterationen sind also ohne weitere Integrationen aus den Entwickelungsfunktionen zu gewinnen. Bilden wir (3) für

$$f(x) = \frac{(x-\xi)^{i\varepsilon+\varrho-1}}{(i\varepsilon+\varrho-1)!},$$

so entsteht die Identität

$$\sum_{\mu=1}^{n}\sum_{\nu=0}^{i-1} l_{\mu\nu}(x)\frac{(x_\mu-\xi)^{i\varepsilon+\varrho-\nu\varepsilon-1}}{(i\varepsilon+\varrho-\nu\varepsilon-1)!} = \frac{(x-\xi)^{i\varepsilon-1}}{(i\varepsilon-1)!}. \tag{3.4}$$

Ist insbesondere $n=2$ und $x_1=\alpha$, $x_2=\beta$, so wird, wenn man (3.4) berücksichtigt,

$$K_{i-1}^{(\varrho)}(x,\xi) = \begin{cases} \sum_{\nu=0}^{i-1} l_{1\nu}(x)\frac{(\alpha-\xi)^{i\varepsilon+\varrho-\nu\varepsilon-1}}{(i\varepsilon+\varrho-\nu\varepsilon-1)!}; & x \geqq \xi \\ -\sum_{\nu=0}^{i-1} l_{2\nu}(x)\frac{(\beta-\xi)^{i\varepsilon+\varrho-\nu\varepsilon-1}}{(i\varepsilon+\varrho-\nu\varepsilon-1)!}; & x \leqq \xi. \end{cases}$$

Für den Sonderfall $\varrho=0$, $n=2$ entsteht für $x_1=\alpha$, $x_2=\beta$ der Kern

$$K(x,\xi) = \frac{1}{2}\left\{(x-\xi)\operatorname{sgn}(x-\xi) - \frac{(\beta-x)(\xi-\alpha)+(x-\alpha)(\beta-\xi)}{\beta-\alpha}\right\}.$$

Er liefert nach (3.2) die geraden Eulerschen und ungeraden Bernoullischen Polynome als Entwickelungsfunktionen

$$l_{1,\nu}(x) = \frac{E_{2\nu}(x)}{2} - \frac{B_{2\nu+1}(x)}{\beta-\alpha},\quad l_{2,\nu}(x) = \frac{E_{2\nu}(x)}{2} + \frac{B_{2\nu+1}(x)}{\beta-\alpha};\quad \nu = 0,\ldots,i-1,$$

so daß bei Verwendung der Symbole

$$\nabla f = \frac{f(\alpha)+f(\beta)}{2},\quad \triangle f = \frac{f(\beta)-f(\alpha)}{\beta-\alpha}$$

$f(x)$ entsprechend den gegebenen Spektralwerten

$$\begin{array}{cc} f(\alpha), & f(\beta) \\ f''(\alpha), & f''(\beta) \\ \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot \\ f^{(2i-2)}(\alpha), & f^{(2i-2)}(\beta) \end{array}$$

in der Form

$$f(x) = \sum_{\nu=0}^{i-1} \left(\nabla f^{(2\nu)} \cdot E_{2\nu}(x) + \triangle f^{(2\nu)} \cdot B_{2\nu+1}(x) \right) + \int_{\alpha}^{\beta} K_{i-1}(x, \xi)\, f^{(2i)}(\xi)\, d\xi \tag{4.1}$$

mit der aus (3.3) zu berechnenden Kernfunktion

$$K_{i-1}(x, \xi) = \begin{cases} \sum_{\nu=0}^{i-1} \left(\frac{E_{2\nu}(x)}{2} - \frac{B_{2\nu+1}(x)}{\beta - \alpha} \right) \frac{(\alpha - \xi)^{2i-2\nu-1}}{(2i-2\nu-1)!}; & x \geqq \xi \\ -\sum_{\nu=0}^{i-1} \left(\frac{E_{2\nu}(x)}{2} + \frac{B_{2\nu+1}(x)}{\beta - \alpha} \right) \frac{(\beta - \xi)^{2i-2\nu-1}}{(2i-2\nu-1)!}; & x \leqq \xi \end{cases} \tag{4.2}$$

darstellbar ist. Das ist das *Euler-Bernoullische Interpolationstheorem.*

Für den Sonderfall $\varrho = n-1$, $n = 2$ wird für $x_1 = \alpha$, $x_2 = \beta$ der Kern

$$K'(x, \xi) = \frac{1}{2} \operatorname{sgn}(x - \xi) + \frac{\xi - \frac{\alpha + \beta}{2}}{\beta - \alpha}.$$

Es ergeben sich nach (3.2) die Bernoullischen Polynome

$$I_{1,\nu}(x) = -\frac{B_\nu(x)}{\beta - \alpha}, \quad I_{2,\nu}(x) = \frac{B_\nu(x)}{\beta - \alpha}; \quad \nu = 0, \ldots, i-1$$

als Entwickelungsfunktionen, so daß $f(x)$ entsprechend den gegebenen Spektralwerten

$$\begin{array}{cc} f(\alpha), & f(\beta) \\ f'(\alpha), & f'(\beta) \\ \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot \\ f^{(i-1)}(\alpha), & f^{(i-1)}(\beta) \end{array}$$

in der Form

$$f'(x) = \sum_{\nu=0}^{i-1} \triangle f^{(\nu)} \cdot B_\nu(x) + \int_{\alpha}^{\beta} K'_{i-1}(x, \xi)\, f^{(i+1)}(\xi)\, d\xi \tag{5.1}$$

mit der aus (3.3) errechneten Kernfunktion

$$K'_{i-1}(x, \xi) = \begin{cases} -\sum_{\nu=0}^{i-1} \frac{B_\nu(x)}{\beta - \alpha} \cdot \frac{(\alpha - \xi)^{i-\nu}}{(i-\nu)!}; & x \geqq \xi \\ -\sum_{\nu=0}^{i-1} \frac{B_\nu(x)}{\beta - \alpha} \cdot \frac{(\beta - \xi)^{i-\nu}}{(i-\nu)!}; & x \leqq \xi \end{cases} \tag{5.2}$$

entwickelt werden kann. Das ist das *Euler-Maclaurinsche Interpolationstheorem.*

Der Vollständigkeit halber wird bemerkt, daß für $\varrho = 0$, $n = 1$ aus (3) die *Taylorsche Interpolationsformel* mit dem bekannten Bernoullischen Integralrestglied folgt.

Bereits diese einfachen Sonderfälle zeigen, daß dem Interpolationstheorem von Kowalewski als Verallgemeinerung des Newtonschen Theoremes insofern eine große Leistungsfähigkeit zukommt, als Interpolationsgesetze, die bisher voneinander unabhängig hergeleitet werden mußten, durch dieses allgemeine Theorem einheitlich umfaßt werden. Hierin liegt seine große Bedeutung für die Aufstellung einer in sich geschlossenen Interpolationstheorie.

§ 2.

Die Quadraturformeln.

a) Wenn wir (3) für $\varrho = 0$ von $x = \alpha$ bis $x = \beta$ integrieren, so treten die Werte

$$I_{\mu\sigma} = \int_\alpha^\beta I_{\mu\sigma}(x)\,dx, \quad I_{\mu 0} = \int_\alpha^\beta L_\mu(x)\,dx = L_\mu, \qquad \begin{matrix}\sigma = 1, 2, \ldots \\ \mu = 1, \ldots, n\end{matrix}$$

auf, die wir *l-Faktoren* nennen wollen. Führen wir durch die Relation

$$(6.\,1)\quad \mathfrak{R}_\sigma(\xi) = \int_\alpha^\beta K_{\sigma-1}(x,\xi)\,dx = \int_\alpha^\beta K(x,\xi)\,\mathfrak{R}_{\sigma-1}(x)\,dx, \quad \mathfrak{R}_0 = 1$$

mittels (3. 3) eine Folge von $\mathfrak{R}$-*Funktionen*

$$(6.\,2)\quad \mathfrak{R}_i(\xi) = \frac{1}{2}\left\{\frac{(\alpha-\xi)^{in} + (\beta-\xi)^{in}}{(in)!} - \sum_{\mu=1}^{n}\sum_{\nu=0}^{i-1} I_{\mu\nu}\cdot\frac{(x_\mu-\xi)^{in-\nu n-1}}{(in-\nu n-1)!}\operatorname{sgn}(x_\mu-\xi)\right\}$$

ein, so kann man, da

$$I_{\mu\sigma}(x) = \int_\alpha^\beta K_{\sigma-1}(x,\xi)\,L_\mu(\xi)\,d\xi,$$

die *l*-Faktoren entsprechend

$$(6.\,3)\qquad I_{\mu\sigma} = \int_\alpha^\beta \mathfrak{R}_\sigma(\xi)\,L_\mu(\xi)\,d\xi, \qquad \sigma = 0, 1, 2, \ldots$$

festlegen. — Die Integration der Restfunktion

$$R(x) = \int_\alpha^\beta K_{i-1}(x,\xi)\,f^{(in)}(\xi)\,d\xi$$

liefert den Rest

$$R = \int_\alpha^\beta \mathfrak{R}_i(\xi)\,f^{(in)}(\xi)\,d\xi,$$

so daß sich als Quadraturformel

$$\int_\alpha^\beta f(x)\,dx = S + \int_\alpha^\beta \mathfrak{R}_i(\xi)\, f^{(in)}(\xi)\,d\xi \tag{7.1}$$

mit der Interpolationssumme

$$S = \sum_{\mu=1}^{n} \left\{ I_{\mu 0}\,.\, f(x_\mu) + I_{\mu 1}\,.\, f^{(n)}(x_\mu) + \cdots + I_{\mu, i-1}\,.\, f^{[(i-1)n]}(x_\mu) \right\}$$

ergibt. Wir nennen (7. 1) *Erste* KOWALEWSKISCHE *Quadraturformel.* Sie enthält die NEWTONSche Quadraturformel (2) als Sonderfall $i = 1$.

Außer (6. 3) können wir noch weitere Eigenschaften der $\mathfrak{R}$-Funktionen angeben, die uns ihre Beziehungen zu den Entwickelungskoeffizienten erkennen lassen. Berücksichtigt man die Stetigkeitseigenschaften von $K(x,\xi)$, so folgt aus (6. 1) durch Differentiation nach ξ

$$\mathfrak{R}_\sigma^{(n)}(\xi) = (-1)^n\, \mathfrak{R}_{\sigma-1}(\xi); \qquad \begin{matrix}\sigma = 1, 2, \ldots, \\ n = 1, 2, \ldots.\end{matrix} \tag{6.4}$$

Es bleibt nur noch übrig, die zur vollständigen Festlegung der Lösungen des Differentialsystems ausreichenden Nebenbedingungen der $\mathfrak{R}$-Funktionen zu finden. Wegen der Stetigkeit von $K(x,\xi)$ und der ersten $n-2$ Ableitungen nach ξ bei $\xi = x$ gilt

$$\mathfrak{R}_\sigma^{(\nu)}(\xi) = \int_\alpha^\beta \frac{\partial^\nu}{\partial \xi^\nu} K(x,\xi)\, \mathfrak{R}_{\sigma-1}(x)\,dx, \qquad \begin{matrix}\nu = 1, 2, \ldots \\ \nu = 0, \ldots, n-1.\end{matrix}$$

Die $\mathfrak{R}$-Funktionen und ihre ersten $n-1$ Ableitungen verschwinden für α und β, sind mit ihren ersten $n-2$ Ableitungen bei $x_1, \ldots, x_n$ stetig und zeigen dort in der $(n-1)$-ten Ableitung die Sprünge

$$\mathfrak{R}_\sigma^{(n-1)}(\xi)\Big|_{\xi = x_\mu - 0}^{\xi = x_\mu + 0} = (-1)^{n-1} \int_\alpha^\beta \mathfrak{R}_{\sigma-1}(x)\, L_\mu(x)\,dx = (-1)^{n-1}\, I_{\mu,\sigma-1}. \tag{6.5}$$

Die Entwickelungsfaktoren $I_{\mu\sigma}$ sind demnach durch die Sprungwerte der $(n-1)$-ten Ableitung der $\mathfrak{R}$-Funktionen $\mathfrak{R}_{\sigma+1}(\xi)$ an den Interpolationsstellen gegeben. – Fernerhin gewinnen wir durch Integration von (3. 4) nach x für die Entwickelungsfaktoren die Identität

$$\sum_{\mu=1}^{n} \sum_{\nu=0}^{i-1} I_{\mu\nu}\, \frac{(x_\mu - \xi)^{in-\nu n-1}}{(in-\nu n-1)!} = \frac{(\beta-\xi)^{in} - (\alpha-\xi)^{in}}{(in)!}. \tag{6.6}$$

An einigen *Sonderfällen* soll die Anwendungsmöglichkeit der Quadraturformel (7. 1) dargelegt werden.

Setzen wir vorerst $n = 1$ und $x_1 = \alpha$ bzw. $x_1 = \beta$, so liefert

$K(x,\xi) = \frac{1}{2}\{\operatorname{sgn}(x-\xi) + 1\}$ bzw. $K(x,\xi) = \frac{1}{2}\{\operatorname{sgn}(x-\xi) - 1\}$

nach (6. 1) die $\mathfrak{R}$-Funktionen

$$\mathfrak{R}_1 = \frac{\beta-\xi}{1!},\ \mathfrak{R}_2 = \frac{(\beta-\xi)^2}{2!} \cdots \text{ bzw. } \mathfrak{R}_1 = -\frac{\xi-\alpha}{1!},\ \mathfrak{R}_2 = \frac{(\xi-\alpha)^2}{2!} \cdots$$

mit den Sprüngen

$$\frac{\beta-\alpha}{1!},\ \frac{(\beta-\alpha)^2}{2!},\ \frac{(\beta-\alpha)^3}{3!}\cdots \text{ bzw. } \frac{\beta-\alpha}{1!},\ -\frac{(\beta-\alpha)^2}{2!},\ \frac{(\beta-\alpha)^3}{3!}\cdots,$$

so daß wir die *Taylorsche Quadraturformel*

$$\int_\alpha^\beta f(x)\,dx = \sum_{\nu=0}^{i-1} f^{(\nu)}(\alpha)\,\frac{(\beta-\alpha)^{\nu+1}}{(\nu+1)!} + \int_\alpha^\beta \frac{(\beta-\xi)^i}{i!}\,f^{(i)}(\xi)\,d\xi \tag{8.1}$$

$$\text{bzw. } \int_\alpha^\beta f(x)\,dx = \sum_{\nu=0}^{i-1} (-1)^\nu f^{(\nu)}(\beta)\,\frac{(\beta-\alpha)^{\nu+1}}{(\nu+1)!} + \int_\alpha^\beta \frac{(\alpha-\xi)^i}{i!}\,f^{(i)}(\xi)\,d\xi$$

erhalten. — Für $x_1 = \frac{\alpha+\beta}{2}$ wird

$$K(x,\xi) = \frac{1}{2}\left\{\operatorname{sgn}(x-\xi) - \operatorname{sgn}\left(\frac{\alpha+\beta}{2}-\xi\right)\right\}$$

und

$$\mathfrak{R}_1 = \frac{\beta-\xi}{1!},\quad \mathfrak{R}_2 = \frac{(\beta-\xi)^2}{2!}\cdots,\ \text{für } \xi > \frac{\alpha+\beta}{2}$$

$$\mathfrak{R}_1 = -\frac{\xi-\alpha}{1!},\ \mathfrak{R}_2 = \frac{(\xi-\alpha)^2}{2!}\cdots,\ \text{für } \xi < \frac{\alpha+\beta}{2}.$$

Aus den Sprüngen

$$\frac{2}{1!}\,\frac{\beta-\alpha}{2},\ 0,\ \frac{2}{3!}\left(\frac{\beta-\alpha}{2}\right)^3,\ 0,\ \frac{2}{5!}\left(\frac{\beta-\alpha}{2}\right)^5,\ 0\ldots$$

folgt die *Maclaurinsche Quadraturformel*[3])

$$\int_\alpha^\beta f(x)\,dx = 2\sum_{\nu=0}^{i} f^{(2\nu)}\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)\frac{\left(\frac{\beta-\alpha}{2}\right)^{2\nu+1}}{(2\nu+1)!} \tag{8.2}$$

$$+ \int_0^{\frac{\beta-\alpha}{2}} \left[f^{(2i+1)}\left(\frac{\alpha+\beta}{2}+\xi\right) - f^{(2i+1)}\left(\frac{\alpha+\beta}{2}-\xi\right)\right]\frac{\left(\frac{\beta-\alpha}{2}-\xi\right)^{2i+1}}{(2i+1)}\,d\xi.$$

Setzt man $n = 2$, $x_1 = \alpha$, $x_2 = \beta$, mithin

$$L_1(x) = \frac{\beta-x}{\beta-\alpha},\ L_2(x) = \frac{x-\alpha}{\beta-\alpha},\ L_1 = L_2 = \frac{\beta-\alpha}{2},$$

so werden für

$$K(x,\xi) = \frac{1}{2}\left\{(x-\xi)\operatorname{sgn}(x-\xi) - \frac{(\beta-x)(\xi-\alpha)+(x-\alpha)(\beta-\xi)}{\beta-\alpha}\right\}$$

[3]) Das Restglied ergibt sich in dieser Form, wenn man im ersten Integralanteil $\alpha \leqq \xi \leqq \frac{\alpha+\beta}{2}$ die Veränderliche ξ durch $\frac{\alpha+\beta}{2} - \xi$, im zweiten $\frac{\alpha+\beta}{2} \leqq \xi \leqq \beta$ sie aber durch $\frac{\alpha+\beta}{2} + \xi$ ersetzt.

die $\mathfrak{K}$-Funktionen die Randwertaufgabe

$$\mathfrak{K}_\sigma''(\xi) = \mathfrak{K}_{\sigma-1}(\xi);\ \mathfrak{K}_0 = 1$$
$$\mathfrak{K}_\sigma(\alpha) = \mathfrak{K}_\sigma(\beta) = 0$$

erfüllen müssen. Das liefert aber die geraden Eulerschen Polynome

$$\mathfrak{K}_0(\xi) = E_0(\xi),\ \mathfrak{K}_1(\xi) = E_2(\xi) \ldots .$$

Aus den Sprungwerten

$$\mathfrak{K}_\sigma'(\alpha) = \int_\alpha^\beta \mathfrak{K}_{\sigma-1}(x)\,\frac{x-\beta}{\beta-\alpha}\,dx = -I_{1,\sigma-1}$$

und

$$\mathfrak{K}_\sigma'(\beta) = \int_\alpha^\beta \mathfrak{K}_{\sigma-1}(x)\,\frac{x-\alpha}{\beta-\alpha}\,dx = I_{2,\sigma-1}$$

folgen die I-Faktoren

$$I_{1,\nu} = I_{2,\nu} = -E_{2\nu+1}(\alpha) = E_{2\nu+1}(\beta); \qquad \nu = 0, 1, \ldots,$$

so daß wir mittels der Eulerschen Zahlen $e_1, e_3 \ldots$ gemäß

$$E_1(\beta) = \frac{\beta-\alpha}{2}\,e_1,\ E_3(\beta) = \left(\frac{\beta-\alpha}{2}\right)^3 e_3 \ldots$$

die *Boolesche Quadraturformel*

$$\int_\alpha^\beta f(x)\,dx = \sum_{\nu=0}^{i} e_{2\nu+1}\left(\frac{\beta-\alpha}{2}\right)^{2\nu+1}\left(f^{(2\nu)}(\alpha) + f^{(2\nu)}(\beta)\right) - \int_\alpha^\beta E_{2i+1}(\xi)\,f^{(2i+1)}(\xi)\,d\xi \tag{8.3}$$

erhalten.

b) Aus dem Theorem (3) für $\varrho = 0$ kann man noch eine andere Quadraturformel herleiten. Wir bilden die erste Ableitung von $f(x)$ an allen Interpolationsstellen $x_1, x_2, \ldots, x_n$, multiplizieren jeweils mit den Newtonschen Faktoren $L_1, L_2, \ldots, L_n$ und summieren; also

$$\sum_{\varrho=1}^{n} L_\varrho f'(x_\varrho) = \sum_{\mu=1}^{n}\Bigg\{ f(x_\mu)\cdot\sum_{\varrho=1}^{n} L_\varrho L_\mu'(x_\varrho)$$
$$+ f^{(n)}(x_\mu)\cdot\int_\alpha^\beta L_\mu(\xi)\sum_{\varrho=1}^{n} L_\varrho K'(x_\varrho,\xi)\,d\xi + \cdots$$
$$+ f^{[(i-1)n]}(x_\mu)\cdot\int_\alpha^\beta L_\mu(\xi)\sum_{\varrho=1}^{n} L_\varrho K_{i-2}'(x_\varrho,\xi)\,d\xi\Bigg\}$$
$$+ \int_\alpha^\beta f^{(in)}(\xi)\sum_{\varrho=1}^{n} L_\varrho K_{i-1}'(x_\varrho,\xi)\,d\xi.$$

Der erste Summand auf der rechten Seite läßt sich wesentlich vereinfachen; es ist nämlich für $x_1 = \alpha$ und $x_n = \beta$

$$L'_\mu(x) = \sum_{\varrho=1}^{n} L'_\mu(x_\varrho) L_\varrho(x)$$

$$\int_\alpha^\beta L'_\mu(x)\,dx = \sum_{\varrho=1}^{n} L_\varrho L'_\mu(x_\varrho) = \begin{cases} -1; & \mu = 1 \\ +1; & \mu = n \\ 0; & \mu \neq 1, n. \end{cases}$$

Dieser Summand wird dann gleich $f(\beta) - f(\alpha)$. Ersetzen wir in der ganzen Gleichung $f(x)$ durch $S^1 f(x)$ und $f^{(i)}(x)$ durch $f^{(i-1)}(x)$, so entsteht hieraus schließlich die Quadraturformel

$$(7.2) \qquad \int_\alpha^\beta f(x)\,dx = S + \int_\alpha^\beta \mathfrak{G}_{i-1}(\xi)\, f^{(in-1)}(\xi)\,d\xi$$

mit der Interpolationssumme

$$S = \sum_{\mu=1}^{n} \{H_{\mu 0} \cdot f(x_\mu) + H_{\mu 1} \cdot f^{(n-1)}(x_\mu) + \cdots + H_{\mu, i-1} \cdot f^{[(i-1)n-1]}(x_\mu)\},$$

wobei die Entwickelungskoeffizienten $H_{\mu\sigma}$ durch die Folge der $\mathfrak{G}$-*Funktionen*

$$\mathfrak{G}_0(\xi) = -\sum_{\mu=1}^{n} L_\mu K'(x_\mu, \xi)$$

$$(9.1) \qquad = \frac{1}{2}\left\{\frac{(\alpha-\xi)^{n-1} + (\beta-\xi)^{n-1}}{(n-1)!} - \sum_\mu L_\mu \frac{(x_\mu - \xi)^{n-2}}{(n-2)!} \operatorname{sgn}(x_\mu - \xi)\right\}$$

$$\mathfrak{G}_i(\xi) = -\sum_{\mu=1}^{n} L_\mu K'_i(x_\mu, \xi) = \int_\alpha^\beta K(x, \xi)\, \mathfrak{G}_{i-1}(x)\,dx$$

aus der Relation

$$(9.2) \qquad H_{\mu\sigma} = \int_\alpha^\beta \mathfrak{G}_{\sigma-1}(\xi)\, L_\mu(\xi)\,dx, \quad H_{\mu 0} = L_\mu; \quad \sigma = 1, 2, \ldots$$

bestimmt werden können. Die die *H-Faktoren* vermittelnden $\mathfrak{G}$-Funktionen sind also aus der Integralbeziehung

$$(9.3) \quad \mathfrak{G}_\sigma(\xi) = \int_\alpha^\beta K_{\sigma-1}(x, \xi)\, \mathfrak{G}_0(x)\,dx, \quad \mathfrak{G}_0(\xi) = -\sum_{\mu=1}^{n} L_\mu K'(x_\mu, \xi)$$

oder schrittweise aus

$$\mathfrak{G}_\sigma(\xi) = \int_\alpha^\beta K(x, \xi)\, \mathfrak{G}_{\sigma-1}(x)\,dx), \qquad \sigma = 1, 2, \ldots$$

zu gewinnen. Diesen Beziehungen liegt wieder die Funktion $K(x, \xi)$ zugrunde. Nur ist zu beachten, daß die Bildung der $\mathfrak{G}$-Funktionen von

$$\mathfrak{G}_0(\xi) = -\sum_\mu L_\mu K'(x_\mu, \xi)$$

ausgeht, während die $\mathfrak{K}$-Funktionen von $\mathfrak{K}_0 = 1$ aus entwickelt werden. Wir nennen (7. 2) *Zweite Kowalewskische Quadraturformel.* Der Integralwert wird bei ihr durch eine lineare Kombination der Spektralwerte $f(x_\mu)$, $f^{(n-1)}(x_\mu)$, $f^{(2n-1)}(x_\mu)$ ... für $\mu = 1, \ldots, n$ und $n = 2, 3, \ldots$ dargestellt, während bei der Ersten Quadraturformel (7. 1) die Interpolationssumme die Spektralwerte $f(x_\mu)$, $f^{(n)}(x_\mu)$, $f^{(2n)}(x_\mu)$ . . . für $\mu = 1, \ldots, n$ und $n = 1, 2 \ldots$ und dadurch den Integralwert vertritt. Das ist der grundsätzliche Unterschied beider Quadraturformeln.

Wir wollen noch weitere Eigenschaften der $\mathfrak{G}$-Funktionen aufzeigen, um ihren Zusammenhang mit den H-Faktoren klar hervortreten zu lassen. Aus den Stetigkeitseigenschaften von $K(x, \xi)$ leiten wir mittels (9. 3) die Differentialbeziehung

$$\mathfrak{G}_\sigma^{(n)}(\xi) = (-1)^n \mathfrak{G}_{\sigma-1}(\xi); \qquad \begin{matrix} \sigma = 1, 2, \ldots \\ n = 2, 3, \ldots \end{matrix} \tag{9. 4}$$

ab. Für $\mathfrak{G}_0(\xi) = -\sum_\mu L_\mu K'(x_\mu, \xi)$ stellen wir die Stetigkeit einschließlich ihrer ersten $n-3$ Ableitungen fest, während ihre $(n-2)$-te Ableitung an den Stellen $\xi = x_\mu$ die Sprünge

$$\mathfrak{G}_0^{(n-2)}(\xi)\Big|_{\xi = x_\mu - 0}^{\xi = x_\mu + 0} = (-1)^{n-2} L_\mu$$

hat. Ferner gilt

$$\mathfrak{G}_\sigma^{(\nu)}(\xi) = \int_a^\beta \frac{\partial^\nu K(x, \xi)}{\partial \xi^\nu} \mathfrak{G}_{\sigma-1}(x)\, dx; \qquad \begin{matrix} \sigma = 1, 2 \ldots \\ \nu = 0 \ldots n-1. \end{matrix}$$

Aus den Stetigkeitseigenschaften von $K(x, \xi)$ und ihren Ableitungen nach ξ folgt daher, daß $\mathfrak{G}_\sigma(\xi)$ mit ihren ersten $n-2$ Ableitungen nach ξ stetig ist, bei α und β verschwindet und an den Stellen $x_1 \ldots x_n$ in der $(n-1)$-ten Ableitung die Sprünge

$$\mathfrak{G}_\sigma^{(n-1)}(\xi)\Big|_{\xi = x_\mu - 0}^{\xi = x_\mu + 0} = (-1)^{n-1} \int_a^\beta \mathfrak{G}_{\sigma-1}(x)\, L_\mu(x)\, dx = (-1)^{n-1} H_{\mu\sigma}; \tag{9. 5}$$

$$\sigma = 1, 2 \ldots$$
$$\mu = 1, \ldots, n$$

aufweist. Durch (9. 4) und die angegebenen Stetigkeitseigenschaften sind die $\mathfrak{G}$-Funktionen eindeutig bestimmt. — Bildet man (7. 2) für

$$f(x) = \frac{(x-\xi)^{in-2}}{(in-2)!},$$

so wird

$$\sum_{\mu=1}^{n} \left\{ \frac{(x_\mu - \xi)^{in-2}}{(in-2)!} H_{\mu 0} + \sum_{\nu=1}^{i-1} H_{\mu\nu} \frac{(x_\mu - \xi)^{in-\nu n-1}}{(in-\nu n-1)!} \right\} \tag{9. 6}$$

$$= \frac{(\beta-\xi)^{in-1} - (\alpha-\xi)^{in-1}}{(in-1)!}$$

Wir wollen auch hierfür einen *Sonderfall* behandeln. Für $n = 2$ und

$$K'(x, \xi) = \frac{1}{2} \operatorname{sgn}(x - \xi) + \frac{B_1(\xi)}{\beta - \alpha}$$

wird $\mathfrak{G}_0(\xi) = -B_1(\xi)$ die Ausgangsfunktion für die $\mathfrak{G}$-Funktionen, denen die Randwertaufgabe

$$\mathfrak{G}_\sigma''(\xi) = \mathfrak{G}_{\sigma-1}(\xi),\ \mathfrak{G}_0(\xi) = -B_1(\xi)$$
$$\mathfrak{G}_\sigma(\alpha) = \mathfrak{G}_\sigma(\beta) = 0$$

mit den Lösungen

$$\mathfrak{G}_0(\xi) = -B_1(\xi),\ \mathfrak{G}_1(\xi) = -B_3(\xi) \ldots$$

zugrundeliegt. Aus den Sprungwerten

$$\mathfrak{G}_\sigma'(\alpha) = \int_\alpha^\beta \mathfrak{G}_{\sigma-1}(x) \frac{x - \beta}{\beta - \alpha}\, dx = -H_{1,\sigma}$$

und

$$\mathfrak{G}_\sigma'(\beta) = \int_\alpha^\beta \mathfrak{G}_{\sigma-1}(x) \frac{x - \alpha}{\beta - \alpha}\, dx = H_{2,\sigma}$$

folgen die H-Faktoren

$$H_{1,\nu} = -H_{2,\nu} = B_{2\nu}(\alpha) = B_{2\nu}(\beta); \qquad \nu = 1, 2, \ldots$$
$$H_{10} = H_{20} = B_1 = \frac{\beta - \alpha}{2},$$

so daß wir mittels der Bernoullischen Zahlen $b_0, b_2, \ldots$ gemäß

$$B_2(\beta) = \left(\frac{\beta - \alpha}{2}\right)^2 b_2,\ B_4(\beta) = \left(\frac{\beta - \alpha}{2}\right)^4 b_4, \ldots$$

die *Euler-Maclaurinsche Quadraturformel*

$$\int_\alpha^\beta f(x)\, dx = \frac{\beta - \alpha}{2}\left(f(\alpha) + f(\beta)\right)$$
$$+ \sum_{\nu=1}^{i} b_{2\nu} \left(\frac{\beta - \alpha}{2}\right)^{2\nu} \left(f^{(2\nu-1)}(\alpha) - f^{(2\nu-1)}(\beta)\right) - \int_\alpha^\beta B_{2i+1}(\xi)\, f^{(2i+1)}(\xi)\, d\xi \tag{8.4}$$

erhalten.

(Eingegangen am 15. August 1946.)

Zusammensetzung von Schwesterperspektivitäten in Verbänden*).

Von

W. Schwan in Osterwald.

1. Einleitung.

Es handelt sich um die verallgemeinernde Übertragung eines für die modularen Verbände charakteristischen Satzes auf allgemeine Verbände: Sind X und Y Mengen von Elementen eines Verbandes V, dann sollen $X \vee Y$ und $X \wedge Y$ die Mengen der Elemente $x \cup y$ bzw. $x \cap y$ mit $x \in X$ und $y \in Y$ bezeichnen. Für die modularen Verbände ist charakteristisch, daß für irgend zwei ihrer Elemente

$$(1) \qquad \frac{a}{a \cap b} \vee \frac{b}{a \cap b} = \frac{a \cup b}{a} \wedge \frac{a \cup b}{b}$$

besteht. In Worten: Die progressiv nach a und b zerlegbaren Elemente sind, soweit sie $a \cap b$ übertreffen, auch regressiv nach a und b zerlegbar, die regressiv nach a und b zerlegbaren, soweit sie $a \cup b$ untertreffen, auch progressiv. Woraus denn u. a. folgt, daß sie einen Teilverband bilden. — Die Übertragung dieses Satzes auf allgemeine Verbände ersetzt die Teilverbandgleichung (1) durch die Teilbundisomorphie

$$(2) \qquad \frac{a}{a \wedge b} \vee \frac{b}{a \wedge b} \sim \frac{a \vee b}{a} \wedge \frac{a \vee b}{b}$$

genauer, durch die Austauschisomorphie

$$(3) \qquad x = (a \cap y) \cup (b \cap y), \qquad y = (a \cup x) \cap (b \cup x)$$

zwischen diesen Teilbünden. Sie ist die Zuordnung $x \rightleftarrows y$ der Örter x und y derjenigen Zwischenreiche y/x, die ein progressiv nach a und b zerlegbares Element x mit einem regressiv nach a und b zerlegbarem Element y verbinden, ohne ein weiteres progressiv oder regressiv nach a und b zerlegbares Element zu enthalten. Diese Zwischenreiche werden durch die Kleinstwerte der Umreichfunktion

$$(4) \qquad U(z) = \frac{(a \cup z) \cap (b \cup z)}{(a \cap z) \cup (b \cap z)}$$

---

*) Anmerkung der Redaktion. Die vorstehende Arbeit wurde erstmalig am 7. April 1944 eingereicht, vom Verfasser aber aus redaktionellen Gründen im Dezember 1945 zurückgezogen. Die jetzige Fassung stimmt von wenigen, durch die inzwischen erschienene Arbeit [A 2] bedingten Änderungen abgesehen im wesentlichen mit der früheren überein.

dargestellt. Die Austauschisomorphie — sie mag die kleine Überperspektivität heißen — steht zu den beiden Schwesterperspektivitäten

(5 a) $$x_1 = a \cap y_1, \qquad y_1 = b \cup x_1$$

(5 b) $$x_2 = b \cap y_2, \qquad y_2 = a \cup x_2$$

in folgender Beziehung: Jedes Zwischenreich der einen Perspektivität hat mit jedem Zwischenreich der anderen Elemente gemein. Die Durchschnitte der Zwischenreiche sind selbst Zwischenreiche. Es sind die Zwischenreiche der Überperspektivität.

2. Zerlegbarkeit nach a und b.

2. 1. Adjungieren wir dem Verbande V nötigenfalls ein unterstes und oberstes Element 1 bzw. 0, dann sind

(6 a) $$V^{\smile} = \frac{a}{1} \vee \frac{b}{1}$$

und

(6 b) $$V^{\frown} = \frac{0}{a} \wedge \frac{0}{b}$$

die Mengen der progressiv bzw. regressiv nach a und b zerlegbaren Elemente. Erklären wir

(7 a) $$z^{\smile} = (a \cap z) \cup (b \cap z)$$

(7 b) $$z^{\frown} = (a \cup z) \cap (b \cup z)$$

dann gilt für beliebige Elemente

(8) $$z^{\smile} = (= z = (= z$$

und es sind nach [A 1, 4. 3.][1]) $z = z^{\smile}$ bzw. $z = z^{\frown}$ die Gleichungen von $V^{\smile}$ bzw. $V^{\frown}$. Hiernach bestehen $V^{\smile}$ und $V^{\frown}$ aus den Deckelementen der Transformationen (7) von V. Die Deckelemente einer Transformation gehören zu ihren Bildelementen und die Formeln (7) zeigen, daß jedes Bildelement der einen oder anderen Transformation $V^{\smile}$ bzw. $V^{\frown}$ angehört. Demnach läßt sich ebenso gut sagen, daß V bzw. $V^{\frown}$ aus den Elementen $z^{\smile}$ bzw. $z^{\frown}$ bestehen, also die von den Transformationen (7) entworfenen Bilder des Verbandes V sind.

2. 2. Über die Transformationen (7) erfahren wir so nebenbei, daß sie idempotent sind:

(9) $$z^{\smile\smile} = z^{\smile}, \qquad z^{\frown\frown} = z^{\frown}$$

Und da zugleich (8) besteht, so ist $z^{\frown}/z^{\smile}$ nach [A 2, 4. 1., Hilfssatz 1] eine Umreichfunktion. Diese benutzen wir, wenn wir im folgenden um die Verbandelemente Umreiche konstruieren.

[1]) Die Angaben in den eckigen Klammern beziehen sich auf das Literaturverzeichnis am Schlusse der Arbeit.

2. 3. In den Mengen $V^\smile$ und $V^\frown$ erkennen wir leicht Teilbünde von V: Da aus $u \in V^\smile$ und $v \in V^\smile$ offenbar $u \cup v \in V^\smile$ folgt, so ist $u \cup v$ das *k. g. V.* von u und v in $V^\smile$. Es handelt sich jetzt um den *g. g. T.* Da nach Fig. 1 aus $p' \in V^\smile$ und $q' \in V^\smile$ nicht notwendig $p' \cap q' \in V^\smile$ folgt, so ist $V^\smile$ *i. A.* kein Teilverband von V. Doch gibt es zu einem $u \in V^\smile$ und $v \in V^\smile$ in $V^\smile$ immer einen *g. g. T.* Denn zunächst einmal ist $t = (a \cap u \cap v) \cup (b \cap u \cap v)$ offenbar ein $V^\smile$ angehörender Teiler von u und v. Und weiter genügt jeder $V^\smile$ angehörende gemeinsame Teiler von u und v der Gleichung $z = z^\smile$ und $z =\!\!= u \cap v$, also auch $z =\!\!= (u \cap v)^\smile$ d. h. $z =\!\!= t$. Demnach ist t der *g. g. T.* von u und v in $V^\smile$ und $V^\smile$ ein Teilbund von V. Und dual.

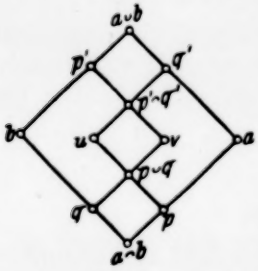


Fig. 1.

Satz 1. Für irgend zwei Elemente a und b eines Verbandes V gilt: Die Menge der nach a und b progressiv zerlegbaren Elemente ist ein Teilbund $V^\smile$ von V. Dieser multipliziert progressiv so wie der Gesamtverband V, regressiv aber nach der Methode

$$(u \cap v)^\smile = (a \cap u \cap v) \cup (b \cap u \cap v). \tag{10}$$

Und dual

2. 4. Von hieraus wird klar, was die Ausdrücke (1) in einem allgemeinen Verbande bedeuten:

$$U^\smile = \frac{a}{a \cap b} \vee \frac{b}{a \cap b} \tag{11 a}$$

und

$$U^\frown = \frac{a \cup b}{a} \wedge \frac{a \cup b}{b} \tag{11 b}$$

sind Teilverbände der Teilbünde $V^\smile$ bzw. $V^\frown$. Und zwar besteht $U^\smile$ aus den $V^\smile$ angehörenden Vielfachen von $a \cap b$ und $U^\frown$ aus den $V^\frown$ angehörenden Teilern von $a \cup b$. Dem Gesamtverbande fügen sich $U^\smile$ und $U^\frown$ als Teilbünde ein. Immerhin multipliziert $U^\smile$ progressiv und $U^\frown$ regressiv so wie V. Fallen also beide bei einem speziellen a, b zusammen, dann als Teilverband von V. Für die modularen Verbände ist charakteristisch, daß dies bei jedem beliebigen a, b zutrifft.

2. 5. Da die Elemente von $V^\smile$ unter $a \cup b$ liegen, die von $V^\frown$ über $a \cap b$, so ist

$$V^\smile \cap V^\frown = U^\smile \cap U^\frown. \tag{12}$$

Dies ist die Menge derjenigen Elemente z, die sowohl progressiv wie regressiv nach a und b zerlegt werden können. Wir wollen sie kurz die nach a und b zerlegbaren Elemente nennen.

Erklärung 1. Zerlegbar nach a und b heißt ein Element, wenn es sowohl progressiv wie regressiv nach a und b zerlegt werden kann.

Die charakteristische Bedingung der Zerlegbarkeit von z nach a und b lautet $z^{\smile} = z = z^{\frown}$. Wegen (8) genügt es, $z^{\smile} = z^{\frown}$ zu fordern. Daher kann man nach 2.2. auch sagen: Zerlegbar nach a und b ist das Element z genau dann, wenn sein Umreich nur aus z allein besteht.

3. Fastzerlegbarkeit nach a und b.

3.1. Diese Bemerkung veranlaßt uns, den Begriff der Zerlegbarkeit wie folgt zu verallgemeinern:

Erklärung 2. Fastzerlegbar nach a und b heißt ein Element, wenn es einem kleinsten Umreich $z^{\frown}/z^{\smile}$ angehört.

Nach [A 2, 4.2., Hilfssatz 2] lautet die charakteristische Bedingung der Fastzerlegbarkeit von z nach a und b

(13) $$z^{\frown\smile} = z^{\smile} \text{ und } z^{\smile\frown} = z^{\frown}$$

oder in Subsumptionsform

(14) $$z^{\frown\smile} =\!(= z =\!(= z^{\smile\frown}$$

Die Ausrechnung ergibt

(15a) $$z^{\frown\smile} = (a \cap (b \cup z)) \cup (b \cap (a \cup z))$$

(15b) $$z^{\smile\frown} = (a \cup (b \cap z)) \cap (b \cup (a \cap z))$$

also für die Bedingung (14) der Fastzerlegbarkeit von z nach a und b

(16) $$(a \cap (b \cup z)) \cup (b \cap (a \cup z)) =\!(= z =\!(= (a \cup (b \cap z)) \cap (b \cup (a \cap z)).$$

3.2. Die Frage läßt sich auf eine bekannte zurückführen: Die Umreichfunktion $z^{\frown}/z^{\smile}$ gestattet die Zerlegung

(17) $$\frac{(a \cup z) \cap (b \cup z)}{(a \cap z) \cup (b \cap z)} = \frac{b \cup z}{a \cap z} \cap \frac{a \cup z}{b \cap z}$$

weil das Zwischenreich links wie der Durchschnitt der beiden Zwischenreiche rechts aus den Elementen besteht, die über $a \cap z$ und $b \cap z$ und unter $b \cup z$ und $a \cup z$ liegen. Entsprechend läßt sich auch die Bedingung (16) in die beiden

(18a) $$a \cap (b \cup z) =\!(= z =\!(= b \cup (a \cap z)$$

(18b) $$b \cap (a \cup z) =\!(= z =\!(= a \cup (b \cap z)$$

zerlegen und das sind nach [A 2, 4.2.] die charakteristischen Bedingungen dafür, daß die Umreichfunktionen $(b \cup z)/(a \cap z)$ bzw. $(a \cup z)/(b \cap z)$ an der Stelle z einen Kleinstwert besitzen. Also gilt:

Hilfssatz 1. Die Umreichfunktion $((a \cup z) \cap (b \cup z))/((a \cap z) \cup (b \cap z))$ besitzt genau an denjenigen Stellen Kleinstwerte, an denen die Funktionen $(b \cup z)/(a \cap z)$ und $(a \cup z)/(b \cap z)$ beide einen Kleinstwert besitzen und ihre Kleinstwerte sind die Durchschnitte der Kleinstwerte jener.

Nun werden doch die Kleinstwerte der Funktionen $(b \cup z)/(a \cap z)$ und $(a \cup z)/(b \cap z)$ nach [A 1, 7. 2.] von den Zwischenreichen der beiden Schwesterperspektivitäten (5) gebildet. Also erhalten wir als vorläufige Antwort auf die Frage nach den fastzerlegbaren Elementen:

Satz 2. 1. Fastzerlegbar nach a und b ist ein Element genau dann, wenn es ein Zwischenelement sowohl der einen wie der anderen der beiden Schwesterperspektivitäten (5) ist.

3. 3. Weiter ergibt der Hilfssatz, daß sich die kleinsten Umreiche als Durchschnitte zweier Zwischenreiche der beiden Schwesterperspektivitäten, je eines von jeder, darstellen lassen, übrigens nur auf eine Art, weil die Zwischenreiche als Kleinstwerte von Umreichfunktionen durch irgend ein Element ihres Durchschnittes bereits bestimmt sind. Umgekehrt ist der Durchschnitt zweier Zwischenreiche der beiden Schwesterperspektivitäten, wenn er nicht leer ist, ein kleinstes Umreich. Über die Frage, wann dies zutrifft, gibt der folgende Hilfssatz Auskunft:

Hilfssatz 2. Zwei Zwischenreiche y_1/x_1 und y_2/x_2 haben genau dann Elemente gemein, wenn $x_1 \cup x_2 =\!(= y_1 \cap y_2$ besteht. In diesem Falle ist

$$\frac{y_1}{x_1} \cap \frac{y_2}{x_2} = \frac{y_1 \cap y_2}{x_1 \cup x_2}. \tag{19}$$

Beweis. Wenn die beiden Zwischenreiche das Element z gemein haben, dann gilt $x_1 =\!(= z =\!(= y_2$ und $x_2 =\!(= z =\!(= y_1$, also auch $x_1 \cup x_2 =\!(= y_1 \cap y_2$. Umgekehrt folgt hieraus, daß die beiden Zwischenreiche die Elemente $x_1 \cup x_2$ und $y_1 \cap y_2$ gemein haben.

Bei Zwischenreichen der beiden Schwesterperspektivitäten (5) ist die Schnittbedingung stets erfüllt. Denn aus den rechten Gleichungen (5) folgt $a =\!(= y_2$ und $b =\!(= y_1$, und somit aus den linken

$$\begin{aligned} x_1 \cup x_2 &= (a \cap y_1) \cup (b \cap y_2) \\ &= (a \cap y_1 \cap y_2) \cup (b \cap y_1 \cap y_2) =\!(= y_1 \cap y_2. \end{aligned} \tag{20}$$

Damit ist bewiesen:

Satz 2. 2. Irgend zwei Zwischenreiche y_1/x_1 und y_2/x_2 der beiden Schwesterperspektivitäten (5) bilden einen nicht-leeren Durchschnitt $(y_1 \cap y_2)/(x_1 \cup x_2)$ und die Kleinstwerte der Umreichfunktion $z^\frown/z^\smile$ sind nichts anderes als diese Durchschnitte.

Da jedes fastzerlegbare Element einem kleinsten Umreich angehört, ein kleinstes Umreich nur fastzerlegbare Elemente enthält und irgend zwei kleinste Umreiche elementefremd sind, so sind die kleinsten Umreiche d. h. jene Durchschnitte elementefremde Klassen, auf die sich die fastzerlegbaren Elemente verteilen.

4. Zusammensetzung der Schwesterperspektivitäten.

4. 1. In den modularen Verbänden gilt wegen $x_1 =\!(= y_2$ über (20) hinaus $x_1 \cup x_2 = x_1 \cup (b \cap y_2) = (x_1 \cup b) \cap y_2 = y_1 \cap y_2$. Hier haben

also irgend zwei Zwischenreiche der beiden Schwesterperspektivitäten genau ein Element gemein, so daß Fastzerlegbarkeit nach a und b Zerlegbarkeit nach a und b bedeutet.

In einem allgemeinen Verbande dagegen tritt an die Stelle der Gleichung $x_1 \cup x_2 = y_1 \cap y_2$ eine Isomorphie. Wir erhalten sie, wenn wir die beiden Schwesterperspektivitäten (5) dadurch zusammensetzen, daß wir die Örter $x = x_1 \cup x_2$ und $y = y_1 \cap y_2$ der Durchschnitte

$$\frac{y}{x} = \frac{y_1}{x_1} \cap \frac{y_2}{x_2} \tag{21}$$

welche die Zwischenreiche der einen Perspektivität mit denen der anderen bilden, einander zuordnen. Da diese Durchschnitte nämlich die kleinsten Umreiche $z^{\frown}/z^{\smile}$ darstellen, so ergibt sich nach [A 2, Hilfssatz 3] so die Austauschisomorphie

$$x = (a \cap y) \cup (b \cap y), \qquad y = (a \cup x) \cap (b \cup x). \tag{22}$$

Gleich den Perspektivitäten genügt sie $x \overset{=}{\frown} y$, so daß wir von ihren Zwischenreichen y/x sprechen können. Nennen wir sie eine (spezielle) Überperspektivität, dann gilt also: Die Durchschnitte der Zwischenreiche der beiden Schwesterperspektivitäten (5) sind die Zwischenreiche der Überperspektivität (22).

4. 2. Die eben durch Zusammensetzung der beiden Schwesterperspektivitäten gewonnene Überperspektivität soll jetzt wieder in die beiden Schwesterperspektivitäten zerlegt werden: Nach 3. 3. ist die Zerlegung (21) ihrer Zwischenreiche y/x in Zwischenreiche der beiden Schwesterperspektivitäten eindeutig. Diese Eindeutigkeit überträgt sich auf die Zerlegungen

$$x = x_1 \cup x_2 \text{ mit } x_1 \in a/(a \wedge b) \text{ und } x_2 \in b/(a \wedge b) \tag{23a}$$

$$y = y_1 \cap y_2 \text{ mit } y_1 \in (a \vee b)/b \text{ und } y_2 \in (a \tilde{\vee} b)/a \tag{23b}$$

der Örter der Zwischenreiche. Da nämlich y/x ein kleinstes Umreich ist, so bestimmt x das Umreich y/x, dieses, wie gesagt die Zwischenreiche y_1/x_1 und y_2/x_2, letztere x_1 und x_2. Und dual. Ist ferner $z \in y/x$, dann deckt sich die Zerlegung (21) mit der Zerlegung (17). Daher ist

$$x_1 = a \cap z, \quad x_2 = b \cap z \tag{24a}$$

$$y_1 = b \cup z, \quad y_2 = a \cup z \qquad \text{mit } z \in y/x. \tag{24b}$$

Wählt man in (24a) $z = x$, in (24b) $z = y$, so ergibt sich insbesondere

$$x_1 = a \cap x, \quad x_2 = b \cap x \tag{25a}$$

$$y_1 = b \cup y, \quad y_2 = a \cup y. \tag{25b}$$

Ist also $x \overset{\frown}{\smile} y$ die Überperspektivität, dann sind $a \cap x \overset{\frown}{\smile} b \cup y$ und $b \cap x \overset{\frown}{\smile} a \cup y$ die beiden Schwesterperspektivitäten. In der Tat braucht man, was gestattet ist, in (25) nur x und y zu vertauschen, um Gleichungen zu erhalten, aus denen sofort die Gleichungen (5) der beiden Schwesterperspektivitäten hervorgehen.

4. 3. Nebenbei haben wir bemerkt, daß die Funktionen $a \cap z$, $b \cap z$, $a \cup z$ und $b \cup z$ innerhalb eines kleinsten Umreiches $c^\frown/c^\smile$ konstant sind. Wir können hinzufügen, daß mindestens eine von ihnen ihren Wert ändert, wenn die Variable z das Umreich $c^\frown/c^\smile$ verläßt. Denn aus der Konstanz aller folgt die von $z^\frown/z^\smile$ und $z^\frown/z^\smile$ hat nur innerhalb $c^\frown/c^\smile$ den Wert $c^\frown/c^\smile$.

Erklärung 3. Die Elemente x und y heißen für a und b kongruent, wenn

(26 a) $$a \cap x = a \cap y, \quad b \cap x = b \cap y$$

(26 b) $$a \cup x = a \cup y, \quad b \cup x = b \cup y$$

besteht. Wir schreiben dann kurz $x \equiv y \ (a, b)$.

Ein kleinstes Umreich $c^\frown/c^\smile$, so können wir jetzt sagen, ist eine Klasse für a und b kongruenter Elemente.

4. 4. Wir fassen die Ergebnisse zusammen:

Satz 3. Für irgend zwei Elemente a und b eines Verbandes gilt: Die Schwesterperspektivitäten

(27 a) $$x_1 = a \cap y_1, \quad y_1 = b \cup x_1$$

(27 b) $$x_2 = b \cap y_2, \quad y_2 = a \cup x_2$$

lassen sich wie folgt zusammensetzen: Jedes Zwischenreich y_1/x_1 der ersten Perspektivität hat mit jedem Zwischenreich y_2/x_2 der zweiten Elemente gemein. Insgesamt bilden diese ebenfalls ein Zwischenreich

(28) $$\frac{y}{x} = \frac{y_1}{x_1} \cap \frac{y_2}{x_2}.$$

Ordnen wir die Örter dieser Zwischenreiche einander zu, dann erhalten wir die Austauschisomorphie

(29) $$x = (a \cap y) \cup (b \cap y), \quad y = (a \cup x) \cap (b \cup x)$$

(die deshalb eine Überperspektivität heißen mag).

Zwischen den Örtern der Zwischenreiche (28) bestehen die Beziehungen

(30 a) $$x = x_1 \cup x_2$$

(30 b) $$y = y_1 \cap y_2$$

und

(31 a) $$x_1 = a \cap x, \quad x_2 = b \cap x$$

(31 b) $$y_1 = b \cup y, \quad y_2 = a \cup y.$$

Sind daher $x_1 \rightleftarrows y_1$ und $x_2 \rightleftarrows y_2$ die beiden Schwesterperspektivitäten, dann ist $x \cup x \rightleftarrows y_1 \cap y_2$ die Überperspektivität. Ist $x \rightleftarrows y$ die Überperspektivität, dann sind $a \cap x \rightleftarrows b \cup y$ und $b \cap x \rightleftarrows a \cup y$ die beiden Schwesterperspektivitäten.

Zusatz. Das aus den Gleichungen (27) der beiden Schwestesperspektivitäten und den Zusammensetzungsformeln (30) bestehende Gleichungssystem ist dem aus den Gleichungen (29) der Überperspektivität und den Zerlegungsformeln (31) bestehenden Gleichungssystem auf Grund der Verbandaxiome gleichwertig.

Folgerung. Die Zwischenreiche der Überperspektivität sind Klassen für a und b kongruenter Elemente. Es sind die Klassen der nach a und b fastzerlegbaren Elemente.

5. Die Überperspektivität.

5. 1. Die Überperspektivität (29), die nach 4. 1 in den modularen Verbänden stets als identische Zuordnung auftritt, ist in einem allgemeinen Verbande die Zuordnung $x \rightleftarrows y$ der Örter x und y der kleinsten Umreiche. Das läßt sich noch besser sagen: Ein jedes Umreich $z^\frown/z^\smile$ verbindet ein progressiv nach a und b zerlegbares Element $z^\smile$ mit einem regressiv nach a und b zerlegbarem Element $z^\frown$. Für die kleinsten Umreiche ist charakteristisch, daß sie kein weiteres progressiv oder regressiv nach a und b zerlegbares Element enthalten. Also gibt es zu jedem progressiv nach a und b zerlegbarem Element x, das einem kleinsten Umreich angehört, genau ein regressiv nach a und b zerlegbares Element y, das demselben (kleinsten) Umreich angehört, und umgekehrt. Eben diese Elemente x und y ordnet die Überperspektivität einander zu.

5. 2. Demnach ist sie eine Isomorphie zwischen den Mengen derjenigen nach a und b fastzerlegbaren Elemente, die progressiv bzw. regressiv nach a und b zerlegt werden können. Das sind nach dem Mengenisomorphiesatz [A 2, Satz 1] die Mengen $V^{\smile\smile}$ und $V^{\frown\frown}$ der Deckelemente der Transformationen $z^{\smile\smile}$ bzw. $z^{\frown\frown}$. Aus ihren Gleichungen $z = z^{\smile\smile}$ bzw. $z = z^{\frown\frown}$ oder auch sofort aus (23) folgt

$$V^{\smile\smile} = \frac{a}{a \wedge b} \vee \frac{b}{a \wedge b} \tag{32 a}$$

$$V^{\frown\frown} = \frac{a \vee b}{a} \wedge \frac{a \vee b}{b}. \tag{32 b}$$

Ein Deckelement jener Transformationen ist übrigens jedes Bildelement, denn nach [A 1, 6. 2.] gilt für beliebige z ja $a \cap (b \cup z) \in a/(a \wedge b)$ und $b \cap (a \cup z) \in b/(a \wedge b)$, also nach (15 a) auch $z^{\smile\smile} \in V^{\smile\smile}$. Und dual. Hiernach sind $V^{\smile\smile}$ und $V^{\frown\frown}$ die von den Transformationen $z^{\smile\smile}$ bzw. $z^{\frown\frown}$ entworfenen Bilder des Gesamtverbandes V.

5. 3. Nebenbei hat sich die Idempotenz dieser Transformationen ergeben:

$$z^{\smile\smile\smile\smile} = z^{\smile\smile}, \quad z^{\frown\frown\frown\frown} = z^{\frown\frown}. \tag{33}$$

Aus (33) und (9) folgt nach [A 2, 3.], daß die sechs Transformationen $z^\smile$, $z^\frown$, $z^{\smile\frown}$, $z^{\frown\smile}$, $z^{\smile\smile}$ und $z^{\frown\frown}$ eine Halbgruppe von Idempotenten bilden,

und für die Überperspektivität ergeben sich so die beiden Parameterdarstellungen

$$z^{\smile\frown} \rightleftarrows z^{\frown\smile} \text{ und } z^{\frown\smile\frown} \rightleftarrows z^{\smile\frown\smile} \text{ mit } z \in V. \tag{34}$$

5. 4. Die Beschreibung 5. 1. der Überperspektivität läßt sich noch weiter vereinfachen. Offenbar gilt

$$V^{\smile\frown} =\!\!(V^{\smile}, \quad V^{\frown\smile} =\!\!(V^{\frown}. \tag{35}$$

Ein $x \in V^{\smile}$ und $y \in V^{\frown}$ genügendes Zwischenreich y/x soll ein Zwischenreich von $V^{\smile}$ und $V^{\frown}$ heißen und ein kürzestes Zwischenreich[1]) dieser Teilbünde, wenn es kein andereres Zwischenreich von ihnen umfaßt. x/y ist genau dann ein kürzestes Zwischenreich von $V^{\smile}$ und $V^{\frown}$, wenn es mit $V^{\smile}$ das Element x und nur x und mit $V^{\frown}$ das Element y und nur y gemein hat. Die Zwischenreiche der Überperspektivität (29) sind nach 5. 1. solche kürzesten Zwischenreiche von $V^{\smile}$ und $V^{\frown}$. Es sei umgekehrt y/x ein kürzestes Zwischenreich von $V^{\smile}$ und $V^{\frown}$. Dann hat man $x = x^{\smile} =\!\!(y = y^{\frown}$ und folglich $x =\!\!(x^{\frown} =\!\!(y$ sowie $x =\!\!(y^{\smile} =\!\!(y$. Da $x^{\frown} \in V^{\frown}$ und $y^{\smile} \in V^{\smile}$ gilt, so folgt $x^{\frown} = y$ und $y^{\smile} = x$. Also ist y/x ein Zwischenreich der Überperspektivität (29). Im ganzen ist bewiesen: Die Zwischenreiche der Überperspektivität (29) werden von den kürzesten Zwischenreichen der Teilbünde der progressiv bzw. regressiv nach a und b zerlegbaren Elemente gebildet.

5. 5. Die kürzesten Zwischenreiche von $V^{\smile}$ und $V^{\frown}$ verbinden also die $x \in V^{\smile\frown}$ mit $y \in V^{\frown\smile}$ und umgekehrt. Daher sind sie zugleich kürzeste Zwischenreiche von $V^{\smile\frown}$ und $V^{\frown\smile}$. Es sei umgekehrt y/x ein kürzestes Zwischenreich von $V^{\smile\frown}$ und $V^{\frown\smile}$. Dann finden wir wie eben $x =\!\!(x^{\frown} =\!\!(y$ und $x =\!\!(y^{\smile} =\!\!(y$. Und da, aus $x \in V^{\smile\frown}$ und $y \in V^{\frown\smile}$ folgend, $x^{\frown} \in V^{\smile\frown}$ und $y^{\smile} \in V^{\smile\frown}$ gilt, so ist wieder $x^{\frown} = y$ und $y^{\smile} = x$. Also ist y/x ein Zwischenreich der Überperspektivität und folglich ein kürzestes Zwischenreich von $V^{\smile}$ und $V^{\frown}$. Im ganzen: Ein kürzestes Zwischenreich von $V^{\smile\frown}$ und $V^{\frown\smile}$ ist ein kürzestes Zwischenreich von $V^{\smile}$ und $V^{\frown}$ und umgekehrt.

5. 6. Wir fassen die Hauptergebnisse zusammen:

Satz 4. Die Austauschisomorphie

$$x = (a \cap y) \cup (b \cap y), \quad y = (a \cup x) \cap (b \cup x) \tag{36}$$

(„Überperspektivität") ist die Zuordnung $x \rightleftarrows y$ solcher progressiv bzw. regressiv nach a und b zerlegbarer Elemente x und y, die $x =\!\!(y$ genügen und zwischen sich kein weiteres progressiv oder regressiv nach a und b zerlegbares Element enthalten. Ihre Zwischenreiche y/x werden durch die Kleinstwerte der Umreichfunktion

$$U(z) = \frac{(a \cup z) \cap (b \cup z)}{(a \cap z) \cup (b \cap z)} \tag{37}$$

[1]) In [A 2, 4. 4. bis 4. 6.] „kleinstes Zwischenreich".

dargestellt. Daher ist die Überperspektivität (36) eine Isomorphie

$$\frac{a}{a\wedge b} \vee \frac{b}{a\wedge b} \sim \frac{a\vee b}{a} \wedge \frac{a\vee b}{b} \tag{38}$$

zwischen den Mengen derjenigen nach a und b fastzerlegbaren Elemente, die progressiv bzw. regressiv nach a und b zerlegt werden können. Sie ist durch diese beiden Mengen bestimmt. Zu jedem Element x der ersten Menge nämlich gibt es genau ein Element y der zweiten, so daß $x = y$ besteht und zwischen x und y kein weiteres Element der einen oder anderen Menge liegt, und umgekehrt. Eben diese Elemente ordnet die Überperspektivität einander zu. — Die Überperspektivität gestattet die beiden Parameterdarstellungen

$$\begin{aligned} x &= (a\cap(b\cup z))\cup(b\cap(a\cup z)),\\ y &= (b\cup(a\cap(b\cup z)))\cap(a\cup(b\cap(a\cup z))) \end{aligned} \tag{39 a}$$

$$\begin{aligned} x &= (a\cap(b\cup(a\cap z)))\cup(b\cap(a\cup(b\cap z)))\\ y &= (b\cup(a\cap z))\cap(a\cup(b\cap z)). \end{aligned} \tag{39 b}$$

Folgerung 1. Die Menge $F(a, b)$ der nach a und b fastzerlegbaren Elemente ist durch die Mengen $V^{\frown}$ und $V^{\frown}$ derjenigen fastzerlegbaren Elemente, die progressiv bzw. regressiv nach a und b zerlegt werden können, bestimmt. Sie besteht nämlich aus den Elementen der kürzesten Zwischenreiche von $V^{\frown}$ und $V^{\frown}$. — Daher scheint für sie das Symbol

$$F(a, b) = \frac{\dfrac{a\vee b}{a} \wedge \dfrac{a\vee b}{b}}{\dfrac{a}{a\wedge b} \vee \dfrac{b}{a\wedge b}} \tag{40}$$

passend zu sein.

Ist $z\in F(a, b)$, dann sind $z^{\frown}$ und $z^{\frown}$ Elemente, die sich in der Überperspektivität entsprechen. Und da sich jedes Paar entsprechender Elemente so darstellen läßt, so hat man:

Folgerung 2. Die Überperspektivität (36) gestattet die Parameterdarstellung

$$x = (a\cap z)\cup(b\cap z),\ y = (a\cup z)\cap(b\cup z) \text{ mit } z\in F(a, b). \tag{41}$$

Sie geht aus den Parameterdarstellungen (39) bzw. (34) durch (13) hervor. — Hier tritt wieder der Zusammenhang mit den beiden Schwesterperspektivitäten (5) deutlich zutage. Denn

$$x_1 = a\cap z,\ y_1 = b\cup z \text{ mit } z\in F(a, b) \tag{42 a}$$

bzw.

$$x_2 = b\cap z,\ y_2 = a\cup z \text{ mit } z\in F(a, b) \tag{42 b}$$

sind zufolge [A 1. 7. 2.] Parameterdarstellungen dieser Schwesterperspektivitäten.

Aus Satz 4 folgt ferner noch, daß die Deckelemente der Überperspektivität von den $V^{\smile\frown}$ und $V^{\frown\smile}$ gemeinsamen Elementen gebildet werden. Andererseits folgt schon aus den Gleichungen (36) der Überperspektivität, daß sie von den nach a und b zerlegbaren Elementen gebildet werden, also von den Elementen der Menge $V^{\smile}\cap V^{\frown} = U^{\smile}\cap U^{\frown}$. Demnach gilt:

Folgerung 3. Der Durchschnitt der beiden Mengen $V^{\smile\frown}$ und $V^{\frown\smile}$ besteht aus den nach a und b zerlegbaren Elementen. Als Formel:

$$(43)\quad \left(\frac{a}{a\wedge b}\vee\frac{b}{a\wedge b}\right)\cap\left(\frac{a\vee b}{a}\wedge\frac{a\vee b}{b}\right)=\left(\frac{a}{a\cap b}\vee\frac{b}{a\cap b}\right)\cap\left(\frac{a\cup b}{a}\wedge\frac{a\cup b}{b}\right).$$

Genau die nach a und b zerlegbaren Elemente sind die Deckelemente der Überperspektivität.

6. Die Teilbünde $V^{\smile\frown}$ und $V^{\frown\smile}$.

6. 1. Zerlegbar nach a und b sind insbesondere die Elemente der „kleinen Teilbünde" $a/(a\wedge b)$, $b/(a\wedge b)$, $(a\vee b)/b$ und $(a\vee b)/a$. Also umfaßt jede der beiden Mengen $V^{\smile\frown}$ und $V^{\frown\smile}$ sowohl die Faktoren, aus denen sie selbst sich nach (32) zusammensetzt, wie auch die Faktoren, aus denen sich die andere zusammensetzt.

6. 2. Wir wollen jetzt zeigen, daß $V^{\smile\frown}$ und $V^{\frown\smile}$ ebenfalls Teilbünde von V sind. Den Ausgangspunkt bildet der

Hilfssatz 3. Die Zerlegung $x = x_1\cup x_2$ eines $x\in V^{\smile\frown}$ nach $V_1^{\frown\smile} = a/(a\wedge b)$ und $V_2^{\frown\smile} = b/(a\wedge b)$ ist eindeutig. Sie zerlegt x in seine größten progressiven Komponenten nach a und b. Und dual.

Ein Beweis des Hilfssatzes hat sich schon in 4. 2. ergeben. Wir bestätigen ihn durch einen zweiten: Da die Teilbünde $V_1^{\frown}$ und $V_2^{\smile}$ nach [A 1, 6. 2.] die Gleichungen $z = a\cap(b\cup z)$ bzw. $z = b\cap(a\cup z)$ haben, so hat man $x_1 = a\cap(b\cup x_1)$ und $x_2 = b\cap(a\cup x_2)$, also wegen $x_1 \mathrel{=\!\!(} a$ und $x_2 \mathrel{=\!\!(} b$ auch $x_1 = a\cap(b\cup x)$ und $x_2 = b\cap(a\cup x)$. Hiernach ist die Zerlegung eindeutig. Es folgt $x_1 \mathrel{=\!\!)} a\cap x$ und $x_2 \mathrel{=\!\!)} b\cap x$. Andererseits ist, weil es sich um eine Zerlegung nach a und b handelt, nach [A 1, 4. 3.] $x_1 \mathrel{=\!\!(} a\cap x$ und $x_2 \mathrel{=\!\!(} b\cap x$. Also ist $x_1 = a\cap x$ und $x_2 = b\cap x$.

6. 3. $V^{\smile\frown}$ ist eine Teilmenge von $V^{\smile}$ und $V^{\frown}$ ein Teilbund von V, der regressiv nach der Methode (10) multipliziert. Ist speziell $u\in V^{\smile\frown}$ und $v\in V^{\smile\frown}$, dann ist nach dem letzten Hilfssatz $a\cap u\in V_1^{\frown\smile}$ und $a\cap v\in V_1$. Und da $V_1^{\frown\smile}$ regressiv wie V multipliziert, so ist auch $a\cap u\cap\in v V_1^{\frown}$. Entsprechend ist $b\cap u\cap v\in V_2^{\frown\smile}$. Daraus folgt, daß $(a\cap u\cap v)\cup(b\cap u\cap v)\in V^{\smile\frown}$ ist. Folgt also aus $u\in V^{\smile\frown}$ und $v\in V^{\smile\frown}$ immer $(u\cap v)^{\smile}\in V^{\frown\smile}$, dann ist $(u\cap v)^{\smile}$ der g. g. T. von u und v wie in $V^{\smile}$ so a fortiori in $V^{\smile\frown}$. Besitzen aber irgend zwei Elemente von $V^{\frown\smile}$ in $V^{\smile\frown}$ einen g. g. T. und dual irgend zwei von $V^{\frown\smile}$ in $V^{\frown\smile}$ ein k. g. V., dann sind die isomorphen Mengen $V^{\smile\frown}$ und $V^{\frown\smile}$ nach [A 1. 3.] Teilbünde von V, und zwar isomorphe.

Von diesen Teilbünden multipliziert also $V^{\frown}$ regressiv so wie $V^{\smile}$ und $V^{\frown}$ progressiv so wie $V^{\frown}$. Das progressive Produkt eines $u \in V^{\frown}$ und $v \in V^{\frown}$ ermitteln wir auf dem Umwege über die Überperspektivität: Diese führt u und v in die Elemente $u^{\frown}$ bzw. $v^{\frown}$ von $V^{\frown}$ über, die in $V^{\frown}$ das progressive Produkt $(a \cup u^{\frown} \cup v^{\frown}) \cap (b \cup u^{\frown} \cup v^{\frown})$ bilden. Da nach der Folgerung aus Satz 3 die Elemente $u^{\frown}$ und $v^{\frown}$ zu u bzw. v für a und b kongruent sind, so läßt sich das Produkt einfacher $(a \cup u \cup v) \cap (b \cup u \cup v)$, kurz $(u \cup v)^{\frown}$ schreiben. Ihm entspricht durch die Überperspektivität in $V^{\frown}$

$$(44) \qquad (u \cup v)^{\frown} = (a \cap (b \cup u \cup v)) \cup (b \cap (a \cup u \cup v)).$$

Dies ist das k. g. V. von u und v in $V^{\frown}$. Und dual.

6. 4. Wir bestätigen diese Ergebnisse durch einen zweiten Beweis: Ordnen wir jedem $x \in V^{\frown}$ das Paar (x_1, x_2) seiner Komponenten nach $V_1^{\frown}$ und $V_2^{\frown}$ zu, dann entsteht nach dem Hilfssatz 3 eine umkehrbar eindeutige Abbildung $x \rightleftarrows (x_1, x_2)$ der Menge $V^{\frown}$ auf die Menge $V_1^{\frown} . V_2^{\frown}$ der Paare (x_1, x_2) mit $x_1 \in V_1^{\frown}$ und $x_2 \in V_2^{\frown}$. Setzen wir $(x_1, x_2) =\!(= (x_1', x_2')$, wenn $x_1 =\!(= x_1'$ und $x_2 =\!(= x_2'$ ist, dann folgt aus $x =\!(= x'$ nach dem Hilfssatz 3 immer $(x_1, x_2) =\!(= (x_1', x_2')$ und umgekehrt aus $(x_1, x_2) =\!(= (x_1', x_2')$ immer $x =\!(= x'$. Also ist $V^{\frown} \sim V_1^{\frown} . V_2^{\frown}$. Und dual. Wir haben also

$$(45\,a) \qquad \frac{a}{a \wedge b} \vee \frac{b}{a \wedge b} \sim \frac{a}{a \wedge b} \cdot \frac{b}{a \wedge b}$$

$$(45\,b) \qquad \frac{a \vee b}{a} \wedge \frac{a \vee b}{b} \sim \frac{a \vee b}{a} \cdot \frac{a \vee b}{b}.$$

Da $V_1^{\frown}$ und $V_2^{\frown}$ Verbände sind, so ist auch $V_1^{\frown} . V_2^{\frown}$ einer. Ist aber $V_1^{\frown} . V_2^{\frown}$ ein Verband, dann ist auch die $V_1^{\frown} . V_2^{\frown}$ isomorphe Menge $V^{\frown}$ einer. Und da $V^{\frown}$ ein Verband ist hinsichtlich der Subsumptionsbeziehung von V, so ist $V^{\frown}$ ein Teilbund von V. Und dual.

In Fortführung dieses Gedankenganges gewinnt man die Multiplikationsformeln von $V^{\frown}$ aus denen von $V_1^{\frown}$ und $V_2^{\frown}$ über die von $V_1^{\frown} . V_2^{\frown}$. Und dual. Kurz gesagt, kann man in $V^{\frown}$ wie in $V^{\frown}$ „komponentenweise" multiplizieren.

6. 5. Nach 6. 1. umfaßt der Teilbund $V^{\frown}$ die Teilbünde $V_1^{\frown}$ und $V_2^{\frown}$. Und da aus dem Hilfssatz 3 folgt, daß diese jeden $V^{\frown}$ angehörenden Teiler von a bzw. b enthalten, so stellen sie die Teilverbände der $V^{\frown}$ angehörenden Teiler von a bzw. b dar. Also sind sie progressive Hauptideale von $V^{\frown}$. Und dual.

Die Zerlegung $x = x_1 \cup x_2$ der $x \in V^{\frown}$ nach jenen Hauptidealen ist auch insofern eine interne Angelegenheit von $V^{\frown}$, als sie zufolge der Schlußbemerkung von [A 1, 2.] als eine mit der $V^{\frown}$ eigentümlichen progressiven Multiplikation ausgeführte Zerlegung aufgefaßt werden kann. In der Tat geht (44) für ein $u \in V_1^{\frown}$ und ein $v \in V_2^{\frown}$ in $(u \cup v)^{\frown} = (a \cap (b \cup u)) \cup (b \cap (a \cup v)) = u \cup v$ über. Und dual. — Da also alle $x \in V^{\frown}$ innerhalb $V^{\frown}$ auf genau eine Art progressiv nach a und b zerlegt werden können, so sind a und b komplementäre neutrale Elemente

von $V^{\sim}$. Demnach sind $V_1^{\sim}$ und $V_2^{\sim}$ von komplementären neutralen Elementen des Teilbundes $V^{\sim}$ erzeugte progressive Hauptideale von $V^{\sim}$. Und dual.

6. 6. Nach 6. 1. werden die Teilbünde $V_1^{\sim}$ und $V_2^{\sim}$ auch von dem zu $V^{\sim}$ dualen Teilbund $V^{\frown}$ umfaßt. Es gehört also jeder $V^{\sim}$ angehörende Teiler von a oder b auch $V^{\sim\frown}$ an. Hiervon gilt auch die Umkehrung: Ein $V^{\frown}$ angehörender Teiler u von a genügt $u=(a\cup u)\cap(b\cup u)=a\cap(b\cup u)$ d. h. der Gleichung von $V_1^{\sim}$. Also gehört er $V^{\sim}$ an. Demnach werden $V_1^{\sim}$ und $V_2^{\sim}$ auch von dem Teilbund $V^{\frown}$ als von komplementären neutralen Elementen erzeugte progressive Hauptideale umfaßt. Und dual.

6. 7. Wir wollen schließlich noch bemerken, daß die Teilbünde $V^{\sim}$ und $V^{\frown}$ mit a und b so multiplizieren wie der Gesamtverband V. Aus $x\in V^{\sim}$ folgt nämlich, wie gesagt, $a\cap x\in V_1^{\sim}$ und somit $a\cap x\in V^{\sim}$ und andererseits ist wegen der progressiven Zerlegbarkeit von x nach a und b offenbar $a\cup x\in V_2^{\frown}$ und somit $a\cup x\in V^{\frown}$. Also stellen $a\cap x$ und $a\cup x$ den g. g. T. bzw. das k. g. V. von a und x in $V^{\sim}$ dar. — Im ganzen hat sich ergeben:

Satz 5. Für irgend zwei Elemente a und b eines Verbandes V gilt: Die Menge

$$V^{\sim}=\frac{a}{a\wedge b}\vee\frac{b}{b\wedge a} \tag{46}$$

derjenigen nach a und b fastzerlegbaren Elemente, die progressiv nach a und b zerlegt werden können, ist ein Teilbund von V. Dieser multipliziert regressiv so wie der Teilbund $V^{\sim}$ der progressiv nach a und b zerlegbaren Elemente, nämlich nach der Methode

$$(u\cap v)^{\sim}=(a\cap u\cap v)\cup(b\cap u\cap v) \tag{47}$$

progressiv dagegen nach der Formel

$$(u\cup v)^{\sim}=(a\cap(b\cup u\cup v))\cup(b\cap(a\cup u\cup v)). \tag{48}$$

Mit a und b multipliziert er daher wie der Gesamtverband.

Er umfaßt die Teilbünde $a/(a\wedge b)$ und $b/(a\wedge b)$ als die von a bzw. b erzeugten progressiven Hauptideale, ebenso aber auch die Teilbünde $(a\vee b)/a$ und $(a\vee b)/b$ als die von a und b erzeugten regressiven Hauptideale. a und b sind komplementäre neutrale Elemente von ihm.

Und dual.

Folgerung. Die Überperspektivität (36) ist eine Teilbundisomorphie.

Fig. 1 gibt ein einfaches Beispiel zu unseren Sätzen. Hier sind alle Elemente nach a und b fastzerlegbar, die Randelemente sogar zerlegbar. Es ist $V^{\sim}=V^{\sim}$ und $V^{\sim\frown}=V^{\frown}$. Die beiden Teilbünde enthalten außer den Randelementen, die ihren Durchschnitt ausmachen, nur noch je ein Element, nämlich $p\cup q$ bzw. $p'\cap q'$. Die Elemente u, v, $p\cup q$ und $p'\cap q'$ erfüllen ein kleinstes Umreich, alle anderen kleinsten Umreiche bestehen nur aus einem einzigen Element.

7. Einschaltung über den Kongruenzbegriff.

7. 1. Da die Funktionen $z^\smile$ und $z^\frown$ außer den Zerlegungen (7) nach [A 1, 4. 3.] auch die Zerlegungen $z^\frown = (a \cap z^\smile) \cup (b \cap z^\smile)$ bzw. $z^\smile = (a \cup z^\frown) \cap (b \cup z^\frown)$ gestatten und dies die Zerlegungen in ihre größten progressiven bzw. kleinsten regressiven Komponenten nach a und b sind, andererseits aber (8) besteht, so hat man:

(49 a) $\qquad a \cap z^\smile = a \cap z, \quad b \cap z^\smile = b \cap z$

(49 b) $\qquad a \cup z^\frown = a \cup z, \quad b \cup z^\frown = b \cup z.$

Daraus folgt: Besitzt die Funktion $z^\smile = (a \cap z) \cup (b \cap z)$ an den Stellen x und y gleiche Werte, dann besitzen auch ihre Faktoren $a \cap z$ und $b \cap z$ an diesen Stellen gleiche Werte. Und dual.

7. 2. Damit kommen wir auf den Kongruenzbegriff zurück, auf den wir in 4. 2. stießen: Aus $x \equiv y\ (a, b)$ folgt offenbar $x^\frown / x^\smile = y^\frown / y^\smile$. Nach 7. 1. gilt auch die Umkehrung. Demnach sind zwei Elemente genau dann für a und b kongruent, wenn sie gleiche Umreiche besitzen. Damit haben wir den Anschluß an den in [A 2, 4. 7.] für beliebige Umreichfunktionen entwickelten Kongruenzbegriff gewonnen.

Für unsere spezielle Umreichfunktion $z^\frown / z^\smile$ gilt folgendes: Die Klasse $z \equiv c$ der c kongruenten Elemente besteht aus der Gesamtheit der $z^\frown / z^\smile = c^\frown / c^\smile$ genügenden Elemente z. Sie wird von der Klassenkonstanten $c^\frown / c^\smile$ umfaßt. Fällt sie mit dieser zusammen, dann sprechen wir von einer Sonderklasse. Nach [A 2, 4. 7. 1.] ist ein kleinstes Umreich eine Sonderklasse für a und b kongruenter Elemente und umgekehrt.

Nach [A 2, 4. 7. 2.] enthält eine Klasse $z \equiv c$ für a und b kongruenter Elemente höchstens ein progressiv nach a und b zerlegbares Element und höchstens ein regressiv zerlegbares. (Dies sind gegebenenfalls die Elemente $c^\smile$ und $c^\frown$). Enthält sie sowohl ein progressiv wie ein regressiv zerlegbares, genau dann ist sie eine Sonderklasse.

Demnach sind die kleinsten Umreiche $z^\frown / z^\smile$ nichts anderes als diejenigen Klassen für a und b kongruenter Elemente, die sowohl ein progressiv wie ein regressiv nach a und b zerlegbares Element enthalten, und die nach a und b fastzerlegbaren Elemente diejenigen Element, die sowohl einem progressiv wie einem regressiv nach a und b zerlegbaren Elemente für a und b kongruent sind. In der Tat läßt sich die charakteristische Bedingung (13) der Fastzerlegbarkeit von z nach a und b

(50) $\qquad (a \cap z) \cup (b \cap z) \equiv (a \cup z) \cap (b \cup z) \qquad (a, b)$

schreiben, was auf $z^\smile \equiv z \equiv z^\frown$ hinausläuft.

8. Die fastzerlegbaren Elemente.

8. 1. Mit Hilfe des Kongruenzbegriffes läßt sich die Überperspektivität (36) im Anschluß an [A 2, 4. 7. 2., Satz 5] wie folgt beschreiben:

Zu einem progressiv nach a und b zerlegbaren Element x gibt es höchstens ein für a und b kongruentes Element y, das regressiv nach a und b zerlegbar ist, und umgekehrt. Die Austauschisomorphie $x = y^{\smile}$, $y = x^{\frown}$ („Überperspektivität") ist die Zuordnung $x \rightleftarrows y$ derjenigen progressiv bzw. regressiv nach a und b zerlegbaren Elemente x und y, die einander für a und b tatsächlich kongruent sind. Sie läßt daher fest genau die nach a und b zerlegbaren Elemente. Im übrigen genügt sie $x =(= y$ und die Zwischenreiche y/x sind Klassen für a und b kongruenter Elemente. Es sind die Klassen der nach a und b fastzerlegbaren Elemente.

8. 2. Diese Klassen können offenbar als die Elemente eines den beiden Teilbünden $V^{\smile\smile}$ und $V^{\frown\frown}$ isomorphen Verbandes aufgefaßt werden. Statt dessen können wir auch mit den nach a und b fastzerlegbaren Elementen selbst arbeiten, wenn wir statt der Gleichungen Kongruenzen schreiben. Wir erhalten so zwei Verknüpfungsweisen der fastzerlegbaren Elemente, bei denen die Produkte $u \underset{F}{\cap} v$ und $u \underset{F}{\cap} v$ innerhalb einer Klasse fastzerlegbarer Elemente unbestimmt sind, sich andererseits aber auch nicht ändern, wenn man die Faktoren innerhalb solcher Klassen variiert. Um $u \underset{F}{\cap} v$ zu berechnen, ersetzen wir u und v am besten durch die kongruenten Elemente $u^{\smile}$ bzw. $v^{\smile}$. Da diese $V^{\smile\smile}$ angehören, so können wir sie nach (47) regressiv multiplizieren. Und da sich in dem Ergebnis $u^{\smile}$ und $v^{\smile}$ nach (49a) wieder durch u bzw. v ersetzen lassen, so erhalten wir $u \underset{F}{\cap} v \equiv (u \cap v)^{\smile}$. Und dual.

Satz 6. Verknüpft man die nach a und b fastzerlegbaren Elemente nach den Regeln

(51a) $$u \underset{F}{\cup} v \equiv (a \cup u \cup v) \cap (b \cup u \cup v) \qquad (a, b)$$

(51b) $$u \underset{F}{\cap} v \equiv (a \cap u \cap v) \cup (b \cap u \cap v) \qquad (a, b),$$

so genügt ihre Gesamtheit $F(a, b)$ den Verbandaxiomen mit dem Unterschied, daß die Gleichheitsbeziehung durchgängig durch die Kongruenz für a und b zu ersetzen ist. Dieser Rechenbereich geht in einen wirklichen Verband $F'(a, b)$ über, sobald man für a und b kongruente Elemente identifiziert. $F'(a, b)$ ist den beiden Teilbünden der progressiv bzw. regressiv nach a und b zerlegbaren fastzerlegbaren Elemente isomorph.

Die Menge der nach a und b fastzerlegbaren Elemente ist also sozusagen ein Verband mit ein wenig unbestimmten Elementen.

9. Zerlegende Elementepaare.

9. 1. Ist $a =(= b$, dann liegen die nach a und b fastzerlegbaren Elemente zwischen a und b und, da jedes Zwischenelement von a und

b nach a und b sogar zerlegbar ist, so sind alle fastzerlegbaren Elemente zerlegbar. Wir sagen deshalb, ein $a =(= b$ genügendes Elementepaar (a, b) sei ein zerlegendes Elementepaar. Allgemein erklären wir:

Erklärung 4. Das Elementepaar (a, b) heißt zerlegend, wenn jedes nach a und b fastzerlegbare Element nach a und b zerlegbar ist.

Zerlegend ist das Elementepaar (a, b) genau dann, wenn irgend zwei Zwischenreiche der beiden Schwesterperspektivitäten (5) genau ein Element gemein haben, wenn also die Überperspektivität (36) als Identität auftritt.

Wenn einer der beiden Teilbünde (32) den anderen umfaßt, wenn also

$$V \;=(= V^{\frown} \text{ oder } V^{\frown\frown} =(= V^{\frown} \tag{52}$$

besteht, dann ist (a, b) zerlegend. Denn z. B. aus der ersten Subsumption folgt, daß die zu den $x \in V^{\frown}$ gehörenden Zwischenreiche x/x die kürzesten Zwischenreiche von $V^{\frown}$ und $V^{\frown\frown}$ darstellen, daß also die Überperspektivität als Identität auftritt. — Übrigens zieht jede der Subsumptionen (52) die andere nach sich. Denn bei einem zerlegenden Elementepaar ist

$$\begin{aligned} V^{\frown} &= F(a, b) = V^{\frown\frown} \\ &= V^{\frown} \cap V^{\frown}. \end{aligned} \tag{53}$$

Umgekehrt folgt schon aus einer einzigen dieser sechs Gleichungen, daß das Elementepaar (a, b) zerlegend ist, weil aus jeder eine der Subsumptionen (52) folgt.

Schließlich ist für zerlegende Elementepaare charakteristisch, daß a und b in $F(a, b)$ kürzbar sind. Damit ist folgendes gemeint:

Erklärung 5. Ist a ein Element und M eine Menge von Elementen desselben Verbandes V, dann soll a in M kürzbar heißen, wenn für irgend zwei Elemente x und y von M aus $a \cap x = a \cap y$ und $a \cup x = a \cup y$ immer $x = y$ folgt.

Jedenfalls folgt aus ihnen, daß für ein $b \in V$ die Gleichungen $b \cup (a \cap x) = b \cup (a \cap y)$ und $b \cap (a \cup x) = b \cap (a \cup y)$ bestehen. Ist nun $M = F(a, b)$, sind also x und y Zwischenelemente sowohl der einen wie der anderen der beiden Schwesterperspektivitäten (5), dann gehen diese Gleichungen nach [A 1, 7. 1., Gleichung (18)] in $b \cup x = b \cup y$ bzw. $b \cap x = b \cap y$ über, sodaß sich aus ihnen und der Voraussetzung $x \equiv y\ (a, b)$ ergibt. Wir können etwa sagen, daß a und b in $F(a, b)$ bis auf Kongruenz kürzbar sind. Besteht jede Klasse kongruenter fastzerlegbarer Elemente nur aus einem einzigen Element, genau dann sind a und b in $F(a, b)$ kürzbar. Damit ist unsere Behauptung bewiesen. — Als Gesamtergebnis haben wir:

Satz 7. Das Elementepaar (a, b) ist genau dann zerlegend, wenn die Gleichungen

$$\frac{a}{a \wedge b} \vee \frac{b}{a \wedge b} = \frac{\frac{a \vee b}{a} \wedge \frac{a \vee b}{b}}{\frac{a}{a \wedge b} \vee \frac{b}{a \wedge b}} = \frac{a \vee b}{a} \wedge \frac{a \vee b}{b} \tag{54}$$

$$= \left(\frac{a}{a \wedge b} \vee \frac{b}{a \wedge b}\right) \cap \left(\frac{a \vee b}{a} \wedge \frac{a \vee b}{b}\right)$$

bestehen. Besteht aber eine dieser Gleichungen, dann bestehen alle sechs. Es genügt sogar, eine der Subsumptionen

$$\frac{a}{a \wedge b} \vee \frac{b}{a \wedge b} \mathrel{=\!(} \frac{a \vee b}{a} \wedge \frac{a \vee b}{b} \tag{55 a}$$

und

$$\frac{a \vee b}{a} \wedge \frac{a \vee b}{b} \mathrel{=\!(} \frac{a}{a \wedge b} \vee \frac{b}{a \wedge b} \tag{55 b}$$

zu fordern, denn aus der einen folgt die andere. Auch ist jede der folgenden Eigenschaften für zerlegende Elementepaare charakteristisch:

1. Irgend zwei Zwischenreiche der beiden Schwesterperspektivitäten (5) haben genau ein Element gemein.

2. Die Überperspektivität (36) tritt als Identität auf.

3. a und b sind in der Menge der nach a und b fastzerlegbaren Elemente kürzbar.

Folgerung. Sind alle nach a und b fastzerlegbaren Elemente progressiv nach a und b zerlegbar, dann sind sie auch regressiv nach a und b zerlegbar, und umgekehrt.

9. 2. Beispiele. 9. 2. 1. Wir bemerkten schon, daß ein $a \mathrel{=\!(} b$ genügendes Elementepaar (a, b) zerlegend ist. Darüber hinaus gilt: Aus $a \mathrel{=\!(} b$ folgt $a/(a \wedge b) \vee b/(a \wedge b) = b/a = (a \vee b)/a \wedge (a \vee b)/b$.

9. 2. 2. Ist ferner einer der beiden Teilbünde $V^{\frown\smile}$ und $V^{\smile\frown}$ ein Teilverband von V, dann ist auch der andere einer. Und da er mit dem ersten zusammenfällt, so ist (a, b) zerlegend. — Beweis. Der Teilbund $V^{\frown\smile}$ enthält a und b, also, wenn er ein Teilverband ist, mit den Elementen x auch die Elemente $x^{\frown} = (a \cup x) \cap (b \cup x)$ d. h. die von $V^{\smile\frown}$. Und dual.

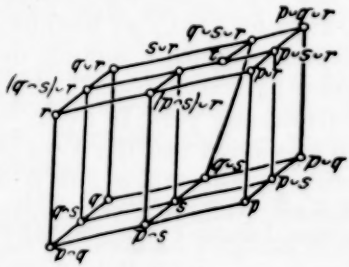


Fig. 2

Dieser Fall liegt in den modularen Verbänden stets vor. In einem modularen Verbande ist nämlich bei jedem Elementepaare $V^{\frown\smile}$ mit dem Teilverbande $U^{\smile}$ von $V^{\smile}$ identisch und $V^{\smile}$ Teilverband von V. Und dual. Um in einem allgemeinen Verbande dasselbe Ergebnis zu erzielen, wähle man als a und b zwei neutrale Elemente von V.

9. 2. 3. Es gibt aber auch zerlegende Elementepaare, bei denen $V^{\frown\smile} = V^{\smile\frown}$ nur ein Teilbund, nicht aber ein Teilverband von V ist: Fig. 2 stellt einen von den vier Elementen p, q, r, s erzeugten Verband der Ordnung 19

dar. Setzen wir $p \cup q = a$ und $r = b$, dann verteilen sich seine Elemente auf die beiden Zwischenreiche $a/(a \cap b)$ und $(a \cup b)/b$ der Ordnung 9 bzw. 10. Da die $z \in a/(a \cap b)$ alle $z = a \cap (b \cup z)$ genügen, so ist $a/(a \cap b) = a/(a \wedge b)$. Daher besteht auch $(a \vee b)/b$ aus 9 Elementen und zwar ist t das in $(a \vee b)/b$ fehlende Element von $(a \cup b)/b$. Da $(a \vee b)/b$ die Elemente $p \cup s \cup r$ und $q \cup s \cup r$ enthält, ohne ihr regressives Produkt t zu enthalten, so ist $(a \vee b)/b$ kein Teilverband von V.

Die von t verschiedenen 18 Elemente sind als Elemente von $a/(a \wedge b)$ bzw. $(a \vee b)/b$ sämtlich nach a und b zerlegbar. Dagegen ist t nicht einmal fastzerlegbar nach a und b. Denn es ist $t^{\frown} = t$ und $t^{\smile} = s \cup r$ und $t/(s \cup r)$ ist kein kleinstes Umreich, weil es das Umreich $(s \cup r)/(s \cup r)$ von $s \cup r$ als kleineres umfaßt.

Da also alle nach a und b fastzerlegbaren Elemente nach a und b zerlegbar sind, so ist (a, b) ein zerlegendes Elementepaar von V. Dabei ist $V^{\smile\frown} = F(a, b) = V^{\frown\smile}$ kein Teilverband von V, weil der von $V^{\smile\frown}$ als Teilverband umfaßte Teilbund $(a \vee b)/b$ keiner ist.

9. 3. In den modularen Verbänden, fanden wir, sind alle Elementepaare zerlegend. Daß es auch nicht-modulare Verbände gibt, in denen alle Elementepaare zerlegend sind, kann man an dem nicht-modularen Verbande 5. Ordnung leicht bestätigen. Demnach stellt

$$\frac{a}{a \wedge b} \vee \frac{b}{a \wedge b} = \frac{a \vee b}{a} \wedge \frac{a \vee b}{b} \tag{56}$$

als Identität in a und b verstanden, ein Zusatzaxiom zu den Verbandsaxiomen dar, das eine Verallgemeinerung der modularen Verbände ergibt.

(Eingegangen am 27. Februar 1948)

Literaturverzeichnis.

H. Hermes und G. Köthe.
Theorie der Verbände, Enzykl. d. Math. Wiss., I 1, 13; 2. Aufl. (1939).

W. Schwan.
[A. 1] Perspektivitäten in allgemeinen Verbänden, Math. Zeitschr. 51. 2 (1948), S. 125–134.

W. Schwan.
[A. 2] Ein allgemeiner Mengenisomorphiesatz der Theorie der Verbände, Math. Zeitschr. 51. 3 (1948), S. 346–354.

Zur Approximation und Kettenbruchentwicklung quadratischer Zahlen.

Von

Hermann Schmidt in Braunschweig.

Einleitung.

Im Folgenden wird zunächst das bekannte *Heronische Verfahren* zur näherungsweisen Berechnung von Quadratwurzeln natürlicher Zahlen auf neue Art und mit scharfen Restabschätzungen im Komplexen untersucht (Satz 1) und zum Studium der Approximation *komplexer relativ-quadratischer Zahlen* durch Zahlen des Grundkörpers verwertet (Satz 2). Anschließend werden mit Kettenbruchmethoden bekannte Approximationssätze für *reelle* quadratische Irrationalzahlen verschärft (Satz 3, 4). Für den Fehler wird hier eine volle asymptotische Entwicklung angegeben.

Wir verallgemeinern ferner einen klassischen Satz über die Bestimmung der Quadratwurzeln natürlicher Zahlen, wenn die *Kettenbruchperiode abgesehen vom Schlußglied vorgeschrieben ist*, auf beliebige algebraisch-ganze reelle quadratische Zahlen (Satz 6), wobei sich merkwürdige Übergangsmöglichkeiten zwischen den zu gleichem gegebenen Periodenabschnitt unter Umständen gehörigen Entwicklungen gerader und ungerader Spur herausstellen (Satz 7). Der Fall eines aus *lauter gleichen Zahlen bestehenden* Abschnitts läßt sich vollständig durchdiskutieren (Satz 8). Satz 9 zeigt gewisse Unmöglichkeiten für die Kettenbruchentwicklung der Wurzel aus einer *Primzahl* auf.

Die Unmöglichkeit, *identisch* im ganzzahligen Parameter n *gültige* regelmäßige Kettenbruchentwicklungen für $\sqrt{n^2+h}$ zu finden, deren Teilnenner Polynome in n sind, wenn $|h| \neq 1, 2, 4$ (h ganz rational), enthält Satz 10. Die damit wohl erstmalig angeschnittene Fragestellung scheint uns nicht ohne Interesse. Zum Schluß konstruieren wir auf verschiedene Art Beispiele von Folgen quadratischer Zahlen des nämlichen Körpers, für die die *Länge der primitiven Periode* bzw. der *Vorperiode ins Unendliche* strebt (Satz 11, 12).

§ 1.

Heronische Näherungen und Kettenbrüche.

Man erzeugt bei diesem bekannten Verfahren, ausgehend von zwei positiven Zahlen a_0, b_0 mit $a_0 b_0 = D$, zwei Folgen von Näherungswerten für die positive $\sqrt{D}$ nach dem Gesetz

$$a_{n+1} = \tfrac{1}{2}(a_n + b_n),\ b_{n+1} = D : a_{n+1} \qquad (n = 0, 1, \ldots),$$

und findet leicht $a_n \downarrow \sqrt{D}$, $b_n \uparrow \sqrt{D}$ ($n = 1, 2, \ldots$; vgl. z. B. Kommerell [6], 5 ff., Chajoth [2]). Betrachten wir nur die a_n, so hat man

$$a_{n+1} = \tfrac{1}{2}(a_n + D/a_n) \qquad (n = 0, 1, \ldots). \tag{1}$$

Wir geben zunächst einen allgemeinen Konvergenzbeweis im Komplexen.

Sei also nunmehr $D \neq 0$, sonst beliebig komplex. Wir bilden mit dem komplexen Anfangswert $a_0 \neq 0$ die Folge (1) (soweit die a_n als endliche Zahlwerte existieren). Setzt man noch

$$a_n = \sqrt{D}\, z_n, \tag{2}$$

unter $\sqrt{D}$ einen beliebigen der möglichen Wurzelwerte verstanden, so werden die Größen z_n die Iterierten der rationalen Funktion

$$w = \tfrac{1}{2}(z + 1/z) \tag{3}$$

für $z = z_0$. Durch (3) wird jede der beiden Halbebenen $\Re z > 0$, $\Re z < 0$ auf sich abgebildet; ist also $\Re z_0 \neq 0$, so existieren alle z_n. (3) hat die Fixpunkte $+1$, -1, und indem man dies zum Ausdruck bringt, erhält man für (3) die Form

$$\frac{w-1}{w+1} = \left(\frac{z-1}{z+1}\right)^2$$

und daher ist

$$\frac{z_n - 1}{z_n + 1} = \left(\frac{z_0 - 1}{z_0 + 1}\right)^{2^n}. \tag{4}$$

Es sei nun etwa $\Re z_0 > 0$, also

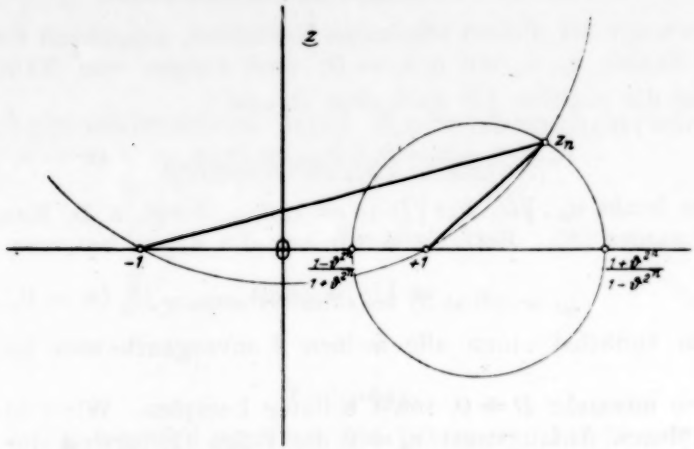
$$\left|\frac{z_0 - 1}{z_0 + 1}\right| = \vartheta < 1. \tag{5}$$

Dann gilt nach (4)

$$\left|\frac{z_n - 1}{z_n + 1}\right| = \vartheta^{2^n} \to 0,\ \lim_{n \to \infty} z_n = +1. \tag{6}$$

(6) besagt, daß z_n in der rechten Halbebene auf einem Kreise des hyperbolischen Büschels um die Punkte $+1$, -1 liegt, dessen Radius mit $1/n$ gegen Null geht. Aus den Eigenschaften des Apollonischen

Kreises folgt dann sofort (vgl. Figur)



$$|z_n - 1| \leqq \frac{1+\vartheta^{2^n}}{1-\vartheta^{2^n}} - 1 = \frac{2\vartheta^{2^n}}{1-\vartheta^{2^n}},$$

und daher nach (2) schließlich

$$|a_n - \sqrt{D}| \leqq \frac{2|\sqrt{D}|\,\vartheta^{2^n}}{1-\vartheta^{2^n}} \qquad (n = 0, 1, \ldots), \tag{7.1}$$

und wegen

$$|z_n| \geqq \frac{1-\vartheta^{2^n}}{1+\vartheta^{2^n}}$$

$$|b_n - \sqrt{D}| \leqq \frac{2|\sqrt{D}|\,\vartheta^{2^n}(1+\vartheta^{2^n})}{(1-\vartheta^{2^n})^2}. \tag{7.2}$$

Die Wahl der Wurzel ist hier bei gegebenem a_0 durch (2) festgelegt; übrigens gilt das Gleichheitszeichen, wenn $z_0 = a_0/\sqrt{D}$ reell $\geqq 1$ wird. Damit hat man

Satz 1. *Das Heronische Verfahren* (1) *konvergiert für eine beliebige komplexe Zahl* $D \neq 0$, *wenn* $\Re \frac{a_0}{\sqrt{D}} \neq 0$, *d. h. geometrisch:* a_0 *im Innern einer der beiden durch das Mittellot zu den Punkten* $\sqrt{D}, -\sqrt{D}$ *begrenzten Halbebenen liegt, und zwar gegen den in der gleichen Halbebene gelegenen Wert von* $\sqrt{D}$. *Für den Fehler bestehen die Abschätzungen* (7), *wo* ϑ *durch* (5) *erklärt ist*[1]).

[1]) Bestimmung der Konvergenzgebiete — aber ohne die für uns entscheidenden, an (4) anknüpfenden Entwicklungen — auch schon (sehr umständlich) bei E. Schröder, Math. Ann. 3 (1871), S. 318—320 und bei C. Schmidt, ebenda 45 (1894), S. 305—307. Den Hinweis auf diese Arbeiten verdanke ich Herrn M. Müller-Tübingen.

Aus (4) ergibt sich für die Iterierten noch die geschlossene Darstellung

$$z_n = \frac{(z_j+1)^{2^{n-j}} + (z_j-1)^{2^{n-j}}}{(z_j+1)^{2^{n-j}} - (z_j-1)^{2^{n-j}}} \qquad (0 \leqq j < n)$$

und es wird

$$a_n = \sqrt{D}\,\frac{(a_j+\sqrt{D})^{2^{n-j}} + (a_j-\sqrt{D})^{2^{n-j}}}{(a_j+\sqrt{D})^{2^{n-j}} - (a_j-\sqrt{D})^{2^{n-j}}}\ ^{2}). \tag{8}$$

Um nun a_n und b_n in Produktform zu schreiben, bilden wir die Quotienten $\frac{a_{\nu+1}}{a_\nu} = \frac{b_\nu}{b_{\nu+1}}$ $(\nu = 0, 1, 2, \ldots)$. Mit der Abkürzung

$$A = a_0 + \sqrt{D},\ A' = a_0 - \sqrt{D}$$

liefert die Rechnung auf Grund von (8) für $j = 0$ bei $\Re(a_0/\sqrt{D}) > 0$ nach Grenzübergang $n \to \infty$

$$\sqrt{D} = a_0 \prod_{\nu=0}^{\infty}\left(1 - \frac{2(AA')^{2^\nu}}{(A^{2^\nu} + A'^{2^\nu})^2}\right) = b_0 \prod_{\nu=0}^{\infty}\left(1 + \frac{2(AA')^{2^\nu}}{A^{2^{\nu+1}} + A'^{2^{\nu+1}}}\right).$$

Setzt man hier $a_0 = \alpha_0/\beta_0$, wo die komplexen Zahlen α_0 und β_0 $(\neq 0)$ bei der Annahme $a_0^2 \neq D$ durch die Forderung $\alpha_0^2 - D\beta_0^2 = +1$ normiert werden können und sollen, so folgt hieraus sogleich mit

$$t = (\alpha_0 - \beta_0\sqrt{D})^2 = (\alpha_0 + \beta_0\sqrt{D})^{-2}$$

$$\sqrt{D}/a_0 = \frac{1-t}{1+t} = \prod_{\nu=0}^{\infty}\left(1 - \frac{2}{(t^{2^{\nu-1}} + t^{-2^{\nu-1}})^2}\right)$$

$$\sqrt{D}/b_0 = a_0/\sqrt{D} = \frac{1+t}{1-t} = \prod_{\nu=0}^{\infty}\left(1 + \frac{2}{t^{2^\nu} + t^{-2^\nu}}\right).$$

Hier kann schließlich t in $0 < |t| < 1$ beliebig angenommen werden. Damit sind zwei zuerst von Ostrowski [11], 212 (8.3)-(8.2) aufgestellte Produktformeln wiedergewonnen, und zugleich geht hervor, daß das n-te Näherungsprodukt $(n = 0, 1, \ldots)$ n-ter Näherungswert eines Heronischen Verfahrens ist (das mit $a_0 = 1$ bzw. $b_0 = 1$ beginnt); dies scheint noch nicht bemerkt worden zu sein. Dasselbe gilt dann von den beiden vermöge $q = \frac{1}{2}\left(t + \frac{1}{t}\right)$ hervorgehenden Produktformeln (von Engel, vgl. Perron [14] 127 (17))

$$\sqrt{\frac{q-1}{q+1}} = \prod_{\nu=0}^{\infty}\left(1 - \frac{1}{T_{2^\nu}(q)+1}\right) = 1 : \prod_{\nu=0}^{\infty}\left(1 + \frac{1}{T_{2^\nu}(q)}\right).$$

$T_n(q)$ bedeutet hier das 1. Tschebyscheffsche Polynom, q ist nicht aus dem Intervall $-1 \leqq q \leqq +1$, sonst beliebig komplex, und die Wurzel ist mit positivem Realteil auszuziehen. Für alle diese Pro-

[2]) (8) findet sich im wesentlichen für $j = 1$ mit $a_1 = \frac{1}{2}(a_0 + b_0)$ bei Lucas [9] 507, wozu auch ebenda 310 (2) zu vergleichen.

dukte geben die Formeln (7. 1) (7. 2), worin $\sqrt{D}$ durch $\frac{1-t}{1+t}$, ϑ durch $|t|$ zu ersetzen ist, wegen des nachgewiesenen Zusammenhangs Fehlerschätzungen.

Es gehöre nunmehr D einem Ring R komplexer Zahlen an, es liege aber $\sqrt{D}$ nicht im Quotientenkörper K von R. Ferner seien p_0 und q_0 $(\neq 0)$ aus R, und für den gewählten Wurzelwert sei

$$\Re \frac{p_0}{q_0\sqrt{D}} > 0, \tag{9}$$

so daß

$$\Theta = \frac{p_0 - q_0\sqrt{D}}{p_0 + q_0\sqrt{D}}$$

vom Betrag $\vartheta < 1$ wird. Dann gehören für $n = 0, 1, \ldots$ die Werte

$$\begin{cases} p_n = \frac{1}{2}\left((p_0 + q_0\sqrt{D})^{2^n} + (p_0 - q_0\sqrt{D})^{2^n}\right) \\ q_n = \frac{1}{2\sqrt{D}}\left((p_0 + q_0\sqrt{D})^{2^n} - (p_0 - q_0\sqrt{D})^{2^n}\right) \neq 0 \end{cases} \tag{10}$$

zu R, und nach (8) für $j = 0$ wird $a_n = \frac{p_n}{q_n}$, falls $a_0 = \frac{p_0}{q_0}$ genommen wird. Übrigens berechnet sich rekurrent $p_{n+1} = p_n^2 + D\,q_n^2$, $q_{n+1} = 2\,p_n\,q_n$. Ferner ist nach (8)

$$a_n - \sqrt{D} = (p_0 - q_0 D)^{2^n} : q_n = (p_0^2 - q_0^2 D)^{2^n}\,(1 - \Theta^{2^n}) : 2\sqrt{D}\,q_n^2.$$

Wird daher durch die Werte $x = p_0$, $y = q_0$ die Ungleichung

$$|x^2 - D\,y^2| \leqq 1 \tag{11}$$

befriedigt, so ergibt sich die Abschätzung

$$|a_n - \sqrt{D}| < \frac{1+\varepsilon}{2\,|\sqrt{D}|\,|q_n|^2} \quad (\varepsilon \text{ beliebig} > 0,\ n > N_\varepsilon). \tag{12}$$

Man hat also

Satz 2. *Gehört die komplexe Zahl D einem Ring R an, in dem die Ungleichung* (11) *durch Werte p_0, q_0 mit der Nebenbedingung* (9) *erfüllbar ist, so gibt es in R zwei Folgen p_n, q_n, für die der Quotient $a_n = \frac{p_n}{q_n}$ mit der durch* (12) *beschriebenen Näherungsgüte gegen $\sqrt{D}$ strebt; und zwar liefert das Heronische Verfahren* (1) *eine solche Folge, wenn man $a_0 = \frac{p_0}{q_0}$ setzt.*

Eine umfassende Klasse von Ringen R, in denen (11), und zwar mit dem Gleichheitszeichen lösbar ist, bilden die Hauptordnungen der *imaginär-quadratischen Zahlkörper k von der Idealklassenzahl 1.* Es sei nämlich $D \in R$, quadratfrei, $K = k(\sqrt{D})$, E eine Fundamentaleinheit des biquadratischen Körpers K. Wie leicht aus der eindeutigen Primfaktorzerlegung in R folgt, ist jede ganze Zahl von K, also ins-

besondere die Einheit E von der Form $\frac{\alpha+\beta\sqrt{D}}{2}$ ($\alpha, \beta \in R$), und für E ist $\beta \neq 0$, da sonst $\mathsf{E} \in R$, also Einheitswurzel und keine Fundamentaleinheit wäre. Die Relativnorm $\mathsf{E}\,\mathsf{E}' = \frac{\alpha^2-\beta^2 D}{4}$ ist eine Einheit von R, also vom Betrage 1. Wir zeigen nun, daß für eine geeignete Potenz E^l ($l \geqq 1$, ganz) $\alpha \equiv \beta \equiv 0 \pmod{(2)}$. In der Tat sei $\frac{1}{2}\begin{pmatrix}\alpha & \beta\\ \gamma & \delta\end{pmatrix} = \mathfrak{A}$ die Darstellungsmatrix von E bezüglich der Relativbasis $(1, \sqrt{D})$ von K über k. Da E ganz ist, hat auch $2\mathfrak{A}^\nu$ ($\nu = 1, 2, \ldots$) Elemente aus R, und da E Einheit, trifft das gleiche auch für $\nu = -1, -2, \ldots$ zu. Da R mod (4) nur in endlich viele Restklassen zerfällt, muß für zwei passende Exponenten r, s ($r > s \geqq 0$) gelten $2\mathfrak{A}^r = 2\mathfrak{A}^s + 4\mathfrak{G}$, wo die Elemente von $\mathfrak{G}$ aus R sind. Es hat also $\mathfrak{A}^{r-s} = \mathfrak{E} + \mathfrak{G} \cdot 2\mathfrak{A}^{-s}$ ebenfalls Elemente aus R. Mit $l = r - s$ und $\mathsf{E}^l = p_0 + q_0\sqrt{D}$ ist somit der Betrag der Relativnorm $|\mathfrak{N}_k(\mathsf{E}^l)| = |p_0^2 - q_0^2 D| = 1$. Da auch E^l keine Einheitswurzel, ist $q_0 \neq 0$. Schließlich ist (9) erfüllbar; denn wäre $\frac{p_0}{q_0\sqrt{D}} = \frac{i}{\varrho}$ rein imaginär, so folgte sofort $|p_0^2| = \frac{1}{1+\varrho^2} < 1$, während doch für jede ganze Zahl ξ des imaginär-quadratischen Körpers k $|\xi|^2 = \mathfrak{N}(\xi) \geqq 1$ wird. Somit ist hier Satz 2 anwendbar[3]).

Ist R der Ring der ganzen rationalen Zahlen und $D > 0$, kein Quadrat, so ist bekanntlich stets die Gleichung $x^2 - Dy^2 = +1$ lösbar, wie man sich etwa nach dem Schubfachverfahren ohne Kettenbrüche bewiesen denke (vgl. etwa Landau [8], 57—63, oder Scholz [19], 111/12). Wegen $\Theta = \vartheta$ gilt hier sogar (12) mit $\varepsilon = 0$. Doch folgt dies einfacher unmittelbar aus der Pellschen Gleichung: ist etwa $p_0 > 0$, $q_0 > 0$ und $(p_0 + q_0\sqrt{D})^n = r_n + s_n\sqrt{D}$, so wird ja

$$0 < \frac{r_n}{s_n} - \sqrt{D} = \frac{1}{s_n(r_n + s_n\sqrt{D})} < \frac{1}{2s_n^2\sqrt{D}}.$$

Dies ist eine Verschärfung eines Teils von Satz 4 bei Perron [15], 7, wo mit Kettenbrüchen gearbeitet wird. Wir können natürlich jetzt

[3]) Die Lösbarkeit der verallgemeinerten Pellschen Gleichung $x^2 - Dy^2 =$ Einheit ist mit den (hier vermiedenen) Methoden der komplexen Kettenbrüche für den Fall des *Gaussschen Zahlkörpers* bei Arwin [0] festgestellt; auch Hurwitz [5] weist darauf hin. Bei Arwin finden sich (a. a. O. (7), S. 117) für diesen Fall auch Abschätzungen der Art (12) sowie Andeutungen über die Übertragung der Sätze auf die vier noch übrigen imaginär-quadratischen Zahlkörper mit Euklidischem Algorithmus (vgl. z. B. Perron [16], § 2 oder Hardy-Wright [4], 212/3, Th. 246). Unsere Schlußweise, die für den allgemeinen Fall eines imaginär-quadratischen Körpers der Klassenzahl 1 ausreicht, — es gibt ihrer mindestens neun, vgl. z. B. T. Nagel, Abh. Math. Sem. Hamburg 1 (1922) 150 — lehnt sich an einen Beweisgedanken von Minkowski an ([10], § 1, Nr. 3. 6), auf den mich Herr Bullig-Münster freundlicherweise aufmerksam gemacht hat.

auch leicht die Brücke zur Kettenbruchlehre schlagen: ist k die primitive Periodenlänge des regelmäßigen Kettenbruchs (rKB) für $\sqrt{D}$, und sind A_ν, B_ν die zugehörigen Näherungszähler und -nenner, so ist bekanntlich $x = A_{k-1}$, $y = B_{k-1}$ die positive Grundlösung von $x^2 - D y^2 = \pm 1$, und nach einer bekannten Formel (PERRON [13], 104 (7) — dieses Werk wird künftig zitiert „P" —) wird

$$A_{mk-1} + B_{mk-1}\sqrt{D} = (A_{k-1} + \sqrt{D}\,B_{k-1})^m,$$

also nach (10) $p_n = A_{2^n k-1}$, $q_n = B_{2^n k-1}$, wenn man $p_0 = A_{k-1}$, $q_0 = B_{k-1}$ setzt [4]).

Ein *abschließendes Ergebnis* betreffend Approximationen vom Typ (12), insbesondere die Frage, wann $\varepsilon = 0$ zulässig ist, erhält man nun für *alle reellen quadratischen Irrationalzahlen* aus einer bemerkenswerten Formel von H. SCHEFFLER ([17], 159 (6)), die lautet:

$$\frac{A_n}{B_n} = \left(\sqrt{D + (-1)^{n+1}\frac{Q_0 \cdot Q_{n+1}}{B_n^2}} + P_0\right) : Q_0. \tag{13}$$

Hierbei sind $\xi_n = (\sqrt{D} + P_n) : Q_n$ $(n = 0, 1, \ldots)$ die sogenannten vollständigen Quotienten zu $\xi = \xi_0$; D, $Q_n > 0$ ganz, D kein Quadrat, P_n ganz. Da (13) wenig bekannt scheint, geben wir einen einfachen Beweis mittels Matrizenrechnung. Man setze $Q_{-1} = (D - P_0^2) : Q_0$ (wie üblich, ganzzahlig normiert),

$$\mathfrak{B}_n = \begin{pmatrix} b_n & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix},\quad \mathfrak{C}_n = \begin{pmatrix} A_{n-1}, & B_{n-1} \\ A_{n-2}, & B_{n-2} \end{pmatrix},\quad \mathfrak{P}_n = \begin{pmatrix} Q_n, & -P_n \\ -P_n, & -Q_{n-1} \end{pmatrix}.$$

Dann gilt zunächst (mit $\tilde{\mathfrak{C}}_n = \mathfrak{C}_n$/transp.)

$$\mathfrak{C}_n\,\mathfrak{P}_0\,\tilde{\mathfrak{C}}_n = (-1)^n\,\mathfrak{P}_n. \tag{13.1}$$

In der Tat ist dies wegen $\mathfrak{C}_0 = \mathfrak{E}$ = Einheitsmatrix für $n = 0$ selbstverständlich. Anderseits ist $\mathfrak{B}_n\,\mathfrak{C}_n = \mathfrak{C}_{n+1}$ und $\mathfrak{B}_n\,\mathfrak{P}_n\,\tilde{\mathfrak{B}}_n = -\mathfrak{P}_{n+1}$ nach bekannten Kettenbruchformeln (vgl. z. B. P 74 unten in sinngemäßer Übertragung auf die höheren Indizes), und hieraus folgt sofort (13.1) durch Induktion. Setzt man jetzt für Q_{-1} seinen Wert ein und ersetzt man in (13.1) (1. Komponente) n durch $n + 1$, so folgt (13) durch Auflösung nach $A_n : B_n$. Durch Entwicklung in die binomische Reihe ergibt sich nun für $\frac{Q_0\,Q_{n+1}}{B_n^2} < 1$, das heißt aber, wegen der Periodizität und damit Beschränktheit der Folge Q_n, für alle hinreichend großen n

$$\frac{A_n}{B_n} - \xi = \frac{(-1)^{n+1}\,Q_{n+1}}{2\sqrt{D}\,B_n^2} - \frac{Q_0\,Q_{n+1}^2}{8\sqrt{D^3}\,B_n^4} + \sum_{\nu=3}^{\infty}\binom{\frac{1}{2}}{\nu}\frac{(-1)^{\nu(n+1)}\,Q_0^{\nu-1}\,Q_{n+1}^{\nu}}{D^{\nu-\frac{1}{2}}\,B_n^{2\nu}}. \tag{13.2}$$

[4]) In dieser Richtung weisen auch die Formeln LUCAS [9], 457 im Vergleich mit 507; doch fehlt dort die Angabe des genauen Zusammenhangs (wann sich nämlich die Heronischen auf Kettenbruch-Näherungen reduzieren).

Für gerade $n+1$ steht rechts eine alternierende LEIBNIZsche Reihe, während für ungerade $n+1$ rechts alle Glieder negativ sind. Wir setzen nun mit PERRON [15], § 1 $M(\xi) = \overline{\text{fin}}\, c$, wo c in der Menge derjenigen positiven Zahlen variiert, zu denen es eine Folge rationaler Brüche $\frac{p_m}{q_m}$ mit $|\xi - \frac{p_m}{q_m}| < \frac{1}{c\, q_m^2}$ gibt. Wegen $M(\xi) > 2$ braucht man nur *Kettenbruch*näherungen $A_n : B_n$ zu betrachten, und daher ergibt sich sofort die bekannte Formel (PERRON [15], Satz 3)

$$M(\xi) = \frac{2\sqrt{D}}{Q_{\bar{\mu}}}, \text{ wo } Q_{\bar{\mu}} = \underset{n_0 \leqq n \leqq n_0 + k - 1}{\text{Min}} Q_n,$$

wenn bei $n = n_0 + 1$ eine Periode der Länge k beginnt.

Bei dieser Formulierung ist benützt, daß die Periode der Q_n um eine Nummer früher beginnt als diejenige der P_n und der Teilnenner b_n. Daraus folgt z. B. für $P_0 = 0$, d. h. für die Wurzel aus einer Rationalzahl: $M(\xi) \geqq 2\xi$. So ist $M(\sqrt{\frac{3}{2}}) = M(\sqrt{6}) = 2\sqrt{6} = 4\sqrt{\frac{3}{2}}$).

Allgemein aber ergibt sich: genau dann, wenn in der Form

$$n + 1 = \bar{\mu} + \lambda k \qquad (\lambda = 0, 1, \ldots) \tag{13.3}$$

unendlich viele *gerade* Zahlen enthalten sind, d. h. also, wenn entweder $k \equiv 1\,(2)$ oder aber für ein $\bar{\mu}$

$$\bar{\mu} \equiv k \equiv 0\,(2)$$

ist, kann der Betrag des Fehlers $|\xi - \frac{A_n}{B_n}|$ für unendlich viele n kleiner als $\frac{1}{M(\xi) B_n^2}$ gemacht werden. Man hat also schließlich

Satz 3. *Für eine beliebige reelle quadratische Irrationalzahl (positiver Differente) gibt es dann und nur dann eine unendliche Folge rationaler Näherungen* $\frac{p_m}{q_m}$ *mit einem Fehler vom Betrag* $< \frac{1}{M(\xi) q_m^2}$, *wenn entweder die primitive Periode k des regelmäßigen Kettenbruchs für* ξ *ungerade ist, oder bei geradem k das Minimum der zu einer Periode gehörigen unter den bei* (13) *erklärten Zahlen* Q_n *für einen geraden Index angenommen wird. Beide Male erhält man solche, und zwar obere Näherungen aus der rKB-Entwicklung für die geraden* $n+1$ *der Gestalt* (13.3).

Es sei noch besonders darauf hingewiesen, daß die (konvergente) Reihe (13.2) zugleich eine *asymptotische Entwicklung des Fehlers* für $n \to \infty$ nach Potenzen von B_n^{-2} mit noch von n abhängigen, periodischen Koeffizienten vorstellt. Für $Q_0 = 1$, somit $\mu = 0$ geht wieder der betreffende *Sonderfall von Satz 2* (mit erweiterter Folge von Näherungen) hervor. Hierzu noch folgendes *Gegenstück:*

Satz 4. *Ist* $\xi = \sqrt{D} + \frac{1}{2}$ *(D > 0 rational) eine ganze quadratische Zahl, so ist* $M(\xi) = 2\sqrt{D}$; *und für unendlich viele der zugehörigen Näherungskettenbrüche* $\frac{A_n}{B_n}$ *wird* $0 < \frac{A_n}{B_n} - \xi < \frac{1}{2\sqrt{D}\, B_n^2}$.

Beweis. Da ξ ganz ist, ist $\sqrt{D}$ von der Form $\frac{q\sqrt{\Delta}}{2}$ mit $\Delta \equiv 1(4)$, $q \equiv 1(2)$. Es ist also $M(\xi) = \frac{2\sqrt{q^2\Delta}}{Q_{\bar{\mu}}}$, wenn Q_μ die gleiche Bedeutung wie in Satz 3 hat, worin aber jetzt $q^2\Delta$ statt D zu setzen ist. Nach P 74—75 werden in den Darstellungen $\xi_\mu = (\sqrt{q^2\Delta} + P_\mu) : Q_\mu$ alle Q_μ ganz, da ja $q^2\Delta - P_0^2 \equiv 0(2)$ ist. Nun ist aber stets $Q_\mu \neq 1$; denn zu äquivalenten Zahlen gehört die gleiche Diskriminante der entsprechenden primitiven ganzzahligen quadratischen Gleichung, diese Diskriminante ist aber $q^2\Delta$ für ξ und $4q^2\Delta$ für $q\sqrt{\Delta} + P_\mu$. Also ist Min $Q_\mu = 2$, $\bar{\mu} = 0$. Damit folgt die Behauptung aus Satz 3. — Übrigens erschließt man ähnlich, daß hier sämtliche Q_μ gerade ausfallen.

§ 2.

Quadratische Zahlen mit vorgeschriebenem symmetrischem Periodenabschnitt.

Mit σ_l bezeichnen wir einen symmetrischen Komplex von l natürlicher Zahlen, d. h. ein System (b_λ) von solchen $(\lambda = 1, 2, \ldots, l)$, bei dem $b_{l+1-\lambda} = b_\lambda$. Über regelmäßige Kettenbrüche, deren Periode (in naheliegender Schreibweise) die Form σ_{k-1}, b_k besitzt, ist folgender Satz im wesentlichen bekannt:

Satz 5. *Der regelmäßige Kettenbruch für die quadratische Zahl* $\xi = \sqrt{D} + \frac{S}{2}$ *(D, S rational, D positiv und nicht Quadrat einer Rationalzahl) ist dann und nur dann von der Gestalt*

$$\xi = b_0, \overline{\sigma_{k-1}, b_k}. \tag{14}$$

wenn

$$a)\ S \text{ ganzzahlig.} \quad b)\ \sqrt{D} > 1 \text{ bzw. } \sqrt{D} > \tfrac{1}{2}, \tag{15}$$

je nachdem die Spur S gerade oder ungerade ist. Für einen solchen rKB ist stets

$$b_k = -S + 2b_0. \tag{15'}$$

Der Beweis ist leicht z. B. mittels eines bekannten Galoisschen Satzes (P § 23) zu führen; für den geläufigsten Fall $S = 0$ vgl. z. B. P 87—88, für den allgemeinen Kraitschik [7], 18 und 61—62 sowie Dörrie [3], § 49, insbes. 213 (nur unwesentlich spezieller als unsere Formulierung). Wir haben an anderer Stelle (Herm. Schmidt [18]) uns unter anderem damit beschäftigt, zu gegebener Diskriminante d alle Zahlklassen aufzustellen, die einen Vertreter dieser Art enthalten. Hier lenken wir unser Augenmerk nun speziell auf die *ganzen* quadratischen Zahlen und bemerken vorweg:

Genau dann hat eine ganze quadratische Zahl ω *eine rKB-Entwicklung der Gestalt* (14), *wenn ihre Differente* $\omega - \omega'$ *positiv ist.*

Denn ist Δ ganz, positiv und quadratfrei, so sind bekanntlich die ganzen Zahlen des Körpers $P_0(\sqrt{\Delta})$ (P_0 der rationale Zahlkörper) die Zahlen $r\sqrt{\Delta} + s$, wo

$$r,\ s \text{ beliebig ganz rational für } \Delta \equiv 2 \text{ oder } 3 \ (4)$$
$$2r,\ 2s \text{ ganz rational, } 2r \equiv 2s \ (2) \text{ für } \Delta \equiv 1 \ (4).$$

Demnach kommt die Bedingung (15) b) ersichtlich für *ganze* Zahlen einfach auf $r > 0$ hinaus. — Da offenbar jede ganze quadratische Zahl einer solchen mit positiver Differente äquivalent ist, folgt daß jede *ganze* quadratische Zahl eine rKB-Periode der Form σ_{k-1}, b_k besitzt.

Wir wollen uns nun σ_{k-1} beliebig vorgeben und b_0, b_k in allgemeinster Weise so hinzubestimmen, daß (14) eine ganze quadratische Zahl wird. Fordert man noch b_k gerade, so wird die Lösung — wenn eine solche vorhanden ist — mod 1 kongruent der Wurzel aus einer natürlichen Zahl, und man kommt auf einen klassischen Satz von Euler und Muir zurück (P 98, Satz 17). Wir behandeln den allgemeinen Fall. Zunächst findet man sofort, daß die gesuchte Zahl ω der quadratischen Gleichung genügen muß

$$B_{k-1} t^2 + (B_k - b_0 B_{k-1} - A_{k-1})\, t - (A_k - b_0 A_{k-1}) = 0, \tag{16}$$

wonach

$$\begin{cases} B_k - b_0 B_{k-1} - A_{k-1} = -S B_{k-1} \\ A_k - b_0 A_{k-1} \quad\quad\quad\ = -N B_{k-1}, \end{cases} \tag{17}$$

wenn wir noch die Norm von ω mit N bezeichnen. Wegen der Symmetrie von σ_{k-1} ist nun S nach Satz 5 für beliebige b_0, b_k ganzzahlig; wir haben also nur die Bedingung: N *ganz* zu erfüllen, oder also die Kongruenz

$$A_k - b_0 A_{k-1} \equiv 0 \ (B_{k-1}). \tag{18}$$

Es seien

$$\mathsf{A}_\nu,\ \mathsf{M}_\nu \tag{19}$$

die Näherungszähler bzw. -nenner für den endlichen Kettenbruch

$$[b_1,\ b_2, \ldots, b_\nu,\ b_1] \quad (\nu = -2,\ -1,\ 0, 1, \ldots, k-2;\ k \geqq 1),$$

also gegebene Zahlen. Es ist bekanntlich wegen der Symmetrie $\mathsf{M}_{k-2} = \mathsf{A}_{k-3}$ ferner

$$\frac{A_\nu}{B_\nu} = b_0 + \frac{\mathsf{M}_{\nu-1}}{\mathsf{A}_{\nu-1}} \qquad (\nu \geqq 0),$$

woraus insbesondere (da zusammengehörige Näherungszähler und -nenner teilerfremd sind) folgt $B_{k-1} = \mathsf{A}_{k-2}$ und

$$\begin{aligned} A_{k-1} &= b_0 \mathsf{A}_{k-2} + \mathsf{M}_{k-2} \\ A_{k-2} &= b_0 \mathsf{A}_{k-3} + \mathsf{M}_{k-3}. \end{aligned} \tag{20}$$

Wegen $A_k = b_k A_{k-1} + A_{k-2}$ ergibt sich durch Einsetzen von (20)

$$A_k - b_0 A_{k-1} = (b_k - b_0)\, b_0 \Lambda_{k-2} + b_k \mathsf{M}_{k-2} + \mathsf{M}_{k-3}, \tag{21}$$

demnach als gleichwertig mit (18) die *lineare* Kongruenz für b_k:

$$b_k \mathsf{M}_{k-2} + \mathsf{M}_{k-3} \equiv 0 \ (\Lambda_{k-2})$$

als deren Lösung durch Multiplikation mit $(-1)^k \Lambda_{k-3}$ sofort hervorgeht

$$\boxed{b_k = (-1)^{k-1} \Lambda_{k-3} \mathsf{M}_{k-3} + m \Lambda_{k-2}.} \tag{22}$$

Hier ist m eine willkürliche ganze rationale Zahl. Man hat also

Satz 6. *Damit ein rKB eine ganze quadratische Zahl ω positiver Differente darstelle, ist notwendig und hinreichend, daß auf eine eingliedrige Vorperiode eine Periode vom Typ σ_{k-1}, b_k folge, in der sich das Schlußglied b_k entsprechend* (22) *durch die Glieder des symmetrischen Teils ausdrückt (zur Bezeichnung s.* (19)*).*

Wünscht man mit Hilfe dieses Satzes bei gegebenen $b_\lambda (1 \leqq \lambda \leqq k-1)$ alle zugehörigen ganzen quadratischen Zahlen nebst ihren KBr-Entwicklungen aufzustellen, so ist zunächst in (22) die ganze Zahl m so zu beschränken, daß $b_k > 0$ ausfällt, was wegen $\Lambda_{k-2} > 0$ für alle hinreichend großen m zutrifft. Dann ist nach (15′) die ganze Zahl $S \equiv b_k (2)$ sonst beliebig auszuwählen, und dann $b_0 = (b_k + S) : 2$ zu nehmen. Insbesondere erhält man für

$S = b_k$ $\quad$ $b_0 = b_k$, d. h. einen reinperiodischen rKB (ω ganz und reduziert),

und für

b_k gerade und $S = 0$: $b_0 = b_k/2$; $\omega = \lfloor \sqrt{D} \rfloor$; D ganz,

b_k ungerade, $S = 1$: $b_0 = (b_k + 1)/2$; $\omega = \lfloor \sqrt{D} + \frac{1}{2} \rfloor$; $4D$ ganz, $\equiv 1\,(4)$.

Schließlich ist nach (17), (21), (22), (15′)

$$D = S^2/4 - N = \frac{S^2}{4} + (b_k - b_0)\, b_0 + \left((-1)^{k-1} \mathsf{M}_{k-2} \Lambda_{k-3} + 1\right) \frac{\mathsf{M}_{k-3}}{\Lambda_{k-2}} + m \mathsf{M}_{k-2},$$

oder also

$$\boxed{D = \frac{b_k^2}{4} + (-1)^{k-1} \mathsf{M}_{k-3}^2 + m \Lambda_{k-3}} \tag{23}$$

ein quadratisches Polynom in m (nach (22)).

Ist nun Λ_{k-2} gerade, so hat b_k nach (22) für alle m den nämlichen Geradheitscharakter; das gegebene Periodenstück σ_{k-1} kommt also nur bei Zahlen $\equiv \lfloor \sqrt{D} \rfloor$ (mod 1), D ganz, oder aber nur bei Zahlen $\equiv \lfloor \sqrt{D} \rfloor + 1/2$ (mod 1), $4D \equiv 1\,(4)$ vor, je nachdem das Produkt $\Lambda_{k-3} \mathsf{M}_{k-3}$ gerade oder ungerade ist. Der (für $2b_0$ statt b_k) nach P a. a. O. von Muir ausgeschlossene Fall, daß die rechte Seite von (22) ungerade wird, führt eben auf die ganzen Zahlen der zweiten Sorte.

Für Λ_{k-2} ungerade aber wechselt der Geradheitscharakter von b_k mit m. Es wird $b_k \equiv \Lambda_{k-3} M_{k-3} + m \pmod 2$; σ_{k-1} kommt bei Zahlen mit $S \equiv 0$ *und* $S \equiv 1$ vor.

Geht man nun von einem bestimmten zulässigen Wert m aus, und verschiebt ihn dann um ganze Zahlen, so erhält man

Satz 7. *Hat man den rKB für irgend eine ganze quadratische Zahl* $\omega = \frac{\sqrt{D} + S}{2}$ *positiver Differente, so erhält man alle übrigen* $\omega' = \frac{\sqrt{D} + S'}{2}$ *mit gleichem symmetrischem Periodenteil durch die Transformationen*

$$b_k' = b_k + \lambda \Lambda_{k-2}$$

$$D' = D + \frac{b_k'^2 - b_k^2}{4} + \lambda \Lambda_{k-3} = D + \frac{1}{4}(2 b_k + \lambda \Lambda_{k-2}) \lambda \Lambda_{k-2} + \lambda \Lambda_{k-3}$$

$$S' \equiv b_k'(2), \quad b_0' = \frac{b_k' + S'}{2}.$$

Hierin durchläuft λ alle ganzen rationalen Zahlen $> -\frac{b_k}{\Lambda_{k-2}}$. Für gerades Λ_{k-2} wird stets $S' \equiv S \equiv b_k\,(2)$, für ungerades Λ_{k-2} wird $S' \equiv S + \lambda\,(2)$.

Es ist zu betonen, daß zur Benutzung dieses Satzes die Kenntnis des Wertes von m in den Formeln (22), (23) für das gegebene ω nicht erforderlich ist. Besonders bemerkenswert erscheint der im letzten Falle mögliche Übergang von Entwicklungen gerader zu solchen ungerader Spur (λ ungerade). So kann eine Tafel der rKB für $\sqrt{D}$ (D ganz > 0), wie etwa die Patzsche [12] auch zur Gewinnung von Entwicklungen dieser letzteren Art dienen (Beispiel:

$$\sqrt{629} = 25, \overline{12, 1, 1, 12, 50}; \quad k = 5, \Lambda_{k-2} = 313; \quad \lambda = 1$$

$$\tfrac{1}{2}(\sqrt{131885} + 1) = 182, \overline{12, 1, 1, 12, 363}).$$

Freilich erhält man so nicht die den Fällen Λ_{k-2} gerade, $\Lambda_{k-3} M_{k-3}$ ungerade entsprechenden Entwicklungen. Eine Tafel der rKB für die ganzen Zahlen $\frac{\sqrt{D} + 1}{2}$, wo $4D \equiv 1\,(4)$, die zahlentheoretisch den Wurzeln aus ganzen rationalen Zahlen durchaus gleichstehen, wäre jedenfalls wünschenswert und die Berechnung könnte durch obige Bemerkung erleichtert bzw. kontrolliert werden; eine Tafel für $D < 100$ bei Kraitchik [5], 68—70.

Schließlich sei noch erwähnt, daß mit Hilfe der folgenden Formeln (P 34 (7), 37 (11) (12) (13), 36 (10) (9)

$$(24) \qquad \Lambda_{k-2} = \begin{cases} \Lambda_{l-1}^2 + \Lambda_l^2 \\ \Lambda_{l-1}(\Lambda_{l-2} + \Lambda_l) \end{cases} \quad \Lambda_{k-3} = \begin{cases} \Lambda_{l-1} M_{l-1} + \Lambda_l M_l \\ \Lambda_{l-1} M_l + \Lambda_{l-2} M_{l-1} \end{cases}$$

$$M_{k-3} = \begin{cases} M_{l-1}^2 + M_l^2 \\ M_{l-1}(M_{l-2} + M_l) \end{cases} \quad k = \begin{cases} 2l+3 \\ 2l+2 \end{cases}$$

sich die Berechnung der in Satz 6. 7 benötigten Größen unter Um-

ständen vereinfacht. Insbesondere wird durch die hieraus noch fließenden Kongruenzen mod 2

$$\Lambda_{k-2} \equiv \begin{cases} (b_{l+1}+1)\,\Lambda_{l-1} + \Lambda_{l-2} \\ b_{l+1}\,\Lambda_{l-1} \end{cases} \quad \mathsf{M}_{k-3} \equiv \begin{cases} (b_{l+1}+1)\,\mathsf{M}_{l-1} + \mathsf{M}_{l-2} \\ b_{l+1}\,\mathsf{M}_{l-1} \end{cases} \Bigg| \; k = \begin{cases} 2l+3 \\ 2l+2 \end{cases}$$

die Entscheidung über die bestehenden Möglichkeiten (S gerade oder ungerade) vor und bei Satz 7 erleichtert.

Bei dieser Gelegenheit sei eine kurze Herleitung der *allgemeinen* Formeln eingeschaltet, mit deren Hilfe sich bei einem (endlichen) *symmetrischen rKB* (der Gliederzahl $q+1$) die Näherungszähler und Nenner A_ν, B_ν für $\nu > q/2$ vermöge der A_ν, B_ν mit $\nu \leqq q/2$ ausdrücken lassen. Es sei zunächst $q = 2k+1$ ungerade und also

$$b_\nu = b_{2k+1-\nu} \qquad (\nu = 0, 1, 2, \ldots, 2k+1). \tag{25}$$

A_ν und B_ν genügen der Differenzengleichung

$$u_\nu = b_\nu u_{\nu-1} + u_{\nu-2} \tag{26}$$

mit den Anfangsbedingungen

$$\begin{pmatrix} B_{-2} & B_{-1} \\ A_{-2} & A_{-1} \end{pmatrix} = E = \text{Einheitsmatrix}. \tag{27}$$

Wegen (25) ist nun hier auch $u_{2k+1-\nu} = b_\nu u_{2k-\nu} + u_{2k-\nu-1}$. Schreibt man $v_\nu = (-1)^\nu u_{2k-1-\nu}$, so folgt $v_\nu = b_\nu v_{\nu-1} + v_{\nu-2}$, d. h. die v_ν erfüllen ebenfalls (26). Demnach gibt es eine von ν unabhängige Matrix $\mathfrak{Q}$ derart, daß

$$(-1)^\nu \begin{pmatrix} B_{2k+1-\nu}, & -B_{2k-\nu} \\ A_{2k+1-\nu}, & -A_{2k-\nu} \end{pmatrix} = \mathfrak{Q} \begin{pmatrix} B_{\nu-2} & B_{\nu-1} \\ A_{\nu-2} & A_{\nu-1} \end{pmatrix}.$$

Indem man $\nu = k+1$ setzt, erhält man hieraus sofort

$$\mathfrak{Q} = \begin{pmatrix} B_k, & -B_{k-1} \\ A_k, & -A_{k-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_k, & -B_k \\ -A_{k-1}, & B_{k-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_{k-1}B_{k-1} + A_k B_k; & -(B_{k-1}^2 + B_k^2) \\ A_{k-1}^2 + A_k^2; & -(A_{k-1}B_{k-1} + A_k B_k) \end{pmatrix},$$

womit die Aufgabe gelöst ist. Für $\nu = 0$ gehen insbesondere mit Rücksicht auf (27) die bei (24) benutzten (SERRETschen) Formeln hervor. Ferner erhält man auf die gleiche Weise im Falle $q = 2k$ gerade

$$(-1)^\nu \begin{pmatrix} B_{2k-\nu}, & -B_{2k-\nu-1} \\ A_{2k-\nu}, & -A_{2k-\nu-1} \end{pmatrix} = \mathfrak{Q} \begin{pmatrix} B_{\nu-2} & B_{\nu-1} \\ A_{\nu-2} & A_{\nu-1} \end{pmatrix},$$

wo jetzt

$$\mathfrak{Q} = \begin{pmatrix} A_{k-1}B_k + A_{k-2}B_{k-1} & -B_{k-1}(B_{k-2} + B_k) \\ A_{k-1}(A_{k-2} + A_k) & -(A_{k-1}B_{k-2} + A_k B_{k-1}) \end{pmatrix}.$$

Wir wollen nun, ohne auf die Rechnung einzugehen, die *Formeln zu Satz 6 für* $k = 1, 2, 3, 4$, und $S = 0$ bzw. $S = 1$ übersichtlich und in für die Anwendung bequemer Form zusammenstellen, wobei wir des Vergleichs halber und zur Erläuterung von Satz 7 auch die bekannten Ergebnisse für $S = 0$ (vgl. P 99—100) in entsprechender Bezeichnung mitaufführen.

	$k=1$	$k=2$	$k=3$
D	n^2+1	n^2+m (m/2n)	$n^2+1+2ln(4n^2+3)+l^2(4n^2+1)^2$
$\sqrt{D}$	$n, \overline{2n}$	$n, \overline{\frac{2n}{m}, 2n}$ (m/2n)	$n+l(4n^2+1), \overline{2n, 2n, 2n+2l(4n^2+1)}$
Λ_{k-2}	1	$\frac{2n}{m}$	$4n^2+1$
Λ_{k-3}	0	1	$2n$
D'	$n(n-1)+\frac{3}{4}$	$(n-\frac{1}{2})^2+m$ (m/(2n−1))	$n^2+1+(2l+1)n(4n^2+3)+(l+\frac{1}{2})^2(4n^2+1)^2$
$\sqrt{D'}+\frac{1}{2}$	$n, \overline{2n-1}$	$n, \overline{\frac{2n-1}{m}, 2n-1}$ (m/(2n−1))	$n+\frac{1}{2}+(l+\frac{1}{2})(4n^2+1), \overline{2n, 2n, 2n+(2l+1)(4n^2+1)}$
Λ_{k-2}	1	$\frac{2n-1}{m}$	$4n^2+1$
Λ_{k-3}	0	1	$2n$
$n\geqq 1, m\geqq 1$		D''	$n(n-1)+\frac{3}{4}+2l(2n-1)(n(n-1)+1)+l^2(2n(n-1)+1)^2$
$l\geqq 0$		$\sqrt{D''}+\frac{1}{2}$	$n+l(2n(n-1)+1), \overline{2n-1, 2n-1, 2n-1+2l(2n(n-1)+1)}$
		Λ_{k-2}	$(2n+1)^2+1$
$k=4$		Λ_{k-3}	$2n-1$

$4D$	$m^2b_1^2(c+1)^2-2mc(c^2-3)+b_2^2(c^2-4)$	$b_1\geqq 1, b_2\geqq 1, c=b_1b_2+1, m>\frac{b_2c}{b_1(c+1)}$
	1) $b_1=b$ bel., $b_2=2n$	$\Lambda_{k-2}=b_1(c+1),\ \Lambda_{k-3}=c$
$\sqrt{D}$	$mb\frac{c+1}{2}-nc, \overline{b, 2n, b, mb(c+1)-2nc}$	
	2) $b_1=2h,\ b_2=2n-1$	
$\sqrt{D}+\frac{1}{2}$	$mh(c+1)-\frac{2n-1}{2}c+\frac{1}{2}, \overline{2h, 2n-1, 2h, 2mh(c+1)-(2n-1)c}$	
	3) $b_1=2h-1,\ b_2=2n-1$	
$\sqrt{D}$	$\frac{1}{2}(m(2h-1)(c+1)-(2n-1)c), \overline{2h-1, 2n-1, 2h-1, m(2h-1)(c+1)-(2n-1)c}$	m gerade
$\sqrt{D'}+\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}(m(2h-1)(c+1)-(2n-1)c+1), \overline{2h-1, 2n-1, 2h-1, m(2h-1)(c+1)-(2n-1)c}$	m ungerade

Für $k = 1, 3$ gehen die D und D' entsprechenden Entwicklungen, ebenso für $k = 4$ die beiden Fälle 3) entsprechend Satz 7 ineinander über. Dagegen stehen die Fälle $k = 3$, D'' und $k = 4$, 1) und 2) je für sich. Für $k = 2$ ist der Übergang ausführbar, wenn $b_1 = \frac{2n}{m}$ bzw. $\frac{2n-1}{m}$ ungerade ist.

Als weiteres Beispiel wollen wir alle ganzen quadratischen Zahlen positiver Differente bestimmen, deren *symmetrischer Periodenteil aus lauter gleichen Zahlen* c besteht. Einen solchen rKB schreiben wir abgekürzt $b_0, \overline{(c)^{k-1}}, b_k\,(k \geqq 2)$. In (19) wird jetzt

$$\mathsf{A}_\nu = f_{\nu+2}, \quad \mathsf{M}_\nu = f_{\nu+1} \qquad (\nu \geqq -2), \tag{31}$$

wenn die ganzen Zahlen $f_\nu = f_\nu(c)$ für alle ganzen ν durch die Stufenformel

$$f_{\nu+2} = c f_{\nu+1} + f_\nu \quad \text{mit} \quad f_0 = 0,\ f_1 = 1 \tag{32}$$

bestimmt werden. Es sind $f_\nu(1)$ die Fibonaccischen Zahlen, $f_\nu(2)$ die von Lucas so genannten Pellschen Zahlen ($\nu \geqq 0$); allgemein findet man die Eigenschaften der f_ν z. B. bei Bessel-Hagen [1] (künftig zitiert „B") 1562 ff. zusammengestellt (wo $q = -1$ zu nehmen); vgl. auch Lucas [9], Kap. XVIII, 308 ff.

Nach (22), (23) wird nun

$$b_k = (-1)^{k-1} f_{k-1} f_{k-2} + m f_k, \quad D = \frac{b_k^2}{4} + (-1)^{k-1} f_{k-2}^2 + m f_{k-1}.$$

Für einen gewissen Wert $m = m_0$ wird $b_k = c$ werden, da dieser Wert für jedes k eine (triviale) Lösung der Aufgabe vorstellt (es ist

$$\frac{1}{2}\left(\sqrt{c^2+4} + S\right) = \frac{c+S}{2}, \quad \overline{c} \text{ für } S \equiv c\,(2)).$$

Man findet

$$m_0 = \frac{c + (-1)^k f_{k-1} f_{k-2}}{f_k} = (-1)^k (f_{k-1} - c f_{k-2}) = (-1)^k f_{k-2}, \tag{33}$$

wie man vermöge (32) und der (aus (31) oder B 1565 (11) zu entnehmenden) Formel

$$f_{k-1}^2 - f_k f_{k-2} = (-1)^k \tag{34}$$

sieht. Setzt man noch $m = m_0 + n$, so wird

$$b_k = c + n f_k, \tag{35}$$

wo jetzt wegen $f_k \geqq c$ $(k \geqq 2)$ $n \geqq 0$ ist, und es wird mit der Bezeichnung $C = c^2 + 4$ wegen (33), (34)

$$D = \frac{(c + n f_k)^2}{4} + n f_{k-1} + 1,$$

oder also

$$4D = f_k^2 n^2 + 2 g_k n + C, \tag{36}$$

wenn man noch (vgl. B 1564 (4))

$$g_\nu = c f_\nu + 2 f_{\nu-1} \tag{37}$$

setzt.

Für $k = 2l$ *gerade* läßt sich dieser Ausdruck noch vereinfachen; es gelten nämlich die Verdopplungsformeln (B 1565 (13), (14))

$$f_{2l} = f_l g_l, \quad 2 g_{2l} = g_l^2 + C f_l^2. \tag{38}$$

Dadurch entsteht die bemerkenswerte Zerlegung

$$4 D = (f_l^2 n + 1)(g_l^2 n + C). \tag{39}$$

Für die Diskriminante von (36) gilt übrigens allgemein (B 1565 12))

$$g_k^2 - C f_k^2 = 4 (-1)^k, \tag{40}$$

so daß (36) als Polynom in n für *ungerade* $k = 2l + 1$ über P_0 irreduzibel ist; man kann es dann noch in die Gestalt setzen

$$4 D = [(f_{l+1}^2 - f_l^2) n + c]^2 + [2 f_l f_{l+1} n + 2]^2. \tag{41}$$

Hierbei wurde Gebrauch gemacht von der aus (31) und der 1. Beziehung (24) fließenden Formel

$$f_{2l+1} = f_l^2 + f_{l+1}^2$$

(auch aus B 1565 (13), 3. Formel für $m = n + 1$), sowie der dann aus (37) für $\nu = 2l + 1$ vermöge (38) und (32) hervorgehenden weiteren Beziehung

$$g_{2l+1} = c (f_{l+1}^2 - f_l^2) + 4 f_l f_{l+1}.$$

Es läßt sich nun ein vollständiger Überblick darüber gewinnen, wann eine Entwicklung mit gerader oder ungerader Spur zustandekommt. Sei

I. c gerade. Dann ist nach (32)

$$f_{\nu+2} \equiv f_\nu, \ (2), \text{ also } f_k \equiv k \, (2).$$

Nach (35) ist also für

1) $k \equiv 0\,(2)$ $\quad b_k \equiv 0\,(2)$, $\quad n$ beliebig

2) $k \equiv 1\,(2)$ $\quad b_k \equiv n\,(2)$.

Anders im Falle

II. c ungerade. Jetzt wird $f_\nu(c) \equiv f_\nu(1), (2)$. Nun ist, wie sofort zu sehen,

1) $f_k(1) \equiv 0\,(2)$ für $k \equiv 0\,(3)$ und dann $b_k \equiv 1\,(2)$, n beliebig

2) $f_k(1) \equiv 1\,(2)$ für $k \not\equiv 0\,(3)$, $\quad b_k \equiv n + 1, \ (2)$.

Wir fassen zusammen in

Satz 8. *Alle ganzen quadratischen Zahlen positiver Differente, für die die Glieder des symmetrischen Teils der KBr-Periode einander gleich und zwar gleich c sind, erhält man durch die Formel*

$$\frac{1}{2}\left(\sqrt{f_k^2 n^2 + 2 g_k n + c^2 + 4} + S\right) = \frac{c + n f_k + S}{2}, \overline{(c)^{k-1}, c + n f_k}.$$

Hier bedeuten alle Buchstaben ganze Zahlen, es ist $n \geqq 0$, $c \geqq 1$, $k \geqq 1$ *und* $S \equiv c + n f_k$, (2) *zu nehmen;* f_k, g_k *sind durch* (32) *und* (37) *erklärt. — Sind c und k gerade, so auch S; ist c ungerade, k durch 3 teilbar, so ist S ungerade. In den anderen Fällen entstehen je zwei Reihen von Entwicklungen, die nach Satz 7 ineinander überführbar sind.*

Aus (36) folgt noch für die *Anzahl N* der fraglichen Zahlen mit dem symmetrischen Periodenabschnitt $(c)^{k-1}$, für die $D \leqq x$ und die Spur 0 oder 1 ist

$$N = \left[\frac{2}{f_k}\sqrt{x + \frac{(-1)^k}{f_k^2}} - \frac{g_k}{f_k^2}\right] \sim \frac{2\sqrt{x}}{f_k} - \frac{g_k}{f_k^2}.$$

Hierbei sind die trivialen Entwicklungen mit $b_k = c$ nicht mitgezählt, und der Fehler in der asymptotischen Darstellung ist vom Betrag $\leqq 1$; diese Unsicherheit um eine Einheit würde sich wegen der Unstetigkeit der Funktion $[y]$ auch nicht durch Berücksichtigung von mehr Gliedern in der Reihenentwicklung der Quadratwurzel beseitigen lassen.

Beispiele. Für $c = 2$, $k = 6$, $x = 10^4$ wird $N = 2$; die Zahlen sind

$$\sqrt{326} = 36, \overline{(2)^5, 72}, \quad \sqrt{5100} = 71, \overline{(2)^5, 142}.$$

Für $c = 1$, $k = 12$, $x = 10^4$ wird $N = 1$; $4D = (f_6^2 + 1)(g_6^2 + 5)$

$$\tfrac{1}{2}\left(\sqrt{5 \cdot 7 \cdot 13 \cdot 47} + 1\right) = \tfrac{1}{2}\left(\sqrt{21385} + 1\right) = 73, \overline{(1)^{11}, 145}.$$

Es sei noch eine Feststellung angeschlossen, die sich aus der Tatsache ergibt, daß für gerades k das Polynom (36) nach (39) in zwei ganzzahlige Linearfaktoren zerfällt.

Satz 9. *Ist p eine Primzahl* $\neq 7$ *und nicht von der Form* $c^2 + 2$, *so hat* $\sqrt{p}$ *nie eine rKB-Entwicklung der Form*

$$b_0, \overline{(c)^{2l-1}, b_{2l}} \quad (l \geqq 1, b_{2l} \neq c).$$

Beweis. In letzterem Falle läßt sich nämlich nach Satz 8 und (39) schreiben

$$4p = (f_l^2(c)\, n + 1)(g_l^2(c)\, n + c^2 + 4),$$

$n = 0$ führt auf eine eingliedrige Periode, kommt also nicht in Frage. Da der rechte Faktor rechts > 4 ist, kann der linke nur 2 oder 4 sein. Im ersten Falle ist $f_l^2(c) \cdot n = 1$, $n = f_l(c) = 1$, also entweder $l = 1$, c beliebig, $g_1(c) = c$ (nach (37)), $p = c^2 + 2$, mit $\sqrt{c^2 + 2} = c, \overline{c, 2c}$; oder aber $l = 2$, $c = 1$, $g_2(1) = 3$, $p = 7$, $\sqrt{7} = 1, \overline{1, 1, 1, 4}$, was wir beides ausgeschlossen hatten. Im zweiten Falle ist $f_l^2(c)\, n = 3$, also

$n = 3$, $f_l(c) = 1$. Für $l = 1$ wird jetzt $3\,g_1^2(c) + c^2 + 4 = 4\,(c^2 + 1)$, — mit der KBr Entwicklung $2\sqrt{c^2+1} = 2\,c, \overline{2, 4\,c}$ — keine Primzahl; für $l = 2$, $c = 1$ entsteht $9 \cdot 3 + 5 = 32$ — mit der Entwicklung $\sqrt{32} = 5, \overline{1, 1, 1, 10}$ — also auch keine Primzahl.

Aus einer ähnlichen Überlegung würde noch einfacher folgen, daß für eine Primzahl der Form $4q + 1$ $\frac{\sqrt{p}+1}{2}$ keine KBr-Entwicklung der genannten Form haben kann; in diesem Falle aber ist schon anderweitig bekannt, daß die Periode nicht von gerader Gliederzahl sein kann; denn jetzt ist die Pellsche Gleichung $t^2 - p\,u^2 = -4$ lösbar (s. z. B. Scholz [19], 110, Satz 73), woraus bekanntlich für jede Zahl der Diskriminante p folgt, daß die Periodenlänge ungerade ist.

Als *Gegenbeispiel für ungerades* k sei angeführt, daß der Fall $c = 2$, $k = 3$, $S = 0$ von Satz 8 liefert

$$\sqrt{25\,n^2 + 14\,n + 2} = 5\,n + 1, \overline{2, 2, 10\,n + 2}$$

und hier erscheinen für $n = 1, 3, 9, 11, 13$ bzw. die Primzahlen 41, 269, 2153, 3181, 4409.

Zu diesem ganzen § finden sich zahlreiche Einzelbeispiele und Bemerkungen bei Kraitchik [7], Kap. III, IV, 30—71. Für unser D ist dort A bzw. $A + \frac{1}{4}$ geschrieben, je nachdem S gerade oder ungerade ist. Unsere in gewissem Sinne abschließenden Sätze 6, 7, 8 sind jedoch dort keineswegs erreicht. Manche Bemerkungen stehen dort ohne Beweis und scheinen experimentell gefunden zu sein; etwa die Feststellung Nr. 22, S. 57, daß der symmetrische Teil der Entwicklung einer $\sqrt{A}$ niemals aus $3a + 2$ Einsen bestehen kann: dies ist ein Sonderfall unserer vollständigen Diskussion in Satz 8. Ebenso sind eine Reihe von numerischen Beispielen für Quadratsummenzerlegungen von A gegeben. Sie erweisen sich als Sonderfälle unserer Formel (41), die auf etwas versteckter liegenden Eigenschaften der Lucasschen rekurrenten Zahlfolgen beruht (und nicht auf ganzzahliges $D = A$ beschränkt ist).

§ 3.

Allgemeine Sätze über Periodenformen und Periodenlängen.

Im vorstehenden wie in der Literatur findet man eine Fülle von Beispielen algebraischer Funktionen der Gestalt

$$\sqrt{D(x) + s(x)}$$

($D(x)$ und $s(x)$ Polynome über dem Körper P_0 der Rationalzahlen), der Art, daß für alle ganzzahligen Werte $x = n$ ($\geqq n_0$) eine regelmäßige Kettenbruchentwicklung besteht

$$\sqrt{D(n) + s(n)} = p_0(n), \overline{p_1(n), \ldots p_k(n)}$$

mit von n unabhängigem k, und mit Polynomen $p_\nu(x)$ über P_0 (die also für $n \geqq n_0$ sämtlich ganzzahlig werden); in etwas allgemeineren Fällen lassen sich wenigstens die Zahlen $\geqq n_0$ in eine endliche Anzahl von Klassen der Art aufteilen, daß für jede einzelne von ihnen eine einheitliche Entwicklung dieser Art besteht. So gilt z. B. für $D_h = n^2 + h$

$$\sqrt{D_1} = n, \overline{2n}; \quad \sqrt{D_{-1}} = n-1, \overline{1, 2n-2} \qquad (n \geqq 2)$$

$$\sqrt{D_2} = n, \overline{n, 2n}; \quad \sqrt{D_{-2}} = n-1, \overline{1, n-2, 1, 2n-2} \qquad (n \geqq 2)$$

$$\sqrt{D_4} = n, \overline{\frac{n}{2}, 2n} \qquad (n \equiv 0(2))$$

$$\sqrt{D_4} = n, \overline{\frac{n-1}{2}, 1, 1, \frac{n-1}{2}, 2n} \qquad (n \equiv 1(2), \geqq 3)$$

$$\sqrt{D_{-4}} = n-1, \overline{1, \frac{n-4}{2}, 1, 2n-2} \qquad (n \equiv 0(2), \geqq 6)$$

$$\sqrt{D_{-4}} = n-1, \overline{1, \frac{n-3}{2}, 2, \frac{n-3}{2}, 1, 2n-2} \qquad (n \equiv 1(2), \geqq 5).$$

Auf die *allgemeine Frage, wann* eine solche *einheitliche KB-Entwicklung* existiert, hoffe ich zurückkommen zu können; hier bringen wir einen speziellen Satz, der zeigt, daß die 6 eben erwähnten Fälle in gewissem Rahmen einzigartig sind.

Satz 10. *Es sei* $D_h(n) = n^2 + h$, h *ganzzahlig,* $\neq 0, \pm 1, \pm 2, \pm 4$. *Dann ist es, wie groß man auch die ganze Zahl* n_0 *wählen möge, nicht möglich, die Gesamtheit der natürlichen Zahlen* $\geqq n_0$ *so in eine endliche Anzahl von Klassen* $\mathfrak{K}$ *aufzuteilen, daß in jeder derselben eine einheitliche Kettenbruchentwicklung bestünde*

$$\sqrt{D_h(n)} = p_0(n), \overline{p_1(n), \ldots p_k(n)}. \qquad (n \geqq n_0;\ n \in \mathfrak{K}) \tag{42}$$

($p_\nu(x)$ Polynome, die für $x = n$ positiv ganzzahlig werden sollen, und ebenso wie k nur von der Auswahl der Klasse $\mathfrak{K}$ abhängen).

Angenommen nämlich, dies wäre doch der Fall! Es sei dann $\mathfrak{K}$ eine unter diesen Klassen, die unendlich viele n-Werte enthält, und deren genauere Auswahl wir uns noch vorbehalten. Es gilt dann nach S. 177 (16)(17) für alle $n \in \mathfrak{K}$ die Beziehung $A_{k-1}^2(n) - D_h(n)\, B_{k-1}^2(n) = (-1)^k$, und da es sich um unendlich viele n-Werte handelt, gilt identisch in x

$$A_{k-1}^2(x) - D_h(x)\, B_{k-1}^2(x) = (-1)^k. \tag{43}$$

Das besagt insbesondere, daß die ganze algebraische Funktion

$$f(x) = A_{k-1}(x) + B_{k-1}(x)\sqrt{D_h(x)} \tag{44}$$

des Körpers $C(x, \sqrt{D_h(x)})$ (C komplexer Zahlkörper) in den beiden unendlichfernen Punkten der Riemannschen Fläche entgegengesetzte Ordnungszahl besitzt, sagen wir N und $-N$ (N positiv, da $f(x)$ nicht

konstant ist!). Eine solche Funktion ist jedenfalls $f^*(x) = (x + \sqrt{x^2+h})^N$, der Quotient f/f^* ist daher eine Konstante $\neq 0$ (da er weder Nullstelle noch Pol besitzt), man hat also genauer

$$f(x) = \left(\frac{x + \sqrt{x^2+h}}{\sqrt{|h|}}\right)^N,$$

— wo die Wurzel für reelle positive Werte positiv ist, wenn sie es in (44) war —, da wegen der Bedeutung der $A_{k-1}(n)$, $B_{k-1}(n)$ der Faktor von x^N in der Potenzentwicklung im unendlichen >0 ist, und wegen (43) für $x = 0$.

Wir setzen jetzt $f^2(x) = P(x) + Q(x)\sqrt{D_h(x)}$; dann sind auch $P(n) = A_{k-1}^2(n) + D_h(n) B_{k-1}^2(n)$ und $Q(n) = 2A_{k-1}(n) B_{k-1}(n)$ für $n \in \mathfrak{R}$ ganzzahlig. Ist ferner

$$\left(\frac{(n + \sqrt{n^2+h})^2}{|h|}\right)^\nu = P_\nu + \sqrt{D_h(n)}\, Q_\nu \qquad (\nu = 0, 1, \ldots),$$

so wird $P_0 = 1$, $P_1 = \frac{2n^2+h}{|h|}$ und $P_N = P(n)$, $Q_N = Q(n)$.

Nunmehr unterscheiden wir 3 Fälle.

1) $|h|$ *ungerade und* $\geqq 3$. Als halbe Potenzsummen der Wurzeln der Gleichung

$$|h| t^2 - 2(2n^2+h) t + |h| = 0$$

genügen die P_ν der Rekursionsformel

$$|h| P_\nu - 2(2n^2+h) P_{\nu-1} + |h| P_{\nu-2} = 0 \qquad (\nu \geqq 2).$$

Daraus folgt induktiv, daß $|h|^\nu P_\nu$ ganz und $\equiv 2^{2\nu-1} n^{2\nu} \pmod{|h|}$. Für $\nu = N$ $(\geqq 1)$ ist nun schon P_N selbst ganz, und das gibt einen Widerspruch, wenn wir eine Klasse wählen, in der Zahlen $n \equiv \pm 1$ $(|h|)$ auftreten (und eine unendliche solche Klasse gibt es natürlich); denn dann wäre ja die linke Seite der letzten Kongruenz durch h teilbar, die rechte nicht.

2) $h = 2l$, $|l|$ *ungerade* $\geqq 3$. Es wird hier

$$P_\nu + \sqrt{D_h(n)}\, Q_\nu = \left(\frac{n^2+l+n\sqrt{n^2+2l}}{|l|}\right)^\nu,$$

also

$$P_1 = \frac{n^2+l}{|l|}, \quad |l| P_\nu - 2(n^2+l) P_{\nu-1} + |l| P_{\nu-2} = 0$$

und daher ähnlich

$$|l|^\nu P_\nu \equiv 2^{\nu-1} n^{2\nu} \; (|l|).$$

Für $\nu = N$ entsteht, da jetzt $|l|$ ungerade $\geqq 3$, der gleiche Widerspruch.

3) $h = 4l$, $|l| \geqq 2$, *sonst beliebig.*

Es wird

$$P_\nu + \sqrt{D_h(n)}\, Q_\nu = \left(\frac{n^2+2l+n\sqrt{n^2+4l}}{2|l|}\right)^\nu,$$

$$P_1 = \frac{n^2+2l}{2|l|}, \quad |l|\, P_\nu - (n^2+2l)\, P_{\nu-1} + |l|\, P_{\nu-2} = 0,$$

und

$$2|l|^\nu P_\nu \equiv n^{2\nu} (|l|),$$

woraus jetzt für jedes $|l|$ (auch gerade) $\geqq 2$ ein ähnlicher Widerspruch hervorgeht. Damit ist der Satz bewiesen. Aus ihm folgt z. B. für $h = 3$, daß, während bekanntlich die Entwicklung gilt $\sqrt{n^2+3} = n, \frac{2n}{3}, 2n$ für $n \equiv 0\ (3)$[3]), sich die Zahlen $\sqrt{n^2+3}$ mit $n \equiv \pm 1\ (3)$, $n \geqq n_0$, *nicht* durch eine oder mehrere Entwicklungen der Form (42) darstellen lassen; etwas schärfer ist dies nach dem Beweis 1) auch nicht für eine der beiden Unterklassen $n \equiv +1\ (3)$ oder $n \equiv -1\ (3)$ einzeln möglich.

Im allgemeinen wird bei Zahlfolgen wie (42) (linke Seite) der quadratische Zahlkörper mit n wechseln. Nunmehr betrachten wir Folgen ξ_n quadratischer Zahlen aus dem *nämlichen* Körper, und geben Bedingungen, unter denen hierbei für $n \to \infty$ beliebig lange primitive Kettenbruchperioden auftreten, so daß auch jetzt insbesondere eine Entwicklung der Form (42) nicht möglich ist.

Satz 11. *Es sei ξ eine quadratische Zahl positiver Differente. Dann sind unter den Zahlen $n\xi$ $(n = 1, 2, \ldots)$ solche mit beliebig langer primitiver Periode enthalten.*

Beweis. Wir wählen die ganze rationale Zahl g so, daß für $g\xi = \eta$ die Bedingungen (15) bei Satz 5 erfüllt sind. Dann haben die für $n = mg$ $(m = 1, 2, \ldots)$ hervorgehenden Zahlen der Folge $mg\xi = m\eta$ nach Satz 5 höchstens eingliedrige Vorperiode. Nun sei die natürliche Zahl N beliebig groß vorgeschrieben, und die positiven ganzen Zahlen $b_1, b_2, \ldots b_{2N}$ seien so gewählt, daß $b_{2N} \geqq 2$, und für *keine* Nummer $l \leqq N-1$ die *sämtlichen* Gleichungen

$$b_{\nu+l} = b_\nu \qquad (\nu = 1, 2, \ldots l)$$

bestehen. Setzt man dann

$$r = [0, b_1, b_2, \ldots b_{2N}],\ r' = [0, b_1, b_2, \ldots b_{2N}-1],\ r'' = [0, b_1, b_2, \ldots b_{2N}+1],$$

so gilt $0 < r' < r < r'' < 1$.

Auf die Folge $m\eta$ läßt sich nun der einfachste Fall des Kroneckerschen Approximationssatzes anwenden (vgl. etwa Perron [14], 144, Satz 60 oder Hardy-Wright [4] 363, Satz 438); daher gilt für geeignetes n $r' < n\xi - [n\xi] < r''$. Also beginnt nach einem bekannten Satze (P 41, Satz 9] die Entwicklung von $n\xi - [n\xi]$ mit $0, b_1, b_2, \ldots b_{2N-1}$. Eine Periode von $n\xi$ können wir mit b_1 beginnen, und ihre Länge ist wegen der Wahl der b_ν sicher $> N$, also beliebig groß, wie gewünscht.

[3]) Vgl. etwa die Tafel S. 181, $k = 2$.

Das folgende Verfahren gründet sich auf die *additive* Hinzufügung eines Zusatzgliedes zu einem gegebenen rKB.

Satz 12. *Ist ξ eine reduzierte Zahl und r rational und von hinlänglich kleinem Betrag, so hat $\xi + r$ eine beliebig lange primitive Periode, in der überdies jene von ξ beliebig oft hintereinander auftritt.*

Beweis[4]). Für hinreichend kleines $|r|$ ist $\eta = \xi + r$ ebenfalls reduziert, und anderseits stimmt nach dem vorhin benützten Satze die Entwicklung von η mit der von ξ dann beliebig weit, aber doch nicht völlig überein. Es tritt also in der Entwicklung von η beliebig oft, sagen wir m mal, die Periode von ξ hintereinander auf, aber dann kommt eine Abweichung. Die primitive Periode von η hat also mindestens $mk+1$ Glieder.

Es sei z. B. $r = r_n = g:n$ gesetzt $((g, n) = 1)$. Gehört ξ zur Diskriminante d, so η zu $n^4 d$, wofern nur $(a, n) = 1$, wenn $at^2 + bt + c = 0$ die primitive quadratische Gleichung für ξ ist. Man kann also zu jeder Zahlklasse $\mathfrak{k}$ der Diskriminante d ein n so angeben, daß zur Diskriminante $n^4 d$ eine Zahlklasse $\mathfrak{k}'$ existiert, deren Periode jene erste in beliebig oftmaliger Wiederholung enthält, und kann dies für geeignetes hinreichend großes n auch bei allen Klassen $\mathfrak{k}$ gleichzeitig erreichen (mit gleichem r_n, aber nicht notwendig gleichem $\mathfrak{k}'$).

Beispiel zu Satz 12. $\xi = \frac{1+\sqrt{5}}{2} = \overline{1}$. $\xi + r$ ist reduziert, sobald $\frac{\sqrt{5}-3}{2} < r < \frac{\sqrt{5}-1}{2}$. $d = 5$.

Ferner wird jetzt (vgl. (31)) $A_\nu = f_{\nu+2}(1) = f_{\nu+2}$ (Fibonaccische Zahlen), $B_\nu = f_{\nu+1}$, und es wird für η die Periodenlänge $> N-1$, wenn r zwischen $\frac{f_{N+2}}{f_{N+1}} - \xi$ und $\frac{f_{N+1}}{f_N} - \xi$ liegt, wie man nachrechnen kann. Für $N = 2$ ist z. B. $r = \frac{1}{3}$ zulässig, und man erhält

$$\frac{5+3\sqrt{5}}{6} = \overline{1, 1, 19, 1, 1, 3}.$$

Für $N = 4$ kann $r = \frac{1}{24}$ genommen werden; es wird $n^4 d = 24^4 \cdot 5 = 1658880$ und $\frac{13+12\sqrt{5}}{24} = \xi + r = \zeta$ erhält die mit der folgenden Periode beginnende Entwicklung

$$(1)^4, 15, 3;\ 1, 1, 10, 13;\ 2, 6, 3, 1, 4, 1;\ 1, 2, 2, 3, 1, 2, 1, 1.$$

Beginnt man die Periode nach den Strichpunkten, so erhält man, nebenbei bemerkt, die Werte $\zeta + \frac{1}{4}$, $\zeta + \frac{1}{2}$, $\zeta - \frac{1}{4}$, die also hier mit ζ äquivalent sind. Beginnt man aber mit dem vorletzten Glied, so sieht man, daß $\zeta^* = \frac{288\sqrt{5}+410}{649}$ eine mit 6 Einsen beginnende Pe-

[4]) In aufgrund einer freundlichen Anregung von Herrn Perron verkürzter Form.

riode hat. Demnach ist $\xi - \xi^*$ zwischen f_7/f_6 und f_8/f_7 gelegen, somit

$$|\xi - \xi^*| < \frac{1}{f_6 f_7} = \frac{1}{104},$$

was die numerische Rechnung bestätigt. Diese reduzierte Zahl ξ^* der Diskriminante $n^4 d$ approximiert also ξ noch besser, als ζ es tut. Zur Klärung der Beziehungen zwischen den Klassen und rKB-Perioden, deren Diskriminanten $d = q^2 d_1$ zum gleichen Stamm gehören, wäre es vielleicht angebracht, solchen Approximationen systematisch nachzugehen.

Will man schließlich noch Zahlfolgen aus einem quadratischen Körper haben, die *Zahlen mit beliebig langer Vorperiode* enthalten, so ist ein naheliegendes Bildungsverfahren dieses:

Es sei ξ eine reduzierte Körperzahl der primitiven Periode k: $\xi = \overline{b_0, b_1, \ldots b_{k-1}}$, und $\eta = c_0, c_1, \ldots$ eine Irrationalzahl, für die nur $c_{\nu_n - 1} \neq b_{k-1}$ für eine Folge $\nu = \nu_n \to \infty$; ihre Näherungsbrüche seien C_ν/D_ν. Wir bilden dann die Zahlen

$$(45) \qquad \eta_n = \frac{\xi C_{\nu_n - 1} + C_{\nu_n - 2}}{\xi D_{\nu_n - 1} + D_{\nu_n - 2}} = [c_0, c_1, \ldots c_{\nu_n - 1}, \overline{b_0, b_1, \ldots b_{k-1}}].$$

Es liegt auf der Hand, daß die Periode nicht vor dem ν_{n+1}ten Glied beginnen kann. Will man gleichzeitig auch noch die Periode wachsen lassen, so setze man für ξ eine der vorher konstruierten Folgen ein (vgl. Satz 11, 12), und sorge dafür, daß $c_{\nu_n - 1} \neq b_{k_n - 1}$, wenn k_n die primitive Periode der reduzierten Zahl ξ_n bedeutet.

Wir schließen mit einem, den Fällen von Satz 6 verwandten *Beispiel* für *beliebig lange Vorperioden aus gleichen Zahlen.* Es seien $b, c \geqq 1$ und $\xi = \overline{b} = \frac{1}{2}(b + \sqrt{b^2 + 4})$; $\eta = \overline{c} = \frac{1}{2}(c + \sqrt{c^2 + 4})$. Aus (45) ergibt sich dann nach einer kleinen Umformung unter Beachtung der Eigenschaften (32) (34) der $f_\nu(c)$ die Formel

$$\eta_n = \frac{\xi f_{n+1}(c) + f_n(c)}{\xi f_n(c) + f_{n-1}(c)} = \frac{(b-c) f_n^2(c) + (-1)^n \xi}{(b-c) f_{n-1}(c) f_n(c) + (-1)^n} = \overline{(c)^n, b}.$$

Insbesondere wird für $b = c + 1$

$$\frac{f_n^2(c) + (-1)^n \xi}{f_{n-1}(c) f_n(c) + (-1)^n} = \overline{(c)^n, c+1} \text{ mit } \xi = \tfrac{1}{2}\left(c + 1 + \sqrt{c^2 + 2c + 5}\right)$$

und ganz speziell

$$\frac{f_n^2(1) + (-1)^n + (-1)^n \sqrt{2}}{f_n(1) f_{n-1}(1) + (-1)^n} = \overline{(1)^n, 2},$$

wo jetzt die $f_\nu(1)$ die gewöhnlichen Fibonaccischen Zahlen sind.

(Eingegangen am 8. März 1948.)

Schriftenverzeichnis.

A. Arwin.

[0] Einige periodische Kettenbruchentwicklungen. J. reine angew. Math. **155** (1926), 111—128.

E. Bessel-Hagen.

[1] Zahlentheorie. Pascals Repertorium der Höheren Mathematik. 2. A. 1929. Kap. 27. Zitiert „B".

Z. Chajot.

[2] Heronische Näherungsbrüche, Jber. Deutsche Math. Ver. **42** (1933), 130—135.

H. Dörrie.

[3] Quadratische Gleichungen. München, Oldenbourg 1943.

Hardy und Wright.

[4] An introduction to the theory of numbers. Oxford, Clarendon 1938.

A. Hurwitz.

[5] Über die Entwicklung komplexer Zahlen in Kettenbrüche. Acta Math. **11** (1888), 187—200.

K. Kommerell.

[6] Das Grenzgebiet der elementaren und höheren Mathematik. Leipzig, Köhler 1936.

M. Kraitchik.

[7] Théorie des nombres I. Paris, Gauthiers-Villars 1926, 1. partie.

E. Landau.

[8] Vorlesungen über Zahlentheorie I. Leipzig, Hirzel 1927.

E. Lucas.

[9] Théorie des nombres I. Paris, Gauthiers-Villars 1891.

H. Minkowski.

[10] Über periodische Approximationen algebraischer Zahlen. Acta Math. **26** (1902), 335—351.

A. Ostrowski.

[11] Über einige Verallgemeinerungen des Eulerschen Produkts $\prod_{\nu=0}^{\infty}(1+x^{2^\nu}) = \frac{1}{1-x}$. Verhandl. Naturforsch. Ges. Basel **40** (1929), 153—214.

W. Patz.

[12] Tafel der regelmäßigen Kettenbrüche für Quadratwurzeln aus den natürlichen Zahlen von 1—10 000. Leipzig, Akad. Verlagsbuchhdlg. 1941.

O. Perron.

[13] Die Lehre von den Kettenbrüchen. 2. Aufl. Leipzig, Teubner 1929. Zitiert „P".

[14] Irrationalzahlen. Göschens Lehrbücherei 1, 2. Aufl. Berlin, De Gruyter 1939.

[15] Über die Approximation irrationaler Zahlen durch rationale. Sitzungsber. Heidelberger Akad. Wiss. A **1921**, 4. Abh.

[16] Quadratische Zahlkörper mit Euklidischem Algorithmus. Math. Ann. **107** (1932), 489—495.

H. Scheffler.

[17] Die unbestimmte Analytik. Hannover 1854, 682 S.

Hermann Schmidt.

[18] Zur Kettenbruchtheorie der zweiseitigen Zahlklassen. Archiv der Mathematik **1** (1948/49), 333—339.

A. Scholz.

[19] Einführung in die Zahlentheorie. Sammlung Göschen, Berlin 1939.

Ein Homomorphiesatz der Theorie der Verbände.

Von

W. Schwan in Osterwald.

1. Einleitung.

Die vorliegende Mitteilung ergänzt die Arbeit [A 3][1]) über die Zusammensetzung von Schwesterperspektivitäten in Verbänden, deren Bezeichnungsweise sie übernimmt, durch die Betrachtung eines weiteren Sonderfalles: Sind für ein gegebenes Elementepaar (a, b) die vier „kleinen Teilbünde"

$$(1) \qquad \frac{a}{a \wedge b}, \quad \frac{b}{a \wedge b} \qquad \frac{a \vee b}{a}, \quad \frac{a \vee b}{b}$$

Teilverbände des Verbandes V, genau dann ist auch die Menge

$$(2) \qquad F(a,b) = \frac{a \vee b}{a} \wedge \frac{a \vee b}{b} : \frac{a}{a \wedge b} \vee \frac{b}{a \wedge b}$$

der nach a und b fastzerlegbaren Elemente ein Teilverband von V. Diesem sind die Teilbünde

$$(3) \qquad V^{\check{}\check{}} = \frac{a}{a \wedge b} \vee \frac{b}{a \wedge b} \text{ und } V^{\hat{}\hat{}} = \frac{a \vee b}{a} \wedge \frac{a \vee b}{b}$$

derjenigen nach a und b fastzerlegbaren Elemente, die progressiv bzw. regressiv nach a und b zerlegt werden können, homomorph. Für diese Teilbünde besagt die Voraussetzung, daß sie Teilverbände der Teilbünde

$$(4) \qquad U^{\check{}} = \frac{a}{a \cap b} \vee \frac{b}{a \cap b} \text{ bzw. } U^{\hat{}} = \frac{a \cup b}{a} \wedge \frac{a \cup b}{b}$$

sind.

2. Ein halber Homomorphiesatz.

2. 1. Die Transformation $z^{\check{}} = (a \cap z) \cup (b \cap z)$ transformiert den Verband V nach [A 3, 2. 1.] in den Teilbund $V^{\check{}} = a/1 \vee b/1$. Da dieser regressiv nach der Methode $(x \cap y)^{\check{}}$ multipliziert, so bilden die den Elementen x und y von V in $V^{\check{}}$ entsprechenden Elemente $x^{\check{}}$ bzw. $y^{\check{}}$ im Teilbund $V^{\check{}}$ das regressive Produkt $(x^{\check{}} \cap y^{\check{}})^{\check{}}$. Und da nach

[1]) Die Angaben in den eckigen Klammern beziehen sich auf das Literaturverzeichnis am Ende der Arbeit.

[A 3, Gleichung 49] $a \cap z^{\smile} = a \cap z$ und $b \cap z^{\smile} = b \cap z$ ist, so haben wir $(x^{\smile} \cap y^{\smile})^{\smile} = (a \cap x^{\smile} \cap y^{\smile}) \cup (b \cap x^{\smile} \cap y^{\smile}) = (a \cap x \cap y) \cup (b \cap x \cap y) = (x \cap y)^{\smile}$. Und dual. Damit ist bereits bewiesen:

Hilfssatz 1. Das von der Transformation $z^{\smile} = (a \cap z) \cup (b \cap z)$ entworfene Bild des Verbandes V, nämlich der Teilbund $V^{\smile}$, ist V hinsichtlich der regressiven Multiplikation homomorph. Und dual. Als Formeln:

(5) $$(x \cap y)^{\smile} = (x^{\smile} \cap y^{\smile})^{\smile}, \quad (x \cup y)^{\frown} = (x^{\frown} \cup y^{\frown})^{\frown}$$

2.2. Daß $V^{\smile}$ zu V hinsichtlich der progressiven Multiplikation i. A. nicht homomorph ist, zeigt das Beispiel Fig. 1. $V^{\smile}$ multipliziert ja progressiv wie V und in Fig. 1 ist für $x = a$ und $y = c$ einerseits $(x \cup y)^{\smile} = (a \cup c)^{\smile} = (a \cup b)^{\smile} = a \cup b$, andererseits $x^{\smile} \cup y^{\smile} = a \cup (a \cap c) = a$, sodaß sich $(x \cup y)^{\smile} \supset x^{\smile} \cup y^{\smile}$ ergibt, während zur Homomorphie $(x \cup y)^{\smile} = x^{\smile} \cup y^{\smile}$ erforderlich wäre. Allgemein gilt, wie das Zurückgreifen auf die Bedeutung der Symbole sofort ergibt, für zwei beliebige Elemente des Verbandes nur

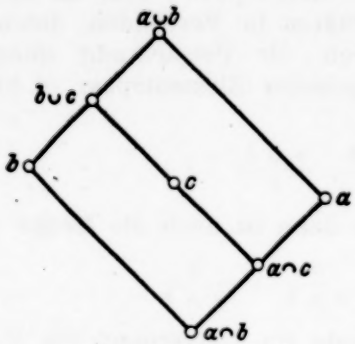


Fig. 1.

(6) $$(x \cup y)^{\smile} \supseteq x^{\smile} \cup y^{\smile}, \quad (x \cap y)^{\frown} \subseteq x^{\frown} \cap y^{\frown}.$$

Um nun für beide Multiplikationen einen Homomorphismus zu erhalten, spezialisieren wir das Elementepaar (a, b) jetzt so, daß die Menge $F(a, b)$ der nach a und b fastzerlegbaren Elemente ein Teilverband von V wird, und wenden sodann die Transformationen $z^{\smile}$ und $z^{\frown}$ nur auf diesen Teilverband an.

3. $F(a, b)$ als Teilverband.

3.1. Da die Menge $F(a, b)$ nach [A 3, 3.1.] aus den $z^{\smile\smile} = z^{\smile}$ und $z^{\frown\frown} = z^{\frown}$ genügenden Elementen z besteht, so ist $F(a, b)$ genau dann ein Teilverband von V, wenn für irgend zwei Elemente x und y von $F(a, b)$ die Gleichungen

(7a) $$(x \cup y)^{\smile\smile} = (x \cup y)^{\smile}, \quad (x \cap y)^{\smile\frown} = (x \cap y)^{\frown}$$

und

(7b) $$(x \cup y)^{\frown\frown} = (x \cup y)^{\frown}, \quad (x \cap y)^{\frown\smile} = (x \cap y)^{\smile}$$

bestehen. Aber für Elemente von $F(a, b)$ folgt (7b) aus (7a). Es ist nämlich

(8) $$(x \cup y)^{\frown\frown} = (x \cup y)^{\smile\frown\frown} = (x^{\frown} \cup y^{\frown})^{\smile\frown\frown} = (x^{\frown} \cup y^{\frown})^{\frown} = (x \cup y)^{\frown}$$

und dual. Und zwar ergibt sich die erste dieser Gleichungen sofort aus der ersten Gleichung (7a), die zweite und vierte aus (5) und die

dritte schließlich aus folgender Überlegung: Aus $x \in F(a,b)$ und $y \in F(a,b)$ folgt $x^\frown \in V^{\smile\frown}$ und $y^\frown \in V^{\smile\frown}$. Und da $V^{\smile\frown}$ progressiv nach der Methode $(x \cup y)^\frown$ multipliziert, so ist auch $(x^\frown \cup y^\frown)^\frown \in V^{\smile\frown}$. Also genügt $(x^\frown \cup y^\frown)^\frown$ der Gleichung $z^{\smile\frown} = z$ von $V^{\smile\frown}$. — Damit ist bewiesen:

Hilfssatz 2. Die Menge $F(a,b)$ der nach a und b fastzerlegbaren Elemente ist genau dann ein Teilverband von V, wenn für irgend zwei Elemente x und y von $F(a,b)$ die Gleichungen (7a) bestehen.

3.2. Wir gehen jetzt darauf aus, die Bedingung (7a) durch eine einfachere zu ersetzen: Nach [A 1, 4.4.] besteht der Teilbund $a/(a \wedge b)$ aus den nach a und b zerlegbaren Teilern von a. Es sei z ein nach a und b fastzerlegbarer Teiler von a. Als fastzerlegbares Element genügt z der Gleichung $z^{\smile\frown} = z^\smile$, die ausführlich geschrieben $(a \cap (b \cup z)) \cup (b \cap (a \cup z)) = (a \cap z) \cup (b \cap z)$ lautet, also bei einem Teiler z von a in die Gleichung $a \cap (b \cup z) = z$ von $a/(a \wedge b)$ übergeht. Hiernach ist jeder nach a und b fastzerlegbare Teiler von a nach a und b sogar zerlegbar. Da auch die Umkehrung gilt, so läßt sich sagen, daß der Teilbund $a/(a \wedge b)$ aus den nach a und b fastzerlegbaren Teilern von a besteht. Von $b/(a \wedge b)$ gilt entsprechendes, von $(a \vee b)/b$ und $(a \vee b)/a$ das Duale. — Hieraus folgt: Ist $F(a,b)$ ein Teilverband von V, dann sind auch die vier „kleinen Teilbünde" (1) Teilverbände von $F(a,b)$ und somit von V.

3.3. Wir behaupten, daß dieses Ergebnis sich umkehren läßt und beweisen zuerst:

Satz 1. Sind die vier „kleinen Teilbünde" $a/(a \wedge b)$, $b/(a \wedge b)$, $(a \vee b)/b$ und $(a \vee b)/a$ Teilverbände des Verbandes V, genau dann sind die beiden Teilbünde

$$(9) \qquad V^{\smile\frown} = \frac{a}{a \wedge b} \vee \frac{b}{a \wedge b} \text{ und } V^{\frown\smile} = \frac{a \vee b}{a} \wedge \frac{a \vee b}{b}$$

Teilverbände der Teilbünde

$$(10) \qquad U^\smile = \frac{a}{a \cap b} \vee \frac{b}{a \cap b} \text{ bzw. } U^\frown = \frac{a \cup b}{a} \wedge \frac{a \cup b}{b}.$$

Beweis. Der Teilbund $V^{\smile\frown}$ wird nicht nur vom Teilbund $U^\smile$ umfaßt, sondern er bedient sich nach [A 3, 6.7.] auch derselben regressiven Multiplikation wie $U^\smile$. Dagegen multipliziert $V^{\smile\frown}$ progressiv nach der Methode $(x \cup y)^{\smile\frown}$, also i. A. anders als $U^\smile$, das progressiv wie V multipliziert. Sind aber $a/(a \wedge b)$ und $b/(a \wedge b)$ Teilverbände von V und somit von $a/(a \cap b)$ bzw. $b/(a \cap b)$, dann zeigt sich, daß auch die progressive Multiplikation von $V^{\smile\frown}$ — man führe sie nach [A 3, 6.4.] „komponentenweise" aus! — mit der von $U^\smile$ übereinstimmt. Also ist dann $V^{\smile\frown}$ Teilverband von $U^\smile$. Und dual. — Die Umkehrung ergibt sich daraus, daß $a/(a \wedge b)$ Teilverband von $V^{\smile\frown}$ und $a/(a \cap b)$ Teilverband von $U^\smile$ ist und daß $a/(a \wedge b)$ von $a/(a \cap b)$ umfaßt wird. Ist

also $V^{\smile\frown}$ Teilverband von $U^{\smile}$, dann ist auch $a/(a \wedge b)$ Teilverband von $U^{\smile}$ und somit von $a/(a \cap b)$ und entsprechend $b/(a \wedge b)$ Teilverband von $b/(a \wedge b)$. Und dual.

3. 4. Wir führen jetzt den mit 3. 3. begonnenen Beweis zu Ende: Ist $V^{\smile\frown}$ Teilverband von $U^{\smile}$, dann gilt für irgend zwei Elemente von $V^{\smile\frown}$ die Gleichung $(x \cup y)^{\smile\frown} = x \cup y$. Und da $V^{\smile\frown}$ aus den Elementen $z^{\smile}$ mit $z \in F(a, b)$ besteht, so gilt für irgend zwei Elemente x und y von $F(a, b)$

$$(11) \qquad (x^{\smile} \cup y^{\smile})^{\smile\frown} = x^{\smile} \cup y^{\smile}.$$

Diese Gleichung läßt sich noch vereinfachen: Nach [A 3, Satz 4, Folgerung 2] ist die Überperspektivität $V^{\smile\frown} \sim V^{\frown\smile}$ die Zuordnung $z^{\smile} \rightleftarrows z^{\frown}$ mit $z \in F(a, b)$. Nun ist $(x^{\smile} \cup y^{\smile})^{\smile\frown}$ das progressive Produkt von $x^{\smile}$ und $y^{\smile}$ in $V^{\smile\frown}$. Ihm entspricht durch die Überperspektivität das progressive Produkt von $x^{\frown}$ und $y^{\frown}$ in $V^{\frown\smile}$ und das ist $(x^{\frown} \cup y^{\frown})^{\frown}$. Also ist $(x^{\frown} \cup y^{\frown})^{\smile\frown} = (x^{\frown} \cup y^{\frown})^{\smile\frown}$. Und da sich das letztere Produkt nach Hilfssatz 1 $(x \cup y)^{\smile\frown}$ schreiben läßt, so geht (11) in die erste der Gleichungen (12) über. Die zweite ergibt sich dual.

$$(12) \qquad (x \cup y)^{\smile\frown} = x^{\smile} \cup y^{\smile}, \quad (x \cap y)^{\frown\smile} = x^{\frown} \cap y^{\frown}.$$

Nun bemerke man, daß aus $z^{\smile} =(= z =(= z^{\frown}$ folgend, über (6) hinaus

$$(13) \qquad \begin{aligned} (x \cup y)^{\smile\frown} =)= (x \cup y)^{\smile} =)= x^{\smile} \cup y^{\smile}, \\ (x \cap y)^{\frown\smile} =(= (x \cap y)^{\frown} =(= x^{\smile} \cap y^{\frown} \end{aligned}$$

besteht und zwar für beliebige Elemente von V. Daher folgen für zwei Elemente von $F(a, b)$ aus (12) die Gleichungen (7 a) und aus diesen nach dem Hilfssatz 2, daß $F(a, b)$ Teilverband von V ist. Die Umkehrung wurde bereits in 3. 2. bewiesen. Im ganzen gilt also

Satz 2 Für irgend zwei Elemente a und b eines Verbandes V gilt: Die Menge

$$(14) \qquad F(a, b) = \frac{a \vee b}{a} \wedge \frac{a \vee b}{b} : \frac{a}{a \wedge b} \vee \frac{b}{a \wedge b}$$

der nach a und b fastzerlegbaren Elemente von V ist genau dann ein Teilverband von V, wenn die vier „kleinen Teilbünde" $a/(a \wedge b)$, $b/(a \wedge b)$, $(a \vee b)/b$ und $(a \vee b)/a$ Teilverbände von V sind.

Ein Elementepaar (a, b) des Verbandes, bei dem dies zutrifft, soll eine Konsonanz von V heißen, jedes andere eine Dissonanz. Beispiele von Konsonanzen sind nicht eben selten: In den modularen Verbänden ist jedes Elementepaar eine Konsonanz (Die „kleinen Teilbünde" sind hier sogar Zwischenreiche). Aber auch in den nichtmodularen Verbänden niederer Ordnung sucht man vergebens nach Dissonanzen. Demnach stellen die dissonanzenfreien Verbände eine Verallgemeinerung der modularen dar. Ein Beispiel einer Dissonanz bildet das Paar $a = p \cup q$, $b = r$ des in [A 3, 9. 2. 2.] besprochenen Verbandes der Ordnung 19.

4. Der Homomorphiesatz.

4. 1. Ist $F(a, b)$ ein Teilverband von V, dann gelten, aus (7 a) und (12) folgend, für irgend zwei Elemente von $F(a, b)$ die Gleichungen

$$(15) \qquad (x \cup y)^{\check{}} = x^{\check{}} \cup y^{\check{}}, \quad (x \cap y)^{\hat{}} = x^{\hat{}} \cap y^{\hat{}}.$$

Hierin sind $x^{\check{}} \cup y^{\check{}}$ und $x^{\hat{}} \cap y^{\hat{}}$ zufolge (11) und der dualen Gleichung die innerhalb $V^{\check{}\check{}}$ bzw. $V^{\hat{}\hat{}}$ gebildeten progressiven bzw. regressiven Produkte von $x^{\check{}}$ und $y^{\check{}}$ bzw. $x^{\hat{}}$ und $y^{\hat{}}$. Demnach besagen die Gleichungen (15) zusammen mit den für beliebige x, y gültigen Gleichungen (5), daß die Teilbünde $V^{\check{}\check{}}$ und $V^{\hat{}\hat{}}$ dem Teilverbande $F(a, b)$ durch die Abbildungen $z^{\check{}}$ bzw. $z^{\hat{}}$ homomorph sind. Und da bei diesen Abbildungen jedes Element des einen oder anderen Teilbundes als Bild genau der ihm für a und b kongruenten Elemente auftritt [vgl. A 3, 7.], so ist das Ergebnis:

Satz 3. Ist die Menge

$$(16) \qquad F(a, b) = \frac{a \vee b}{a} \wedge \frac{a \vee b}{b} : \frac{a}{a \wedge b} \vee \frac{b}{a \wedge b}$$

der nach a und b fastzerlegbaren Elemente des Verbandes V ein Teilverband von V, dann sind die beiden Teilbünde

$$(17) \qquad V^{\check{}\hat{}} = \frac{a \vee b}{a} \wedge \frac{a \vee b}{b} \text{ und } V^{\hat{}\check{}} = \frac{a}{a \wedge b} \vee \frac{b}{a \wedge b}$$

ihm homomorph und zwar derart, daß jedes ihrer Elemente genau die ihm für a und b kongruenten darstellt.

4. 2. Wir erinnern daran, daß nach [A 3, 8. 2.] die Klassen der für a und b kongruenten fastzerlegbaren Elemente in jedem Falle einen $V^{\check{}\check{}}$ und $V^{\hat{}\hat{}}$ isomorphen Verband $F(a, b)$ bilden. Dieser ist also, wenn $F(a, b)$ Teilverband von V ist, $F(a, b)$ homomorph, sofern man jede Klasse als Bild ihrer Elemente betrachtet. Anders gesagt, gilt im Falle der Konsonanz für die Elemente von $F(a, b)$ folgende „Regel der korrespondierenden Multiplikation“: Aus $p \equiv q\ (a, b)$ und $r \equiv s\ (a, b)$ folgt $p \cup r \equiv q \cup s\ (a, b)$ und $p \cap r \equiv q \cap s\ (a, b)$.

5. Konsonanz und Distributivität.

5. 1. Ob die Menge $F(a, b)$ ein Teilverband von V ist oder nicht, in jedem Falle enthält sie $a \cup b$ und $a \cap b$ als oberstes bzw. unterstes Element. Wir werden deshalb sagen, a und b seien komplementäre Elemente von $F(a, b)$.

5. 2. Im Falle der Konsonanz gelten für die Elemente von $F(a, b)$ die Gleichungen (15), die ausführlich gesehrieben

$$(18\,a) \quad (a \cap (x \cup y)) \cup (b \cap (x \cup y)) = ((a \cap x) \cup (a \cap y)) \cup ((b \cap x) \cup (b \cap y))$$

$$(18\,b) \quad (a \cup (x \cap y)) \cap (b \cup (x \cap y)) = ((a \cup x) \cap (a \cup y)) \cap ((b \cup x) \cap (b \cup y))$$

lauten. In (18a) erscheint das Element $(x \cup y)^{\smile}$ auf zwei Arten progressiv nach a und b zerlegt und zwar beide Male innerhalb des Teilverbandes $F(a, b)$. Nach [A 3, 6. 2.] sind beide Zerlegungen identisch. Und dual. Also lassen sich die Gleichungen (18) in je zwei zerfällen:

(19a) $a \cap (x \cup y) = (a \cap x) \cup (a \cap y),\ b \cap (x \cup y) = (b \cap x) \cup (b \cap y)$

(19b) $a \cup (x \cap y) = (a \cup x) \cap (a \cup y),\ b \cup (x \cap y) = (b \cup x) \cap (b \cup y).$

Erklären wir also

Erklärung 1. Ist a ein Element und M eine Menge von Elementen eines Verbandes V, dann heißt a in M distributiv, wenn für irgend zwei Elemente x und y von M die Gleichungen (19 links) bestehen. Dann lautet unser Ergebnis: Ist $F(a, b)$ ein Teilverband von V, dann sind a und b in $F(a, b)$ distributiv.

Jetzt werde umgekehrt vorausgesetzt, daß a und b in der Menge $F(a, b)$ distributiv sind. Dann gilt folgendes: Nach [A 1, 5. 2.] multipliziert der Teilbund $a/(a \wedge b)$ nach den Methoden $x \cap y$ bzw. $(x \cup y)^{\frown}$ $= a \cap (b \cup x \cup y)$. Da er von $F(a, b)$ umfaßt wird, so folgt für irgend zwei Elemente x und y von $a/(a \wedge b)$ aus der Voraussetzung $(x \cup y)^{\frown} = (a \cap b) \cup (a \cap x) \cup (a \cap y) = (a \cap b) \cup x \cup y = x \cup y$. Also ist $a/(a \wedge b)$ Teilverband von V. Ebenso $b/(a \wedge b)$ und dual $(a \vee b)/b$ sowie $(a \vee b)/a$, also nach Satz 2 auch $F(a, b)$. — Im ganzen gilt also: Die Menge $F(a, b)$ enthält a und b immer als komplementäre Elemente. Sind a und b in ihr auch distributiv, genau dann ist $F(a, b)$ ein Teilverband von V.

5. 3. Dieses Ergebnis ist der Abrundung fähig: Für die $z \in F(a, b)$ sind die Subsumptionen [A 3, Formel (18)] oder die Gleichungen

(20a) $\qquad a \cap (b \cup z) = a \cap z,\ b \cap (a \cup z) = b \cap z$

(20b) $\qquad a \cup (b \cap z) = a \cup z,\ b \cup (a \cap z) = b \cup z$

charakteristisch. Mit ihrer Hilfe oder im Anschluß an [A 3, Satz 2. 1.] beweist man, daß der von a und b und dem nach a und b fastzerlegbarem Element z erzeugte Teilverband Z von V i. A. die Ordnung 11 und die in Fig. 2 dargestellte Struktur hat. In den Fällen $z = z^{\smile}$ und $z = z^{\frown}$ geht er in den Verband Fig. 3 über, der übrigens in dem Verband Fig. 2 als Teilverband steckt. Eine weitere Erniedrigung der Ordnung tritt nur ein, wenn z nach a und b sogar zerlegbar ist. Hieraus ersehen wir nebenbei, daß jeder Verband, dessen Elementepaare nicht alle zerlegend sind, einen Verband 10. Ordnung des in Fig. 3 dargestellten Typs als Teilverband umfaßt.

5. 4. Da Z in jedem Falle aus lauter nach a und b fastzerlegbaren Elementen besteht, so enthält Z nach dem Ergebnis von 5. 2. die Elemente a und b als komplementäre distributive Elemente. — Es sei jetzt T irgend ein Teilverband von V, der a und b als komplementäre distributive Elemente enthält. Dann gilt für jedes $z \in T$

offenbar $a \cap z^{\frown} = a \cap (b \cup z) = (a \cap b) \cup (a \cap z) = a \cap z$ und ebenso $b \cap z^{\frown} = b \cap z$. Und da $a \cup z^{\frown} = a \cup z$ und $b \cup z^{\frown} = b \cap z$ ohnehin

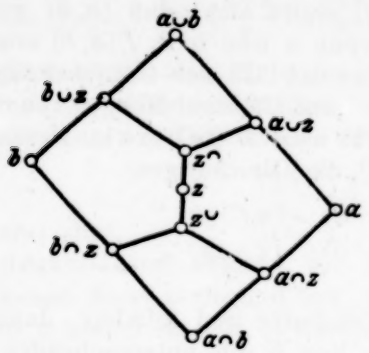


Fig. 2

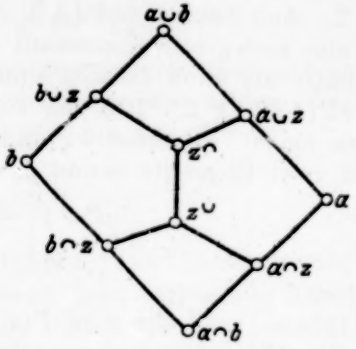


Fig. 3

bestehen, so ergibt sich $z^{\frown} \equiv z\ (a, b)$ und dual $z^{\smile} \equiv z\ (a, b)$, also nach [A 3, 7. 2.] im ganzen $z \in F(a, b)$. Es umfaßt also $F(a, b)$ jeden Teilverband von V, der a und b als komplementäre distributive Elemente enthält, und es gehört auch jedes $z \in F(a, b)$ einem solchen Teilverband an. Demnach können wir das Ergebnis von 5. 2. jetzt wie folgt abrunden:

Satz 4. Die Menge

$$F(a, b) = \frac{a \vee b}{a} \wedge \frac{a \vee b}{b} : \frac{a}{a \wedge b} \vee \frac{b}{a \wedge b} \tag{21}$$

der nach a und b fastzerlegbaren Elemente eines Verbandes V ist die Vereinigungsmenge aller Teilverbände von V, die a und b als komplementäre distributive Elemente enthalten. Sie enthält selbst a und b als komplementäre Elemente. Sind a und b in ihr auch distributiv, genau dann ist $F(a, b)$ ein Teilverband von V.

6. Zerlegende Konsonanzen.

6. 1. Der hier betrachtete Sonderfall der Konsonanz ist dem bereits in [A 3. 9] behandelten Sonderfall des zerlegenden Elementepaares nebengeordnet. Denn in Fig. 2 und Fig. 3 ist (a, b) eine nicht-zerlegende Konsonanz und in [A 3, Fig. 2] eine zerlegende Dissonanz. Man kann daher die beiden Sonderfälle kombinieren und zerlegende Konsonanzen betrachten.

Dieser Fall wurde bereits in [A 3, 9. 2. 2.] gestreift: Er liegt genau dann vor, wenn die beiden Teilbünde $V^{\frown}$ und $V^{\smile}$ als Teilverband zusammenfallen. Ist aber der eine ein Teilverband von V, dann ist auch der andere einer und es sind beide identisch.

Beispiele: In den endlichen Verbänden bis zur 9. Ordnung sind nach 5. 3. alle Elementepaare und daher insbesondere alle Konsonanzen

zerlegend. In den modularen Verbänden vollends, aber auch gewissen nicht-modularen wie z. B. dem 5. Ordnung ist jedes Elementepaar eine zerlegende Konsonanz.

6. 2. Aus Satz 4 und [A 3, Satz 7] ergibt sich, daß (a, b) genau dann eine zerlegende Konsonanz ist, wenn a und b in $F(a, b)$ sowohl distributiv als auch kürzbar sind. Aber das läßt sich einfacher sagen:

Erklärung 2. Is a ein Element und M eine Menge von Elementen eines Verbandes V, dann heißt a in M neutral, wenn für irgend zwei Elemente x und y von M die Gleichungen

$$x \cap (a \cup y) = (x \cap a) \cup (x \cap y) \tag{22a}$$

$$x \cup (a \cap y) = (x \cup a) \cap (x \cup y) \tag{22b}$$

bestehen.

Hilfssatz 3. Ist a in $F(a, b)$ distributiv und kürzbar, dann ist a in $F(a, b)$ neutral und umgekehrt. Von b gilt entsprechendes.

Beweis 1. Es sei a in $F(a, b)$ distributiv und kürzbar und $x \in F(a, b)$ sowie $y \in F(a, b)$. Dann sind nach 5. 3. und 5. 4. auch $a \cap x$, $a \cap y$, $a \cup x$ und $a \cup y$ Elemente von $F(a, b)$. Setzen wir

$$(x \cap a) \cup (x \cap y) = p, \quad x \cap (a \cup y) = q, \tag{23}$$

dann ist $p \leqq q$, also auch $a \cap p \leqq a \cap q = a \cap x$, andererseits aber $p \geqq a \cap x$, also auch $a \cap p \geqq a \cap x$ und somit $a \cap p = a \cap q$. Weiter ist $a \cup p = a \cup (x \cap y) = (a \cup x) \cap (a \cup y)$ und wegen $a \cup y \in F(a, b)$ ebenso $a \cup q = (a \cup x) \cap (a \cup y)$, also $a \cup p = a \cup q$. Aus $a \cap p = a \cap q$ und $a \cup p = a \cup q$ folgt nach Vor. $p = q$, d. h. (22a). Die Gleichung (22b) ergibt sich dual.

2. Jetzt sei umgekehrt a in $F(a, b)$ neutral und wiederum $x \in F(a, b)$ sowie $y \in F(a, b)$. Dann finden wir mit Hilfe von $a \cup x \in F(a, b)$ durch zweimalige Anwendung der Regel (22a)

$$\begin{aligned}(a \cup x) \cap (a \cup y) &= ((a \cup x) \cap a) \cup ((a \cup x) \cap y) = a \cup ((a \cup x) \cap y) \\ &= a \cup (a \cap y) \cup (x \cap y) = a \cup (x \cap y)\end{aligned}$$

und dual $(a \cap x) \cup (a \cap y) = a \cap (x \cup y)$, d. h. die Distributivität von a in $F(a, b)$. — Ferner folgt aus $a \cap x = a \cap y$ und $a \cup x = a \cup y$ nach Birkhoff [2]

$$\begin{aligned}x = x \cap (a \cup x) &= x \cap (a \cup y) = (x \cap a) \cup (x \cap y) = (y \cap a) \cup (y \cap x) \\ &= y \cap (a \cup x) = y \cap (a \cup y) = y.\end{aligned}$$

d. h. a ist in $F(a, b)$ kürzbar. —

Ganz entsprechend läßt sich beweisen, daß a genau dann im Gesamtverbande V neutral ist, wenn a in V distributiv und kürzbar ist, und hieraus ergibt sich, daß unsere Erklärung der neutralen Elemente für $M = V$ mit der formal anderen von G. Birkhoff [2] sachlich übereinstimmt. — Den Sonderfall der zerlegenden Konsonanz aber können wir jetzt so beschreiben:

Satz 5. Für irgend zwei Elemente a und b eines Verbandes V gilt: Ist einer der beiden Teilbünde

$$\frac{a \vee b}{a} \wedge \frac{a \vee b}{b} \text{ und } \frac{a}{a \wedge b} \vee \frac{b}{a \wedge b}$$

ein Teilverband von V, dann ist auch der andere einer und es sind beide Teilverbände identisch. Es fallen aber die beiden Teilbünde genau dann als Teilverband zusammen, wenn a und b in

$$\frac{a \vee b}{a} \wedge \frac{a \vee b}{b} : \frac{a}{a \wedge b} \vee \frac{b}{a \wedge b}$$

neutral sind.

Rückblickend können wir daher sagen: Das Elementepaar (a, b) ist genau dann zerlegend bzw. Konsonanz bzw. zerlegende Konsonanz, wenn a und b in $F(a, b)$ kürzbar bzw. distributiv bzw. neutral sind.

(Eingegangen am 9. Juni 1948.)

Literaturverzeichnis.

H. Hermes und G. Köthe.
Theorie der Verbände. Enzykl. d. Math. Wiss. I 1, 13; 2. Aufl. (1939).

G. Birkhoff.
Neutral elements in general lattices, Bull. American Math. Soc. 46 (1940), S. 702—705.

W. Schwan.
[A 1] Perspektivitäten in allgemeinen Verbänden, Math. Z. 51. 2 (1948), S. 126—134; [A 2] Ein allgemeiner Mengenisomorphiesatz der Theorie der Verbände, Math. Z. 51. 3 (1948), S. 346—354; A [3] Zusammensetzung von Schwesterperspektivitäten in Verbänden, Math. Z. 52. 2 (1948), S. 150—167.

Verschärfung der notwendigen Bedingungen für die Existenz von ungeraden vollkommenen Zahlen.

Von

Ullrich Kühnel in Rinteln/Weser.

1. Eine Zahl ist bekanntlich dann vollkommen, wenn die Summe ihrer Teiler gleich dem Doppelten der Zahl selbst ist, also

$$\sigma(n) = \sigma\left[\prod p_\nu^{\alpha_\nu}\right] = \prod \frac{p_\nu^{\alpha_\nu+1}-1}{p_\nu-1} = 2n.$$

Über die ungeraden vollkommenen Zahlen ist bisher folgendes bekannt: Sie haben die Form $n = p^\alpha \cdot q_1^{2\beta_1} \cdot q_2^{2\beta_2} \ldots q_m^{2\beta_m}$ ($p, q_1, q_2, \ldots, q_m$ ungerade Primzahlen: $p \equiv \alpha \equiv 1 \pmod 4$))[1]; mindestens ein $\beta_\varrho > 1$[2]), ja sogar, es ist von den Zahlen β_ϱ mindestens eine $\geqq 3$ oder mindestens zwei $\geqq 2$[3]). Nach Sylvester[4]) gehen mindestens 5 verschiedene Primzahlen in n auf. Ich will zeigen, daß mindestens 6 verschiedene Primzahlen in n aufgehen. Es soll also die Unmöglichkeit der Annahme

$$n = p^\alpha \cdot q_1^{2\beta_1} \cdot q_2^{2\beta_2} \cdot q_3^{2\beta_3} \cdot q_4^{2\beta_4}$$

vollkommen oder also die Unmöglichkeit von

$$2n = \frac{p^{\alpha+1}-1}{p-1} \prod_{\nu=1}^{4} \frac{q_\nu^{2\beta_\nu+1}-1}{q_\nu-1} \tag{1}$$

nachgewiesen werden. Aus (1) folgt, wenn man q_0 statt p, γ_0 statt α und γ_ν statt $2\beta_\nu$ schreibt,

$$\prod_{\nu=1}^{i_\varrho} \frac{q_\nu}{q_\nu-1} \prod_{\nu=i_{\varrho+1}}^{i_5} \frac{q_\nu^{\gamma_\nu+1}-1}{(q_\nu-1)q_\nu^{\gamma_\nu}} \geqq 2, \tag{2}$$

wobei die Produkte, falls sie leer sind, 1 bedeuten und $i_1, i_2, \ldots i_5$ irgendeine Anordnung der Zahlen 0, 1, 2, 3, 4 ist. Das Gleichheitszeichen gilt nur, falls das erste Produkt leer ist.

---

[1]) L. Euler, Opera postuma vol. I, S. 14—15; vgl. auch L. E. Dickson, History of the theory of numbers, vol. I, S. 19.

[2]) R. Steuerwald, Verschärfung einer notwendigen Bedingung für die Existenz einer ungeraden vollkommenen Zahl. Sitz.-Ber. bayer. Akad. Wiss., math.-naturwiss. Kl. (1937), S. 69—72.

[3]) H.-J. Kanold, Über eine notwendige Bedingung für die Existenz einer ungeraden vollkommenen Zahl. Deutsche Mathematik IV (1939), S. 53—57.

[4]) J. J. Sylvester, Collected mathematical papers vol. IV, S. 611—614, vgl. auch L. E. Dickson, History of the theory of numbers vol. I, S. 27.

Aus (1) folgt

$$2\,p^{\alpha}\cdot q_1^{2\beta_1}\cdot q_2^{2\beta_2}\cdot q_3^{2\beta_3}\cdot q_4^{2\beta_4}$$

$$= (1+p)(1+p^2+p^4+\cdots+p^{\alpha-1})\prod_{\nu=1}^{4}(1+q_\nu+q_\nu^2+\cdots+q_\nu^{2\beta_\nu}). \tag{3}$$

Daraus ergibt sich, daß $\frac{1+p}{2}$ restlos in $\prod_{\nu=1}^{4} q_\nu^{2\beta_\nu}$ enthalten sein muß. Da jeder Faktor $\frac{q^{\gamma+1}-1}{(q-1)q^{\gamma}} > 1$ ist und mit wachsendem γ wächst, genügt es, für die Unmöglichkeit nachzuweisen, daß

$$\prod_{\nu=1}^{\varrho}\frac{q_\nu^{\gamma_\nu+1}-1}{q_\nu^{\gamma_\nu}(q_\nu-1)} > 2 \tag{4}$$

ist für ein festes Wertsystem der γ_ν und wo ϱ eine der Zahlen 3, 4 oder 5 bedeutet, und außerdem nachzuweisen, daß für alle Wertsysteme mit niedrigeren Exponenten die Zahl n nicht vollkommen sein kann.

(2) ergibt nun bereits, daß in einer nur aus 5 verschiedenen Primzahlen bestehenden Zahl die 3 auftreten muß $\left(\text{denn } \frac{5.7.11.13.17}{4.6.10.12.16} < 2\right)$. Außerdem folgt, daß als zweite Primzahl 5 oder 7 auftreten muß. Der einzige, sonst noch mit (2) vereinbare Fall $n = 3^{\alpha}.11^{\beta}.13^{\gamma}.17^{\delta}.19^{\varepsilon}$ scheidet, wie wir bald sehen werden, leicht aus. Übrigens können nicht 5 und 7 auftreten. Denn es ist bereits

$$\frac{3^3-1}{2.3^2}\cdot\frac{5^2-1}{4.5}\cdot\frac{7^3-1}{6.7^2} = \frac{13}{9}\cdot\frac{6}{5}\cdot\frac{57}{49} > 2.$$

Es ist also keine vollkommene Zahl $\equiv 0 \pmod{105}$[5]).

2. $n = 3^{\alpha}.11^{\beta}.13^{\gamma}.17^{\delta}.19^{\varepsilon}$. 17 kann nur in $\frac{\pi^{l+1}-1}{\pi-1}$ aufgehen, falls $l+1$ ungerade und gleichzeitig $\pi \equiv 1 \pmod{17}$ oder $l+1$ gerade und gleichzeitig $\pi \equiv \pm 1 \pmod{17}$ ist. Denn bei $\pi \not\equiv 1 \pmod{17}$ kann nur eine gerade Potenz $\equiv 1 \pmod{17}$ werden, bei $\pi \not\equiv \pm 1 \pmod{17}$ nur eine durch 4 teilbare, was bei l ungerade wegen $l+1 \equiv 2 \pmod 4$ nicht möglich ist. Da keine der Zahlen $3, 11, 13, 19 \equiv \pm 1 \pmod{17}$ ist, ist

$$17 \nmid \frac{3^{\alpha+1}-1}{2}\cdot\frac{11^{\beta+1}-1}{10}\cdot\frac{13^{\gamma+1}-1}{12}\cdot\frac{17^{\delta+1}-1}{16}\cdot\frac{19^{\varepsilon+1}-1}{18},$$

also n nicht vollkommen.

3. $n = 3^{\alpha}.7^{\beta}.q_2^{\gamma}.q_3^{\delta}.q_4^{\iota}$. Nach (2) ergeben sich in diesem Falle die folgenden Möglichkeiten:

[5]) Das ist natürlich schon längst bekannt, ebenso die in dieser Arbeit nicht benutzte Tatsache, daß es keine ungeraden vollkommenen Zahlen gibt, die $\equiv 2 \pmod 3$ sind. (Pepin, Memorie della Pontificia Accademia dei Nuovi Lincei **13** (1897). S. 345—420.)

n_ν	q_2	q_3	q_4
n_1	11	13	beliebig
n_2		17	
n_3		19	
n_4		23	
n_5		29	< 320 (41, 53, 97, 173. 197, 241, 293)
n_6		31	< 185 (41, 53, 61, 97)
n_7		37	< 93 (41, 53, 73)
n_8		41	< 75
n_9		43	< 69 (53)
n_{10}		47	< 61 (53)
n_{11}	13	17	beliebig
n_{12}		19	
n_{13}		23	< 112
n_{14}		29	< 55
n_{15}		31	< 49
n_{16}	17	19	< 54
n_{17}		23	< 36
n_{18}	19	23	29

n_{18} schaltet nach (3) aus, da $q_4 = 29$ die Primzahlen 3 und 5 verlangen würde. n_{16} und n_{17} schalten aus, da keine Primzahl $\equiv \pm 1 \pmod{17}$ mehr möglich ist. Bei $n_5, n_6, n_7, n_9, n_{10}$ ergeben sich nach (3) die in Klammern stehenden Einschränkungen für q_4.

Die Erledigung der einzelnen Fälle gestaltet sich nun ziemlich einfach, denn fast in allen Fällen ist bereits

$$(5) \qquad \frac{3^{\alpha+1}-1}{2 \cdot 3^{\alpha}} \cdot \frac{7^{\beta+1}-1}{6 \cdot 7^{\beta}} \cdot \frac{q_2^{\gamma+1}-1}{q_2^{\gamma}(q_2-1)} \cdot \frac{q_3^{\delta+1}-1}{q_3^{\delta}(q_3-1)} > 2$$

für ziemlich niedrige Exponenten $\alpha, \beta, \gamma, \delta$, so daß nach (4) nur wenige Unterfälle zu untersuchen bleiben, bei denen gewöhnlich die Anwendung von (3) zum Widerspruch führt.

So ist bei n_2, n_3 (5) schon für $\alpha = 4$, $\beta = 2$, $\gamma = 2$, $\delta = 1$ erfüllt, bei n_4 (5) schon für $\alpha = 4$, $\beta = 4$, $\gamma = 2$, $\delta = 2$; bei n_2, n_3 scheidet aber $\alpha = 2$ aus, da es die Primzahl 13 in n_2, n_3 erfordern würde, bei n_4 würde $\alpha = 2$ 13, $\beta = 2$ die Primzahl 19 erfordern. Bei n_{11} ist (5) mit $\alpha = 6$, $\beta = 4$, $\gamma = 2$, $\delta = 1$ bzw. mit $\alpha = 6$, $\beta = 4$, $\gamma = 1$, $\delta = 2$ erfüllt. $\alpha = 4$ würde nach (3) 11 erfordern. Bei $\alpha = 2$ folgte aus

$$2 = \frac{3^3-1}{2 \cdot 3^2} \cdot \frac{7^{\beta+1}-1}{6 \cdot 7^{\beta}} \cdot \frac{13^{\gamma+1}-1}{12 \cdot 13^{\gamma}} \cdot \frac{17^{\delta+1}-1}{16 \cdot 17^{\delta}} \cdot \frac{p^{\varepsilon+1}-1}{(p-1) \cdot p^{\varepsilon}}$$

$$< \frac{13}{9} \cdot \frac{7}{6} \cdot \frac{13}{12} \cdot \frac{17}{16} \cdot \frac{p}{p-1} \quad : p < 34,$$

aber kein $p < 34$ ist $\equiv \pm 1 \pmod{17}$.

Schließlich würde $\beta = 2$ $q = 19$ erfordern, das wieder $\not\equiv \pm 1 \pmod{17}$ ist. Charakteristisch für die Erledigung der meisten anderen Fälle ist n_5, der deshalb genauer betrachtet werde.

$$n_5 = 3^\alpha \cdot 7^\beta \cdot 11^\gamma \cdot 29^\delta \cdot p^\varepsilon \quad (p < 320;\ p = 41, 53, 97, 173, 197, 241, 293).$$

Es muß $\alpha \geqq 4$, $\beta \geqq 4$, $\gamma \geqq 4$ sein, da sonst 13 oder 19 auftreten müßten. Für $p \leqq 97$ ist bereits

$$\frac{3^5-1}{2 \cdot 3^4} \cdot \frac{7^5-1}{6 \cdot 7^4} \cdot \frac{11^3-1}{10 \cdot 11^2} \cdot \frac{29^2-1}{28 \cdot 29} \cdot \frac{p^{\varepsilon+1}-1}{(p-1)p^\varepsilon} \geqq \frac{121 \cdot 2801 \cdot 133 \cdot 30 \cdot 98}{81 \cdot 2401 \cdot 121 \cdot 29 \cdot 97} > 2,$$

demnach nur noch $p = 173, 197, 241, 293$ möglich.

3, 7, 11, 29 sind primitive Kongruenzwurzeln mod 293, daher

$$293 \nmid \frac{3^{\alpha+1}-1}{2} \cdot \frac{7^{\beta+1}-1}{6} \cdot \frac{11^{\gamma+1}-1}{10} \cdot \frac{29^{\delta+1}-1}{28},$$

da ja $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ gerade sind. Auch 241 schaltet aus, da, wie man leicht feststellt, nur gerade Potenzen dieser Primzahlen $\equiv 1 \pmod{241}$ werden können.

Nun ist

$$3 \nmid \frac{11^{\gamma+1}-1}{10},\quad 11 \nmid \frac{11^{\gamma+1}-1}{10},\quad 29 \nmid \frac{11^{\gamma+1}-1}{10},$$
$$173 \nmid \frac{11^{\gamma+1}-1}{10},\quad 197 \nmid \frac{11^{\gamma+1}-1}{10},$$

daher müßte $\frac{11^{\gamma+1}-1}{10} = 7^{\beta_1}$ mit $\beta_1 > 0$ werden. Das geht aber nur für $\gamma + 1 \equiv 3 \pmod 6$, andererseits ist $11^3 \equiv 1 \pmod{19}$, demnach auch immer $\frac{11^{\gamma+1}-1}{10}$ durch 19 teilbar, so daß auch 19 in n_5 vorkommen müßte.

Die gleiche Überlegung gilt nun für die Fälle n_6—n_{10}. In allen Fällen stellt man fest, daß das Produkt der möglichen Primzahlen zu $\frac{11^{\gamma+1}-1}{10}$ teilerfremd ist und daher, wie eben geschlossen, 19 auftreten müßte. Nur der Fall $3^\alpha \cdot 7^\beta \cdot 11^\gamma \cdot 41^\delta \cdot 43^\varepsilon$ wäre noch denkbar. Denn dort wird $11^7 \equiv 1 \pmod{43}$. Andererseits ist $\frac{11^7-1}{10} = 42 \cdot 45\,319$, und 45319 ist durch keine der Primzahlen 3, 7, 11, 41, 43 teilbar. Daher muß auch stets $\frac{11^{\gamma+1}-1}{10} = \frac{11^{7m}-1}{10}$ durch 45319 teilbar sein, und die Primfaktoren von 45319 müßten in n_8 auftreten. Die anderen Fälle sind etwas langwieriger. Hier möge noch n_1 und n_{12} betrachtet werden.

$$n_1 = 3^\alpha \cdot 7^\beta \cdot 11^\gamma \cdot 13^\delta \cdot p^\varepsilon.$$

(5) ist mit $\alpha = 4$, $\beta = 2$, $\gamma = 2$, $\delta = 1$ erfüllt. Daher bleibt nur $\alpha = 2$. Es ist $\beta \geqq 4$, $\gamma \geqq 4$, da sonst 19 auftreten würde. Und da 7, 13, 19 primitive Kongruenzwurzeln mod 11 sind, wäre

$$11 \nmid \frac{3^3-1}{2} \cdot \frac{7^{\beta+1}-1}{6} \cdot \frac{19^{\varepsilon+1}-1}{18}$$

und zeitigstens

$$11 \mid \frac{13^{10}-1}{12},$$

also $\delta \geqq 9$. Andererseits sind 7, 11, 19 primitive Kongruenzwurzeln mod 13, also

$$13^2 \nmid \frac{3^3-1}{2} \cdot \frac{7^{\beta+1}-1}{6} \cdot \frac{11^{\gamma+1}-1}{10} \cdot \frac{19^{\varepsilon+1}-1}{18}.$$

Da aber (5) mit $\alpha = 2$, $\beta = \gamma = 4$, $\delta = 2$ bereits erfüllt ist, bleibt nur $\delta = 1$ übrig. Aus

$$\frac{13}{9} \cdot \frac{7}{6} \cdot \frac{11}{10} \cdot \frac{14}{13} \cdot \frac{p}{p-1} > 2$$

folgt $p < 540$. Da aber $\beta = 4$ die Primzahl $2801 > 540$ fordern würde, ist $\beta \geqq 6$. Aber es ist

$$\frac{3^3-1}{2.3^2} \cdot \frac{13^2-1}{12.13} \cdot \frac{7^7-1}{6.7^6} \cdot \frac{11^5-1}{10.11^4} \cdot \frac{p^{\varepsilon+1}-1}{(p-1)p^\varepsilon}$$
$$> \frac{13}{9} \cdot \frac{14}{13} \cdot \frac{7^7-1}{6.7^6} \cdot \frac{11^5-1}{10.11^4} \cdot \frac{523^2-1}{522.523} > 2$$

$n_{12} = 3^\alpha . 7^\beta . 13^\gamma . 19^\delta . p^\varepsilon$.

(5) ist mit $\alpha = 8$, $\beta = 4$, $\gamma = 5$, $\delta = 2$ erfüllt. $\alpha = 2$ ergibt nach (2) $p < 28$, also $p = 23$. Da

$$13^2 \nmid \frac{13^{\gamma+1}-1}{12} \cdot \frac{7^{\beta+1}-1}{6} \cdot \frac{19^{\delta+1}-1}{18} \cdot \frac{23^{\varepsilon+1}-1}{22} \cdot \frac{3^3-1}{2},$$

wäre $\gamma = 1$. Aber

$$23 \nmid \frac{3^3-1}{2} \cdot \frac{13^2-1}{12} \cdot \frac{7^{\beta+1}-1}{6} \cdot \frac{19^{\delta+1}-1}{18},$$

$\alpha = 4$ würde $p = 11$ erfordern.

$\alpha = 6$ ergibt wegen

$$\frac{3^7-1}{2} = 1093 \quad p = 1093; \quad \beta = 2 \text{ gäbe nach (2) } p < 428$$
$$\gamma = 1 \text{ gäbe nach (2) } p < 188.$$

Daher $\beta \geqq 4$ $\gamma \geqq 2$. Aber es ist

$$\frac{3^7-1}{2.3^6} \cdot \frac{7^5-1}{6.7^4} \cdot \frac{13^3-1}{12.13^2} \cdot \frac{19^3-1}{18.19^2} \cdot \frac{1093^2-1}{1092.1093} > 2.$$

Ähnliche Überlegungen führen dazu, die Fälle $\beta = 2$ (bei dem Unmöglichkeitsbeweis müssen die Unterfälle γ gerade, γ ungerade ($= 1$, $= 5$) gesondert betrachtet werden), $\gamma = 1$, $\gamma = 2$, $\gamma = 4$ auszuschalten und so die Unmöglichkeit von n_{12} nachzuweisen.

Die restlichen Fälle führen auf ähnliche Überlegungen wie bei n_8. Man schränkt die Möglichkeiten für die letzte Primzahl immer mehr ein und führt die einzelnen Unterfälle nach entsprechenden Überlegungen zum Widerspruch.

4. Ist $5/n_\nu$ so ist (3) für die Einschränkung der möglichen Primzahlen nicht sehr nützlich, da ja immer 5 den ungeraden Exponenten haben könnte. Dagegen ist der folgende Hilfssatz von KANOLD[3]) folgenreich: *Ist a eine beliebige natürliche Zahl und p eine ungerade Primzahl, so ist $b = 1 + a + a^2 + \cdots + a^{p-1}$, außer etwa durch p, nur durch Primzahlen der Form $q = px + 1$ teilbar. Im Falle der Teilbarkeit durch p ist b nicht durch p^2 teilbar.*

Aus diesem Hilfssatz ziehen wir eine Folgerung. Es sei π eine ungerade Primzahl $\equiv 1 \pmod 5$, also $\equiv 1 \pmod{10}$. $\pi^5 - 1 = (1 + \pi + \pi^2 + \pi^3 + \pi^4)(\pi - 1)$ kann nur teilbar sein durch die Primzahlen, die in $\pi - 1$ aufgehen und durch die Primzahlen, die in $1 + \pi + \pi^2 + \pi^3 + \pi^4$ aufgehen, also, da $\pi \equiv 1 \pmod 5$ und nach dem KANOLDschen Hilfssatz, durch 5 und durch Primzahlen der Form $t \equiv 1 \pmod{10}$. Es sei $\pi - 1 = r_1 \cdot r_2 \ldots r_l$, wobei die r_ν die in $\pi - 1$ aufgehenden Primfaktoren seien, mehrfache mehrfach gezählt. Dann kann also geschrieben werden

$$\pi^5 \equiv 1 \pmod{5 t_1 t_2 \ldots t_s \cdot r_1 \cdot r_2 \ldots r_l},$$

also

$$\pi^{5m} \equiv 1 \pmod{5 t_1 t_2 \ldots t_s \cdot r_1 r_2 \ldots r_l};$$

daher

$$\frac{\pi^{5m} - 1}{\pi - 1} \equiv 0 \pmod{5 t_1 t_2 \ldots t_s}.$$

Dabei tritt mindestens ein t_ν wirklich auf, da $1 + \pi + \pi^2 + \pi^3 + \pi^4$ den Primfaktor 5 höchstens in der ersten Potenz enthält. Geht nun $q_\varrho = 5$ in n_ν auf, so muß 5 in einem Faktor $\frac{q^{\varphi+1} - 1}{q - 1}$ aufgehen. Da zeitigstens $1^1 \equiv 1 \pmod 5$, $2^4 \equiv 1 \pmod 5$, $3^4 \equiv 1 \pmod 5$, $4^2 \equiv 1 \pmod 5$ ist und da $\varphi + 1$ entweder ungerade oder von der Form $4m + 2$ ist, kann 5 nur dann in $q^{\varphi+1} - 1$ aufgehen, wenn entweder $q \equiv 1 \pmod{10}$ oder $q \equiv 4 \pmod 5$ und $\varphi + 1$ gerade, also φ ungerade, demnach $q \equiv 1 \pmod 4$ wird. Das ergibt also $q \equiv 9 \pmod{20}$. Wegen

$$\frac{q^{\varphi+1} - 1}{q - 1} = 1 + q + \cdots + q^{\varphi}$$

muß im Falle $q \equiv 1 \pmod 5$ $\varphi \equiv 4 \pmod 5$ sein, d. h. aber, es wäre $\varphi + 1 = 5m$, oder also $5/\frac{q^{5m} - 1}{q - 1}$ oder $5/q^{5m} - 1$.

Wegen des eben hergeleiteten Ergebnisses enthält aber $\frac{q^{5m} - 1}{q - 1}$ mindestens eine weitere Primzahl $t \equiv 1 \pmod{10}$, so daß sich ergibt:

Ist $q_\varrho = 5/n_\nu$, so tritt in n_ν noch entweder eine Primzahl der Form $\equiv 9 \pmod{20}$ mit ungeradem Exponenten auf oder noch mindestens zwei Primzahlen der Form $\equiv 1 \pmod{10}$.

Im Falle $q \equiv 9 \pmod{20}$, φ ungerade ist in

$$n_\nu = 3^\alpha \cdot 5^\beta \cdot q_1^\gamma \cdot q_2^\delta \cdot q^\varphi \quad \beta \geqq 2.$$

Wäre jetzt $5/\frac{q_1^{\gamma+1} - 1}{q_1 - 1}$ oder $5/\frac{q_2^{\delta+1} - 1}{q_2 - 1}$, so müßte q_1 bzw. q_2 die Form

$\equiv 1 \pmod{10}$ haben (es können ja nicht zwei Primzahlen mit ungeradem Exponenten auftreten!). Dann wäre wieder $\gamma \equiv 4 \pmod 5$ bzw. $\delta \equiv 4 \pmod 5$, also $5 \mid \frac{q_i^{5m}-1}{q_i-1}$ $(i = 1, 2)$, also müßte dann noch eine weitere Primzahl $\equiv 1 \pmod{10}$ auftreten. Ist aber $5 \nmid \frac{q_1^{\gamma+1}-1}{q_1-1} \cdot \frac{q_2^{\delta+1}-1}{q_2-1}$, so müßte wegen $\beta \geqq 2$ und da von selbst $5 \nmid \frac{3^{\alpha+1}-1}{2} \cdot \frac{5^{\beta+1}-1}{4}$ ist, $5^\beta \mid \frac{q^{\varphi+1}-1}{q-1}$ sein. Wenn $q \not\equiv -1 \pmod{5^\beta}$ ist, geht das nur, falls $\varphi + 1 \equiv 10 \pmod{20}$ wird; denn $q^x \equiv 1 \pmod{5^\beta}$ kann zeitigstens eintreten für $x \mid \varphi(5^\beta)$ (φ = Eulersche Funktion), also $x/4 \,.\, 5^{\beta-1}$. Demnach hat x die Form $2^\chi . 5^\psi$ mit $\chi = 0, 1, 2$; $\psi = 0, 1, \ldots \beta - 1$. Wegen $q + 1 \not\equiv 0 \pmod{5^\beta}$ kann also $\varphi + 1$ nie die Form $10m + \begin{cases} 2 \\ 5 \\ 8 \end{cases}$ haben, sondern nur die Form $\varphi + 1 = 10m$. (Man beachte $\varphi + 1 \equiv 2 \pmod 4$!). Da nun $\frac{q^{10}-1}{q-1}$ mindestens eine Primzahl der Form $t \equiv 1 \pmod{10}$ enthält, muß also in diesem Falle noch mindestens eine solche Primzahl in n_ν aufgehen. Ist dagegen $q \equiv -1 \pmod{5^\beta}$, dann genügt $\frac{q^2-1}{q-1} = q + 1$; dann können q_1 und q_2 beliebig sein. Daraus ergibt sich also:

Ist $q_0 = 5 \mid n_\nu$ und tritt in n_ν noch eine Primzahl q der Form $\equiv 9 \pmod{20}$ auf (mit ungeradem Exponenten), so ist entweder $q \equiv -1 \pmod{5^\beta}$, oder es tritt in n_ν noch eine Primzahl $\equiv 1 \pmod{10}$ auf.

Auf Grund dieser beiden Ergebnisse und auf Grund von (2) und (3) ergeben sich nun die folgenden Möglichkeiten für $n_\nu = 3^\alpha . 5^\beta . q_1^\gamma . q_2^\delta . q_3^\varepsilon$.

n_ν	q_1	q_2	q_3
n_{19}	11	beliebig	beliebig
n_{20}	13		
n_{21}	17	beliebig	$(q_2 . q_3 < 256\,(q_2 + q_3 - 1))$
n_{22}	19	beliebig	$(q_2 . q_3 < 96\,(q_2 + q_3 - 1))$
n_{23}	23	beliebig	$(7q_2 . q_3 < 352\,(q_2 + q_3 - 1))$
n_{24}	29	beliebig	$(13q_2 . q_3 < 448\,(q_2 + q_3 - 1))$
n_{25}	31	37	$< 231 (41, 61, 71, 89, 101, 131, 149, 151, 181, 191, 211)$
n_{26}		41	< 143
n_{27}		43	$< 123 (61, 71, 89, 101, 109)$
n_{28}		47	$< 99 (61, 71, 89)$
n_{29}		53	$\leqq 79 (61, 71)$
n_{30}		59	$< 69 (61)$
n_{31}	37	41	$< 81 (61, 71)$
n_{32}		43	< 75 (unmöglich, da kein $q \equiv 9 \pmod{20} < 75$ mehr vorhanden)
n_{33}		47	< 65 (unmöglich, da kein $q \equiv 9 \pmod{20} < 65$ mehr vorhanden)
n_{34}	41	43	$< 62 (61)$

Als Paradigma für den Unmöglichkeitsbeweis der einzelnen Fälle wähle ich $n_{20} = 3^{\alpha}.5^{\beta}.13^{\gamma}.p^{\delta}.q^{\varepsilon}$.

α kann nicht 4 sein, da sonst 11 vorkommen müßte. Bei $\alpha = 6$ wäre bereits

$$\frac{3^7-1}{2.3^6}\cdot\frac{5^3-1}{4.5^2}\cdot\frac{13^2-1}{12.13} = \frac{237181}{236925}\cdot 2 > 2.$$

Daher bleiben nur die Fälle

(1) $$n_{20} = 3^{\alpha}.5.13^{\gamma}.p^{\delta}.q^{\varepsilon}$$

(2) $$n_{20} = 3^{2}.5^{\beta}.13^{\gamma}.p^{\delta}.q^{\varepsilon}$$

zu betrachten.

(1) Es müßte $\gamma \equiv \delta \equiv \varepsilon \equiv 0 \pmod 2$ sein, daher nach dem vorletzten Ergebnis $p \equiv q \equiv 1 \pmod{10}$ und δ oder $\varepsilon \equiv 4 \pmod{10}$.

Aus

$$2 = \frac{3^{\alpha+1}-1}{2\cdot 3^{\alpha}}\cdot\frac{5^2-1}{4.5}\cdot\frac{13^{\gamma+1}-1}{12.13^{\gamma}}\cdot\frac{p^{\delta+1}-1}{(p-1).p^{\delta}}\cdot\frac{q^{\varepsilon+1}-1}{(q-1)q^{\varepsilon}} < \frac{3}{2}\cdot\frac{6}{5}\cdot\frac{13}{12}\cdot\frac{p}{p-1}\cdot\frac{q}{q-1}$$

$$= \frac{39}{20}\,\frac{pq}{(p-1)(q-1)}$$

ergibt sich $pq < 40(p+q-1)$, was zu folgender Aufspaltung führt:

p	q
31	$\equiv 1 \pmod{10}$
41	< 1600, $\equiv 1 \pmod{10}$
61	< 115, $\equiv 1 \pmod{10}$; also $q = 71, 101$
71	< 91, $\equiv 1 \pmod{10}$; fällt also bereits aus.

$p = 31$. Wenn $\alpha \geqq 6$ ist, so wird bereits

$$\frac{3^7-1}{2.3^6}\cdot\frac{6}{5}\cdot\frac{13^3-1}{12.13^2}\cdot\frac{31^3-1}{30.31^2} = \frac{22068763}{21925215}\cdot 2 > 2.$$

Daher müßte $\alpha = 2$ werden. Nun folgt aber aus

$$2 = \frac{13}{9}\cdot\frac{6}{5}\cdot\frac{13^{\gamma+1}-1}{12.13^{\gamma}}\cdot\frac{31^{\delta+1}-1}{30.31^{\delta}}\cdot\frac{q^{\varepsilon+1}-1}{(q-1)q^{\varepsilon}} < \frac{13}{9}\cdot\frac{6}{5}\cdot\frac{13}{12}\cdot\frac{31}{30}\cdot\frac{q}{q-1} \quad q<34,$$

und das geht nicht mehr.

$p = 41$. Falls $5 \mid \frac{41^{\delta+1}-1}{40}$ wäre, müßte $\frac{41^{5}-1}{40} = 5.579281 = 5.q^{\varepsilon}$ oder $= 5.q^{3}$ sein. Denn es ist $5.q^4 \geqq 5.61^4 > 5.579281$. Aber 579281 ist weder Quadrat- noch Kubikzahl. Demnach müßte für eine der Primzahlen q $\varepsilon \equiv 4 \pmod{10}$ werden, oder also, es müßte $\frac{q^5-1}{q-1} = 5.41^{\delta_1}$ werden mit $\delta_1 \geqq 2$.

Die Primzahlen q: 71, 101, 191, 251, 311, 401, 421, 521, 631, 641, 691, 751, 911, 1021, 1061, 1171, 1181, 1291, 1301, 1511, 1571 fallen aus, da bei ihnen jedesmal $\frac{q^5-1}{q-1} \equiv 0 \pmod{11}$ ist. Verlangt man nun $\frac{q^5-1}{q-1} \equiv 0 \pmod{41}$, so bleiben von den q mit $61 \leqq q < 1600$ nur q: 461, 821, 1231, 1451. Aber keins dieser q erfüllt $q^5 - 1 \equiv 0 \pmod{41^2}$.

$p = 61$. $\frac{71^5-1}{70} \equiv 0 \pmod{11}$, daher wäre nur $\frac{61^5-1}{60}$ bzw. $\frac{101^5-1}{100}$ zu versuchen. Es ist aber $61^5-1 \not\equiv 0 \pmod{71.101}$ und $101^5-1 \not\equiv 0 \pmod{61}$.

(2) $n_{20} = 3^\alpha . 5^\beta . 13^\gamma . p^\delta . q^\varepsilon$ mit $\beta \geqq 2$, da $3^\alpha . 5 . 13^\gamma . p^\delta . q^\varepsilon$ bereits erledigt ist. Aus $\frac{13}{9} \cdot \frac{5}{4} \cdot \frac{13}{12} \cdot \frac{p}{p-1} \cdot \frac{q}{q-1} > 2$ folgt $19pq < 864(p+q-1)$, was unter Zuhilfenahme der aus dem KANOLDschen Satz folgenden Ergebnisse die folgende Aufspaltung ergibt:

p	q
17, 19, 23	beliebig, $\equiv -1 \pmod{5^\beta}$, ε ungerade
29	beliebig, $\equiv 1 \pmod{10}$ oder $\equiv 9 \pmod{20}$ mit $\equiv -1 \pmod{5^\beta}$, ε ungerade
31	beliebig, $\equiv 1 \pmod{10}$ oder $\equiv 9 \pmod{20}$
37	beliebig, $\equiv -1 \pmod{5^\beta}$, ε ungerade
41	beliebig, $\equiv 1 \pmod{10}$ oder $\equiv 9 \pmod{20}$
43	beliebig, $\equiv -1 \pmod{5^\beta}$, ε ungerade
47	< 1371, $\equiv -1 \pmod{5^\beta}$, ε ungerade, also $q \equiv -1 \pmod{25}$. $q \equiv 1 \pmod 4$, d. h. $q \equiv 49 \pmod{100}$, also $q = 149, 449$ 1249 ($q = 349, 1049$ würde 7 erfordern)
53	< 315, $\equiv -1 \pmod{5^\beta}$, ε ungerade, also $q = 149$
59	< 195, $\equiv -1 \pmod{5^\beta}$, ε ungerade, also $q = 149$
61	< 176, $\equiv 1 \pmod{10}$ oder $\equiv 9 \pmod{20}$, also $q = 71, 89, 101,$ 131, 149, 151
67	< 140, $\equiv -1 \pmod{5^\beta}$, ε ungerade, fällt also aus
71	< 125, $\equiv 1 \pmod{10}$ oder $\equiv 9 \pmod{20}$, also $q = 89, 101$
73, 79, 83	$< 119, 106, 100$ $\equiv -1 \pmod{5^\beta}$, ε ungerade, fallen aus
89	< 92, fällt also aus.

Für $p = 17, 19, 23, 29, 31$ müßte $\delta \geqq 2$ werden. (Bei 29, weil $29 \not\equiv -1 \pmod{5^\beta}$ ist.) Aber es ist

$$\frac{3^3-1}{2.3^2} \cdot \frac{5^3-1}{4.5^2} \cdot \frac{13^3-1}{12.13^2} \cdot \frac{p^3-1}{(p-1)p^2} \geqq \frac{13}{9} \cdot \frac{31}{25} \cdot \frac{183}{169} \cdot \frac{993}{31^2} > 2$$

für $p = 17, 19, 23, 29, 31$. Da $\beta = 2$ immer $p = 31$ erfordern würde, müßte also $\beta \geqq 4$ werden.

Für $p = 37$ und $p = 41$ wird bereits

$$\frac{3^3-1}{2.3^2} \cdot \frac{5^4-1}{4.5^3} \cdot \frac{13^3-1}{12 \cdot 13^2} \cdot \frac{p^3-1}{(p-1)p^2} \geqq \frac{13}{9} \cdot \frac{156}{125} \cdot \frac{183}{169} \cdot \frac{41^3-1}{41^2 . 40} > 2.$$

Für $p = 43$ wird

$$\frac{3^3-1}{2\,.\,3^2}\cdot\frac{5^5-1}{4\,.\,5^4}\cdot\frac{13^3-1}{12\,.\,13^2}\cdot\frac{43^3-1}{42\,.\,43^2}>2.$$

Für $p = 47$ müßte bei $q = 149$ und $q = 449$ $\beta = 2$ werden. Denn $\left.\begin{matrix}149^x\\449^x\end{matrix}\right\} \equiv 1 \pmod{5^3}$ frühestens für $x/\varphi(5^3)$ oder $x/4\,.\,5^2$. Wegen $\left.\begin{matrix}149^z\\449^z\end{matrix}\right\} \not\equiv 1 \pmod{5^3}$ wird $x > 2$, und da $x = 4$ wegen $\varepsilon = mx \equiv 2 \pmod 4$ ausgeschlossen ist, bleibt x ein Vielfaches von 5. Dann müßte aber wieder eine Primzahl der Form $\equiv 1 \pmod{10}$ auftreten. $\beta = 2$ aber erfordert $p = 31$, was ja nicht geht.

Aus ähnlichen Gründen ist im Falle $p = 47$, $q = 1249$ $\beta = 4$ ($\varphi(5^5) = 4\,.\,5^4$, $1249^2 \not\equiv 1 \pmod{5^5}$, also ε ein Vielfaches von 5); aber $\beta = 4$ würde $p = 11$ erfordern.

Genau so kommen die Fälle $p = 53$, $p = 59$ in Fortfall, da sie $\beta = 2$ erfordern würden.

$p = 61$, $q = 71, 89, 101, 131, 149, 151$.

Es ist $61^5 - 1 = 5\,.\,131\,.\,21491$ und 131 ist zu 21491 teilerfremd. Daher muß $\varepsilon + 1$ ein Vielfaches von 5 werden. (Bei $q = 149$ würde sonst wieder $\beta = 2$ erforderlich werden!). Aber es ist $71^5 - 1 \equiv 0 \pmod{11}$.

Und $\left.\begin{matrix}89^5\\101^5\\149^5\\151^5\end{matrix}\right\} \not\equiv 1 \pmod{61}$ und $131^5 - 1 \equiv 0 \pmod{61^2}$ (61 kann ja nicht in erster Potenz auftreten, da das wegen $1 + p = 2\,.\,31$ 31 erfordern würde.)

Schließlich müßte bei $p = 71$, $q = 89, 101$ $\varepsilon = 5r$ sein, da $71^5 - 1 \equiv 0 \pmod{11}$ ist. Aber es ist $89^5 \not\equiv 1 \pmod{71}$ und $101^5 \not\equiv 1 \pmod{71}$.

Also kann n_{20} nicht vollkommen sein.

Die anderen Fälle mit $5/n$, erledigen sich ähnlich. Aus Platzmangel muß die genaue Beweisführung hier unterbleiben.

Es gibt daher keine ungeraden vollkommenen Zahlen, die nur 5 verschiedene Primfaktoren enthalten. Die Anzahl der verschiedenen Primfaktoren, die in einer ungeraden vollkommenen Zahl auftreten, ist daher $\geqq 6$. Demnach ist die kleinste ungerade vollkommene Zahl, wenn man noch die Kanoldschen Sätze berücksichtigt,

$$n \geqq 3^6\,.\,5^2\,.\,11^2\,.\,13^2\,.\,17\,.\,19^2 > 2{,}2\,.\,10^{12}.$$

(Eingegangen am 25. Januar 1948.)

Über konvexe Körper mit Flachstellen.

Von

H. Hadwiger in Bern.

Verschiedentlich waren konvexe Körper mit Ecken Gegenstand einläßlicherer Untersuchungen. So hat A. Dinghas[1]) eine exakte Verschärfung der isoperimetrischen Ungleichung für solche konvexe Körper angegeben, für die eine Anzahl (endlich- oder abzählbar-viele) Ecken vorgeschriebenen Eckenmaßes vorgegeben sind. — Als Eckenmaß diente hier der Öffnungswinkel des kleinsten konvexen Rotationskegels, dessen Spitze sich im Eckpunkt befindet und der den Körper ganz enthält. Die Ungleichung von Dinghas ist insofern exakt, als diese für die Kappenkörper der Kugel, welche den gestellten Eckenbedingungen genügen, zu einer Gleichung wird.

Damit ist eine Extremaleigenschaft der Kappenkörper dargetan, nämlich unter allen konvexen Körpern gleichen Volumens, welche der gestellten Eckenbedingung genügen, die kleinst mögliche Oberfläche aufzuweisen. Es ist an dieser Stelle instruktiv, sich die bekannte Tatsache in Erinnerung zu rufen, daß nach H. Minkowski[2]) und G. Bol[3]) die Kappenkörper genau diejenigen Extremalkörper sind, welche bei gegebenen Volumen und gegebener Oberfläche das größte Integral der mittleren Krümmung besitzen.

Wenn wir uns in dieser Note mit konvexen Körpern mit Flachstellen auseinandersetzen wollen, so möchte doch vorerst erwähnt werden, daß die Flachstelle in gewissem Sinne der Ecke dual entspricht, insofern nämlich, als man unter einer Ecke eines dreidimensionalen[4]) konvexen Körpers einen Randpunkt versteht, durch welchen drei unabhängige Stützebenen gelegt werden können, während wir unter

---

[1]) A. Dinghas, Verschärfung der isoperimetrischen Ungleichung für konvexe Körper mit Ecken. Math. Z. **47**, 1940, 669–675.

[2]) [3]) H. Minkowski (Volumen und Oberfläche, Ges. Abh., Bd. **2**, 230—276, § 7) hat die Tatsache erkannt, daß jedenfalls die Kappenkörper der Kugel die erwähnte Extremaleigenschaft aufweisen. Das Resultat, daß diese Körper die einzigen dieser Art sind, verdankt man G. Bol (Beweis einer Vermutung von H. Minkowski. Abhandlungen aus dem Mathematischen Seminar der Hansischen Universität, **15**. 1943, 37—56).

[4]) Es ist leicht einzusehen, daß die Resultate der vorliegenden Arbeit mühelos auf n-dimensionale konvexe Körper ($n \neq 3$) ausgedehnt werden können. Die Beschränkung auf den Fall $n = 3$ erlaubt indessen eine einfachere und anschaulichere Darlegung.

einer Flachstelle eine Stützebene verstehen wollen, welche drei unabhängige Randpunkte des Körpers enthält. Der einer solchen Stützebene mit dem Körperrand gemeinsame Oberflächenteil stellt einen ebenen konvexen Bereich mit (zweidimensional) inneren Punkten dar. Dieser Bereich sei die eigentliche Flachstelle.

Als Flachstellenmaß wollen wir den Inkreisradius dieses ebenen konvexen Bereiches wählen. Er sei im Folgenden kurz Flachradius genannt.

Im erörterten dualen Sinn kann man dem Kappenkörper der Kugel wohl den Kalottenkörper der Kugel zuweisen. Dieser entsteht so, daß man von einer Kugel (endlich- oder abzählbar-viele) Kalotten, die sich gegenseitig nicht stören, abschneidet. Die Radien der Schnittkreise sind hier als Flachradien deutbar.

Es ist sicher lohnend, dieses duale Verhältnis weiter zu verfolgen, da man mit Recht erwarten darf, daß sich hierbei wertvolle Anregungen und Aufschlüsse ergeben können.

In der vorliegenden Arbeit werden in einfacher Weise einige Resultate erreicht, welche zeigen, daß in der Tat die Kugelkalottenkörper unter den konvexen Körpern mit Flachstellen die entsprechende Bedeutung haben, wie die Kugelkappenkörper unter denjenigen mit Ecken. Genauer werden wir Folgendes zeigen:

Es sei A_0 ein Kalottenkörper der Kugel mit den n Flachradien r_ν^0 ($\nu = 1, 2, \ldots . n$). Es bezeichne V_0 das Volumen, F_0 die Oberfläche und M_0 das Integral der mittleren Krümmung von A_0. Ferner sei A ein weiterer konvexer Körper mit n Flachradien r_ν ($\nu = 1, 2, .. n$) und es sei $r_\nu^0 \leqq r_\nu$. V, F und M sollen die entsprechenden Maßzahlen des Körpers A bezeichnen. Falls

$$V_0 = V, \tag{I}$$

d. h. unter der Bedingung der Volumgleichheit von A und A_0, ist

$$F_0 \leqq F, \tag{Ia}$$

und auch

$$M_0 \leqq M. \tag{Ib}$$

Es gilt somit der folgende

Satz: *Unter allen mit einem Kalottenkörper der Kugel volumgleichen konvexen Körpern mit gleich vielen Flachradien, welche nicht kleiner als die entsprechenden des Kalottenkörpers sind, besitzt der letztere die kleinste Oberfläche und auch das kleinste Integral der mittleren Krümmung.*

Die drei Maßzahlen des Kalottenkörpers sind

$$V_0 = \frac{4\pi R^3}{3}\left\{1 - \frac{1}{4}\sum_{\nu}^{n}(2 - 3\cos\alpha_\nu + \cos^3\alpha_\nu)\right\} \tag{II}$$

$$\text{(IIa)} \qquad F_0 = 4\pi R^2\left\{1 - \frac{1}{4}\sum_1^n (1 - 2\cos\alpha_\nu + \cos^2\alpha_\nu)\right\}$$

$$\text{(IIb)} \qquad M_0 = 4\pi R\left\{1 - \frac{1}{4}\sum_1^n (2 - 2\cos\alpha_\nu - \alpha_\nu \sin\alpha_\nu)\right\},$$

wobei R den Radius der Kugel bezeichnet und der Hilfswinkel α_ν durch den Ansatz

$$\text{(III)} \qquad \sin\alpha_\nu = \frac{r_\nu^0}{R}$$

erklärt ist. Für $r_\nu^0 < R$ ist in der den Hilfswinkel α_ν bestimmenden Gleichung (III) die spitzwinklige bzw. die stumpfwinklige Lösung zu wählen, je nachdem die Ebene des entsprechenden Kalottenkreises Kugelmittelpunkt und Kalottenkörper nicht trennt bzw. trennt.

Wir beweisen jetzt unter der Voraussetzung (I) die Aussagen (Ia) und (Ib) d. h. die Behauptungen des Satzes.

Es sollen zunächst A und B zwei beliebige konvexe Körper bezeichnen. Das Produkt AB (Durchschnitt) ist entweder leer oder selbst wieder ein konvexer Körper; die Summe $A + B$ (Vereinigungsmenge) ist i. a. nicht konvex. In allen Fällen gilt die folgende Volumformel

$$\text{(1)} \qquad V(A) + V(B) = V(A + B) + V(AB).$$

Es sollen weiter A_ϱ und B_ϱ für $\varrho > 0$ die äußeren Parallelkörper von A und B im Abstand ϱ darstellen. Der äußere Parallelkörper eines konvexen Körpers wird wie bekannt so erhalten, daß man die Vereinigungsmenge aller abgeschlossenen Kugeln vom Radius ϱ bildet, deren Mittelpunkte sich im Ausgangskörper befinden. Der Parallelkörper ist wieder konvex. – Unmittelbar der Definition ist zu entnehmen, daß

$$\text{(2)} \qquad A_\varrho B_\varrho \supseteq (AB)_\varrho$$

gilt. Falls aber $A + B$ konvex ist, gilt indessen schärfer als (2)

$$\text{(3)} \qquad A_\varrho B_\varrho = (AB)_\varrho.$$

In der Tat: Ist nämlich p ein Punkt von $A_\varrho B_\varrho$, so gibt es zwei Punkte $a \in A$ und $b \in B$ so, daß $a \in P_\varrho$ und $b \in P_\varrho$ ist, wobei P_ϱ die Kugel um p vom Radius ϱ bezeichnet. Da nun $A + B$ nach Voraussetzung konvex ist, gehört die ganze Verbindungsstrecke von a nach b zu $A + B$. Da weiter A und B abgeschlossen sind, gibt es auf dieser Strecke offenbar einen Punkt q, der zu AB gehört. Wegen der Konvexität der Kugel P_ϱ gilt demnach auch $q \in P_\varrho$. Hieraus folgert man, daß $p \in (AB)_\varrho$ gilt. Da dies für alle p der eingangs erwähnten Bedingung richtig ist, folgt $A_\varrho B_\varrho \subseteq (AB)_\varrho$ und in Verbindung mit (2) also (3).

Die Definition der Parallelkörper läßt weiter unmittelbar erkennen, daß

$$\text{(4)} \qquad A_\varrho + B_\varrho = (A + B)_\varrho$$

ist. Wenden wir nun auf (4) die Volumformel (1) an und berücksichtigen sodann ferner (2), so folgt die Ungleichung

$$V[A_\varrho] + V[B_\varrho] \geqq V[(A+B)_\varrho] + V[(AB)_\varrho]. \tag{5}$$

Hier gilt, wie ein Rückblick auf (3) lehrt, das Gleichheitszeichen jedenfalls dann, wenn $A+B$ konvex ausfällt.

Im Folgenden bedeuten nun A und A_0 wieder die beiden Körper, welche dem zu beweisenden Satz zugrunde liegen.

Offenbar lassen sich dem Kalottenkörper A_0 an den Flachstellen passende Kugelkalotten $C_\nu^0 (\nu = 1, 2, \ldots n)$ so aufsetzen, daß dieser zu der Vollkugel K ergänzt wird. Da die Flachradien des Körpers A nicht kleiner als diejenigen von A_0 sind, lassen sich dem Körper A kongruente Kugelkalotten $C_\nu (\nu = 1, 2, \ldots n)$ so aufsetzen, daß die Kreisflächen der C_ν ganz Teilbereiche der Oberfläche von A ausmachen.

Den auf eine solche Weise aus A hervorgehenden, nun nicht mehr notwendig konvexen Körper wollen wir mit Z bezeichnen. Es ist demnach

$$K = A_0 + \sum_1^n C_\nu^0 \tag{6}$$

und

$$(C_\nu \cong C_\nu^0)$$

$$Z = A + \sum_1^n C_\nu. \tag{7}$$

Im Hinblick auf Voraussetzung (I) ist offenbar

$$V(Z) = V(K). \tag{8}$$

Nun gilt nach einem bekannten Satz[5]) aus der allgemeinen Theorie der isoperimetrischen Ungleichung im Raum die Volumbeziehung

$$V(Z_\varrho) \geqq V(K_\varrho). \tag{9}$$

Nun ersetzen wir in (9) die Körper K und Z durch die Ausdrücke (6) und (7), addieren auf beiden Seiten zwei passende Summen, welche im Hinblick auf die Kongruenz der angesetzten Kugelkalotten gleich sind und erhalten so

$$V[(A + \sum_1^n C_\nu)_\varrho] + \sum_1^n V[(A\,C_\nu)_\varrho] \geqq V[(A_0 + \sum_1^n C_\nu^0)_\varrho] + \sum_1^n V[(A_0\,C_\nu^0)_\varrho]. \tag{10}$$

Indem wir weiter auf die Summe der linken Seite die Ungleichung (5) zur Anwendung bringen, auf die Summe der rechten Seite dagegen

[5]) Es handelt sich um die Übertragung der Brunn-Minkowskischen Ungleichung auf abgeschlossene und beschränkte Mengen des Raumes. Einen direkten Beweis, ohne den Umweg über die Steinersche Symmetrisierung zu verfolgen, gaben A. Dinghas und E. Schmidt, Einfacher Beweis der isoperimetrischen Eigenschaft der Kugel im n-dimensionalen euklidischen Raum. Abhandlungen der Preuß. Akad. der Wiss. 1943. Math. Naturwiss. Kl. Nr. 7.

die Gleichung (5), so resultiert zunächst

$$V[A_\varrho] + \sum_1^n V[(C_\nu)_\varrho] \geqq V[(A_0)_\varrho] + \sum_1^n V[(C_\nu^0)_\varrho],$$

und nach trivialer Kürzung

$$V[A_\varrho] \geqq V[(A_0)_\varrho]. \tag{11}$$

Die Anwendung der Gleichung an Stelle der Ungleichung (5) oben ist deshalb statthaft, weil die Körper, die aus A_0 durch aufeinanderfolgendes Aufsetzen der Kugelkalotten C_ν^0 entstehen, stets konvex bleiben.

Endlich setzen wir in (11) für die Volumina der äußeren Parallelkörper die J. Steiner'schen Ausdrücke ein, und erhalten so

$$V + F\varrho + M\varrho^2 + \frac{4\pi}{3}\varrho^3 \geqq V_0 + F_0\varrho + M_0\varrho^2 + \frac{4\pi}{3}\varrho^3,$$

oder nach naheliegenden Kürzungen

$$F + M\varrho \geqq F_0 + M_0\varrho. \tag{12}$$

Die letzte Relation ist aber für alle $\varrho > 0$ dann und nur dann richtig, wenn die Beziehungen

$$F \geqq F_0, \quad M \geqq M_0 \tag{13}$$

gelten. Damit ist aber der Beweis unseres Satzes beendet, indem (13) mit den Behauptungen (Ia) und (Ib) identisch ist.

(Eingegangen am 10. August 1948.)

Über Schnittzahlen von Homotopieketten.

Von

E. Burger in Frankfurt (Main).

Einleitung.

Man weiß seit PONTRJAGINS Arbeit [1], daß die Dualitätssätze der Topologie der n-dimensionalen Mannigfaltigkeiten $\mathfrak{M}^n$ sich zurückführen lassen auf Sätze über PONTRJAGINsche Gruppenpaare. Dabei heißen zwei (additiv geschriebene) ABELsche Gruppen $\mathfrak{G}$ und $\mathfrak{H}$ mit endlich vielen Erzeugenden ein PONTRJAGINsches Gruppenpaar, wenn jedem Elementepaar $\{g, h\}$ mit g aus $\mathfrak{G}$ und h aus $\mathfrak{H}$ als „Produkt" eine ganz-rationale Zahl (oder ein Rest mod m oder eine rationale Zahl mod 1) zugeordnet ist, derart daß

1) das Distributivgesetz

$$(g_1+g_2).h = g_1.h+g_2.h$$
$$g.(h_1+h_2) = g.h_1+g.h_2$$

erfüllt ist,

2) zu jedem Element $g \neq 0$ aus $\mathfrak{G}$ ein Element h aus $\mathfrak{H}$ existiert mit

$$g.h \neq 0$$

und ebenso zu jedem $h \neq 0$ aus $\mathfrak{H}$ ein g aus $\mathfrak{G}$ mit

$$g.h \neq 0.$$

Eine solche Produktrelation zwischen zwei Gruppen wird insbesondere gegeben durch die Schnittzahlen zwischen den Elementen der BETTIschen Gruppen dualer Dimensionen sowie durch die Verschlingungszahlen zwischen den Elementen der Torsionsgruppen entsprechender Dimensionen. So ordnet sich die Theorie der Schnitte und Verschlingungszahlen der Theorie der PONTRJAGINschen Gruppenpaare unter. Die hierher gehörenden Überlegungen werden in § 1 der vorliegenden Arbeit noch einmal dargestellt, und zwar in einer Weise, wie sie sich für die späteren Übertragungen als nützlich erweist. Dabei wird für die Schnittzahlen von vornherein das schärfere Axiom $S\,2$ (§ 1) gefordert. Es handelt sich also um orthogonale Gruppenpaare in der Bezeichnungsweise PONTRJAGINS. Dann läßt sich der PONTRJAGINsche Dualitätssatz in der Form des Isomorphiesatzes 3 (§ 1) aussprechen. Für die Verschlingungszahlen ist die entsprechende Verschärfung des Axioms nicht erforderlich.

Anschließend (§§ 4 und 5) wird eine Übertragung dieser Theorie auf die Reidemeisterschen Homotopieketten untersucht. Die Untersuchung der Homotopieketten der $\mathfrak{M}^n$ führt bekanntlich zunächst auf Überdeckungen von $\mathfrak{M}^n$ mit den Hauptordnungen gewisser Kreiskörper (= homomorphes Bild des Gruppenrings der Fundamentalgruppe) (Reidemeister [2]). Dabei zeigt sich jedoch, daß der gewöhnliche Durchschnitt von Homotopieketten nicht ohne weiteres bei diesem Homomorphismus übertragen werden kann. An seine Stelle tritt dann zweckmäßig der Reidemeistersche τ-Prozeß (Reidemeister [4]) (§ 2). Für die mittels des τ-Prozesses erklärten Schnitt- und Verschlingungszahlen läßt sich dann eine dem rationalen Fall analoge Theorie aufbauen.

In algebraischer Hinsicht handelt es sich in diesem Fall an Stelle der gewöhnlichen Abelschen Gruppen um Operatorgruppen über der Hauptordnung eines Zahlkörpers. Hier wird nun, wie § 4 zeigt, das verschärfte Axiom $S\,2$ wesentlich für die Gültigkeit des Dualitätssatzes. Es muß allerdings jetzt etwas modifiziert werden, da wir uns nicht mehr in einem Hauptidealring bewegen. Auf diese Modifikation kommt man aber sofort, wenn man das Axiom im rationalen Fall etwas umformt (§ 1). Für die Verschlingungszahlen kann man das Axiom $V\,2$ dagegen ungeändert übernehmen. Mittels der Steinitzschen Theorie der Operatorgruppen über der Hauptordnung eines Zahlkörpers (Steinitz [1], [2]) folgen dann auch in diesem Fall zwei entsprechende Isomorphiesätze: Satz 16 (§ 4) und Satz 21 (§ 5).

Der § 3 bringt eine andere Behandlung der Schnittzahlen unter Benutzung eines Systems idealer Zahlen über dem Zahlkörper. Hieraus folgt dann auch, daß die Schnitt- bzw. Verschlingungszahlen wirklich den Axiomen $S\,2$ bzw. $V\,2$ genügen. Außerdem wird sowohl die arithmetische als auch die geometrische Bedeutung des verschärften Axioms $S\,2$ deutlich (§ 3, Satz 8 und 9; § 4, Satz 13 und Bemerkung nach Satz 15).

Topologisch besagen die Isomorphiesätze, daß auch für die k-dimensionalen Homotopieketten die Schnitt- und Verschlingungszahlen im Falle $k \neq n-k$ bzw. $k \neq n-k-1$ keine Invarianten liefern. Dagegen erhält man durch die Betrachtung der Eigenschnitt- und -verschlingungszahlen ($k = n-k$ bzw. $k = n-k-1$) entsprechende Invarianten wie im rationalen Fall, z. B. führt die Untersuchung der Eigenschnittzahlen auf ein Darstellungsproblem aus der Theorie der Hermiteschen Formen (§ 4). Die Brauchbarkeit dieser Invarianten wird im § 6 an einem Beispiel gezeigt.

§ 1.

Der rationale Fall.

Es seien $\mathfrak{G}$ und $\mathfrak{H}$ zwei gewöhnliche Abelsche Gruppen mit endlich vielen Erzeugenden. Zwischen $\mathfrak{G}$ und $\mathfrak{H}$ sei eine Schnittbeziehung

erklärt, d. h. jedem Elementepaar $g \in \mathfrak{G}$ und $h \in \mathfrak{H}$ ist eine ganze rationale Zahl $g \,.\, h$ als Schnittzahl zugeordnet mit den Eigenschaften:

Axiom $S1$: $(g + g') \,.\, h = g \,.\, h + g' \,.\, h$ und ebenso

$$g \,.\, (h + h') = g \,.\, h + g \,.\, h'.$$

Axiom $S2'$: Zu jedem $g \neq 0$ aus $\mathfrak{G}$ gibt es wenigstens ein h aus $\mathfrak{H}$ mit

$$g \,.\, h \neq 0$$

und entsprechend für jedes $h \neq 0$ aus $\mathfrak{H}$ ein g aus $\mathfrak{G}$ mit der gleichen Eigenschaft.

Aus Axiom $S1$ folgt sofort $(mg) \,.\, h = m(g \,.\, h)$ für jedes natürliche m, ferner $(0 \,.\, h) = o$, wobei 0 das Nullelement aus $\mathfrak{G}$ bedeutet; denn es ist für jedes g $(g + 0) \,.\, h = g \,.\, h + 0 \,.\, h$. Weiter ist $(g - g) \,.\, h = g \,.\, h + (-g) \,.\, h = o$, also $(-g) \,.\, h = -(g \,.\, h)$ und daher für alle ganzen Zahlen λ

$$(\lambda g) \,.\, h = \lambda (g \,.\, h) \tag{2a}$$

und ebenso

$$g \,.\, (\lambda h) = \lambda (g \,.\, h). \tag{2b}$$

Es folgt sofort

Satz 1. *Kein Element* $\neq 0$ *aus* $\mathfrak{G}$ *und ebenso kein Element* $\neq 0$ *aus* $\mathfrak{H}$ *ist von endlicher Ordnung.*

Beweis. Aus $g \neq 0$ folgt nach Axiom $S2'$ die Existenz eines h aus $\mathfrak{H}$ mit $g \,.\, h \neq o$. Dann folgt aber aus $mg = 0$ sofort $(mg) \,.\, h = m(g \,.\, h) = o$ und daher $m = o$.

Wir nennen nun ein Element von $\mathfrak{G}$ primitiv, wenn es nicht echtes Vielfaches $\lambda g'$ (λ ganz $\neq \pm 1$) eines anderen Elementes g' aus $\mathfrak{G}$ ist und verschärfen das Axiom $S2'$ zum

Axiom $S2$. Zu jedem primitiven Element g aus $\mathfrak{G}$ gibt es ein Element h aus $\mathfrak{H}$ mit

$$g \,.\, h = 1$$

und entsprechend zu jedem primitiven Element h aus $\mathfrak{H}$ ein g aus $\mathfrak{G}$ mit der gleichen Eigenschaft.

Zu einer etwas anderen Formulierung dieses Axioms gelangt man durch folgende Betrachtung. Jedes Element g aus $\mathfrak{G}$ läßt sich mit eindeutig bestimmten Koeffizienten als Linearkombination der Elemente einer Basis schreiben. g ist offenbar dann und nur dann primitiv, wenn der größte gemeinsame Teiler dieser Koeffizienten gleich 1 ist. Ist g nicht primitiv, so läßt es sich darstellen als $t g'$, wo g' primitiv, t eine bis aufs Vorzeichen eindeutig bestimmte ganze rationale Zahl (eben der g. g. T. der Koeffizienten von g) ist. Dann kann man das Axiom $S2$ auch so formulieren: Alle Vielfachen von t kommen als Schnittzahlen von g mit den Elementen von $\mathfrak{H}$ vor.

Schließlich läßt sich dies durch g bestimmte Ideal (t) unabhängig von jeder speziellen Auswahl einer Basis von $\mathfrak{G}$ auch so charakterisieren: Wir betrachten für ein festes g aus $\mathfrak{G}$, welches $\neq 0$ ist, jene rationale Zahlen $r = n_1/n_2$, für die das Element rg existiert, d. h. für die es ein g' aus $\mathfrak{G}$ gibt, für welches $n_1 g = n_2 g'$ ist. Wenn es überhaupt ein solches g' gibt, ist es ja eindeutig bestimmt, da $\mathfrak{G}$ rein unendlich ist. Alle diese Zahlen r bilden ein gebrochenes Ideal $\mathfrak{n}$, den „Nenner" von g. Und es ist offenbar $\mathfrak{n} = (1/t) = 1/(t)$. Damit erhält Axiom $S2$ die Fassung: Jedes Element des reziproken Nenners $1/\mathfrak{n}$ von $g \neq 0$ kommt als Schnittzahl von g mit einem geeigneten Element h aus $\mathfrak{H}$ vor. In dieser Form wird das Axiom später auf den algebraischen Fall übertragen werden.

Die gesamten Schnittrelationen zwischen den Elementen von $\mathfrak{G}$ und $\mathfrak{H}$ sind bekannt, wenn man diejenigen zwischen den Basiselementen kennt. Seien also $g_1, \ldots, g_n$ die Elemente einer Basis von $\mathfrak{G}$ und $h_1, \ldots, h_m$ die Elemente einer Basis von $\mathfrak{H}$. Dann betrachten wir die Schnittmatrix $\mathfrak{S} = (g_i \,.\, h_k)$ aus den Schnittzahlen dieser Elemente. Bei Übergang zu neuen Basen $g_1^*, \ldots, g_n^*$ von $\mathfrak{G}$ und $h_1^*, \ldots, h_m^*$ von $\mathfrak{H}$ transformiert sich $\mathfrak{S}$ in

$$\mathfrak{S}^* = P \mathfrak{S} Q' \tag{3}$$

mit ganzen unimodularen Matrizen P und Q. Nun kann man bekanntlich bei gegebenem $\mathfrak{S}$ unimodulare Matrizen P und Q so angeben, daß $P\mathfrak{S}Q'$ in Elementarteilernormalform erscheint,

$$\mathfrak{S}^* = \begin{pmatrix} e_1 & & & \\ & \ddots & 0 & \\ & & e_r & \\ & 0 & & 0 \\ & & & \ddots \\ & & & 0 \end{pmatrix} \tag{4}$$

mit positiven e_i, die sich sukzessive teilen: $e_1 | e_2 \ldots | e_r$. Man erkennt dann sofort, daß die in (4) auftretenden Nullzeilen und -spalten in Wirklichkeit nicht vorkommen können, denn für die betreffenden Basiselemente von $\mathfrak{G}$ und $\mathfrak{H}$ wären alle Schnittzahlen gleich Null, und das kann nach Axiom $S2'$ nicht sein. Es muß also

$$r = m = n \tag{5}$$

sein. $\mathfrak{G}$ und $\mathfrak{H}$ sind isomorph.

Weiter ist z. B. das Element g_i^* $(i = 1, \ldots, n)$ als Basiselement primitiv. Es gibt also nach Axiom $S2$ ein Element h aus $\mathfrak{H}$, mit dem es die Schnittzahl 1 hat. Die überhaupt vorkommenden Schnittzahlen sind aber die Vielfachen von e_i, also ist $e_i = 1$ $(i = 1, \ldots, n)$. $\mathfrak{S}^*$ ist die Einheitsmatrix. Also gilt der

Satz 2. *Die Schnittmatrix $\mathfrak{S}$, bezogen auf irgendwelche Basen von $\mathfrak{G}$ und $\mathfrak{H}$, ist unimodular.*

Hat man zwei Gruppenpaare $\mathfrak{G}$, $\mathfrak{H}$ und $\mathfrak{G}'$, $\mathfrak{H}'$ mit je einer Schnittrelation und sind die Gruppen $\mathfrak{G}$ und $\mathfrak{G}'$ isomorph, so sind auch die Gruppen $\mathfrak{H}$ und $\mathfrak{H}'$ isomorph. Man kann nun in beiden Paaren die Basen so wählen, daß die Schnittmatrizen Einheitsmatrizen sind. Ordnet man dann die entsprechenden Basiselemente von $\mathfrak{G}$ und $\mathfrak{G}'$ sowie die von $\mathfrak{H}$ und $\mathfrak{H}'$ einander zu, so erhält man dadurch einen Isomorphismus zwischen den Gruppenpaaren $\mathfrak{G}$, $\mathfrak{H}$ und $\mathfrak{G}'$, $\mathfrak{H}'$, bei dem entsprechende Elementepaare die gleichen Schnittzahlen haben.

Satz 3. *Sind in den Gruppenpaaren $\mathfrak{G}$, $\mathfrak{H}$ und $\mathfrak{G}'$, $\mathfrak{H}'$ mit Schnittrelation die Komponenten $\mathfrak{G}$ und $\mathfrak{G}'$ isomorph, so ist auch*

$$\mathfrak{H} \cong \mathfrak{G} \cong \mathfrak{G}' \cong \mathfrak{H}'$$

und die beiden Paare $\mathfrak{G}$, $\mathfrak{H}$ und $\mathfrak{G}'$, $\mathfrak{H}'$ sind schnittreu isomorph.

Ist speziell $\mathfrak{H} = \mathfrak{G}$, handelt es sich also um eine Schnittvorschrift in einer Gruppe $\mathfrak{G}$, so tritt zu den beiden Axiomen $S1$ und $S2$ als neue Forderung noch das weitere

Axiom $S3a$. Es ist für alle g_1, g_2 aus $\mathfrak{G}$

$$g_1 \cdot g_2 = g_2 \cdot g_1 \tag{6a}$$

oder $S3b$

$$g_1 \cdot g_2 = -\, g_2 \cdot g_1 . \tag{6b}$$

Zur Untersuchung des Isomorphieproblems in diesem Falle muß man für die Zeilen und Spalten der Schnittmatrix $\mathfrak{S}$ dieselbe Basis von $\mathfrak{G}$ verwenden. Da Satz 2 ungeändert gültig bleibt, ist auch jetzt $\mathfrak{S}$ unimodular, darüber hinaus im Falle des Axioms $S3a$ symmetrisch, im Falle $S3b$ antisymmetrisch. Im letzten Fall muß also die Reihenzahl von $\mathfrak{S}$ gerade sein. Bei Basiswechsel geht $\mathfrak{S}$ über in $P\mathfrak{S}P'$. Und man erkennt, daß im Falle $S3a$ die Frage nach den sämtlichen verschiedenen Schnittvorschriften für eine Gruppe $\mathfrak{G}$ genau das Äquivalenzproblem der ganzzahligen quadratischen Formen der Determinante ± 1 ist. Im Falle $S3b$ dagegen kann man bekanntlich $\mathfrak{S}$ in eine feste Normalform überführen. Es gibt dann bis auf Isomorphismen nur eine Schnittvorschrift für die feste Gruppe $\mathfrak{G}$.

Im Falle zweier Gruppen mit einer Verschlingungsrelation handelt es sich um Folgendes: Es seien wieder $\mathfrak{G}$ und $\mathfrak{H}$ zwei gewöhnliche Abelsche Gruppen mit endlich vielen Erzeugenden. Jedem Elementepaar g aus $\mathfrak{G}$, h aus $\mathfrak{H}$ sei eine rationale Zahl mod 1 $V(g,h)$ als Verschlingungszahl zugeordnet, wobei die folgenden Axiome gelten:

Axiom $V1$. Für alle g aus $\mathfrak{G}$ und h aus $\mathfrak{H}$ gilt

$$\begin{aligned} V(g_1 + g_2, h) &\equiv V(g_1, h) + V(g_2, h) \mod 1 \\ V(g, h_1 + h_2) &\equiv V(g, h_1) + V(g, h_2) \mod 1. \end{aligned} \tag{7}$$

Axiom $V2$. Zu jedem $g \neq 0$ aus $\mathfrak{G}$ gibt es ein h aus $\mathfrak{H}$ mit

$$V(g,h) \not\equiv 0 \mod 1$$

und ebenso zu jedem $h \neq 0$ aus $\mathfrak{H}$ ein g aus $\mathfrak{G}$ mit der gleichen Eigenschaft.

Genau wie für die Schnittzahlen folgt auch hier

$$V(0, h) \equiv V(g, 0) \equiv o \bmod 1 \tag{8}$$

für alle g aus $\mathfrak{G}$ und h aus $\mathfrak{H}$, wobei 0 das Nullelement von $\mathfrak{H}$ bzw. $\mathfrak{G}$ bedeutet, sowie

$$V(\lambda g, \mu h) \equiv \lambda V(g, h)\mu \bmod 1 \tag{9}$$

für alle ganzen Zahlen λ, μ. Weiter folgt der Satz

Satz 4. *Alle Elemente von $\mathfrak{G}$ und $\mathfrak{H}$ sind von endlicher Ordnung. Da $\mathfrak{G}$ und $\mathfrak{H}$ ein endliches Erzeugendensystem haben, sind sie also endliche Gruppen.*

Beweis. Sei $h_1, \ldots, h_m$ ein Erzeugendensystem von $\mathfrak{H}$ und g ein festes Element von $\mathfrak{G}$. Seien die Verschlingungszahlen $V(g, h_i) \equiv \mu_i / \nu_i$ ($\mu_i, \nu_i \neq o$ ganze Zahlen); dann ist $\nu_1 \ldots \nu_m \,.\, V(g, h_i) \equiv V(\nu_1 \ldots \nu_m\, g, h_i) \equiv o$ und daher für alle Elemente h aus $\mathfrak{H}$ $V(\nu_1 \ldots \nu_m g, h) \equiv o$. Also ist nach Axiom $V2$ $\nu_1 \ldots \nu_m\, g = 0$.

Wiederum kennt man alle Verschlingungszahlen, wenn man die eines Erzeugendensystems von $\mathfrak{G}$ mit einem Erzeugendensystem von $\mathfrak{H}$ kennt. Sei $g_1, \ldots, g_n$ ein Erzeugendensystem von $\mathfrak{G}$, $h_1, \ldots, h_m$ ein Erzeugendensystem von $\mathfrak{H}$. Dann bilden wir aus ihren Verschlingungszahlen die Verschlingungsmatrix $\mathfrak{V} = (V(g_i, h_k))$. Ihre Elemente sind also mod 1 bestimmte rationale Zahlen. Wir wählen für sie irgendwelche feste rationale Repräsentanten. Nimmt man an dieser Matrix mit festen rationalen Elementen irgendeine der elementaren Transformationen der Elementarteilertheorie vor (Vertauschen zweier Zeilen, Multiplikation einer Zeile mit -1, Addition eines Vielfachen einer Zeile zu einer zweiten und entsprechende Operationen für die Spalten), so geht sie offenbar über in eine Matrix, welche der Verschlingungsmatrix geeigneter anderer Erzeugendensysteme von $\mathfrak{G}$ und $\mathfrak{H}$ mod 1 kongruent ist. Gelingt es also, die Matrix mit festen Repräsentanten auf eine Normalform zu bringen, so gibt es Erzeugendensysteme von $\mathfrak{G}$ und $\mathfrak{H}$, für die die Verschlingungsmatrix jener Normalform kongruent ist.

Nun kann man eine Matrix mit rationalen Koeffizienten durch elementare Transformationen ebenso wie eine ganzzahlige auf Elementarteilernormalform bringen

$$\begin{pmatrix} r_1 & & & & \\ & r_2 & & & \\ & & \ddots & & \\ & & & r_k & \\ & & & & 0 \\ & & & & & \ddots \\ & & & & & & 0 \end{pmatrix} \tag{10}$$

wobei die $r_1, \ldots, r_k$ rationale Zahlen sind, die sich sukzessive teilen.

Es gibt also je ein Erzeugendensystem von $\mathfrak{G}$ und $\mathfrak{H}$, für die die Verschlingungsmatrix der Gestalt (10) kongruent ist. Es seien dies die Systeme $g_1^*, \ldots, g_{n^*}^*$ bzw. $h_1^*, \ldots, h_{m^*}^*$. Dann folgt aus Axiom $V2$ sofort, daß $g_{k+1}^* = g_{k+2}^* = \cdots = g_{n^*}^* = 0$ gleich dem Nullelement von $\mathfrak{G}$ und $h_{k+1}^* = \cdots = h_{m^*}^* = 0$ gleich dem Nullelement von $\mathfrak{H}$ ist. Weiter sieht man, daß die $g_1^*, \ldots, g_k^*$ eine Basis von $\mathfrak{G}$ bilden; denn aus einer linearen ganzzahligen Relation $\sum \lambda_i g_i^* = 0$ folgt

$$V(\textstyle\sum \lambda_i g_i^*, h_i^*) \equiv o \equiv \lambda_i r_i$$

für $i = 1, \ldots k$. Dann ist aber auch $V(\lambda_i g_i^*, h_i^*) \equiv o$ für alle i, und da sowieso $V(\lambda_i g_i^*, h_j^*) \equiv o$ für alle i und $j \neq i$, so folgt $V(\lambda_i g_i^*, h) \equiv o$ für alle h aus $\mathfrak{H}$ und daher nach Axiom $V2$ $\lambda_i g_i^* = 0$ $(i = 1, \ldots, k)$. Genau ebenso folgt, daß auch die $h_1^*, \ldots, h_k^*$ eine Basis von $\mathfrak{H}$ bilden.

Sei $r_1 = \lambda/\mu$ mit ganzen teilerfremden λ, μ und o_1 die Ordnung von g_1^*. o_1 ist die kleinste natürliche Zahl, für die $o_1 g_1^* = 0$ wird, d. h. nach Axiom $V1$ und $V2$ die kleinste natürliche Zahl, für die $V(o_1 g_1^*, h) \equiv o$ für alle h aus $\mathfrak{H}$. Das ist dann und nur dann der Fall, wenn $V(o_1 g_1^*, h_i^*) \equiv o$ für $i = 1, \ldots, k$, und dies ist offenbar gleichbedeutend mit $V(o_1 g_1^*, h_1^*) \equiv o_1 \lambda/\mu \equiv o$. Wegen $(\lambda, \mu) = 1$ folgt daher sofort

$$o_1 = \mu. \tag{11}$$

Ganz ebenso sieht man, daß die Nenner von $r_2, \ldots, r_k$ in gekürzter Form gleich den Ordnungen von $g_2^*, \ldots, g_k^*$ sind. Gleichzeitig folgt aber ebenso, daß diese Nenner auch die Ordnungen von $h_1^*, \ldots, h_k^*$ sind. Also sind $\mathfrak{G}$ und $\mathfrak{H}$ isomorph. Da die r_i sich sukzessive teilen, folgt, daß die Ordnungen sich umgekehrt sukzessive teilen

$$o_k \mid o_{k-1} \ldots \mid o_1. \tag{12}$$

Bekanntlich sind unter der Bedingung (12) die Ordnungen der Basiselemente durch die Struktur von $\mathfrak{G}$ eindeutig bestimmt.

Man kann auch die Zähler der r_i noch normieren, wenn man beachtet, daß man noch die Freiheit hat, g_1^* durch νg_1^* zu ersetzen, wo ν eine ganze zu o_1 teilerfremde Zahl ist. Wegen $(\lambda, o_1) = (\lambda, \mu) = 1$ kann man dann ν so wählen, daß $\nu\lambda \equiv 1 \bmod o_1$ wird, und damit wird

$$V(\nu g_1^*, h_1^*) \equiv 1/o_1. \tag{13}$$

Entsprechendes gilt für die $g_2^*, \ldots, g_k^*$.

Satz 5. *Für zwei Gruppen $\mathfrak{G}$ und $\mathfrak{H}$ mit Verschlingungsrelation ist $\mathfrak{G} \cong \mathfrak{H}$. Bedeuten $o_1, \ldots, o_k$ mit $o_1 \mid o_2 \mid \ldots \mid o_k$ die durch $\mathfrak{G}$ eindeutig bestimmten Ordnungen einer Basis von $\mathfrak{G}$ bzw. $\mathfrak{H}$, so gibt es eine Basis von $\mathfrak{G}$ und $\mathfrak{H}$ mit diesen Ordnungen, für welche die Verschlingungs-*

matrix die Gestalt

$$(14) \qquad \mathfrak{V} \equiv \begin{pmatrix} \frac{1}{o_1} & & & \\ & \frac{1}{o_2} & & \\ & & \ddots & \\ & & & \frac{1}{o_k} \end{pmatrix}$$

hat.

Daraus folgt nun sofort der Isomorphiesatz

Satz 6. *Ist für zwei Gruppenpaare mit Verschlingungsrelation* $\mathfrak{G}$, $\mathfrak{H}$ *und* $\mathfrak{G}'$, $\mathfrak{H}'$ $\mathfrak{G} \simeq \mathfrak{G}'$, *so sind die Paare* $\mathfrak{G}$, $\mathfrak{H}$ *und* $\mathfrak{G}'$, $\mathfrak{H}'$ *verschlingungstreu isomorph.*

Beweis. Da die $o_1, \ldots, o_k$ unter der Bedingung (12) durch die Struktur von $\mathfrak{G}$ eindeutig bestimmt sind, kann man nach Satz 5 sowohl in $\mathfrak{G}$ und $\mathfrak{H}$ als auch in $\mathfrak{G}'$ und $\mathfrak{H}'$ je eine Basis mit diesen Ordnungen so wählen, daß die Verschlingungsmatrix in beiden Fällen durch (14) gegeben ist. Ordnet man nun die Basiselemente von $\mathfrak{G}$ und $\mathfrak{G}'$ sowie die von $\mathfrak{H}$ und $\mathfrak{H}'$ einander zu, so entsteht dadurch offenbar ein Isomorphismus zwischen den Gruppenpaaren $\mathfrak{G}$, $\mathfrak{H}$ und $\mathfrak{G}'$, $\mathfrak{H}'$, bei dem entsprechende Elementepaare die gleiche Verschlingungszahl haben, der Isomorphismus also verschlingungstreu ist.

Ist wieder $\mathfrak{H}$ mit $\mathfrak{G}$ identisch, so handelt es sich um eine Gruppe mit Eigenverschlingung. Satz 5 bleibt natürlich gültig. Außerdem fordert man jetzt noch ein neues Axiom, nämlich

Axiom V3a. Es ist für alle g aus $\mathfrak{G}$

$$(15\,\text{a}) \qquad V(g_1, g_2) \equiv V(g_2, g_1) \mod 1$$

oder V3b

$$(15\,\text{b}) \qquad V(g_1, g_2) \equiv -V(g_2, g_1) \mod 1.$$

Die nähere Untersuchung dieser Fälle findet sich bei de Rham [1] (Axiom V3b) und Seifert [1] (Axiom V3a).

§ 2.

Der Reidemeistersche τ-Prozeß.

Im Folgenden soll die oben dargestellte Theorie auf die Reidemeisterschen Homotopieketten übertragen werden. Es sei $\mathfrak{M}^n$ der Zerlegungskomplex einer n-dimensionalen orientierbaren Mannigfaltigkeit, A die universelle Überlagerung von $\mathfrak{M}^n$, $\tilde{A}$ die zu A duale universelle Überlagerung der dual zerlegten Mannigfaltigkeit $\tilde{\mathfrak{M}}^n$. Die gewöhnlichen ganzzahligen k-dimensionalen Ketten von A heißen auch Homotopieketten von $\mathfrak{M}^n$. Wir führen den Gruppenring $\mathfrak{X}$ der Fundamentalgruppe $\mathfrak{G}$ von $\mathfrak{M}^n$ über dem Ring der ganzen rationalen Zahlen ein. Seine Elemente sind die endlichen ganzzahligen Linearkombinationen

$x = \sum \lambda_\nu g_\nu$ der Elemente g_ν aus $\mathfrak{G}$. Dann lassen sich die Homotopieketten als

$$\mathfrak{x}^k = \sum_i x_i \mathfrak{a}_i^k \tag{1}$$

schreiben mit x_i aus $\mathfrak{X}$, wobei $\mathfrak{a}_i^k$ die k-dimensionalen Zellen eines Fundamentalbereiches von A bezüglich der Gruppe $\mathfrak{G}$ der Decktransformationen durchläuft. Ebenso erhält man die Ketten von $\tilde{A}$ in der Form

$$\tilde{\mathfrak{x}}^k = \sum_i x_i \tilde{\mathfrak{a}}_i^k. \tag{2}$$

Erklärt man eine Multiplikation zwischen den Elementen von $\mathfrak{X}$ und den Homotopieketten gemäß

$$x\,\mathfrak{x}^k = \sum_i (x\,x_i)\,\mathfrak{a}_i^k, \tag{3}$$

so wird die Kettengruppe eine Operatorgruppe über $\mathfrak{X}$ mit endlich vielen Erzeugenden.

Bezeichnet man die Randbildung durch einen Punkt, so gilt

$$(x\,\mathfrak{x}^k)\cdot = x\,\dot{\mathfrak{x}}^k. \tag{4}$$

Die geschlossenen Ketten bilden also eine zulässige Untergruppe, ebenso auch die berandenden. Daher sind dann auch die Homologiegruppen von A Operatorgruppen über $\mathfrak{X}$.

Sei $\mathfrak{x}^k$ eine k-dimensionale Kette von A und $\tilde{\mathfrak{x}}^{n-k+f}$ eine $(n-k+f)$-dimensionale Kette von $\tilde{A}$. Dann bestimmen sie beide einen Durchschnitt $\mathfrak{x}^k \,.\, \tilde{\mathfrak{x}}^{n-k+f}$ im gewöhnlichen Sinne, der eine f-dimensionale Kette des durch A und $\tilde{A}$ bestimmten Durchschnittskomplexes Δ ist, welcher den Durchschnittskomplex $\mathfrak{M}_3^n$ von $\mathfrak{M}^n$ und $\tilde{\mathfrak{M}}^n$ universell überlagert. Für diesen Durchschnitt gelten die üblichen Distributiv- und Multiplikationsregeln

$$(\mathfrak{x}_1 + \mathfrak{x}_2) \,.\, \tilde{\mathfrak{x}} = \mathfrak{x}_1 \,.\, \tilde{\mathfrak{x}} + \mathfrak{x}_2 \,.\, \tilde{\mathfrak{x}} \tag{5a}$$

$$\mathfrak{x} \,.\, (\tilde{\mathfrak{x}}_1 + \tilde{\mathfrak{x}}_2) = \mathfrak{x} \,.\, \tilde{\mathfrak{x}}_1 + \mathfrak{x} \,.\, \tilde{\mathfrak{x}}_2 \tag{5b}$$

$$(\lambda\,\mathfrak{x}) \,.\, (\mu\,\tilde{\mathfrak{x}}) = \lambda\,\mu\,(\mathfrak{x} \,.\, \tilde{\mathfrak{x}}), \tag{5c}$$

wobei λ, μ ganze rationale Zahlen sind. Ferner gilt für die Gruppenelemente g von $\mathfrak{G}$, welche ja Deckbewegungen der universellen Überlagerung verursachen,

$$(g\,\mathfrak{x}^k) \,.\, (g\,\tilde{\mathfrak{x}}^{n-k+f}) = g\,(\mathfrak{x}^k \,.\, \tilde{\mathfrak{x}}^{n-k+f}). \tag{6}$$

Bei Vertauschung der Rollen von A und $\tilde{A}$ gilt die Vertauschungsregel

$$\tilde{\mathfrak{x}}^{n-k+f} \,.\, \mathfrak{x}^k = (-1)^{(n-k)(k-f)}\,\mathfrak{x}^k \,.\, \tilde{\mathfrak{x}}^{n-k+f}. \tag{7}$$

Und schließlich hat man für den Rand des Durchschnitts die „Differentiationsregel“

$$(\mathfrak{x}^k \,.\, \tilde{\mathfrak{x}}^{n-k+f})\cdot = \mathfrak{x}^k \,.\, \dot{\tilde{\mathfrak{x}}}^{n-k+f} + (-1)^{k-f}\,\dot{\mathfrak{x}}^k \,.\, \tilde{\mathfrak{x}}^{n-k+f}, \tag{8}$$

aus der sofort folgt, daß der Durchschnitt zweier geschlossener Ketten

geschlossen und der einer berandenden Kette und einer geschlossenen berandend ist. Man kann also in der üblichen Weise für die Elemente der Homologiegruppen Durchschnitte erklären gemäß

$$[\mathfrak{x}^k] \cdot [\tilde{\mathfrak{x}}^{n-k+l}] = [\mathfrak{x}^k \cdot \tilde{\mathfrak{x}}^{n-k+l}]. \tag{9}$$

Dabei bezeichnet $[\mathfrak{x}^k]$ die Homologieklasse, in der $\mathfrak{x}^k$ liegt. Die Schnittrelationen sind invariant gegenüber Unterteilung des Komplexes. Daher ist es für die Durchschnitte von Homologieklassen gleichgültig, ob man die erste Komponente aus dem Komplex A und die zweite aus $\tilde{A}$ wählt oder umgekehrt, d. h. man kann auch $\tilde{A}$ als Ausgangskomplex und A als Dualkomplex betrachten. Dann folgt aus (7) die gleiche Vertauschungsregel für den Durchschnitt von Homologieklassen.

Der Durchschnitt zweier Zellen $\mathfrak{a}_i^k$ und $\tilde{\mathfrak{a}}_j^{n-k+l}$ ist eine Zelle von $\mathcal{A}$ oder leer, und es gibt zu jedem Zellenpaar $\mathfrak{a}_i^k$ und $\tilde{\mathfrak{a}}_j^{n-k+l}$ höchstens ein Gruppenelement $g_{i,j}^{k,l}$, so daß

$$\mathfrak{a}_i^k \cdot g_{i,j}^{k,l} \tilde{\mathfrak{a}}_j^{n-k+l} \neq o \tag{10}$$

ist. Für zwei Ketten komplementärer Dimension $\mathfrak{x}^k$ und $\tilde{\mathfrak{x}}^{n-k}$ ist der Durchschnitt nulldimensional. In diesem Falle gibt es insbesondere zu jeder Zelle $\mathfrak{a}_i^k$ nur eine einzige Zelle $\tilde{\mathfrak{a}}_j^{n-k}$ und ein einziges Gruppenelement g_i, so daß

$$\mathfrak{a}_i^k \cdot g_i \tilde{\mathfrak{a}}_j^{n-k} = \mathfrak{c}_i^0 \neq o$$

ist. $\mathfrak{c}_i^0$ ist dabei ein Punkt von $\mathcal{A}$. Durch diese Bedingung wird eine umkehrbar eindeutige Beziehung zwischen $\mathfrak{a}_i^k$ und $\tilde{\mathfrak{a}}_j^{n-k}$ hergestellt. Nun sind aber in der Darstellung (2) die $g_i \tilde{\mathfrak{a}}_i^{n-k}$ ebensogut zu verwenden wie die $\tilde{\mathfrak{a}}_j^{n-k}$ selbst. Außerdem können wir sie noch umnumerieren. Wir wollen daher von vorneherein die $\tilde{\mathfrak{a}}_j^{n-k}$ so gewählt denken, daß

$$\mathfrak{a}_i^k \cdot \tilde{\mathfrak{a}}_i^{n-k} = \mathfrak{c}_i^0 \neq o \tag{11}$$

und damit

$$g_\nu \mathfrak{a}_i^k \cdot g_\mu \tilde{\mathfrak{a}}_j^{n-k} = \delta_{\nu\mu} \delta_{ij} g_\nu \mathfrak{c}_i^0$$

ist. Dann wird für irgendzwei Ketten

$$\mathfrak{x}^k = \sum x_i \mathfrak{a}_i^k \quad \text{und} \quad \tilde{\mathfrak{x}}^{n-k} = \sum \tilde{x}_j \tilde{\mathfrak{a}}_j^{n-k}$$

mit

$$x_i = \sum_\nu \lambda_{i\nu} g_\nu \quad \text{und} \quad \tilde{x}_j = \sum_\mu \lambda_{j\mu} g_\mu$$

$$\mathfrak{x}^k \cdot \tilde{\mathfrak{x}}^{n-k} = \sum_{i,\nu} \lambda_{i\nu} \tilde{\lambda}_{i\nu} g_\nu \mathfrak{c}_i^0. \tag{12}$$

Die Untersuchung der Überlagerung A führt nun zunächst auf die Untersuchung gewisser einfacherer Überdeckungen (Reidemeister [2], Franz [2]). Sei nämlich $\mathfrak{G}'$ eine endliche Abelsche Gruppe und homomorphes Bild von $\mathfrak{G}$, dann ist auch der Gruppenring $\mathfrak{X}'$ von $\mathfrak{G}'$ homomorphes Bild des Gruppenringes $\mathfrak{X}$. Der entsprechende Gruppenring $\mathfrak{X}'_P$ über dem rationalen Körper P ist dann direkte Summe gewisser Kreis-

körper K, und jeder dieser Kreiskörper ist homomorphes Bild von $\mathfrak{X}'_P$. Entsprechend ist die Hauptordnung der ganzen Zahlen von K homomorphes Bild des ganzzahligen Gruppenringes $\mathfrak{X}'$ und damit auch von $\mathfrak{X}$.

Sei jetzt also φ eine homomorphe Abbildung des ganzzahligen Gruppenringes $\mathfrak{X}$ auf die Hauptordnung $\mathfrak{Y}$ eines algebraischen Zahlkörpers

$$\mathfrak{Y} = \varphi(\mathfrak{X}). \tag{13}$$

Dann überträgt sich dieser Homomorphismus unmittelbar auf die Kettengruppen. Bezeichne nämlich $\mathfrak{X}\mathfrak{x}$ die Kettengruppe mit den Elementen $\mathfrak{x}^k = \sum x_i \mathfrak{a}_i^k$ und $\mathfrak{Y}\mathfrak{y}$ die mit den Elementen $\mathfrak{y}^k = \sum y_i \mathfrak{a}_i^k$ (y_i aus $\mathfrak{Y}$), so hat man nur zu setzen

$$\varphi(\mathfrak{x}^k) = \varphi(\sum x_i \mathfrak{a}_i^k) = \sum \varphi(x_i)\, \mathfrak{a}_i^k = \mathfrak{y}^k. \tag{14}$$

Dieser Homomorphismus ist insofern operatortreu, als der Operator x durch den homomorphen Operator $y = \varphi(x)$ zu ersetzen ist,

$$\varphi(x\,\mathfrak{x}^k) = \varphi(x)\,\varphi(\mathfrak{x}^k). \tag{15}$$

Für die Kettengruppe $\mathfrak{X}\mathfrak{x}$ sind die Homotopieränder erklärt. Dann kann man Berandungsrelationen für die Ketten $\mathfrak{Y}\mathfrak{y}$ durch homomorphen Übergang erklären

$$\dot{\mathfrak{y}}^k = [\varphi(\mathfrak{x}^k)]^{\cdot} = \varphi(\dot{\mathfrak{x}}^k). \tag{16}$$

Diese Definition ist in der Tat eindeutig; denn wenn

$$\varphi(\mathfrak{x}^k) = \varphi(\sum x_i \mathfrak{a}_i^k) = 0$$

ist, d. h. $\varphi(x_i) = o$ für alle i, so ist auch

$$\varphi(\dot{\mathfrak{x}}^k) = \varphi(\sum_{i,\nu} x_i \varepsilon_{i\nu}\, \mathfrak{a}_\nu^{k-1}) = \sum_{i,\nu} \varphi(x_i)\,\varphi(\varepsilon_{i\nu})\, \mathfrak{a}_\nu^{k-1} = 0.$$

Außerdem übertragen sich sofort die üblichen Randregeln

$$(\mathfrak{y}_1^k + \mathfrak{y}_2^k)^{\cdot} = \dot{\mathfrak{y}}_1^k + \dot{\mathfrak{y}}_2^k, \tag{17}$$

$$(y\,\mathfrak{y}^k)^{\cdot} = y\,\dot{\mathfrak{y}}^k, \tag{18}$$

$$(\dot{\mathfrak{y}}^k)^{\cdot} = 0, \tag{19}$$

aufgrund deren sich die Begriffe geschlossen, berandend, homolog, Homologiegruppe in der üblichen Weise erklären lassen. Die Homologiegruppen sind Operatorgruppen über $\mathfrak{Y}$.

Wollte man nun jedoch den Durchschnitt auch vermöge desselben Homomorphismus von den Homotopieketten auf die Ketten $\mathfrak{Y}\mathfrak{y}$ übertragen, also

$$\varphi(\mathfrak{x}^k)\,.\,\varphi(\tilde{\mathfrak{x}}^{n-k+f}) = \varphi(\mathfrak{x}^k\,.\,\tilde{\mathfrak{x}}^{n-k+f})$$

setzen, so ist nicht einmal die Eindeutigkeit dieser Definition gesichert. Es ist nämlich etwa für $f = o$ nach (12)

$$\varphi(\mathfrak{x}^k\,.\,\tilde{\mathfrak{x}}^{n-k}) = \varphi(\sum_{i,\nu} \lambda_{i\nu}\,\tilde{\lambda}_{i\nu}\, g_\nu\, \mathfrak{c}_i^0) = \sum_{i,\nu} \varphi(\lambda_{i\nu}\,\tilde{\lambda}_{i\nu}\, g_\nu)\, \mathfrak{c}_i^0.$$

Ist nun $\varphi(\mathfrak{x}^k) = 0$, d. h. $\varphi(\sum_\nu \lambda_{i\nu} g_\nu) = o$ für alle i, so müßte auch die rechte Seite für jede Wahl von $\mathfrak{x}^{n-k}$, d. h. für jede Wahl der $\tilde{\lambda}_{i\nu}$ verschwinden. Das ist aber keineswegs der Fall.

Diese Schwierigkeit wird behoben, wenn man nicht den gewöhnlichen Durchschnitt, sondern den τ-Prozeß von REIDEMEISTER (REIDEMEISTER [4]) und die daraus entspringenden Schnittzahlen benutzt.

Jede Kette aus Δ liegt über einer wohlbestimmten Kette aus $\mathfrak{M}^n_\Delta$. Sei die Kette aus Δ $\mathfrak{x}^k$, so bezeichnen wir die Kette aus $\mathfrak{M}^n_\Delta$, über der sie liegt mit $(\mathfrak{x}^k)'$. Der Strich bedeutet also die Projektion aus dem Überlagerungskomplex Δ in den Grundkomplex $\mathfrak{M}^n_\Delta$. Insbesondere liefern die Bilder der Zellen $\mathfrak{c}^k_i$ genau einmal sämtliche Zellen von $\mathfrak{M}^n_\Delta$, die wir mit dem entsprechenden lateinischen Buchstaben c^k_i bezeichnen wollen, wenn die $\mathfrak{c}^k_i$ einen Fundamentalbereich von Δ durchlaufen,

$$(\mathfrak{c}^k_i)' = c^k_i. \tag{20}$$

Dann ist offenbar das Bild von $\mathfrak{x}^k = \sum_i x_i \mathfrak{c}^k_i = \sum_{i,\nu} \lambda_{i\nu} g_\nu \mathfrak{c}^k_i$ bei der Projektion in den Grundkomplex

$$(\mathfrak{x}^k)' = \sum_{i,\nu} \lambda_{i\nu} c^k_i. \tag{21}$$

Setzen wir zur Abkürzung entsprechend für die Elemente $x = \sum \lambda_\nu g_\nu$ aus $\mathfrak{X}$

$$x' = (\sum_\nu \lambda_\nu g_\nu)' = \sum_\nu \lambda_\nu, \tag{22}$$

so gilt für die Projektion

$$(\mathfrak{x}^k)' = (\sum_i x_i \mathfrak{c}^k_i)' = \sum_i x'_i c^k_i. \tag{23}$$

Wir brauchen noch das Verhalten des Randes bei Projektion. Der Homotopierand der Zellen $\mathfrak{c}^k_i$ sei durch

$$\dot{\mathfrak{c}}^k_i = \sum_j \varepsilon_{ij} \mathfrak{c}^{k-1}_j \qquad (\varepsilon_{ij} \text{ aus } \mathfrak{X}) \tag{24}$$

gegeben. Dann ist für jede beliebige Kette von Δ

$$((\sum_i x_i \mathfrak{c}^k_i)\cdot)' = (\sum_{i,j} x_i \varepsilon_{ij} \mathfrak{c}^{k-1}_j)' = \sum_{i,j} (x_i \varepsilon_{ij})' c^{k-1}_j.$$

Andrerseits ist nach Definition der Überlagerung der gewöhnliche Rand der Zelle c^k_i

$$\dot{c}^k_i = (\dot{\mathfrak{c}}^k_i)' = \sum_j \varepsilon'_{ij} c^{k-1}_j. \tag{25}$$

Nun ist offenbar $(x_1 x_2)' = x'_1 x'_2$ und daher

$$(\mathfrak{x}^{k\prime})\cdot = (\dot{\mathfrak{x}}^k)'. \tag{26}$$

Nun sieht man auch, wenn man die Formeln (23) und (26) mit (14) und (16) vergleicht, daß diese Projektion in den Grundkomplex nichts

weiter ist als der spezielle Homomorphismus, bei dem die Gruppenelemente g alle auf die Zahl 1 abgebildet werden.

Zur Definition des τ-Prozesses hat man nun nicht nur die gewöhnlichen Ketten von $\mathfrak{M}^n_\Delta$ zu betrachten, sondern als Koeffizientenbereich für diese Ketten den Gruppenring $\mathfrak{X}$ zuzulassen. Es handelt sich jedoch hierbei nicht um die Homotopieketten, da die Randdefinition von $\mathfrak{M}^n_\Delta$ benutzt wird. Dann besteht die zu betrachtende Kettengruppe aus den Ketten

$$\mathfrak{q}^k = \sum_i x_i c_i^k \tag{27}$$

mit x_i aus $\mathfrak{X}$. Die Addition ist in der üblichen Weise erklärt, ferner eine vordere und hintere Multiplikation mit den Elementen x aus $\mathfrak{X}$ gemäß

$$x\,\mathfrak{q}^k = \sum_i (x\,x_i)\, c_i^k \tag{28a}$$

und

$$\mathfrak{q}^k\,x = \sum_i (x_i\,x)\, c_i^k . \tag{28b}$$

Durch diese Festsetzung wird die Kettengruppe eine Abelsche Gruppe mit vorderem und hinterem Operatorenbereich $\mathfrak{X}$. Als Rand der $\mathfrak{q}^k$-Ketten wird nun aber keineswegs der Homotopierand verwendet, sondern einfach definiert

$$\dot{\mathfrak{q}}^k = \sum_i x_i \dot{c}_i^k , \tag{29}$$

wobei $\dot{c}_i^k$ der gewöhnliche Rand der $\mathfrak{M}^n_\Delta$-Zelle c_i^k bedeutet. Diese Randbildung genügt den üblichen Bedingungen

$$(\mathfrak{q}_1^k + \mathfrak{q}_2^k)^{\cdot} = \dot{\mathfrak{q}}_1^k + \dot{\mathfrak{q}}_2^k , \tag{30}$$

$$(x\,\mathfrak{q}^k)^{\cdot} = x\,\dot{\mathfrak{q}}^k , \tag{31}$$

$$(\mathfrak{q}^k\,x)^{\cdot} = \dot{\mathfrak{q}}^k\,x . \tag{32}$$

Die Gruppe der geschlossenen Ketten, sowie die der berandenden, also auch die Homologiegruppen sind daher für den vorderen und hinteren Operatorenbereich $\mathfrak{X}$ zulässig.

Wir merken noch an, daß jede Kette $\mathfrak{q}^l$ eine eindeutige Darstellung

$$\mathfrak{q}^l = \sum_i \mathfrak{p}_i^k g_i \tag{33}$$

besitzt, wo die $\mathfrak{p}_i^k$ gewöhnliche Ketten aus $\mathfrak{M}^n_\Delta$ sind. Hierzu hat man nur in $\mathfrak{q}^l = \sum_i x_i c_i^k$ für die Koeffizienten ihre Ausdrücke $x_i = \sum_\nu \lambda_{i\nu} g_\nu$ einzusetzen, dann wird $\mathfrak{q}^l = \sum_{i,\nu} \lambda_{i\nu} g_\nu c_i^k = \sum_\nu (\sum_i \lambda_{i\nu} c_i^k)\, g_\nu = \sum_\nu \mathfrak{p}_\nu^k g_\nu$. In der Normaldarstellung (33) ergibt sich für die Randbildung aus (30) und (32)

$$\dot{\mathfrak{q}}^l = (\sum_i \mathfrak{p}_i^k\, g_i)^{\cdot} = \sum_i \dot{\mathfrak{p}}_i^k\, g_i , \tag{34}$$

wobei $\dot{\mathfrak{p}}_i^k$ der gewöhnliche Rand der $\mathfrak{M}^n_\Delta$-Kette $\mathfrak{p}_i^k$ ist.

Nun kommen wir zur Definition des τ-Prozesses. Für irgendzwei Ketten $\mathfrak{x}^k$ von A und $\tilde{\mathfrak{x}}^{n-k+f}$ von $\tilde{A}$ definieren wir als τ-Durchschnitt die Kette

$$\mathfrak{q}^f = \tau(\mathfrak{x}^k, \tilde{\mathfrak{x}}^{n-k+f}) = \sum_\nu (\mathfrak{x}^k \cdot g_\nu \tilde{\mathfrak{x}}^{n-k+f})' g_\nu . \tag{35}$$

Hierbei ist $\mathfrak{x}^k \cdot g_\nu \tilde{\mathfrak{x}}^{n-k+f}$ der Durchschnitt der Ketten $\mathfrak{x}^k$ und $g_\nu \tilde{\mathfrak{x}}^{n-k+f}$ im üblichen Sinne, also eine f-dimensionale Kette von $\mathcal{A}$. Der Strich bedeutet die Projektion nach $\mathfrak{M}^n_J$ und die Rechtsmultiplikation mit g_ν liefert dann gerade eine f-dimensionale Kette $\mathfrak{q}^f$ unserer oben betrachteten Kettengruppe in der Normalgestalt (33).

Zunächst ist der τ-Durchschnitt trivialerweise wieder distributiv zur Kettenaddition. Auch die Vertauschungsregel (7) überträgt sich — etwas verändert — auf den τ-Durchschnitt. Es ist nämlich nach (7) und (6)

$$\begin{aligned}\tau(\tilde{\mathfrak{x}}^{n-k+f}, \mathfrak{x}^k) &= \sum_\nu (\tilde{\mathfrak{x}} \cdot g_\nu \mathfrak{x}^k)' g_\nu = (-1)^{(n-k)(k-f)} \sum_\nu (g_\nu \mathfrak{x}^k \cdot \tilde{\mathfrak{x}})' g_\nu \\ &= (-1)^{(n-k)(k-f)} \sum_\nu (g_\nu (\mathfrak{x}^k \cdot g_\nu^{-1} \tilde{\mathfrak{x}}))' g_\nu .\end{aligned}$$

Nun geht bei der Projektion der Vorfaktor g_ν verloren, und daher wird der letzte Ausdruck gleich

$$(-1)^{(n-k)(k-f)} \sum_\nu (\mathfrak{x}^k \cdot g_\nu^{-1} \tilde{\mathfrak{x}})' g_\nu = (-1)^{(n-k)(k-f)} \sum_\nu (\mathfrak{x}^k \cdot g_\nu \tilde{\mathfrak{x}}^{n-k+f})' g_\nu^{-1} .$$

Nun erklärt man für den Gruppenring $\mathfrak{X}$ den Antiisomorphismus

$$\bar{x} = \overline{\sum_i \lambda_i g_i} = \sum_i \lambda_i g_i^{-1} \tag{36}$$

und überträgt ihn auf die Ketten $\mathfrak{q}^f = \sum_i x_i c_i^f$ gemäß

$$\overline{\mathfrak{q}^k} = \sum_i \bar{x}_i c_i^k \tag{37}$$

oder auch, was dasselbe ist, in der Normalform (33)

$$\overline{\mathfrak{q}^k} = \overline{\sum_i \mathfrak{p}_i^k g_i} = \sum_i \mathfrak{p}_i^k g_i^{-1} . \tag{38}$$

Dann ist nach (28a) und (28b)

$$\overline{x\,\mathfrak{q}^k} = \mathfrak{q}^k \bar{x} \text{ und } \overline{\mathfrak{q}^k x} = \bar{x}\,\overline{\mathfrak{q}^k}. \tag{39}$$

Für den τ-Durchschnitt erhält man so die Vertauschungsregel

$$\tau(\tilde{\mathfrak{x}}^{n-k+f}, \mathfrak{x}^k) = (-1)^{(n-k)(k-f)} \tau(\mathfrak{x}^k, \tilde{\mathfrak{x}}^{n-k+f}). \tag{40}$$

Weiter braucht man noch eine Regel für die Operatormultiplikation. Dazu berechnen wir zunächst $\tau(\mathfrak{x}^k, g\tilde{\mathfrak{x}}^{n-k+f})$. Es ist

$$\begin{aligned}\tau(\mathfrak{x}^k, g\tilde{\mathfrak{x}}^{n-k+f}) &= \sum_\nu (\mathfrak{x}^k \cdot g_\nu g \tilde{\mathfrak{x}}^{n-k+f})' g_\nu = \sum_\nu (\mathfrak{x}^k \cdot g_\nu g \tilde{\mathfrak{x}})' g_\nu g g^{-1} \\ &= \tau(\mathfrak{x}^k, \tilde{\mathfrak{x}}^{n-k+f})\, g^{-1} .\end{aligned}$$

Aus der Vertauschungsregel folgt dann sofort nach (39)

$$\tau(g\mathfrak{x}^k, \mathfrak{x}^{n-k+f}) = (-1)^{(n-k)(k-f)}\,\overline{\tau(\mathfrak{x}, g\mathfrak{x}^k)} = (-1)^{(n-k)(k-f)}\,\overline{g^{-1}}\,\overline{\tau(\mathfrak{x}, \mathfrak{x}^k)}$$
$$= g\,\tau(\mathfrak{x}^k, \mathfrak{x}^{n-k+f}).$$

Und daher ist allgemein

$$\tau(x_1\mathfrak{x}^k, x_2\mathfrak{x}^{n-k+f}) = x_1\,\tau(\mathfrak{x}^k, \mathfrak{x}^{n-k+f})\,\bar{x}_2. \tag{41}$$

Wichtig ist nun die Feststellung, daß für den τ-Durchschnitt wieder die Randformel gilt. Es ist nämlich nach (34) und (26)

$$\dot{\tau}(\mathfrak{x}^k, \mathfrak{x}) = \sum_\nu ((\mathfrak{x}^k \cdot g_\nu \mathfrak{x})') \cdot g_\nu = \sum_\nu ((\mathfrak{x}^k \cdot g_\nu \mathfrak{x}) \cdot)'\, g_\nu.$$

Wendet man nun auf die innere Klammer die Randformel (8) an, so erhält man sofort

$$\dot{\tau}(\mathfrak{x}^k, \mathfrak{x}) = \tau(\mathfrak{x}^k, \dot{\mathfrak{x}}^{n-k+f}) + (-1)^{k-f}\,\tau(\dot{\mathfrak{x}}^k, \mathfrak{x}^{n-k+f}). \tag{42}$$

Daher kann man wieder in der üblichen Weise $\dot{\tau}$-Durchschnitte für die Elemente der Homologiegruppen erklären gemäß

$$\tau([\mathfrak{x}^k], [\mathfrak{x}^{n-k+f}]) = [\tau(\mathfrak{x}^k, \mathfrak{x}^{n-k+f})]. \tag{43}$$

Der τ-Durchschnitt zweier Homologieklassen von A ist also eine Homologieklasse der oben betrachteten Kettengruppe (27) mit den Randbeziehungen (29).

Auch der τ-Durchschnitt von Homologieklassen ist invariant gegenüber Unterteilung des Komplexes. Daher ist es auch hier für die Bildung des Durchschnittes gleichgültig, ob man die erste Komponente aus A und die zweite aus $\bar{A}$ wählt oder umgekehrt. Dann folgt aber aus (40) die Vertauschungsregel

$$\tau([\mathfrak{x}_1^k], [\mathfrak{x}_2^{n-k+f}]) = (-1)^{(n-k)(k-f)}\,\overline{\tau([\mathfrak{x}_2^{n-k+f}], [\mathfrak{x}_1^k])}, \tag{44}$$

wenn man den Querstrich für die Homologieklassen $[\mathfrak{q}^f]$ repräsentantenweise erklärt,

$$\overline{[\mathfrak{q}^f]} = [\overline{\mathfrak{q}^f}]. \tag{45}$$

Das geht; denn wenn $\mathfrak{q}^f = \sum \dot{\mathfrak{p}}_i^f g_i = 0$ ist, so ist auch $\overline{\mathfrak{q}^f} = \sum \dot{\mathfrak{p}}_i^f g_i^{-1} = 0$, und wenn $\mathfrak{q}^f = \sum \dot{\mathfrak{p}}_i^{f+1} g_i$ ist, so ist auch $\overline{\mathfrak{q}^f} = \sum \dot{\mathfrak{p}}_i^{f+1} g_i^{-1}$.

Wie für gewöhnliche Durchschnitte wollen wir auch für den τ-Durchschnitt im Falle $f = 0$ Schnittzahlen erklären (Reidemeister [4], S. 237 f.). Seien c_i^0 die Punkte von $\mathfrak{M}_3^n$ und ihre Orientierung so getroffen, daß die Randkette jeder Strecke aus $\mathfrak{M}_3^n$ eine Differenz $c_i^0 - c_j^0$ ist. Dann ordnen wir der nulldimensionalen Kette $\tau(\mathfrak{x}^k, \mathfrak{x}^{n-k}) = \sum_i s_i c_i^0$ als Schnittzahl das Gruppenringelement

$$S(\mathfrak{x}^k, \mathfrak{x}^{n-k}) = \sum_i s_i \tag{46}$$

zu. Wir zeigen zunächst, daß für diese Schnittzahlen analoge Regeln wir für die gewöhnlichen Schnittzahlen gelten. Zunächst übertragen

sich die Distributivität, die Vertauschungsregel (40) und die Regel (41) für die Operatormultiplikation sofort,

$$S(\mathfrak{x}^k, \tilde{\mathfrak{x}}^{n-k}) = (-1)^{k(n-k)} \overline{S(\tilde{\mathfrak{x}}^{n-k}, \mathfrak{x}^k)} \tag{47}$$

$$S(x_1 \mathfrak{x}^k, x_2 \tilde{\mathfrak{x}}^{n-k}) = x_1 S(\mathfrak{x}^k, \tilde{\mathfrak{x}}^{n-k}) \bar{x}_2. \tag{48}$$

Man kann daher die Schnittzahlen irgendzweier Ketten

$$\mathfrak{x}^k = \sum_i x_i \mathfrak{a}_i^k \text{ und } \tilde{\mathfrak{x}}^{n-k} = \sum_j \tilde{x}_j \tilde{\mathfrak{a}}_j^{n-k}$$

leicht berechnen, sofern man die Schnittzahlen $S(\mathfrak{a}_i^k, \tilde{\mathfrak{a}}_j^{n-k})$ kennt. Denken wir wieder die Normierung der $\tilde{\mathfrak{a}}_j^{n-k}$ wie oben in (11) gewählt, so wird offenbar

$$S(\mathfrak{a}_i^k, \tilde{\mathfrak{a}}_j^{n-k}) = \delta_{ij} \tag{49}$$

und damit

$$S(\mathfrak{x}^k, \tilde{\mathfrak{x}}^{n-k}) = \sum_i x_i \bar{\tilde{x}}_i. \tag{50}$$

Betrachtet man weiter zwei Ketten $\mathfrak{x}^k, \tilde{\mathfrak{x}}^{n-k+1}$, so ist $\tau(\mathfrak{x}^k, \tilde{\mathfrak{x}}^{n-k+1}) = \mathfrak{q}^1$ eindimensional. Andrerseits, ist nach der Randformel (42) die Summe der Schnittzahlen

$$S(\mathfrak{x}^k, \dot{\tilde{\mathfrak{x}}}^{n-k+1}) + (-1)^{k-1} S(\dot{\mathfrak{x}}^k, \tilde{\mathfrak{x}}^{n-k+1})$$

gleich der Koeffizientensumme von $\dot{\mathfrak{q}}^1$. Nun verschwindet aber nach der obigen Festsetzung über die Orientierung der Punkte c_i^0 von $\mathfrak{M}_3^n$ die Koeffizientensumme in jedem Rand $\dot{\mathfrak{p}}^1$ einer eindimensionalen Kette $\mathfrak{p}^1$ von $\mathfrak{M}_3^n$. Und daher ist nach (34) die Koeffizientensumme von $\dot{\mathfrak{q}}^1$ ebenfalls gleich Null, also

$$S(\mathfrak{x}^k, \dot{\tilde{\mathfrak{x}}}^{n-k+1}) = (-1)^k S(\dot{\mathfrak{x}}^k, \tilde{\mathfrak{x}}^{n-k+1}). \tag{51}$$

Nach dieser Randformel ist die Schnittzahl zwischen einer geschlossenen und einer berandenden Kette gleich Null, und daher kann man für die Elemente der Homologiegruppen k-ter und $n-k$-ter Dimension eindeutig repräsentantenweise Schnittzahlen erklären

$$S([\mathfrak{x}^k], [\tilde{\mathfrak{x}}^{n-k}]) = S(\mathfrak{x}^k, \tilde{\mathfrak{x}}^{n-k}). \tag{52}$$

Für diese gilt ebenfalls die Vertauschungsregel (47).

Kehrt man die Orientierung der Mannigfaltigkeit um, so kehren sich offensichtlich die Vorzeichen aller Schnittzahlen um.

Sei nun wieder φ eine homomorphe Abbildung des ganzzahligen Gruppenringes $\mathfrak{X}$ auf die Hauptordnung $\mathfrak{H}$. Für die Elemente von $\mathfrak{X}$ war nun nach (36) ein Antiisomorphismus erklärt

$$x = \sum_i \lambda_i g_i \to \bar{x} = \sum_i \lambda_i g_i^{-1}.$$

Dem Gruppenelement g_i entspricht eine gewisse Einheitswurzel in $\mathfrak{Y}$, g_i^{-1} also die konjugiert-komplexe Einheitswurzel. Für $\mathfrak{Y}$ hat man also den Automorphismus

$$y \to \bar{y},$$

wo $\bar{y}$ die konjugiert-komplexe Zahl zu y ist. Und es ist ersichtlich

$$\varphi(\bar{x}) = \overline{\varphi(x)}. \tag{53}$$

Der τ-Durchschnitt läßt sich nun tatsächlich einfach durch den Homomorphismus φ übertragen. Wir definieren für

$$\begin{gathered}\mathfrak{y}^k = \varphi(\mathfrak{x}^k) \text{ und } \tilde{\mathfrak{y}}^{n-k+f} = \varphi(\tilde{\mathfrak{x}}^{n-k+f}) \\ \tau(\mathfrak{y}^k, \tilde{\mathfrak{y}}^{n-k+f}) = \varphi[\tau(\mathfrak{x}^k, \tilde{\mathfrak{x}}^{n-k+f})],\end{gathered} \tag{54}$$

wobei der Homomorphismus φ für die Ketten $\mathfrak{q}^f$ (27) ebenfalls wie in (14) erklärt ist. Jetzt ist die Definition in der Tat eindeutig; denn ist etwa

$$\mathfrak{x}^k = \sum_i x_i \mathfrak{a}_i^k, \quad \tilde{\mathfrak{x}}^{n-k+f} = \sum_j \tilde{x}_j \tilde{\mathfrak{a}}_j^{n-k+f},$$

dann ist nach (41)

$$\varphi[\tau(\mathfrak{x}^k, \tilde{\mathfrak{x}}^{n-k+f})] = \sum_{ij} \varphi(x_i)\, \varphi[\tau(\mathfrak{a}_i^k, \tilde{\mathfrak{a}}_j^{n-k+f})]\, \varphi(\overline{\tilde{x}_j}),$$

und das ist Null, wenn $\varphi(x_i) = 0$ für alle i oder wenn $\varphi(\tilde{x}_j) = 0$ für alle j.

Die Eigenschaften des τ-Durchschnittes übertragen sich ebenfalls alle bei der Definition (54). Für die Distributivität ist das sofort klar, für die Vertauschungsregel und die Regel über die Operatormultiplikation ebenfalls, wenn man noch (53) beachtet. Auch die Randregel bleibt gültig nach (16), wobei man noch bemerkt, daß die Randdefinition (16) für die Ketten $\mathfrak{q}^f = \sum_i x_i c_i^f$ auch durch $\varphi(\mathfrak{q}^f) = \sum \varphi(x_i) c_i^f$ gegeben werden kann. Man kann also auch jetzt wieder τ-Durchschnitte von Homologieklassen erklären. Schließlich definiert man im Falle $f = 0$ wieder Schnittzahlen $S(\mathfrak{y}^k, \tilde{\mathfrak{y}}^{n-k})$ entweder unmittelbar als Koeffizientensumme in $\tau(\mathfrak{y}^k, \tilde{\mathfrak{y}}^{n-k})$ oder auch, was auf dasselbe herauskommt, als $\varphi\, S(\mathfrak{x}^k, \tilde{\mathfrak{x}}^{n-k})$. Dann bleiben auch die obigen Regeln für die Schnittzahlen gültig.

Ist der Homomorphismus φ speziell der Übergang $g_i \to 1$, also die Projektion in die Grundmannigfaltigkeit $\mathfrak{M}^n$, dann sind die eben erklärten Schnittzahlen $\varphi\, S(\mathfrak{x}^k, \tilde{\mathfrak{x}}^{n-k})$ offenbar gerade die gewöhnlichen Schnittzahlen der $\mathfrak{M}^n$-Ketten $\varphi(\mathfrak{x}^k)$ und $\varphi(\tilde{\mathfrak{x}}^{n-k})$.

Die Homologiegruppen der Ketten $\mathfrak{Y}\mathfrak{y}$ sind Operatorgruppen über der Hauptordnung $\mathfrak{Y}$ von K und daher nach Steinitz (Steinitz [2], S. 328) direkte Summe der Untergruppe aller Elemente endlicher Ordnung (Torsionsgruppe) und einer Operatorgruppe vom Modultypus

(= freie Gruppe) (Bettimodul). Die Elemente aus den Homologieklassen der Torsionsgruppe nennen wir wie im ganzrationalen Fall Divisionsränder. Nach (51) verschwindet jede Schnittzahl zwischen einem Divisionsrand und einem Zyklus, so daß also die Schnittzahlen zwischen den Homologieklassen als Schnittzahlen zwischen den Elementen des Bettimoduls aufgefaßt werden können.

Für zwei Divisionsränder $\mathfrak{y}^k$ und $\tilde{\mathfrak{y}}^{n-k-1}$ der Dimension k bzw. $n-k-1$ definieren wir wie im rationalen Fall Verschlingungszahlen. Sei d eine Zahl aus der Ordnung von $\mathfrak{y}^k$, also $d \,.\, \mathfrak{y}^k$ berandend, etwa $\dot{\mathfrak{y}}^{k+1} = d \,.\, \mathfrak{y}^k$. Dann setzen wir

$$V(\mathfrak{y}^k, \tilde{\mathfrak{y}}^{n-k-1}) = \frac{1}{d} \cdot S(\mathfrak{y}^{k+1}, \tilde{\mathfrak{y}}^{n-k-1}). \tag{55}$$

Genau wie im rationalen Fall beweist man auch hier, daß diese Definition unabhängig von der speziellen Wahl der Kette $\mathfrak{y}^{k+1}$ und der Zahl d aus der Ordnung von $\mathfrak{y}^k$ ist. Schließlich erklärt man repräsentantenweise Verschlingungszahlen zwischen den Elementen der Torsionsgruppen der Dimension k und $n-k-1$. Dies sind dann mod 1 bestimmte Zahlen des Körpers K; denn die Verschlingungszahl zwischen einem Rand und einem Divisionsrand ist eine ganze Zahl aus K. Für diese Verschlingungszahlen gelten die Distributivregel sowie die Vertauschungsregel

$$V([\mathfrak{y}^k], [\tilde{\mathfrak{y}}^{n-k-1}]) = (-1)^{k(n-k+1)+1}\, \overline{V([\tilde{\mathfrak{y}}^{n-k-1}], [\mathfrak{y}^k])} \bmod 1, \tag{56}$$

die sich aus (51) und (47) wie im rationalen Fall ergibt.

§ 3.

Schnittzahlen.

Die Gesamtheit $\mathfrak{K}^k$ der k-dimensionalen Ketten der zu betrachtenden Überdeckung sind die Linearformen

$$\mathfrak{x}^k = \sum_{i=1}^{a_k} x_i \mathfrak{a}_i^k$$

mit Koeffizienten aus der Hauptordnung $\mathfrak{X}$ aller ganzen Zahlen des Zahlkörpers K. Diese Linearformen bilden (in der Bezeichnungsweise von Steinitz) den Einheitsmodul $\mathfrak{E}_{a_k}$ a_k-ten Grades. In ihm ist als Untermodul der Modul $\mathfrak{Z}^k$ aller k-dimensionalen (durch die Homotopierandrelationen bestimmten) Zyklen enthalten. $\mathfrak{Z}^k$ ist Grundmodul: denn mit jeder Kette enthält er auch jede proportionale Kette, sofern sie wieder ganzzahlige Koeffizienten hat. Dann ist aber (Steinitz [2], S. 304) $\mathfrak{Z}^k$ direkter Summand in $\mathfrak{K}^k$

$$\mathfrak{K}^k = \mathfrak{Z}^k + \mathfrak{U}^k \tag{1}$$

und $\mathfrak{U}^k$ selbst Grundmodul. Die Ketten aus $\mathfrak{U}^k$ außer der Nullkette sind alle nicht geschlossen.

Der Zyklenmodul $\mathfrak{Z}^k$ enthält als Untermodul den Modul $\mathfrak{D}^k$ der Divisionsränder. $\mathfrak{D}^k$ ist ebenfalls Grundmodul, also direkter Summand in $\mathfrak{R}^k$

$$\mathfrak{R}^k = \mathfrak{D}^k + \mathfrak{D}'$$

und daher

$$\mathfrak{Z}^k = \mathfrak{R}^k \cap \mathfrak{Z}^k = (\mathfrak{D}^k + \mathfrak{D}') \cap \mathfrak{Z}^k.$$

Nun gehört aber ein Element aus $\mathfrak{D}^k + \mathfrak{D}'$ dann und nur dann zu $\mathfrak{Z}^k$, wenn seine $\mathfrak{D}'$-Komponente zu $\mathfrak{Z}^k$ gehört. Bezeichnen wir daher den Modul $\mathfrak{D}' \cap \mathfrak{Z}^k$ mit $\mathfrak{B}^k$, so gilt

$$\mathfrak{Z}^k = \mathfrak{D}^k + \mathfrak{B}^k, \tag{2}$$

wo die Summe wieder direkt ist. $\mathfrak{B}^k$ ist als Durchschnitt zweier Grundmoduln selbst Grundmodul.

Der Modul $\mathfrak{R}^k$ der Ränder ist zwar Untermodul von $\mathfrak{D}^k$, aber im allgemeinen kein Grundmodul. Daher kann man $\mathfrak{D}^k$ nicht mehr entsprechend direkt zerlegen; denn jeder direkte Summand eines Grundmoduls ist selbst Grundmodul.

Für die Homologiegruppe $\mathfrak{Z}^k/\mathfrak{R}^k$ bedeutet die Zerlegung (2)

$$\mathfrak{Z}^k/\mathfrak{R}^k = \mathfrak{D}^k/\mathfrak{R}^k + \mathfrak{B}'^k, \tag{3}$$

wobei

$$\mathfrak{B}'^k \cong \mathfrak{B}^k$$

ist, die direkte Summenzerlegung in Torsionsgruppe und Bettimodul.

In jedem der drei Moduln $\mathfrak{U}$, $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{D}$ (der Einfachheit halber lassen wir den Dimensionsindex weg) wählen wir nun eine Steinitzsche Normalbasis (Steinitz [1], S. 350), etwa die Ketten $\mathfrak{x}_1, \ldots, \mathfrak{x}_l, \mathfrak{x}_l'$ aus $\mathfrak{U}$ (l = Rang von $\mathfrak{U}$), $\mathfrak{x}_{l+1}, \ldots, \mathfrak{x}_{l+m}, \mathfrak{x}_{l+m}'$ aus $\mathfrak{B}$ (m = Rang von $\mathfrak{B}$) und $\mathfrak{x}_{l+m+1}, \ldots, \mathfrak{x}_{a_k}, \mathfrak{x}_{a_k}'$ aus $\mathfrak{D}$. Dann bilden die Koeffizienten dieser Ketten eine Matrix von $\alpha_k + 3$ Zeilen und α_k Spalten. Da die Moduln Grundmoduln sind, sind die größten gemeinsamen Teiler der Elemente einer Zeile (1), außer für die Zeilen $\mathfrak{x}_l$, $\mathfrak{x}_l'$, $\mathfrak{x}_{l+m}$, $\mathfrak{x}_{l+m}'$, $\mathfrak{x}_{a_k}$ und $\mathfrak{x}_{a_k}'$. $\mathfrak{x}_l$ besitze den größten Teiler $\mathfrak{q}_l$. Dann ist $\mathfrak{q}_l$ gleichzeitig der höchste Determinantenteiler der Zeilen $\mathfrak{x}_1, \ldots, \mathfrak{x}_l$. $\mathfrak{x}_l'$ ist zu $\mathfrak{x}_l$ proportional und sein größter Teiler $\mathfrak{q}_l'$ zu $\mathfrak{q}_l$ teilerfremd. Die Idealklasse von $\mathfrak{q}_l^{-1}$ bzw. $\mathfrak{q}_l'^{-1}$ ist die Klasse des Moduls $\mathfrak{U}$. Entsprechendes gilt für die Zeilen der beiden anderen Moduln.

Zur Vereinfachung wollen wir aus jeder der drei Normalbasen die letzte Zeile weglassen und die so verkürzte Normalbasis als Quasibasis bezeichnen. Dann erhält man aus den Koeffizienten der drei Quasibasen eine quadratische Matrix X. Die auftretenden Zeilenfaktoren $\mathfrak{q}_l$, $\mathfrak{q}_{l+m}$, $\mathfrak{q}_{a_k}$ sind nun im allgemeinen natürlich keine Hauptideale, falls nämlich nicht alle drei Moduln der Hauptklasse angehören. Die darin liegende Schwierigkeit kann man am einfachsten durch Einführung eines Systems idealer Zahlen über K (vgl. Hecke, Theorie der algebraischen Zahlen, S. 122) überwinden.

Sei also Ω ein Zahlkörper endlichen Grades über K, in dem jedes Ideal aus K Hauptideal wird. Wir müssen dann für den Augenblick Ketten $\mathfrak{y}^k$ mit ganz-algebraischen Koeffizienten aus Ω zulassen

$$\mathfrak{y}^k = \sum_{i=1}^{a_k} \omega_i \mathfrak{a}_i^k, \tag{4}$$

wobei ω_i ganz-algebraisch aus Ω ist. Ihre Berandungsrelationen werden durch die üblichen Forderungen

$$(\mathfrak{y}_1^k + \mathfrak{y}_2^k)\cdot = \dot{\mathfrak{y}}_1^k + \dot{\mathfrak{y}}_2^k \text{ und } (\omega \mathfrak{y}^k)\cdot = \omega \dot{\mathfrak{y}}^k \tag{5}$$

auf die der $\mathfrak{a}_i^k$ zurückgeführt. Für diese Zellen verwenden wir ihren alten Rand, der durch den Homomorphismus φ aus dem Homotopierand entstanden ist. Die dabei auftretenden Koeffizienten aus $\mathfrak{X}$ sind ja auch Zahlen aus Ω. Analog definieren wir die Ketten $\tilde{\mathfrak{y}}^k = \sum_j \omega_j \tilde{\mathfrak{a}}_j^k$. Ebenso erklären wir Schnittzahlen zwischen den $\mathfrak{y}^k$ und $\tilde{\mathfrak{y}}^{n-k}$ durch die Regeln

$$S(\sum_i \mathfrak{y}_i^k, \sum_j \tilde{\mathfrak{y}}_j^{n-k}) = \sum_{i,j} S(\mathfrak{y}_i^k, \tilde{\mathfrak{y}}_j^{n-k}) \tag{6a}$$

und

$$S(\omega_1 \mathfrak{y}^k, \omega_2 \tilde{\mathfrak{y}}^{n-k}) = \omega_1 S(\mathfrak{y}^k, \tilde{\mathfrak{y}}^{n-k}) \bar{\omega}_2 \tag{6b}$$

und die Forderung, für die $S(\mathfrak{a}_i^k, \tilde{\mathfrak{a}}_j^{n-k})$ die alten Schnittzahlen zu verwenden. ω bedeutet dabei die konjugiert-komplexe Zahl zu ω. Ersichtlich kommen dann die Ketten $\mathfrak{x}_k$ unter den $\mathfrak{y}_k$ vor, und alle Eigenschaften, die sie bezüglich Berandung und Schnitt als $\mathfrak{y}$-Ketten besitzen, kommen ihnen auch als $\mathfrak{x}$-Ketten zu.

Der Modul $\mathfrak{R}_\Omega^k$ aller k-dimensionalen Ketten $\mathfrak{y}^k$ läßt sich entsprechend wie $\mathfrak{R}^k$ selbst zerlegen in eine direkte Summe

$$\mathfrak{R}_\Omega^k = \mathfrak{D}_\Omega^k + \mathfrak{B}_\Omega^k + \mathfrak{U}_\Omega^k. \tag{7}$$

Dabei wird man wegen der Unabhängigkeit linearer Beziehungen gegenüber Körpererweiterung erwarten, daß z. B. $\mathfrak{D}_\Omega$ einfach der von $\mathfrak{D}$ über der Hauptordnung von Ω erzeugte Modul ist. Das ist tatsächlich richtig; denn zunächst ist offenbar $\mathfrak{D}$ in $\mathfrak{D}_\Omega$ enthalten. Ferner erzeugt $\mathfrak{D}$ über der Hauptordnung von Ω einen Grundmodul vom gleichen Rang wie $\mathfrak{D}$. Die Grundmoduleigenschaft kann ja durch Elementarteiler charakterisiert werden. Andrerseits ist $\mathfrak{D}_\Omega$ ebenfalls Grundmodul vom gleichen Rang wie $\mathfrak{D}$, da ja sein Rang schon durch die Berandungsmatrix der Zellen $\mathfrak{a}_i^{k+1}$ bestimmt ist. Dann muß aber $\mathfrak{D}_\Omega$ mit dem von $\mathfrak{D}$ über Ω erzeugten Modul identisch sein. Dasselbe gilt auch für $\mathfrak{B}_\Omega$ und $\mathfrak{U}_\Omega$.

Daher gehört der Modul $\mathfrak{D}_\Omega$ der Hauptklasse an, und man erhält als eine linear unabhängige Basis für ihn die Ketten $\mathfrak{x}_{l+m+1}, \ldots, \mathfrak{x}_{a_k-1}, \frac{1}{q_{a_k}} \cdot \mathfrak{x}_{a_k}$. q_{a_k} ist ja Hauptideal in Ω und kann daher in Ω

herausgekürzt werden. Wir bezeichnen dabei der Kürze halber eine das Hauptideal $\mathfrak{q}_{a_k}$ in $\mathfrak{Q}$ darstellende Zahl selbst mit $\mathfrak{q}_{a_k}$, da es auf die Auswahl unter assoziierten nicht ankommt. Dasselbe gilt auch für die $\mathfrak{B}_\Omega$ und $\mathfrak{U}_\Omega$.

Die Ketten $\mathfrak{x}_1, \ldots, \mathfrak{x}_{l-1}, \frac{1}{\mathfrak{q}_l} \cdot \mathfrak{x}_l, \mathfrak{x}_{l+1}, \ldots, \mathfrak{x}_{l+m-1}, \frac{1}{\mathfrak{q}_{l+m}} \cdot \mathfrak{x}_{l+m}, \mathfrak{x}_{l+m+1}, \ldots, \mathfrak{x}_{a_k-1}, \frac{1}{\mathfrak{q}_{a_k}} \cdot \mathfrak{x}_{a_k}$ bilden also eine linear unabhängige Basis von $\mathfrak{K}_\Omega$ und ihre Koeffizientenmatrix X_1 entsteht aus X, indem man aus der l-ten, $(l+m)$-ten und letzten Zeile die größten Faktoren $\mathfrak{q}_l$, $\mathfrak{q}_{l+m}$ und $\mathfrak{q}_{a_k}$ heraushebt. X_1 ist als Matrix einer linear unabhängigen Basis von $\mathfrak{K}_\Omega$ unimodular.

Genau wie im ganzrationalen Fall gibt es nun zu jeder linear unabhängigen Basis von $\mathfrak{K}_\Omega^k$ eine eindeutig bestimmte duale Basis der Ketten $\mathfrak{y}^{n-k}$ von $\tilde{\mathfrak{K}}_\Omega^{n-k}$, so daß die Schnittmatrix für die beiden Basen die Einheitsmatrix ist. Die duale Basis hat bezüglich der dualen Zellen $\tilde{\mathfrak{a}}_j^{n-k}$ die zu X_1 kontragredient-konjugierte Koeffizientenmatrix $\overline{X}_1'^{-1}$. Ihre l ersten Ketten bilden eine linear unabhängige Basis von $\tilde{\mathfrak{D}}_\Omega^{n-k}$, die nächsten m Ketten eine linear unabhängige Basis von $\tilde{\mathfrak{B}}_\Omega^{n-k}$ und die letzten Ketten eine solche von $\tilde{\mathfrak{U}}_\Omega^{n-k}$.

Vergleichen wir nun X_1^{-1} und X^{-1}. Der Übergang von X zu X_1 geschah durch Division der l-ten, $(l+m)$-ten und letzten Zeile durch $\mathfrak{q}_l$, $\mathfrak{q}_{l+m}$, $\mathfrak{q}_{a_k}$. Die Unterdeterminanten der Elemente einer Zeile, die von diesen drei Zeilen verschieden ist, nehmen daher den Faktor $\frac{1}{\mathfrak{q}_l} \cdot \frac{1}{\mathfrak{q}_{l+m}} \cdot \frac{1}{\mathfrak{q}_{a_k}}$ auf, ebenso aber auch die Gesamtdeterminante, so daß die betreffenden Spalten der Matrizen X_1^{-1} und X^{-1} übereinstimmen. Für die Elemente der l-ten Zeile nehmen die Unterdeterminanten nur den Faktor $\frac{1}{\mathfrak{q}_{l+m}} \cdot \frac{1}{\mathfrak{q}_{a_k}}$ auf, so daß die l-te, $(l+m)$-te und letzte Spalte von X_1^{-1} aus der entsprechenden Spalte von X^{-1} durch Multiplikation mit $\mathfrak{q}_l$, $\mathfrak{q}_{l+m}$, $\mathfrak{q}_{a_k}$ hervorgeht. Daher sind in $\overline{X}_1'^{-1}$ alle Zeilen außer der l-ten, $(l+m)$-ten und letzten ganzzahlig aus dem Körper K. Die l-te Zeile von $\overline{X}_1'^{-1}$ entsteht zwar aus der l-ten Zeile von $\overline{X}'^{-1}$ durch Multiplikation mit $\bar{\mathfrak{q}}_l$, aber in $\overline{X}'^{-1}$ war die l-te Zeile nicht ganzzahlig, so daß die l-te Zeile in $\overline{X}_1'^{-1}$ keineswegs den Faktor $\bar{\mathfrak{q}}_l$ besitzt, vielmehr sind ihre Elemente teilerfremd; denn $\overline{X}_1'^{-1}$ ist ja wie X_1 unimodular. Dasselbe gilt für die $(l+m)$-te und letzte Zeile von $\overline{X}_1'^{-1}$.

Wir betrachten insbesondere den Bettimodul $\mathfrak{B}^k$ und den dualen $\tilde{\mathfrak{B}}^{n-k}$. Für $\tilde{\mathfrak{B}}_\Omega^{n-k}$ besitzen wir eine linear unabhängige Basis, die mit der oben konstruierten Basis von $\mathfrak{B}_\Omega^k$ die Einheitsmatrix als Schnittmatrix hat. Die Basis von $\mathfrak{B}_\Omega^k$ entstand dabei aus einer Quasibasis von $\mathfrak{B}^k$ durch Herausheben des größten Idealfaktors der letzten Kette.

Wir müssen nun zusehen, ob dasselbe auch für die duale Basis von $\tilde{\mathfrak{B}}_{\Omega}^{n-k}$ zutrifft. Ihre Ketten sind ja schon bis auf die letzte als ganzzahlige Ketten aus K erkannt. Sei die letzte etwa $\sum_{1}^{a_k} \omega_j \tilde{\mathfrak{a}}_j^{n-k}$ mit ganz-algebraischen ω_j aus Ω, so ist, wie wir oben sahen, $(\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_{a_k}) = 1$. Ferner entsteht die Zeile $\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_{a_k}$ aus einer Zeile mit (gebrochenen) Koeffizienten aus K durch Multiplikation mit $\bar{\mathfrak{q}}$. Also ist die Zeile $\left(\frac{\omega_1}{\bar{\mathfrak{q}}}, \frac{\omega_2}{\bar{\mathfrak{q}}}, \ldots, \frac{\omega_{a_k}}{\bar{\mathfrak{q}}}\right)$ aus K. Sei nun $\mathfrak{f}$ irgendein ganzes Ideal aus der reziproken Klasse von $\mathfrak{q}$, also $\mathfrak{q}\mathfrak{f} \sim 1$ und damit auch $\bar{\mathfrak{q}}\bar{\mathfrak{f}} \sim 1$, so kann man diese letzte Zeile als $\frac{1}{\bar{\mathfrak{q}}\bar{\mathfrak{f}}}(\omega_1\bar{\mathfrak{f}}, \omega_2\bar{\mathfrak{f}}, \ldots, \omega_{a_k}\bar{\mathfrak{f}})$ schreiben. Die Zeile $(\omega_1\bar{\mathfrak{f}}, \ldots, \omega_{a_k}\bar{\mathfrak{f}})$ ist nun einerseits ganz, andrerseits aus K. Ihr größter Teiler ist $\bar{\mathfrak{f}}$, und durch Herausheben dieses größten Teilers entsteht tatsächlich gerade $(\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_{a_k})$.

Es bleibt noch zu zeigen, daß die ganzzahligen ersten Ketten aus K mit der letzten Kette $(\omega_1\bar{\mathfrak{f}}, \omega_2\bar{\mathfrak{f}}, \ldots, \omega_{a_k}\bar{\mathfrak{f}})$ zusammen wirklich eine Quasibasis von $\tilde{\mathfrak{B}}^{n-k}$ bilden. Dies ist aber sofort klar; denn in Ω war der höchste Determinantenteiler der aus den ersten ganzzahligen Zeilen und $(\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_{a_k})$ gebildeten Matrix gleich 1, da sie ja eine Basis des Grundmoduls $\tilde{\mathfrak{B}}_{\Omega}^{n-k}$ bildeten. Also ist der höchste Determinantenteiler der in Frage stehenden Ketten gleich $\bar{\mathfrak{f}}$, d. h. gleich dem größten Faktor der letzten Kette. Das aber charakterisiert gerade (zusammen mit dem richtigen Rang) die Quasibasen eines Grundmoduls. In der Tat kann man sie sofort zu einer Steinitzschen Normalbasis des Grundmoduls $\tilde{\mathfrak{B}}^{n-k}$ ergänzen. Man braucht nur irgendeine zur letzten Kette proportionale Kette mit dem größten Faktor $\bar{\mathfrak{f}}' \sim \bar{\mathfrak{f}}$ mit $(\bar{\mathfrak{f}}', \bar{\mathfrak{f}}) = 1$ hinzuzufügen.

Für die Schnittzahl zwischen den beiden letzten Ketten der Quasibasen $\mathfrak{B}^k$ und $\tilde{\mathfrak{B}}^{n-k}$ erhält man offenbar $\mathfrak{q}\mathfrak{f}$, denn durch Multiplikation der ersten Kette mit $\frac{1}{\mathfrak{q}}$ und der zweiten mit $\frac{1}{\bar{\mathfrak{f}}}$ erhält man Ketten in Ω mit der Schnittzahl 1.

Ergänzt man die Quasibasen von $\mathfrak{B}^k$ und $\tilde{\mathfrak{B}}^{n-k}$ noch jeweils zu einer Steinitzschen Normalbasis, indem man je eine weitere zu den entsprechenden letzten Ketten proportionale Kette hinzunimmt, deren größte Faktoren $\mathfrak{q}'$ bzw. $\bar{\mathfrak{f}}'$ seien, mit

$$\begin{aligned} &\mathfrak{q} \sim \mathfrak{q}'; \quad (\mathfrak{q}, \mathfrak{q}') = 1 \\ &\mathfrak{f} \sim \mathfrak{f}'; \quad (\mathfrak{f}, \mathfrak{f}') = 1, \end{aligned} \tag{8}$$

so erhält man den

Satz 7. *Zu jeder Steinitzschen Normalbasis von $\mathfrak{B}^k$ gibt es eine Steinitzsche Normalbasis des dualen Bettimoduls $\tilde{\mathfrak{B}}^{n-k}$, für die die*

Schnittmatrix die Gestalt

$$(9) \qquad \begin{pmatrix} 1 & & \\ & \ddots & \\ & & 1 \\ & & \boxed{\begin{matrix} \mathfrak{q}\mathfrak{f} & \mathfrak{q}\mathfrak{f}' \\ \mathfrak{q}'\mathfrak{f} & \mathfrak{q}'\mathfrak{f}' \end{matrix}} \end{pmatrix}$$

hat. $\mathfrak{q}, \mathfrak{q}'$ *sind die größten Faktoren der letzten Ketten der Normalbasis von* $\mathfrak{B}^k$, $\mathfrak{f}, \mathfrak{f}'$ *sind innerhalb der Bedingungen* $\mathfrak{f} \sim \mathfrak{f}' \sim \mathfrak{q}^{-1}$ *und* $(\mathfrak{f}, \mathfrak{f}') = 1$ *willkürlich vorschreibbar.* $\bar{\mathfrak{f}}, \bar{\mathfrak{f}}'$ *sind dann die größten Faktoren der letzten Ketten der Normalbasis von* $\bar{\mathfrak{B}}^{n-k}$.

Entsprechende Normalformen lassen sich natürlich auch für die Schnittmatrizen von $\mathfrak{U}^k$ mit $\bar{\mathfrak{D}}^{n-k}$ und von $\mathfrak{D}^k$ mit $\bar{\mathfrak{U}}^{n-k}$ angeben.

Wir wollen zunächst aus dem Satz 7 nur eine einzige Folgerung ziehen, von der wir dann im nächsten Paragraphen sehen werden, daß sie umgekehrt die ganze oben entwickelte Theorie umfaßt, nämlich

Satz 8. *Sei* $\mathfrak{S}$ *die Schnittmatrix irgendeines Erzeugendensystems von* $\mathfrak{B}^k$ *mit irgendeinem Erzeugendensystem von* $\bar{\mathfrak{B}}^{n-k}$, *so ist der Zeilenmodul von* $\mathfrak{S}$ *Grundmodul.*

Beweis. Für die in Satz 7 auftretenden Basen ist der Satz 8 klar; denn man erkennt unmittelbar, daß die Elementarteiler der Matrix (9) alle gleich (1) sind. Die Elemente irgendeines Erzeugendensystems von $\mathfrak{B}^k$ aber können linear mit ganz-algebraischen Koeffizienten durch die Elemente der Normalbasis von Satz 7 ausgedrückt werden, ebenso wie umgekehrt diese durch jene. Dasselbe gilt für die Elemente von $\bar{\mathfrak{B}}^{n-k}$. Wegen der Linearität der Schnittzahlen sind dann alle Schnittmatrizen bezüglich irgendwelcher Erzeugendensysteme von $\mathfrak{B}^k$ und $\bar{\mathfrak{B}}^{n-k}$ wechselseitig teilbar, d. h. es bestehen zwischen den entsprechenden Schnittmatrizen $\mathfrak{S}$ und $\mathfrak{T}$ Relationen

$$\mathfrak{T} = P\mathfrak{S}Q \text{ und } \mathfrak{S} = R\mathfrak{T}S$$

mit ganzzahligen Matrizen P, Q, R, S aus $\mathfrak{X}$. Dann sind aber die Elementarteiler der Matrizen $\mathfrak{S}$ und $\mathfrak{T}$ gleich, und damit ist Satz 8 allgemein bewiesen.

Etwas anschaulicher läßt sich der Inhalt von Satz 8 fassen, wenn man für den Augenblick auch Ketten mit beliebigen gebrochenen Koeffizienten aus K zuläßt und für sie — ähnlich wie oben für die Ketten mit ganz-algebraischen Koeffizienten aus Ω — Berandung und Schnitt erklärt durch analoge Gleichungen wie (5) und (6). Dann ist nämlich Satz 8 äquivalent mit

Satz 9. *Sind die sämtlichen Schnittzahlen zwischen der Kette* $\mathfrak{y}^k$ *mit beliebigen Koeffizienten aus K und den ganzzahligen Ketten* $\bar{\mathfrak{x}}^{n-k}$ *ganz, so ist* $\mathfrak{y}^k$ *selbst ganzzahlige Kette.*

Beweis. $\mathfrak{y}^k$ ist eine Linearkombination der Basisketten mit eventuell gebrochenen Koeffizienten aus K. Die entsprechende Linearkombination der Zeilen der Schnittmatrix liefert dann die Schnittzahlen von $\mathfrak{y}^k$ mit einem Erzeugendensystem der Ketten $\mathfrak{x}^{n-k}$. Sind diese Schnittzahlen alle ganz, so ist diese Zeile wegen der Grundmoduleigenschaft der Schnittmatrix mit ganz-algebraischen Koeffizienten aus den Zeilen der Schnittmatrix kombinierbar. Es gibt daher eine ganzzahlige Kette $\mathfrak{y}^{k'}$, die die gleichen Schnittzahlen wie $\mathfrak{y}^k$ hat. Dann müssen aber beide identisch sein; denn ihre Differenz hat lauter Schnittzahlen Null, und man sieht an der Normalform (9) sofort, daß es keine Kette $\neq 0$ gibt, für die alle Schnittzahlen verschwinden.

Gilt umgekehrt Satz 9, so enthält jede Linearkombination der Zeilen von $\mathfrak{S}$ mit eventuell gebrochenen Koeffizienten aus K, die selbst ganz ist, Schnittzahlen einer ganzzahligen Kette $\mathfrak{y}^k$. Diese läßt sich ganzzahlig durch die Elemente der Basis ausdrücken, und daher läßt sich die entsprechende Schnittzahlenzeile ebenfalls ganzzahlig aus den Zeilen von $\mathfrak{S}$ kombinieren, ist also im Zeilenmodul enthalten. Also ist der Zeilenmodul von $\mathfrak{S}$ Grundmodul.

Bisher haben wir nun immer die Elemente von $\mathfrak{B}$ und $\tilde{\mathfrak{B}}$ als Linearformen in den $\mathfrak{a}_i^k$ angesehen. Wir können aber den Satz 8 auch so formulieren, daß jede Bezugnahme auf eine spezielle Darstellung der Elemente von $\mathfrak{B}$ vermieden wird, vielmehr diese Elemente nur als Elemente einer abstrakten Operatorgruppe vom Modultypus auftreten.

Da kein Element $\neq 0$ von $\mathfrak{B}$ von endlicher Ordnung ist, gibt es für ein bestimmtes Element $b \neq 0$ aus $\mathfrak{B}$ und eine bestimmte ganz-algebraische Zahl $x \neq o$ höchstens ein Element b_1 aus $\mathfrak{B}$, für das $b = x b_1$ ist. Man kann daher $b_1 = \frac{1}{x} \cdot b$ setzen. Betrachtet man nun für ein festes Element $b \neq 0$ aus $\mathfrak{B}$ alle ganzen und gebrochenen Zahlen $\nu = x_1/x_2$ (x_i ganz), für die $\nu . b$ existiert, d. h. für die es ein Element b_1 aus $\mathfrak{B}$ gibt, so daß $x_1 b = x_2 b_1$ ist. Die Gesamtheit der Zahlen ν mit dieser Eigenschaft bilden ein gebrochenes Ideal $\mathfrak{n}$, das wir den „Nenner" des Elements b nennen. Der Zusammenhang dieses Nenners mit unseren obigen Überlegungen beruht nun auf folgender Tatsache:

Hat man die abstrakte Operatorgruppe $\mathfrak{B}$ vom Modultypus irgendwie als Linearformenmodul dargestellt (mit Darstellung ist hier immer eine treue Darstellung gemeint) und ist dieser Linearformenmodul Grundmodul (eine solche Darstellung des Modultypus $\mathfrak{B}$ gibt es immer (vgl. Steinitz [2], S. 386)), so sei $\mathfrak{t}$ der größte gemeinsame Teiler der Koeffizienten des Elements b. Dann ist $\mathfrak{n} = 1/\mathfrak{t}$.

Beweis. Ist ν aus $\mathfrak{n}$, dann gibt es nach Definition ein Element b_1 aus $\mathfrak{B}$ mit $\nu b = b_1$. Daher ist das Produkt νt von ν mit irgendeinem Koeffizienten t von b ganz, also $\nu \mathfrak{t}$ ganz, d. h. ν gehört zu $1/\mathfrak{t}$, wenn man noch beachtet, daß $\mathfrak{t} = (o)$ nur für $b = 0$ eintritt.

Ist umgekehrt ν eine Zahl aus dem Ideal 1/t, so ist insbesondere νt ganz für alle Koeffizienten t von b; dann ist die Linearform mit den Koeffizienten νt ganzzahlig und der Linearform von b proportional. Da aber der Linearformenmodul als Grundmodul vorausgesetzt war, gehört diese Linearform ebenfalls zu ihm, und für das entsprechende Element b_1 von $\mathfrak{B}$ gilt dann offenbar $b_1 = \nu b$, d. h. die Zahl ν gehört zum Nenner $\mathfrak{n}$ von b.

Nun haben wir oben gesehen, daß kein Element $b \neq 0$ von $\mathfrak{B}$ mit allen Elementen eines Erzeugendensystems von $\tilde{\mathfrak{B}}$ die Schnittzahlen Null haben kann. Ordnet man daher jedem Element von $\mathfrak{B}$ den Zeilenvektor zu, der aus den Schnittzahlen von b mit den Elementen eines Erzeugendensystems von $\tilde{\mathfrak{B}}$ besteht, so ist dies eine treue Darstellung und zwar nach Satz 8 eine Grundmoduldarstellung von $\mathfrak{B}$. Das Ideal $\mathfrak{t}$ besteht dann genau aus allen Schnittzahlen des festen Elements b mit allen Elementen von $\tilde{\mathfrak{B}}$. Daher haben wir den

Satz 10. *Ist t irgendeine Zahl aus dem reziproken Nenner $1/\mathfrak{n}$ des Gruppenelements b, so gibt es ein Gruppenelement $\tilde{b}$ aus $\tilde{\mathfrak{B}}$, so daß*

$$S(b, \tilde{b}) = t \tag{10}$$

ist.

Das ist aber genau das Analogon zum Axiom $S\,2$, wie es im § 1 umgeformt wurde. Und es bleibt jetzt zu zeigen, daß darin tatsächlich die ganze oben entwickelte Theorie enthalten ist.

§ 4.

Gruppen mit Schnittrelation.

Es seien $\mathfrak{G}$ und $\mathfrak{H}$ zwei Abelsche Operatorgruppen über der Hauptordnung $\mathfrak{X}$ des Kreiskörpers K mit je endlich vielen Erzeugenden. Zwischen $\mathfrak{G}$ und $\mathfrak{H}$ sei eine Schnittrelation erklärt, d. h. jedem Elementepaar g aus $\mathfrak{G}$ und h aus $\mathfrak{H}$ sei als Schnittzahl $S(g, h)$ eine Zahl aus $\mathfrak{X}$ zugeordnet. Diese Schnittrelation genüge den folgenden Axiomen:

Axiom $S\,1$. Für alle g aus $\mathfrak{G}$ und h aus $\mathfrak{H}$ sei

$$S(g_1 + g_2, h) = S(g_1, h) + S(g_2, h) \tag{1a}$$

und ebenso

$$S(g, h_1 + h_2) = S(g, h_1) + S(g, h_2) \tag{1b}$$

und für alle ganz-algebraischen x aus K sei

$$S(x_1 g, x_2 h) = x_1 S(g, h) \bar{x}_2,$$

wobei $\bar{x}$ die konjugiert-komplexe Zahl zu x ist.

Axiom $S\,2'$. Zu jedem $g \neq 0$ aus $\mathfrak{G}$ gibt es ein h aus $\mathfrak{H}$ mit

$$S(g, h) \neq o$$

und ebenso zu jedem $h \neq 0$ aus $\mathfrak{H}$ ein g aus $\mathfrak{G}$ mit der gleichen Eigenschaft.

Dann folgt sofort der

Satz 11. *Alle Elemente* $\neq 0$ *von* $\mathfrak{G}$ *und* $\mathfrak{H}$ *haben die Ordnung* (o).

Beweis. Ist $g \neq 0$, so gibt es nach Axiom $S\,2'$ ein h aus $\mathfrak{H}$ mit $S(g, h) \neq o$, und daher folgt aus $xg = 0$ über $S(xg, h) = S(0, h) = o = xS(g, h)$ sofort $x = o$.

$\mathfrak{G}$ und $\mathfrak{H}$ sind also Operatorgruppen vom Modultypus. Daher können wir wie oben zu Ende des vorigen Paragraphen für jedes Element $g \neq 0$ aus $\mathfrak{G}$ den Nenner $\mathfrak{n}$ definieren als das Ideal aller ganzen und gebrochenen Zahlen ν, für die νg existiert. $\mathfrak{n}$ enthält immer die Zahl 1 und ist daher das reziproke eines ganzen Ideals. Wir können nun wieder das Axiom $S\,2'$ verschärfen zum

Axiom $S\,2$. Ist t irgendeine Zahl aus dem reziproken Nenner $1/\mathfrak{n}$ von g, so gibt es ein h aus $\mathfrak{H}$ mit

$$S(g, h) = t$$

und entsprechend für jedes Element h aus $\mathfrak{H}$.

Nun kommt es offenbar zunächst darauf an, den Gedankengang zu Ende des vorigen Paragraphen umzukehren, also von Satz 10 nach Satz 8 zurückzugelangen. Das geht aber sofort, wenn man bemerkt, daß im ersten Teil des Beweises der Tatsache $\mathfrak{n} = 1/\mathfrak{t}$ die Grundmoduleigenschaft der Schnittmatrix gar nicht benutzt wurde. Hier können wir daher etwa folgendermaßen schließen:

Sei g ein festes Element $\neq 0$ aus $\mathfrak{G}$, dann bilden die Schnittzahlen von g mit allen Elementen h aus $\mathfrak{H}$ ein ganzes Ideal $\mathfrak{t}$, das z. B. erzeugt wird durch die Schnittzahlen von g mit einem Erzeugendensystem von $\mathfrak{H}$. Betrachten wir irgendeine Zahl aus dem Ideal $\mathfrak{t}$, etwa $S(g, h)$. Ist dann $\nu = x_1/x_2$ mit ganz-algebraischen x_1, x_2 eine Zahl aus dem Nenner $\mathfrak{n}$ von g, so gibt es nach Definition von $\mathfrak{n}$ ein Element g' aus $\mathfrak{G}$ mit $x_1 g = x_2 g'$. Dann ist aber $S(x_1 g, h) = x_1 S(g, h) = S(x_2 g', h) = x_2 S(g', h)$, also $(x_1/x_2)\, S(g, h)$ ganz-algebraisch. Es ist also $S(g, h) \cdot \mathfrak{n}$ ganz, d. h. $\mathfrak{t}$ gehört zu $1/\mathfrak{n}$. Andererseits besagt das Axiom $S\,2$ gerade, daß $1/\mathfrak{n}$ zu $\mathfrak{t}$ gehört. Daher haben wir den

Satz 12. *Das Ideal* $\mathfrak{t}$ *der Schnittzahlen eines festen Elements* $g \neq 0$ *aus* $\mathfrak{G}$ *mit allen Elementen* h *aus* $\mathfrak{H}$ *ist der reziproke Nenner* $1/\mathfrak{n}$ *von* g. *Entsprechendes gilt für jedes Element* $h \neq 0$ *aus* $\mathfrak{H}$.

Sei nun $\mathfrak{S}$ die Schnittmatrix irgendeines Erzeugendensystemes $g_1, \ldots, g_n$ von $\mathfrak{G}$ mit einem Erzeugendensystem $h_1, \ldots, h_m$ von $\mathfrak{H}$. Dann liefert offenbar der Zeilenmodul von $\mathfrak{S}$ nach (1) und (2) eine Darstellung von $\mathfrak{G}$, die nach Axiom $S\,2'$ treu ist. Man bemerkt nun noch, daß zum Beweis der Tatsache $\mathfrak{n} = 1/\mathfrak{t}$ im vorigen Paragraphen

die Grundmoduleigenschaft des Linearformenmoduls nicht nur hinreichend, sondern auch notwendig ist. Wir können dies hier etwa so darstellen: Es entspreche dem Element $g \neq 0$ aus $\mathfrak{G}$ im Zeilenmodul von $\mathfrak{S}$ die Zeile $(t_1, \ldots, t_m)$. Sei $\nu \,.\, (t_1, \ldots, t_m) = (b_1, \ldots, b_m)$ eine proportionale ganzzahlige Zeile mit eventuell gebrochenem ν, so gehört offenbar ν zum reziproken Ideal $1/\mathfrak{t}$, also zu $\mathfrak{n}$. Es gibt daher ein g' aus $\mathfrak{G}$ mit $g' = \nu \,.\, g$. Für dessen Schnittzahlen aber gilt dann $S(g', h_i) = \nu \,.\, t_i = b_i$. Die Zeile $(b_1, \ldots, b_m)$ ist also eine Schnittzahlenzeile und gehört daher zum Zeilenmodul von $\mathfrak{S}$. Dieser Zeilenmodul ist also Grundmodul. Damit haben wir tatsächlich den Satz 8 wieder erreicht, den wir nochmals formulieren als

Satz 13. *Für jedes Gruppenpaar mit Schnittrelation sind die Elementarteiler der Schnittmatrix bezüglich irgendwelcher Erzeugendensysteme von* $\mathfrak{G}$ *und* $\mathfrak{H}$ *sämtlich gleich 1.*

Wir haben gesehen, daß der Zeilenmodul von $\mathfrak{S}$ eine Darstellung von $\mathfrak{G}$ als Linearformenmodul ist; daher ist der Rang von $\mathfrak{S}$ gleich dem von $\mathfrak{G}$ und die Spaltenklasse von $\mathfrak{S}$ gleich der Klasse von $\mathfrak{G}$ (Steinitz [2], S. 336). Damit und durch Satz 13 sind aber sämtliche Invarianten von $\mathfrak{S}$ (im Sinne von Steinitz [1], S. 352) durch die Struktur von $\mathfrak{G}$ bestimmt. Es folgt der

Satz 14. *Die Schnittmatrizen* $\mathfrak{S}$ *bezüglich irgendwelcher Erzeugendensysteme von* $\mathfrak{G}$ *und* $\mathfrak{H}$ *sind wechselseitig teilbar.*

Natürlich hätten wir diesen Satz auch hier genau so wie im vorigen Paragraphen beweisen können.

Ebenso wie durch die Struktur von $\mathfrak{G}$ lassen sich die Invarianten von $\mathfrak{S}$ auch durch die von $\mathfrak{H}$ charakterisieren. Und zwar ist der Rang von $\mathfrak{S}$ gleich dem Rang von $\mathfrak{H}$ und die Zeilenklasse von $\mathfrak{S}$ gleich der zur Klasse von $\mathfrak{H}$ konjugierten Klasse. Damit ist aber auch die Struktur von $\mathfrak{H}$ eindeutig durch die von $\mathfrak{G}$ bestimmt.

Satz 15. *Die beiden Komponenten* $\mathfrak{G}$ *und* $\mathfrak{H}$ *eines Gruppenpaares mit Schnittrelation haben den gleichen Rang und konjugiert-reziproke Klassen.*

Man hat nämlich nur zu beachten, daß das Produkt der Zeilen- und Spaltenklasse von $\mathfrak{S}$ gleich der Klasse des höchsten Determinantenteilers ist. Dieser aber ist 1, da alle Elementarteiler gleich 1 sind.

Satz 15 ist das genaue Analogon zum Pontrjaginschen Dualitätssatz für gewöhnliche Abelsche Gruppen. Die eindeutige Bestimmtheit der Struktur von $\mathfrak{H}$ durch die von $\mathfrak{G}$ kommt allerdings erst durch Satz 13 zustande, welcher die Elementarteiler der Schnittmatrix festlegt. Das ist auch der eigentliche Grund dafür, daß hier statt des schwächeren Axioms $S2'$ das schärfere Axiom $S2$ verwendet werden muß im Gegensatz zum rationalen Fall. Fordert man nämlich nur das Axiom $S2'$, so ist dies mit beliebigen Elementarteilern von $\mathfrak{S}$ verträglich, und dann ist offenbar die Struktur von $\mathfrak{H}$ keineswegs durch die von $\mathfrak{G}$ allein festgelegt.

Weiter müssen wir nun nur noch feststellen, daß auch jede mit $\mathfrak{S}$ wechselseitig teilbare Matrix $\mathfrak{S}_1$ wirklich als Schnittmatrix für geeignete Erzeugendensysteme von $\mathfrak{G}$ und $\mathfrak{H}$ vorkommt. Sei also etwa

$$P\mathfrak{S}Q = \mathfrak{S}_1 \quad \text{und} \quad P_1\mathfrak{S}_1Q_1 = \mathfrak{S}. \tag{3}$$

Transformiert man das Erzeugendensystem $g_1, \ldots, g_n$ von $\mathfrak{G}$ mittels P in $g_1', \ldots, g_{n'}'$ und $h_1, \ldots, h_m$ mittels $\overline{Q}'$ in $h_1', \ldots, h_{m'}'$, so geht $\mathfrak{S}$ in $\mathfrak{S}_1$ über. Daß nun auch $g_1', \ldots, g_{n'}'$ wieder ein Erzeugendensystem von $\mathfrak{G}$ ist, sieht man am einfachsten so ein: Aus (3) folgt, daß $\mathfrak{S}$ und $P\mathfrak{S}$ wechselseitig linksteilbar sind, d. h. es gilt eine Relation $\mathfrak{S} = P_2(P\mathfrak{S})$. Transformiert man also $g_1, \ldots, g_n$ mittels P, hält aber $h_1, \ldots, h_m$ fest, so erhält man die Schnittmatrix $P\mathfrak{S}$. Transformiert man dann $g_1', \ldots, g_{n'}'$ mit P_2, so erhält man die Gruppenelemente $g_1'', \ldots, g_n''$ von $\mathfrak{G}$, deren Schnittmatrix mit den festen $h_1, \ldots, h_m$ wieder $\mathfrak{S}$ ist. Also muß nach Axiom $S2'$ $g_1'' = g_1, g_2'' = g_2, \ldots, g_n'' = g_n$ sein, d. h. aber, daß $g_1', \ldots, g_{n'}'$ ebenfalls ein Erzeugendensystem von $\mathfrak{G}$ ist. Dasselbe gilt auch für $h_1', \ldots, h_{m'}'$.

Damit erhalten wir nun sofort den Isomorphiesatz

Satz 16. *Sind* $\mathfrak{G}, \mathfrak{H}$ *und* $\mathfrak{G}', \mathfrak{H}'$ *zwei Gruppenpaare mit Schnittrelation und ist* $\mathfrak{G} \cong \mathfrak{G}'$, *so ist auch* $\mathfrak{H} \cong \mathfrak{H}'$ *und die beiden Gruppenpaare* $\mathfrak{G}, \mathfrak{H}$ *und* $\mathfrak{G}', \mathfrak{H}'$ *sind schnittreu isomorph.*

Beweis. Durch die Struktur von $\mathfrak{G}$ bzw. $\mathfrak{G}'$ sind die Invarianten der Schnittmatrizen bestimmt. Nach der letzten Bemerkung vor Satz 16 kann man dann sowohl in $\mathfrak{G}$ und $\mathfrak{H}$ als auch in $\mathfrak{G}'$ und $\mathfrak{H}'$ je ein Erzeugendensystem so wählen, daß die Schnittmatrizen für beide Gruppenpaare identisch werden. Andrerseits entsteht gerade ein Isomorphismus zwischen $\mathfrak{G}$ und $\mathfrak{G}'$, wenn man die so erhaltenen Erzeugendensysteme von $\mathfrak{G}$ und $\mathfrak{G}'$ einander zuordnet; denn die Relationen zwischen den Erzeugenden sind ja in beiden Fällen einfach die Relationen zwischen den Zeilen der Schnittmatrix. Auf dieselbe Weise entsteht ein Isomorphismus zwischen $\mathfrak{H}$ und $\mathfrak{H}'$. Beide Isomorphismen zusammen ordnen offenbar jedem Elementepaar g, h ein Paar g', h' mit derselben Schnittzahl zu.

Übrigens erkennt man, daß man für den Beweis des Satzes 16 nicht die Tatsache benötigt, daß alle Elementarteiler der Schnittmatrix gleich 1 sind, sondern nur, daß sie überhaupt festgelegt sind.

Schließlich sieht man, daß die Matrix der Normalform (9) des vorigen Paragraphen mit $\mathfrak{S}$ wechselseitig teilbar ist, als für geeignete Erzeugendensysteme von $\mathfrak{G}$ und $\mathfrak{H}$ als Schnittmatrix auftritt.

Ist wieder $\mathfrak{H}$ mit $\mathfrak{G}$ identisch, handelt es sich also um eine Gruppe mit Eigenschnittrelation, so nehmen wir zu den beiden früheren Axiomen noch das folgende hinzu.

Axiom $S3a$: Es ist für alle g aus $\mathfrak{G}$

$$S(g_1, g_2) = \overline{S(g_2, g_1)}$$

oder $S3b$: Es ist

$$S(g_1, g_2) = -\overline{S(g_2, g_1)}.$$

Es erhebt sich nun wie oben die Frage nach den verschiedenen Typen von Gruppen mit Eigenschnittrelation. Für eine schnittreue Isomorphie zweier Gruppen $\mathfrak{G}$ und $\mathfrak{G}^{(1)}$ mit Eigenschnittrelation ist notwendig und hinreichend, daß es Erzeugendensysteme $g_1, \ldots, g_n$ von $\mathfrak{G}$ und $g_1^{(1)}, \ldots, g_n^{(1)}$ von $\mathfrak{G}^{(1)}$ gibt, bezüglich deren die beiden Eigenschnittmatrizen übereinstimmen. Daß diese Bedingung auch hinreicht, folgt ähnlich wie bei Satz 16. Ordnet man nämlich in diesem Falle die g_i und $g_i^{(1)}$ einander zu, so entsteht ein Isomorphismus zwischen $\mathfrak{G}$ und $\mathfrak{G}^{(1)}$, da die Relationen zwischen den Erzeugenden einfach die Relationen zwischen den Zeilen der Schnittmatrix sind. Dieser Isomorphismus ist aber sicherlich schnittreu. Nach dem, was oben über den Übergang zu einem neuen Erzeugendensystem gesagt wurde, kommt also die Bedingung für die beiden Schnittmatrizen $\mathfrak{S}$ von $\mathfrak{G}$ und $\mathfrak{S}^{(1)}$ von $\mathfrak{G}^{(1)}$ darauf hinaus, daß $\mathfrak{S}$ und $\mathfrak{S}^{(1)}$ mit derselben ganzzahligen Matrix $\mathfrak{S}_0$ mittels ganzzahliger Matrizen gemäß

$$A\mathfrak{S}\overline{A'} = \mathfrak{S}_0; \quad B\mathfrak{S}_0\overline{B'} = \mathfrak{S}$$
$$C\mathfrak{S}^{(1)}\overline{C'} = \mathfrak{S}_0; \quad D\mathfrak{S}_0\overline{D'} = \mathfrak{S}^{(1)}$$

zusammenhängen. Das ist aber offenbar gleichbedeutend damit, daß $\mathfrak{S}$ und $\mathfrak{S}^{(1)}$ selbst in dieser Weise zusammenhängen.

Im Falle des Axioms $S3a$ ist die Matrix $\mathfrak{S}$ hermitesch. In Analogie zu der Bezeichnungsweise in der Theorie der quadratischen Formen (vgl. Hasse, Crelle 153, S. 12 und 152) können wir dann obige Bedingung so ausdrücken:

Die hermiteschen Formen $\mathfrak{S}$ und $\mathfrak{S}^{(1)}$ sind in der Hauptordnung des Körpers K gegenseitig durcheinander darstellbar.

Es handelt sich also (im Gegensatz zu der genannten Arbeit von Hasse) um gegenseitige Darstellbarkeit im Bereich der ganzen Zahlen von K. Gehören die Gruppen $\mathfrak{G}$ und $\mathfrak{G}^{(1)}$ der Hauptklasse an, so kann man sich auf linear unabhängige Erzeugendensysteme beschränken. Die Transformationsmatrizen A, C sind dann unimodular, und das Darstellungsproblem reduziert sich auf das Äquivalenzproblem der hermiteschen Formen $\mathfrak{S}$ und $\mathfrak{S}^{(1)}$ in der Hauptordnung von K. Läßt man auch noch gebrochene Koeffizienten aus K als Operatoren für $\mathfrak{G}$ und $\mathfrak{G}^{(1)}$ zu, so erhält man das Äquivalenzproblem der Formen $\mathfrak{S}$ und $\mathfrak{S}^{(1)}$ im Körper K.

Im Gegensatz zum rationalen Fall ist hier der Fall des Axioms $S3b$ nicht wesentlich vom obigen verschieden. $\mathfrak{S}$ ist dann alternierend-hermitesch. Ersetzt man aber $\mathfrak{S}$ durch $i.\mathfrak{S}$ so ist $i.\mathfrak{S}$ wieder hermitesch, und für $i.\mathfrak{S}$ lassen sich dann die obigen Überlegungen anstellen.

§ 5.

Gruppen mit Verschlingungsrelation.

Wir haben in § 2 in der üblichen Weise gewisse Zahlen aus K als Verschlingungszahlen zwischen Divisionsrändern eingeführt. Durch repräsentantenweise Definition ergaben sich dann Verschlingungszahlen zwischen den Elementen der Torsionsgruppen k-ter und $(n-k-1)$-ter Dimension. Diese waren (gebrochene) Zahlen aus K mod 1 genommen. Wir wollen zunächst für diese Verschlingungszahlen folgenden Satz beweisen:

Satz 17. *Zu jedem Element* $\neq 0$ *der k-ten Torsionsgruppe gibt es ein Element der $(n-k-1)$-dimensionalen Torsionsgruppe, so daß die Verschlingungszahl beider* $\not\equiv o \bmod 1$ *ist.*

Beweis. Die Behauptung des Satzes kommt darauf hinaus, daß es zu jeder Kette $\mathfrak{x}^k$, die Divisionsrand, aber nicht selbst Rand ist, einen Divisionsrand $\tilde{\mathfrak{x}}^{n-k-1}$ gibt, so daß $V(\mathfrak{x}^k, \tilde{\mathfrak{x}}^{n-k-1}) \not\equiv o \bmod 1$ ist. Sei etwa $d \cdot \mathfrak{x}^k = \dot{\mathfrak{x}}^{k+1}$. Dann kann $\mathfrak{x}^{k+1}$ als Kette aus $\mathfrak{U}^{k+1}$ genommen werden (vgl. § 3). Benutzen wir nun für die Schnittmatrix zwischen $\mathfrak{U}^{k+1}$ und $\tilde{\mathfrak{D}}^{n-k-1}$ die in § 3, Satz 7 angegebene Normalform (9). Seien die dabei auftretenden Normalbasen für $\mathfrak{U}^{k+1}$ $\mathfrak{x}_1^{k+1}, \ldots, \mathfrak{x}_l^{k+1}, \mathfrak{x}_l'^{k+1}$, für $\tilde{\mathfrak{D}}^{n-k-1}$ $\tilde{\mathfrak{x}}_1^{n-k-1}, \ldots, \tilde{\mathfrak{x}}_l^{n-k-1}, \tilde{\mathfrak{x}}_l'^{n-k-1}$, und sei $\mathfrak{x}^{k+1} = x_1 \mathfrak{x}_1^{k+1} + \cdots + x_l \mathfrak{x}_l^{k+1} + x_l' \mathfrak{x}_l'^{k+1}$. Die Schnittzahlen zwischen $\mathfrak{x}^{k+1}$ und $\tilde{\mathfrak{x}}_1^{n-k-1}, \ldots, \tilde{\mathfrak{x}}_l^{n-k-1}, \tilde{\mathfrak{x}}_l'^{n-k-1}$ sind dann der Reihe nach $x_1, \ldots, x_{l-1}$, $x_l \mathfrak{q} \mathfrak{f} + x_l' \mathfrak{q}' \mathfrak{f}$, $x_l \mathfrak{q} \mathfrak{f}' + x_l' \mathfrak{q}' \mathfrak{f}'$. Dabei mögen wieder die $\mathfrak{q}, \mathfrak{f}, \mathfrak{q}', \mathfrak{f}'$ festgewählte Zahlen aus Ω sein. Sind diese Schnittzahlen nicht alle durch d teilbar, so sind wir fertig; denn dann ist die betreffende Verschlingungszahl $\not\equiv o \bmod 1$. Sind aber alle Schnittzahlen durch d teilbar, so ist wegen $(\mathfrak{f}, \mathfrak{f}') = 1$ die Zahl $x_l \mathfrak{q} + x_l' \mathfrak{q}'$ des Oberkörpers Ω durch d teilbar. Es gibt also eine Kette $(1/d) \cdot \mathfrak{x}^{k+1}$ mit ganz-algebraischen Koeffizienten aus Ω. Ihr Rand ist dann offenbar $\mathfrak{x}^k$. Nun kann man aber die Bedingung für die Existenz einer ganzzahligen Kette, zu der $\mathfrak{x}^k$ Rand ist, als Lösbarkeitsbedingung eines inhomogenen ganzzahligen linearen Gleichungssystems formulieren. Diese ist aber invariant gegenüber Körpererweiterung. Es ist dann also $\mathfrak{x}^k$ Rand einer Kette mit ganzzahligen Koeffizienten aus K.

Dem vorigen Paragraphen entsprechend wollen wir nun eine abstrakte Theorie der Gruppen mit Verschlingungsrelation aufbauen. Es seien also $\mathfrak{G}$ und $\mathfrak{H}$ wieder zwei Abelsche Operatorgruppen über der Hauptordnung $\mathfrak{X}$ des Kreiskörpers K mit endlich vielen Erzeugenden. Zwischen $\mathfrak{G}$ und $\mathfrak{H}$ sei eine Verschlingungsrelation erklärt, d. h. jedem Elementepaar g aus $\mathfrak{G}$ und h aus $\mathfrak{H}$ ist als Verschlingungszahl $V(g,h)$ eine Zahl des Körpers K mod 1 zugeordnet. Und diese Relation genüge den Axiomen

Axiom $V1$. Für alle g aus $\mathfrak{G}$ und h aus $\mathfrak{H}$ sei

(1 a) $$V(g_1 + g_2, h) \equiv V(g_1, h) + V(g_2, h) \bmod 1$$

(1 b) $$V(g, h_1 + h_2) \equiv V(g, h_1) + V(g, h_2) \bmod 1$$

und für alle ganz-algebraischen Zahlen x aus K sei

$$V(x_1 g, x_2 h) \equiv x_1 V(g,h) \bar{x}_2 \bmod 1, \tag{2}$$

wobei $\bar{x}$ die konjugiert-komplexe Zahl zu x ist.

Axiom $V2$. Zu jedem $g \neq 0$ aus $\mathfrak{G}$ gibt es ein h aus $\mathfrak{H}$ mit

$$V(g,h) \not\equiv o \bmod 1$$

und ebenso zu jedem $h \neq 0$ aus $\mathfrak{H}$ ein g aus $\mathfrak{G}$ mit der gleichen Eigenschaft.

Dann folgt aber sofort der

Satz 18. *Alle Elemente von $\mathfrak{G}$ und $\mathfrak{H}$ haben endliche Ordnung. $\mathfrak{G}$ und $\mathfrak{H}$ sind also endliche Gruppen, da sie endlich viele Erzeugende haben.*

Beweis. Seien $\mathfrak{o}_1, \ldots, \mathfrak{o}_m$ die Ordnungen eines Erzeugendensystems $h_1, \ldots, h_m$ von $\mathfrak{H}$ und o_i irgendeine Zahl aus $\mathfrak{o}_i$ $(i = 1, \ldots, m)$. g sei ein beliebiges Element aus $\mathfrak{G}$. Dann folgt aus $V(g, o_i h_i) \equiv V(g, h_i)\, \bar{o}_i \equiv o$ $(i = 1, \ldots, m)$, daß das Produkt aus $\prod_i \bar{o}_i$ und der Verschlingungszahl $V(g,h)$ von g mit irgendeinem Element h aus $\mathfrak{H}$ ganz ist, d. h. aber nach Axiom $V2$, daß $\prod \bar{o}_i \,.\, g = 0$ ist. g ist also von endlicher Ordnung. Dasselbe gilt für die Elemente h aus $\mathfrak{H}$.

Jede endliche Operatorgruppe $\mathfrak{G}$ über $\mathfrak{X}$ kann nun nach Steinitz [2] S. 353 in eine direkte Summe zyklischer (= einstufiger) Untergruppen zerlegt werden, deren Ordnungen sich sukzessive teilen. Und diese Ordnungen sind durch die Struktur von $\mathfrak{G}$ eindeutig bestimmt und bestimmen ihrerseits die Struktur von $\mathfrak{G}$ eindeutig. Sie heißen daher die Invarianten von $\mathfrak{G}$. Nehmen wir aus jedem zyklischen Summanden $\neq 0$ ein erzeugendes Element, so wollen wir das so gewonnene Erzeugendensystem von $\mathfrak{G}$ eine ausgezeichnete Basis nennen.

Sei $g_1, \ldots, g_s$ eine ausgezeichnete Basis von $\mathfrak{G}$ und $h_1, \ldots, h_{s'}$ eine ebensolche von $\mathfrak{H}$. $\mathfrak{V}$ sei die Verschlingungsmatrix $(V(g_i, h_k))$ bezüglich dieser Basen. Und zwar denken wir die Elemente der Matrix irgendwie als feste Zahlrepräsentanten gewählt. Wir wollen eine solche Matrix mit festen Zahlkoeffizienten einen Repräsentanten der Verschlingungsmatrix $\mathfrak{V}$ nennen. Dann gilt der

Satz 19. *Jeder Repräsentant der Verschlingungsmatrix bezüglich ausgezeichneter Basen von $\mathfrak{G}$ und $\mathfrak{H}$ ist quadratisch von der Zeilenzahl s und von nicht-verschwindender Determinante. Insbesondere sind $\mathfrak{G}$ und $\mathfrak{H}$ von gleicher Stufe (Steinitz [2] S. 319) d. h. $s = s'$.*

Beweis. Ist etwa $s > s'$ oder $s = s'$ aber die Determinante gleich Null, so ist das lineare Gleichungssystem

$$\sum_{i=1}^{s} \xi_i \,.\, V(g_i, h_k) = o \qquad (k = 1, \ldots, s'),$$

wobei die $V(g_i, h_k)$ als Elemente des betrachteten Repräsentanten der Verschlingungsmatrix aufgefaßt werden sollen, in K nichttrivial lösbar. Dann kann man aber ein Vielfaches $(x_1, \ldots, x_s) = c(\xi_1, \ldots, \xi_s)$ der

Lösung wählen, so daß das Ideal $\mathfrak{t} = (x_1, \ldots, x_s)$ ein vorgegebenes ganzes Ideal aus der Idealklasse von $(\xi_1, \ldots, \xi_s)$ ist. Dann sind insbesondere die x_i selbst ganz. Wählt man nun $\mathfrak{t}$ teilerfremd zur Ordnung $\mathfrak{o}_1$ von g_1, so ist das Element $\sum_{i=1}^{s} x_i g_i$ aus $\mathfrak{G}$ vom Nullelement verschieden, da sonst $x_i \equiv o \pmod{\mathfrak{o}_i}$ $(i = 1, \ldots, s)$ wäre, wo $\mathfrak{o}_i$ die Ordnung von g_i ist. Da diese Ordnungen sich aber sukzessive teilen, wäre dann $x_i \equiv o \pmod{\mathfrak{o}_1}$ für $i = 1, \ldots, s$, also $\mathfrak{t}$ durch $\mathfrak{o}_1$ teilbar entgegen Konstruktion. Für das Element $\sum x_i g_i$ sind aber alle Verschlingungszahlen Null. Das ist ein Widerspruch gegen das Axiom $V2$.

Sei nun $\mathfrak{V}$ die Verschlingungsmatrix bezüglich irgendwelcher Erzeugendensysteme. Man kann zu jedem Repräsentanten von $\mathfrak{V}$ beliebig viele Nullzeilen und -spalten hinzufügen und weglassen, indem man zu den Erzeugendensystemen von $\mathfrak{G}$ und $\mathfrak{H}$ genügend oft das Nullelement hinzufügt oder wegläßt. Transformiert man weiter den Repräsentanten durch eine der elementaren Transformationen der Elementarteilertheorie, so erhält man eine Matrix, die ebenfalls Repräsentant der Verschlingungsmatrix eines geeigneten Erzeugendensystems von $\mathfrak{G}$ und $\mathfrak{H}$ ist. Durch elementare Transformationen sowie Erweitern und Weglassen von Nullzeilen und -spalten kann man aber jede Matrix mit Koeffizienten aus K in eine Normalgestalt

$$A^* = \begin{pmatrix} \boxed{A_1} & & & \\ & \boxed{A_2} & & \\ & & \ddots & \\ & & & \boxed{A_n} \end{pmatrix} \tag{3}$$

überführen (Krull [1], Franz [1]). Längs der Hauptdiagonalen sind dabei quadratische zweireihige Matrizen vom Rang 1 aneinandergereiht, während außerhalb dieser Kästchen lauter Nullen stehen. Die (ersten und einzigen) Elementarteiler $\mathfrak{e}_i$ der Matrizen A_i teilen sich sukzessive und sind daher die Elementarteiler der Matrix A^*.

Man wähle nun die Erzeugendensysteme in $\mathfrak{G}$ und $\mathfrak{H}$ so, daß ein geeigneter Repräsentant der Verschlingungsmatrix $\mathfrak{V}$ die Normalgestalt (3) annimmt. Das zugehörige Erzeugendensystem von $\mathfrak{G}$ sei $g_1', g_1'', \ldots, g_n', g_n''$, von $\mathfrak{H}$ entsprechend $h_1', h_1'', \ldots, h_n', h_n''$. Die Elemente g_1', g_1'' bzw. h_1', h_1'' erzeugen Untergruppen $\mathfrak{G}_1$ bzw. $\mathfrak{H}_1$ von $\mathfrak{G}$ bzw. $\mathfrak{H}$. Für diese Untergruppen definiert die Matrix A_1 eine Verschlingungsrelation. Axiom $V1$ ist unmittelbar klar. Sei weiter $g \neq 0$ ein beliebiges Element aus $\mathfrak{G}_1$, dann gibt es jedenfalls ein Element $h = x_1' h_1' + x_1'' h_1'' + \cdots + x_n'' h_n''$ aus $\mathfrak{H}$ mit $V(g, h) \not\equiv o$. Es ist aber offenbar $V(g, h) \equiv V(g, x_1' h_1' + x_1'' h_1'')$ und $x_1' h_1' + x_1'' h_1''$ aus $\mathfrak{H}_1$, also auch Axiom $V2$ erfüllt.

Bezieht man jetzt die Untergruppen $\mathfrak{G}_1$ und $\mathfrak{H}_1$ auf ausgezeichnete Basen, so geht A_1 über in eine Matrix $A_1' = P A_1 Q$. Es ist dann Rang

$A_1' \leqq$ Rang A_1. Falls der Rang von A_1' Null ist, bestehen nach Axiom $V2$ die Gruppen $\mathfrak{G}_1$ und $\mathfrak{H}_1$ nur aus dem Nullelement. Wir denken dann von vornherein die g_1', g_1'' und h_1', h_1'' aus den Erzeugendensystemen von $\mathfrak{G}$ und $\mathfrak{H}$ gestrichen. Wir können also Rang $A_1' = 1$ annehmen, und daher besteht nach Satz 19 die ausgezeichnete Basis von $\mathfrak{G}_1$ und $\mathfrak{H}_1$ nur aus einem Element. $\mathfrak{G}_1$ und $\mathfrak{H}_1$ sind zyklisch. Dasselbe gilt für die anderen Kästchen A_i $(i = 2, \ldots, n)$. Die Basen von $\mathfrak{G}_i$ bzw. $\mathfrak{H}_i$ für $i = 1, \ldots, n$ zusammengestellt, ergeben dann ein Erzeugendensystem für $\mathfrak{G}$ bzw. $\mathfrak{H}$, für das die Verschlingungsmatrix Diagonalgestalt hat.

Bezeichnen wir das zugehörige Erzeugendensystem von $\mathfrak{G}$ bzw. $\mathfrak{H}$ wieder mit $g_1, \ldots, g_n$ bzw. $h_1, \ldots, h_n$. Die Verschlingungszahl $V(g_1, h_1)$ habe dann in dem betrachteten festen Repräsentanten die gekürzte Idealdarstellung $V(g_1, h_1) = \mathfrak{p}/\mathfrak{q}$. Der Nenner $\mathfrak{q}$ ist jedenfalls für alle Repräsentanten derselbe. Bezeichne x eine beliebige ganz-algebraische Zahl aus K, so ist $x.\mathfrak{p}/\mathfrak{q}$ dann und nur dann ganz, wenn $x \equiv o(\mathfrak{q})$ ist. Andrerseits ist $x.\mathfrak{p}/\mathfrak{q}$ dann und nur dann ganz, wenn $x g_1 = 0$ das Nullelement von $\mathfrak{G}$ ist, d. h. wenn $x \equiv o$ (ord g_1). Daraus folgt $\mathfrak{q} =$ ord g_1. In der gleichen Weise folgt auch ord $h_1 = \bar{\mathfrak{q}}$. Dasselbe gilt auch für die Verschlingungszahlen $V(g_i, h_i)$ $(i = 2, \ldots, n)$.

$\mathfrak{p}/\mathfrak{q}$ ist der erste (und einzige) Elementarteiler der Matrix A_1'. Nun ist A_1' durch A_1 teilbar, d. h. $A_1' = PAQ$ mit ganzzahligen Matrizen P, Q. Also ist auch $\mathfrak{p}/\mathfrak{q}$ durch den Elementarteiler $\mathfrak{e}_1$ von A_1 teilbar, also dessen Nenner durch $\mathfrak{q}$ teilbar. Andrerseits ist eine zu A_1 kongruente Matrix durch A_1' teilbar. Ihr Elementarteiler hat aber denselben Nenner wie $\mathfrak{e}_1$, also teilt dieser Nenner umgekehrt auch $\mathfrak{q}$ und ist daher mit $\mathfrak{q}$ identisch. Da sich nun die $\mathfrak{e}_i$ $(i = 1, \ldots, n)$ in der Matrix (3) sukzessive teilen, teilen sich ihre Nenner umgekehrt sukzessive. Und daher sind die Ordnungen $\mathfrak{q}_i$ $(i = 1, \ldots, n)$ der Elemente g_i bzw. $\bar{\mathfrak{q}}$ der Elemente h_i die Invarianten von $\mathfrak{G}$ und $\mathfrak{H}$. $g_1, \ldots, g_n$ bzw. $h_1, \ldots, h_n$ bilden also eine ausgezeichnete Basis von $\mathfrak{G}$ bzw. $\mathfrak{H}$. Es ist $n = s$ und wir haben den

Satz 20. *In jedem Gruppenpaar mit Verschlingungsrelation sind die Komponenten $\mathfrak{G}$ und $\mathfrak{H}$ von gleicher Stufe und ihre Invarianten zueinander konjugiert.*

Auch die Zähler der Verschlingungszahlen $V(g_i, h_i)$ $(i = 1, \ldots, s)$ lassen sich noch normieren. Wir schließen wieder für $V(g_1, h_1) = \mathfrak{p}/\mathfrak{q}$. Man kann durch geeignete Wahl von g_1 erreichen, daß der Zähler von V ein beliebiges ganzes, zu $\mathfrak{q}$ teilerfremdes Ideal $\mathfrak{p}_1$ der Klasse von $\mathfrak{p}$ wird

$$(\mathfrak{p}_1, \mathfrak{q}) = 1 \qquad \mathfrak{p}_1 \sim \mathfrak{p} \sim \mathfrak{q}.$$

Geht man nämlich zu einer Zahldarstellung von V über, indem man mit einem ganzen Ideal $\mathfrak{f} \sim \mathfrak{q}^{-1} \sim \mathfrak{p}^{-1}$ erweitert

$$\frac{\mathfrak{p}}{\mathfrak{q}} = \frac{\mathfrak{p}\mathfrak{f}}{\mathfrak{q}\mathfrak{f}},$$

so existieren wegen $(\mathfrak{p}\mathfrak{f}, \mathfrak{q}\mathfrak{f}) = \mathfrak{f}$ ganze Zahlen x_1 und x_2, so daß

$$x_1\mathfrak{p}\mathfrak{f} + x_2\mathfrak{q}\mathfrak{f} = \mathfrak{p}_1\mathfrak{f}$$

wird. Darin sollen jetzt $\mathfrak{p}\mathfrak{f}$, $\mathfrak{q}\mathfrak{f}$, $\mathfrak{p}_1\mathfrak{f}$ erzeugende Zahlen der entsprechenden Hauptideale sein. Dann wird

$$x_1 . V \equiv \frac{\mathfrak{p}_1\mathfrak{f}}{\mathfrak{q}\mathfrak{f}} \bmod 1.$$

Wegen $(\mathfrak{p}_1\mathfrak{f}, \mathfrak{q}\mathfrak{f}) = \mathfrak{f}$ ist aber $(x_1, \mathfrak{q}) = 1$. Daher erzeugt das Element $x_1 g_1$ die gleiche Untergruppe wie g_1 selbst und kann daher statt g_1 in die Basis von $\mathfrak{G}$ aufgenommen werden. Dasselbe gilt für die g_i $(i = 2, \ldots, s)$.

Damit erhalten wir den Isomorphiesatz

Satz 21. *Sind $\mathfrak{G}, \mathfrak{H}$ und $\mathfrak{G}', \mathfrak{H}'$ zwei Gruppenpaare mit Verschlingungsrelation und $\mathfrak{G} \cong \mathfrak{G}'$, dann ist auch $\mathfrak{H} \cong \mathfrak{H}'$ und zwar so, daß beide Isomorphismen zusammen einen verschlingungstreuen Isomorphismus zwischen den Paaren $\mathfrak{G}, \mathfrak{H}$ und $\mathfrak{G}', \mathfrak{H}'$ vermitteln.*

Beweis. Wegen der Isomorphie von $\mathfrak{G}$ und $\mathfrak{G}'$ kann man nach obiger Bemerkung über die Normierung der Zähler der Verschlingungszahlen ausgezeichnete Basen in $\mathfrak{G}, \mathfrak{H}, \mathfrak{G}', \mathfrak{H}'$ so wählen, daß die beiden Verschlingungsmatrizen identisch werden. Die Invarianten von $\mathfrak{H}$ und $\mathfrak{H}'$ sind durch die von $\mathfrak{G}$ und $\mathfrak{G}'$ bestimmt, also ebenfalls einander gleich. Ordnet man die eben gewählten ausgezeichneten Basen von $\mathfrak{G}$ und $\mathfrak{G}'$ sowie von $\mathfrak{H}$ und $\mathfrak{H}'$ einander zu, so entsteht ein Isomorphismus zwischen den Gruppenpaaren $\mathfrak{G}, \mathfrak{H}$ und $\mathfrak{G}', \mathfrak{H}'$, bei dem entsprechende Elementepaare gleiche Verschlingungszahlen haben.

Für den Fall, daß wieder $\mathfrak{H}$ mit $\mathfrak{G}$ identisch ist, also eine Gruppe mit Eigenverschlingungsvorschrift vorliegt, fordert man wieder dieselben Vertauschbarkeitsaxiome wie bei den Schnittzahlen. Auch hier sind zwei isomorphe Gruppen $\mathfrak{G}$ und $\mathfrak{G}^{(1)}$ mit Eigenverschlingung dann und nur dann isomorph als Gruppen mit Verschlingung, wenn die Verschlingungsmatrizen bezüglich irgendwelcher Erzeugendensysteme von $\mathfrak{G}$ und $\mathfrak{G}^{(1)}$ übereinstimmen. Ein Beispiel zu einer Eigenverschlingung findet sich im folgenden Paragraphen.

§ 6.

Beispiel.

Als Beispiel betrachten wir die fünfdimensionalen Linsenräume. Sei die fünfdimensionale Einheitssphäre im R_6 gegeben durch

$$|z_0|^2 + |z_1|^2 + |z_2|^2 = 1,$$

wobei $z_0 = x_1 + i . x_2$, $z_1 = x_3 + i . x_4$, $z_2 = x_5 + i . x_6$ drei komplexe Variablen bedeuten. g bedeute die Deckbewegung

$$z_k' = \zeta^{q_k^{-1}} z_k \qquad (k = 0, 1, 2)$$

mit $\zeta = e^{2\pi i/p}$ (p Primzahl, q_k prim zu p, $q_k^{-1} q_k \equiv 1 (p)$). Identifiziert man die Punkte der Sphäre, die durch $g, g^2, \ldots, g^{p-1}$ auseinander hervorgehen, so erhält man den fünfdimensionalen Linsenraum $L(p, q_0, q_1, q_2)$. Die Sphäre ist seine universelle Überlagerung. Benutzen wir für sie die Zellenzerlegung ($j = o, 1, \ldots, p-1$)

a_j^5 definiert durch $\quad \frac{2\pi}{p} j < \arg z_2 < \frac{2\pi}{p}(j+1)$

a_j^4 „ „ $\quad \arg z_2 = \frac{2\pi}{p} j$

a_j^3 „ „ $z_2 = o \quad \frac{2\pi}{p} j < \arg z_1 < \frac{2\pi}{p}(j+1)$

a_j^2 „ „ $z_2 = o \quad \arg z_1 = \frac{2\pi}{p} j$

a_j^1 „ „ $z_2 = z_1 = o \quad \frac{2\pi}{p} j < \arg z_0 < \frac{2\pi}{p}(j+1)$

a_j^0 „ „ $z_2 = z_1 = o \quad \arg z_0 = \frac{2\pi}{p} j,$

wobei alle unteren Indizes mod p zu nehmen sind. Dann erhält man als Berandungsrelationen

$$(2) \qquad a_j^{2k+1} = a_j^{2k} - a_{j+1}^{2k}; \quad a_j^{2k} = a_0^{2k-1} + a_1^{2k-1} + \cdots + a_{p-1}^{2k-1}$$

für $k = o, 1, 2$ bei geeigneter Orientierung. Dazu kommen für die Homotopieketten noch die Relationen

$$g^{q_k} a_j^{2k+1} = a_{j+1}^{2k+1}; \quad g^{q_k} a_j^{2k} = a_{j+1}^{2k} \quad (k = o, 1, 2; \; j = o, \ldots, p-1).$$

Der homomorphe Übergang $g \to 1$ führt auf die Berandungsrelationen des Linsenraumes selbst. Die Homologiegruppe der Dimension 2 (für die Eigenverschlingungen auftreten könnten) besteht nur aus dem Nullelement.

Anders jedoch bei der homomorphen Abbildung $g \to \zeta = e^{2\pi i/p}$, die wir wieder mit φ bezeichnen. Dann werden die Berandungsrelationen

$$\varphi(a_0^3)' = (1 - \zeta^{q_1}) \varphi(a_0^2); \quad \varphi(a_0^2)' = 0.$$

Die zweidimensionale Homologiegruppe wird erzeugt durch das Element $\varphi(a_0^2)$ von der Ordnung $(1 - \zeta^{q_1})$. Hier müssen also Eigenverschlingungszahlen auftreten.

Zu ihrer Berechnung kann man etwa von den Zellen a_0^3 und a_0^2 der Sphäre ausgehen. a_0^2 liegt aber auf dem Rand von a_0^3. Man muß daher a_0^2 durch Addition von Rändern und von Ketten, die bei der Abbildung φ nach Null übergehen, so abändern, daß die abgeänderte Kette mit a_0^3 höchstens noch Nullzellen gemein hat und diese weder auf dem Rand von a_0^3 noch auf dem Rand der abgeänderten Kette liegen. Um dies Verfahren besser zu übersehen, führen wir eine Simplizialunterteilung der Sphäre aus, indem wir in den Zellen $a_j^2, a_j^3, a_j^4, a_j^5$ jeweils

ihre Mittelpunkte P_j^2, P_j^3, P_j^4, P_j^5 einführen, von denen aus die Sternunterteilung der Zellen ausgeführt wird. Die Nullzellen der ursprünglichen Zellteilung bezeichnen wir noch mit $P_0^0, P_1^0, \ldots, P_{p-1}^0$. Sie sind bereits Simplexe. Die vorkommenden Simplexe werden dann jeweils durch die Angabe ihrer Ecken bezeichnet.

An Stelle der Zelle a_0^2 tritt dann (bei geeigneter Orientierung) die Kette

$$\mathfrak{k} = (P_0^0 P_1^0 P_0^2) + (P_1^0 P_2^0 P_0^2) + \cdots + (P_{p-1}^0 P_0^0 P_0^2). \tag{3}$$

Durch Addition des Randes

$$(P_0^0 P_1^0 P_0^2 P_0^3)' = (P_1^0 P_0^2 P_0^3) - (P_0^0 P_0^2 P_0^3) + (P_0^0 P_1^0 P_0^3) - (P_0^0 P_1^0 P_0^2)$$

und durch die entsprechenden Veränderungen für die anderen $(P_j^0 P_{j+1}^0 P_0^2)$ geht die Kette $\mathfrak{k}$ in

$$(P_0^0 P_1^0 P_0^3) + (P_1^0 P_2^0 P_0^3) + \cdots + (P_{p-1}^0 P_0^0 P_0^3) \tag{4}$$

über. Die Kanten $(P_0^0 P_1^0)$ usw. liegen immer noch auf dem Rand von a_0^3. Um dies abzuändern, addieren wir den Rand

$$(P_0^0 P_1^0 P_0^3 P_0^4)'.$$

Das Tetraeder $(P_0^0 P_1^0 P_0^3 P_0^4)$ kommt wirklich in der Simplizialzerlegung vor, da die Zelle a_0^4 von allen Dreizellen berandet wird. Es wird dann aus dem ersten Glied von (4)

$$(P_1^0 P_0^3 P_0^4) - (P_0^0 P_0^3 P_0^4) + (P_0^0 P_1^0 P_0^4).$$

Um nun den letzten Summanden wegzuschaffen, versuchen wir, durch entsprechende Veränderung an den andern Gliedern von (4) die Summe

$$(P_0^0 P_1^0 P_0^4) + g(P_0^0 P_1^0 P_0^4) + \cdots + g^{p-1}(P_0^0 P_1^0 P_0^4) \tag{5}$$

zu erhalten. Sie geht offenbar ja bei dem Homomorphismus φ in Null über. Es ist offenbar

$$g(P_0^0 P_1^0 P_0^4) = (P_{q_0^{-1}}^0 P_{q_0^{-1}+1}^0 P_{q_2^{-1}}^4).$$

Man hat also einfach nur zum Glied $(P_{q_0^{-1}}^0 P_{q_0^{-1}+1}^0 P_{q_2^{-1}}^3)$ von (4) den Rand $(P_{q_0^{-1}}^0 P_{q_0^{-1}+1}^0 P_0^3 P_{q_2^{-1}}^4)'$ zu addieren. Das entsprechende Tetraeder kommt ja in der Simplizialzerlegung vor, da jede Zelle a_j^4 von allen Zellen a_i^3 berandet wird.

Durch die entsprechenden Operationen für die anderen Glieder von (4) erhält man so, wenn man noch (5) streicht, die Kette

$$\begin{aligned}&(P_1^0 P_0^3 P_0^4) + (P_2^0 P_0^3 P_{k_1}^4) + \cdots + (P_0^0 P_0^3 P_{k_{p-1}}^4)\\ &- (P_0^0 P_0^3 P_0^4) - (P_1^0 P_0^3 P_{k_1}^4) - \cdots - (P_{p-1}^0 P_0^3 P_{k_{p-1}}^4),\end{aligned} \tag{6}$$

wobei sich die Indizes k_i bestimmen aus

$$k_i \equiv \lambda_i q_2^{-1} \pmod p \quad \text{mit} \quad \lambda_i q_0^{-1} \equiv i \pmod p,$$

also

$$k_i \equiv i \,.\, q_0 q_2^{-1} = i \,.\, k \pmod p.$$

Um nun auch noch die Punkte P_j^0 aus den einzelnen Summanden zu entfernen, wird man versuchen, $(P_1^3 P_0^3 P_0^4)$ sukzessive in $-(P_1^0 P_0^3 P_k^4)$ überzuführen. Dabei muß man beachten, daß die Zelle a_0^4 sowohl a_{p-1}^5 als auch a_0^5 berandet, a_1^4 sowohl a_0^5 als a_1^5, ..., a_k^4 sowohl a_{k-1}^5 als auch a_k^5. Man addiert also den Rand

$$(P_1^0 P_0^3 P_0^4 P_0^5)' = (P_0^3 P_0^4 P_0^5) - (P_1^0 P_0^4 P_0^5) + (P_1^0 P_0^3 P_0^5) - (P_1^0 P_0^3 P_0^4)$$

und weiter

$$-(P_1^0 P_0^3 P_1^4 P_0^5)' = -(P_0^3 P_1^4 P_0^5) + (P_1^0 P_1^4 P_0^5) - (P_1^0 P_0^3 P_0^5) + (P_1^0 P_0^3 P_1^4),$$

darauf $(P_1^0 P_0^3 P_1^4 P_1^5)'$ usf. bis $-(P_1^0 P_0^3 P_k^4 P_{k-1}^5)'$. Entsprechend verfährt man mit den übrigen Gliedern von (6), indem man $(P_2^0 P_0^3 P_k^4)$ in $-(P_2^0 P_0^3 P_{2k}^4)$ überführt usf. Auf diese Weise bleibt die Kette

$$\begin{aligned}
&(P_0^3 P_0^4 P_0^5) - (P_1^0 P_0^4 P_0^5) - (P_0^3 P_1^4 P_0^5) + (P_1^0 P_1^4 P_0^5) + \cdots - (P_0^3 P_k^4 P_{k-1}^5) + (P_1^0 P_k^4 P_{k-1}^5) \\
&+ (P_0^3 P_k^4 P_k^5) - (P_2^0 P_k^4 P_k^5) - (P_0^3 P_{k+1}^4 P_k^5) + (P_2^0 P_{k+1}^4 P_k^5) + \cdots - (P_0^3 P_{2k}^4 P_{2k-1}^5) + (P_2^0 P_{2k}^4 P_{2k-1}^5) \\
&\quad \vdots \qquad\qquad \vdots \\
(8) \qquad &\quad \vdots \\
&+ (P_0^3 P_{(p-1)k}^4 P_{(p-1)k}^5) - (P_{p-1}^0 P_{(p-1)k}^4 P_{(p-1)k}^5) - (P_0^3 P_{\frac{(p-1)k}{+1}}^4 P_{(p-1)k}^5) \\
&\qquad + (P_{p-1}^0 P_{\frac{(p-1)k}{+k}}^4 P_{(p-1)k}^5) + \cdots - (P_0^3 P_0^4 P_{p-1}^5) + (P_{p-1}^0 P_0^4 P_{p-1}^5)
\end{aligned}$$

übrig. Hierin kann man aber nun die 2., 4., ..., $4k$-te Spalte streichen, da sie von der Form $(1 + g + g^2 + \cdots + g^{p-1}) . a$ sind. Die restlichen $p . 2k$ Glieder ergeben k mal die Kette

$$(9) \qquad (P_0^3 P_0^4 P_0^5) - (P_0^3 P_1^4 P_0^5) + (P_0^3 P_1^4 P_1^5) \mp \cdots + (P_0^3 P_{p-1}^4 P_{p-1}^5) - (P_0^3 P_0^4 P_{p-1}^5).$$

Diese Kette hat aber nur den Punkt P_0^3 mit a_0^3 gemeinsam und P_0^3 gehört nicht zum Rand von (9). Weiter haben die Bilder von (9) bei den Transformationen $g, g^2, \ldots, g^{p-1}$ keinen Punkt mit a_0^3 gemeinsam. Daher ist die τ-Schnittzahl von a_0^3 und (8) (je nach der Orientierung der Mannigfaltigkeit) gleich

$$\pm k = \pm q_0 q_2^{-1}.$$

Damit ist die Eigenverschlingungszahl der Homologieklasse von $\varphi(a_0^2)$ kongruent

$$\pm \frac{q_0 q_2^{-1}}{1 - \zeta^{q_1}} \bmod 1.$$

Geht man zu einer anderen Erzeugenden $\mu\varphi(a_0^2)$ über, wobei μ eine ganze Zahl aus $K = P(\zeta)$ und teilerfremd zu $(1 - \zeta)$ ist, so wird die Verschlingungszahl

$$\pm \frac{\mu \bar{\mu} q_0 q_2^{-1}}{1 - \zeta^{q_1}},$$

Zwei Linsenräume $L(p, q_0, q_1, q_2)$ und $L(p, q_0', q_1', q_2')$ können also höchstens dann topologisch äquivalent sein, wenn mit einer geeigneten ganzen, zu $(1-\zeta)$ teilerfremden Zahl μ aus K die Kongruenz

$$\frac{q_0' q_2'^{-1}}{1-\zeta^{q_1'}} \equiv \pm \frac{\mu\bar{\mu} q_0 q_2^{-1}}{1-\zeta^{q_1}} \bmod 1 \tag{10}$$

besteht. Man kann sie noch umformen, indem man schreibt

$$\frac{1-\zeta}{1-\zeta^{q_1'}} \cdot \frac{q_0' q_2'^{-1}}{1-\zeta} \equiv \pm \frac{\mu\bar{\mu} q_0 q_2^{-1}}{1-\zeta} \cdot \frac{1-\zeta}{1-\zeta^{q_1}} \bmod 1$$

oder auch

$$\frac{1-\zeta}{1-\zeta^{q_1'}} \cdot q_0' q_2'^{-1} \equiv \pm \mu\bar{\mu} q_0 q_2^{-1} \cdot \frac{1-\zeta}{1-\zeta^{q_1}} \bmod (1-\zeta).$$

Da $(1-\zeta^{q_1'})/(1-\zeta^{q_1})$ eine Einheit ist, ist diese Kongruenz gleichwertig mit

$$q_0' q_2'^{-1} \equiv \pm \varepsilon \mu\bar{\mu} q_0 q_2^{-1} \bmod (1-\zeta),$$

wobei ε die Einheit $\varepsilon = (1-\zeta^{q_1'})/(1-\zeta^{q_1})$ ist. Ersetzt man noch μ durch $q_2 q_2'^{-1}\mu$, so erhält man die Kongruenz

$$q_0' q_2' \equiv \pm \varepsilon \mu\bar{\mu} q_0 q_2 \bmod (1-\zeta). \tag{11}$$

Entsprechende Kongruenzen erhält man, wenn man als homomorphe Abbildung φ den Übergang $g \to \zeta^q$ $(q, p) = 1$ wählt. Dabei ist nur ε durch seine Konjugierte $\varepsilon^{(q)}$ zu ersetzen.

(Eingegangen am 20. August 1948.)

Literaturverzeichnis.

ALEXANDROFF-HOFF.

Topologie I, Berlin 1935, Anhang I, § 5. 64.

FRANZ, W.

[1] Elementarteilertheorie in algebraischen Zahlkörpern, Crelle 171 (1934), S. 149.

[2] Überdeckungen topologischer Komplexe mit hyperkomplexen Systemen, Crelle 173 (1935), S. 164.

KRULL, W.

[1] Matrizen, Moduln und verallgemeinerte ABELsche Gruppen im Bereich der ganzen algebraischen Zahlen. S.B. Heidelberg Akad. Wiss. Math.-nat. Klasse 1932, Abh. 2, S. 13.

PONTRJAGIN.

[1] Über den algebraischen Inhalt topologischer Dualitätssätze, Math. Ann. 105 (1931), S. 165.

Reidemeister, K.

[1] Homotopiegruppen von Komplexen, Abh. Math. Sem. Hamburg. Univ. 10 (1934), S. 211.

[2] Überdeckungen von Komplexen, Crelle 173 (1935), S. 164.

[3] Homotopieringe und Linsenräume, Abh. Math. Sem. Hamburg. Univ. 11 (1936), S. 102.

[4] Durchschnitt und Schnitt von Homotopieketten, Mh. Math. Phys. 48 (1939), S. 226.

de Rham, G.

[1] Thèses, Paris 1931.

Seifert, H.

[1] Verschlingungsinvarianten, S.B. Preuß. Akad. Wiss. 16 (1933), S. 811.

Seifert-Threlfall.

[1] Lehrbuch der Topologie, Leipzig/Berlin 1934, § 69 ff.

Steinitz, E.

[1] Rechteckige Systeme und Moduln in algebraischen Zahlkörpern, Teil I, Math. Ann. 71 (1912), S. 328.

[2] Desgl., Teil II, Math. Ann. 72 (1912), S. 297.

Untersuchungen über einige verwandte Limitierungsverfahren*).

Von

W. Meyer-König in Stuttgart.

Bei den folgenden Untersuchungen wird ausgegangen von drei Klassen bekannter Limitierungsverfahren: den EULER-KNOPPschen Verfahren (E_p-Verfahren), dem BORELschen Verfahren (B-Verfahren) und den TAYLOR-Verfahren (T_α-Verfahren). Während die beiden ersten Klassen schon lange bekannt sind und eingehende Behandlung fanden, wurde das von G. H. HARDY u. J. E. LITTLEWOOD eingeführte und ursprünglich als Kreisverfahren (circle method) bezeichnete TAYLOR-Verfahren bisher nur durch R. WAIS systematisch untersucht.

Über die gegenseitigen Beziehungen dieser Verfahren weiß man, daß die von einem Parameter $p\,(0 < p < \infty)$ abhängigen E_p-Verfahren mit wachsendem p immer wirksamer werden, d. h. einen immer umfassenderen Bereich von Folgen zu limitieren vermögen, und daß sie für $p \to \infty$ in das B-Verfahren einmünden. Auch die T_α-Verfahren hängen von einem Parameter $\alpha\,(0 < \alpha < 1)$ ab und werden (mit einer Einschränkung) mit zunehmendem α immer wirksamer. Weiter besteht ein — von HARDY und LITTLEWOOD als very beautiful bezeichneter — Zusammenhang zwischen dem $T_{1/2}$-Verfahren und dem B-Verfahren. Derselbe geht auf eine Vermutung von M. RIESZ zurück und wurde von HARDY und LITTLEWOOD präzisiert: Die Verfahren $T_{1/2}$ und B sind äquivalent unter einer gewissen Voraussetzung über die Größenordnung der Glieder der zu limitierenden Folge.

Zu dieser Gruppe von Verfahren will die vorliegende Arbeit einige Beiträge liefern. Zunächst wird das TAYLORsche Verfahren noch einmal im Zusammenhang und in gegenüber dem Bisherigen teilweise erweiterter Form dargestellt. Sodann wird — und darin ist der hauptsächliche Inhalt dieser Untersuchungen zu erblicken — durch eine Modifikation der T_α-Verfahren eine neue Klasse von Limitierungsverfahren gebildet, deren Einführung den hier betrachteten Kreis von Verfahren ergänzt und abrundet. Auch bei diesen neuen, mit S_α bezeichneten Verfahren handelt es sich um eine von einem Parameter

*) Gekürzte Fassung der im Juni 1947 bei der Fakultät für Natur- und Geisteswissenschaften der Technischen Hochschule Stuttgart eingereichten Habilitationsschrift des Verfassers.

$\alpha (0 < \alpha < 1)$ abhängige Klasse von Limitierungsverfahren, deren Wirksamkeit (mit einer Einschränkung) mit wachsendem α zunimmt. Diese Verfahren schließen sich an die Reihe der E_p- und B-Verfahren, die bisher mit dem B-Verfahren ihren Abschluß gefunden zu haben schien, in natürlicher Weise an. Es ist nämlich die Gesamtheit der E_p-, B- und S_α-Verfahren miteinander verträglich und bildet (mit einer Einschränkung) in dieser Reihenfolge eine Gruppe von Verfahren zunehmender Wirksamkeit. Besonders deutlich kommt die Zusammengehörigkeit der genannten Verfahren in ihrem Verhalten gegenüber den TAYLOR-Verfahren zum Ausdruck. Die erwähnte Äquivalenzbeziehung zwischen dem B- und dem $T_{1/2}$-Verfahren erweist sich nämlich als Spezialfall eines allgemeinen Äquivalenzsatzes, der die E_p-, B- und S_α-Verfahren auf der einen Seite mit den T_α-Verfahren auf der anderen Seite verbindet. Nach diesem Satze ist im Bereich der Zahlenfolgen $s_n = o(\sqrt{n})$ jedes T_α-Verfahren einem bestimmten Verfahren der Gruppe E_p, B, S_α äquivalent und umgekehrt, so daß die Verfahren der genannten Gruppe in ihrer Gesamtheit den T_α-Verfahren gegenüberzustellen sind. Hier zeigt sich, daß die Gruppe E_p, B, S_α nun wirklich ein abgeschlossenes Ganzes darstellt. Die so in Erscheinung tretende Verwandtschaft der sämtlichen in Rede stehenden Verfahren äußert sich auch darin, daß dieselben für beschränkte Folgen überhaupt alle äquivalent sind. Von dieser Tatsache aus ergeben sich leicht Umkehrsätze unserer Verfahren, die in einem Umkehrsatz für das S_α-Verfahren enthalten sind. Dessen Beweis bildet den Schluß dieser Untersuchungen, bei deren Abfassung Verf. verschiedene Ratschläge von Herrn F. LÖSCH verwerten durfte.

§ 1.

Matrixtransformationen und Limitierungsverfahren.

1.1. Wir beginnen mit einer Übersicht über einige ständig gebrauchte Bezeichnungen und einer Zusammenstellung der im folgenden benötigten wenigen Tatsachen aus der Matrizenrechnung [1]).

Es sei

$$V = (V_{nv}) \quad \text{oder kurz} \quad V = V_{nv}$$

eine Matrix mit den Elementen V_{nv} (n, $v \geqq 0$, ganz). Wir nennen V positiv, wenn $V_{nv} \geqq 0$ ist. Wir nennen V permanent, wenn die folgenden drei Voraussetzungen erfüllt sind:

(Zn). Die Zeilennormen $\sum_{v=0}^{\infty} |V_{nv}|$ sind vorhanden und beschränkt für $n \to \infty$.

[1]) Vgl. K. KNOPP [6], S. 331 ff. Die Zahlen in eckigen Klammern beziehen sich auf das Schriftenverzeichnis am Schluß der Arbeit.

(Sp). Für jedes feste ν strebt die Spaltenfolge $V_{n\nu} \to 0$ für $n \to \infty$.

(Zs). Die Zeilensummen $\sum_{\nu=0}^{\infty} V_{n\nu}$ streben gegen 1 für $n \to \infty$.

Mit Hilfe einer permanenten Matrix V definieren wir nun ein Limitierungsverfahren, das wir als Verfahren V oder V-Verfahren bezeichnen. Es sei s_n ($n \geqq 0$, ganz) eine Folge. Wir nennen die Matrix V oder das Verfahren V auf die Folge s_n anwendbar, wenn die V-Transformation

$$Vs = V(n; s_\nu) = \sum_{\nu=0}^{\infty} V_{n\nu} s_\nu$$

der Folge s_n für alle ganzen $n \geqq 0$ vorhanden ist. Wird nichts anderes gesagt, so soll die Folgennummer bei Vs wie soeben stets n sein. V ist auf s_n z. B. dann anwendbar, wenn V eine Dreiecksmatrix ist, d. h. wenn $V_{n\nu} = 0$ ist für $\nu > n$, oder wenn s_n beschränkt ist. Ist V auf s_n anwendbar und strebt Vs gegen einen Grenzwert s für $n \to \infty$, so sagen wir, das Verfahren V limitiere die Folge s_n zum Wert s, und schreiben

$$V\text{-}\lim_{n\to\infty} s_n = s \quad \text{oder kurz} \quad V\text{-}\lim s_n = s.$$

Aus der Permanenz der Matrix V folgt, daß das Limitierungsverfahren V permanent ist, d. h. daß $s_n \to s$ stets $Vs \to s$ für $n \to \infty$ nach sich zieht.

Oft ist es zweckmäßig, neben der Folge s_n die unendliche Reihe heranzuziehen, deren Teilsummen die s_n sind. Die Glieder dieser Reihe bezeichnen wir dann mit a_n. Es ist also stets

$$s_n = \sum_{\nu=0}^{n} a_\nu \qquad (n \geqq 0, \text{ganz}).$$

Ist V auf s_n anwendbar, ist also $t_n = Vs$ vorhanden, so können wir die t_n als die Teilsummen einer unendlichen Reihe mit den Gliedern b_n auffassen:

$$t_n = \sum_{\nu=0}^{n} b_\nu \qquad (n \geqq 0, \text{ganz}).$$

Wir bezeichnen die Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$ als die V-Transformation der Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$. Ist $V\text{-}\lim s_n = s$, so ist dies gleichbedeutend mit $\sum_{n=0}^{\infty} b_n = s$. Wir schreiben dafür auch

$$V\text{-}\sum_{n=0}^{\infty} a_n = s$$

und sagen, das Verfahren V summiere die Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ zum Wert s.

Sind $V = V_{n\nu}$ und $W = W_{n\nu}$ permanente Matrizen, so existiert die wiederum permanente Produktmatrix

$$U = VW = U_{n\nu} = (VW)_{n\nu} = \sum_{\mu=0}^{\infty} V_{n\mu} W_{\mu\nu}.$$

Diese Produktbildung ist assoziativ. Sie tritt dann auf, wenn man zwei Folgentransformationen hintereinanderschaltet. Unter zusätzlichen Voraussetzungen gilt nämlich die Gleichung

$$(1.1.1) \qquad (VW)s = V(Ws),$$

z. B. dann, wenn V und W Dreiecksmatrizen sind, oder dann, wenn s_n beschränkt ist. Wir benötigen im folgenden ein Kriterium, das die Richtigkeit von (1. 1. 1) auch dann sichert, wenn keine dieser beiden Bedingungen erfüllt ist, und formulieren dazu den einfachen, von der Bezeichnung $V|s| = V(n; |s_\nu|)$ Gebrauch machenden und leicht zu beweisenden

Satz 1. *V und W seien positive, permanente Matrizen. Für die Folge s_n sei entweder $(VW)|s|$ oder sowohl $W|s|$ als auch $V(W|s|)$ vorhanden. Dann sind auch $(VW)s$ und sowohl Ws als auch $V(Ws)$ vorhanden, und es gilt* (1. 1. 1).

Die beiden permanenten Limitierungsverfahren V und W heißen miteinander verträglich, wenn aus $V\text{-}\lim s_n = s$ und $W\text{-}\lim s_n = s'$ die Gleichheit $s = s'$ beider Grenzwerte folgt. Die Verfahren V und W heißen äquivalent, wenn aus $V\text{-}\lim s_n = s$ stets $W\text{-}\lim s_n = s$ folgt und umgekehrt.

1.2. Neben den Verfahren T_α und S_α, die wir später definieren werden, wird uns das Euler-Knoppsche und das Borelsche Verfahren [2]) beschäftigen. Wir erwähnen darüber einige bekannte, im folgenden gebrauchte Tatsachen.

Das Euler-Knoppsche Verfahren E_p der reellen positiven Ordnung p gründet sich auf die positive und permanente Dreiecksmatrix

$$E_p = \frac{1}{2^{pn}} \binom{n}{\nu} (2^p - 1)^{n-\nu} \qquad (n, \nu \geqq 0).$$

Sind u und v positiv, so ist

$$E_u E_v = E_{u+v}.$$

Für $0 < p < q$ ist also $E_q = E_{q-p} E_p$. Von dieser Gleichung können wir nach den zu (1. 1. 1) gemachten Bemerkungen bei beliebiger Folge s_n zu der Gleichung

$$E_q s = E_{q-p}(E_p s)$$

übergehen. Die E_p-Transformation von s_n geht also durch Vermittlung der permanenten Matrix E_{q-p} in die E_q-Transformation über. $E_p\text{-}\lim s_n = s$ hat daher $E_q\text{-}\lim s_n = s$ zur Folge ($E_p \to E_q$-Satz).

Das Borelsche Verfahren B ordnet der Folge s_n die B-Transformation

$$Bs = B(x; s_\nu) = e^{-x} \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{x^\nu}{\nu!} s_\nu \qquad (x > 0)$$

[2]) Vgl. K. Knopp [3] und [4], ferner Encyklopädie [1], S. 481.

zu. Lassen wir also bei den in **1.1** betrachteten Matrizen zu, daß an die Stelle des Zeilenindexes $n \geqq 0$ der kontinuierliche Index $x > 0$, an die Stelle von $n \to \infty$ jetzt $x \to \infty$ tritt, während der Spaltenindex auf ganzzahlige $\nu \geqq 0$ beschränkt bleibt, so ist das B-Verfahren das zu der positiven und permanenten Matrix

$$B = B_{x,\nu} = e^{-x}\frac{x^\nu}{\nu!} \qquad (x > 0;\ \nu \geqq 0, \text{ ganz})$$

gehörige Limitierungsverfahren. Ist $V = V_{n\nu}$ eine permanente Matrix, so existiert wie im analogen Fall in **1.1** die wiederum permanente Produktmatrix

$$BV = (BV)_{x,\nu} = e^{-x}\sum_{\mu=0}^{\infty}\frac{x^\mu}{\mu!}V_{\mu\nu} \quad (x > 0;\ \nu \geqq 0, \text{ ganz}),$$

und entsprechend dem Satz 1 gilt die Gleichung

$$(BV)(x; s_\nu) = B(x; Vs),$$

sofern entweder $BV(x; |s_\nu|)$ oder sowohl $V|s|$ als auch $B(x;\ V|s|)$ vorhanden ist. Beispielsweise ist

$$(BE_p)_{x,\nu} = B_{y,\nu} \quad \text{mit} \quad y = \frac{x}{2^p} > 0.$$

Beachtet man, daß $s_n = o((2^{p+1}-1)^n)$ eine notwendige Bedingung für die E_p-Limitierbarkeit der Folge s_n ist, so ergibt sich aus $E_p\text{-}\lim s_n = s$ die Existenz von $B(y; |s_\nu|)$ für jedes positive y, also die Anwendbarkeit von B auf $E_p s$ und die Gleichung

$$B(y; s_\nu) = B(x; E_p s) \quad \text{mit} \quad y = \frac{x}{2^p},\ x > 0.$$

Aus $E_p\text{-}\lim s_n = s$ folgt daher $B\text{-}\lim s_n = s$ ($E_p \to B$-Satz).

Eine gute Orientierung über die Stärke eines Limitierungsverfahrens ergibt sich manchmal durch Anwendung desselben auf die geometrische Reihe. Es sei V positiv und permanent. Dann wird die Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} z^n$ genau für diejenigen z-Werte summiert, und zwar zum Wert $\frac{1}{1-z}$, für die die Folge z^n zum Wert 0 limitiert wird. Denn für $z \neq 1$ ist

$$V\left(n; \frac{1-z^{\nu+1}}{1-z}\right) = V\left(n; \frac{1}{1-z}\right) - \frac{z}{1-z}V(n; z^\nu),$$

und für den Fall $z = 1$ läßt sich unschwer zeigen, daß $V(n; \nu+1) \to +\infty$ strebt für $n \to \infty$. Den Bereich der z-Werte, für die $V\text{-}\sum_{n=0}^{\infty} z^n = \frac{1}{1-z}$ ist, bezeichnen wir mit $\mathfrak{G}'(V)$[3]). Es ist

$$E_p(n; z^\nu) = \frac{(2^p - 1 + z)^n}{2^{pn}}, \quad B(x; z^\nu) = e^{-x(1-z)}.$$

[3]) Mit der Bezeichnung $\mathfrak{G}'$ bleiben wir für diejenigen Verfahren, die sich als verallgemeinerte Eulersche Reihentransformation auffassen lassen, in Einklang mit der von K. Knopp ([5], S. 319) gewählten Bezeichnung.

Daher erhalten wir für die Gebiete $\mathfrak{G}'(E_p)$ und $\mathfrak{G}'(B)$:

$$\mathfrak{G}'(E_p): |z + 2^p - 1| < 2^p, \quad \mathfrak{G}'(B): \Re z < 1.$$

Dieselben illustrieren anschaulich den $E_p \to E_q$-Satz $(0 < p < q)$ und den $E_p \to B$-Satz $(p > 0)$: $\mathfrak{G}'(E_p)$ wird von $\mathfrak{G}'(E_q)$ und von $\mathfrak{G}'(B)$ überdeckt.

§ 2.
Das T_α-Verfahren.

2. 1. Es sei — wie stets, wenn nichts anderes gesagt ist — $0 < \alpha < 1$. Im Anschluß an G. H. Hardy und J. E. Littlewood definieren wir nun das T_α-Verfahren als das zu der positiven Matrix

$$T_\alpha = (1-\alpha)^{n+1}\binom{\nu}{n}\alpha^{\nu-n} \qquad (n, \nu \geqq 0, \text{ ganz})$$

gehörige Limitierungsverfahren, das wir mit R. Wais als Taylorsches Verfahren der Ordnung α bezeichnen[4]). T_α ist permanent. Denn diejenigen Elemente von T_α, für die $0 \leqq \nu < n$ ist, verschwinden, so daß gewiß die Bedingung (Sp) erfüllt ist. Die Bedingungen (Zn) und (Zs) sind erfüllt wegen

$$(1-\alpha)^{n+1}\sum_{\nu=n}^{\infty}\binom{\nu}{n}\alpha^{\nu-n} = (1-\alpha)^{n+1}\sum_{\nu=0}^{\infty}\binom{n+\nu}{\nu}\alpha^{\nu} = 1 \quad (n \geqq 0).$$

Das Verfahren T_α genügt daher der Permanenzforderung: Aus $s_n \to s$ folgt $T_\alpha s \to s$ für $n \to \infty$. Dabei ist also

$$T_\alpha s = (1-\alpha)^{n+1}\sum_{\nu=n}^{\infty}\binom{\nu}{n}\alpha^{\nu-n}s_\nu = (1-\alpha)^{n+1}\sum_{\nu=0}^{\infty}\binom{n+\nu}{\nu}\alpha^{\nu}s_{n+\nu}.$$

T_α ist auf die Folge s_n anwendbar, wenn für jedes $n \geqq 0$ die Reihe

$$\sum_{\nu=n}^{\infty}\binom{\nu}{n}\alpha^{\nu}s_\nu \tag{2. 1. 1}$$

konvergiert. Ist diese Konvergenz für die feste Nummer $n \geqq 0$ vorhanden, so ist für dieses n wegen $\binom{\nu}{n} \simeq \frac{\nu^n}{n!}$ bei $\nu \to \infty$ der Ausdruck $\nu^n \alpha^\nu s_\nu$ beschränkt[5]). Ist umgekehrt mit einer festen Nummer $m \geqq 2$

$$\nu^m \alpha^\nu |s_\nu| < M \quad \text{für } \nu \geqq 0$$

(M von ν unabhängig), so ist für jede feste Nummer n

$$\binom{\nu}{n}\alpha^\nu|s_\nu| < \frac{M}{\nu^m}\binom{\nu}{n} \simeq \frac{M}{n!}\frac{1}{\nu^{m-n}} \quad \text{bei } \nu \to \infty,$$

[4]) G. H. Hardy und J. E. Littlewood [2], insbes. S. 52, 4. 5 (ii) und R. Wais [9], S. 5.

[5]) Sind c_n und d_n Folgen und ist s konstant, so soll $c_n \simeq s d_n$ gleichbedeutend sein mit $c_n/d_n \to s$ für $n \to \infty$.

also die Reihe (2. 1. 1) für $0 \leqq n \leqq m-2$ absolut konvergent. *Für die Anwendbarkeit von T_α auf s_n ist also notwendig und hinreichend die Bedingung*

$$(2.1.2) \qquad s_\nu = O\left(\frac{1}{\nu^n \alpha^\nu}\right) \quad \textit{für jedes } n \geqq 0 \textit{ bei } \nu \to \infty.$$

Ist sie erfüllt, so konvergiert die Reihe für $T_\alpha s$ für alle n absolut. *Mit $T_\alpha s$ ist auch $T_\alpha |s|$ vorhanden.*

Es folgt: T_α ist auf s_n sicher dann anwendbar, wenn der Konvergenzradius r der Potenzreihe $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = (1-x)\sum_{n=0}^{\infty} s_n x^n$ größer als α ist; umgekehrt gilt sicher $r \geqq \alpha$, wenn T_α auf s_n anwendbar ist. Bei Hardy und Littlewood wird die T_α-Transformation nur in Fällen mit $r = 1$ gebildet. R. Wais, die das T_α-Verfahren mehr systematisch untersucht hat, verlangt $r > \alpha$, wenn $T_\alpha\text{-}\lim s_n = s$ sein soll. Die oben gewählte Definition ist etwas allgemeiner, da bei ihr auch der Fall $r = \alpha$ möglich ist, wodurch das Anwendungsfeld des Verfahrens vergrößert wird.

Der Permanenzsatz des T_α-Verfahrens ist für $a = 1$ enthalten in dem folgenden

Satz 2. *Es sei $0 < a < \frac{1}{\alpha}$, s beliebig, ferner $s_n \simeq s a^n$ für $n \to \infty$, so daß gewiß T_α auf s_n anwendbar ist. Dann gilt*

$$T_\alpha s \simeq \frac{(1-\alpha)s}{1-\alpha a}\left(\frac{(1-\alpha)a}{1-\alpha a}\right)^n.$$

Beweis. Ist $|s_n - s a^n| < \varepsilon a^n$ für $n > m$, so ist dafür

$$\left|T_\alpha s - \frac{(1-\alpha)s}{1-\alpha a}\left(\frac{(1-\alpha)a}{1-\alpha a}\right)^n\right| = (1-\alpha)^{n+1}\left|\sum_{\mu=n}^{\infty}\binom{\mu}{n}\alpha^{\mu-n}(s_\mu - s a^\mu)\right|$$

$$< (1-\alpha)^{n+1}\varepsilon\sum_{\mu=n}^{\infty}\binom{\mu}{n}\alpha^{\mu-n}a^\mu = \varepsilon\frac{1-\alpha}{1-\alpha a}\left(\frac{(1-\alpha)a}{1-\alpha a}\right)^n.$$

Daß das T_α-Verfahren divergente Folgen zu limitieren vermag, zeigen einfache Beispiele. Wir untersuchen, in welchem Bereich $\mathfrak{G}'(T^\alpha)$ die geometrische Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} z^n$ zum Wert $\frac{1}{1-z}$ summiert oder die Folge z^n zum Wert 0 limitiert wird. T_α ist auf z^n anwendbar für $|z| < \frac{1}{\alpha}$, und es ist in diesem Fall

$$T_\alpha(n; z^\nu) = \frac{1-\alpha}{1-\alpha z}w^n \quad \text{mit} \quad w = \frac{(1-\alpha)z}{1-\alpha z}.$$

Dieser Ausdruck strebt gegen 0 für $|w| < 1$. Damit läßt sich das Gebiet $\mathfrak{G}'(T_\alpha)$ leicht feststellen. Man findet[6]):

[6]) Vgl. R. Wais [9], S. 40 ff.

$$(2.1.3)\quad \mathfrak{G}'(T_\alpha): \begin{cases} \left|z-\frac{\alpha}{2\alpha-1}\right| < \frac{1-\alpha}{1-2\alpha} & \text{für } 0<\alpha\leqq\frac{1}{3}, \\ \left|z-\frac{\alpha}{2\alpha-1}\right| < \frac{1-\alpha}{1-2\alpha},\ |z|<\frac{1}{\alpha} & \text{für } \frac{1}{3}<\alpha<\frac{1}{2}, \\ \Re z<1,\ |z|<2 & \text{für } \alpha=\frac{1}{2}, \\ \left|z-\frac{\alpha}{2\alpha-1}\right| > \frac{1-\alpha}{2\alpha-1},\ |z|<\frac{1}{\alpha} & \text{für } \frac{1}{2}<\alpha<1. \end{cases}$$

Das Verfahren T_α vermag also die Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} z^n$ in außerhalb ihres Konvergenzkreises gelegenen Gebieten zu summieren. Jedoch liegen alle Gebiete $\mathfrak{G}'(T_\alpha)$ im Innern des Kreises $|z|=3$.

2.2. Um die funktionentheoretische Seite des T_α-Verfahrens, die für HARDY und LITTLEWOOD und R. WAIS den Ausgangspunkt der Definition bildete, darzustellen, untersuchen wir, welche Gestalt die T_α-Transformation beim Übergang von Folgen zu Reihen annimmt.

Es sei T_α auf s_n anwendbar. Wir setzen $t_n = T_\alpha s = \sum_{\nu=0}^{n} b_\nu$ und wollen die b_n in den a_n ausdrücken. Es ist

$$b_0 = t_0 = (1-\alpha)\sum_{\nu=0}^{\infty}\alpha^\nu s_\nu = \sum_{\nu=0}^{\infty}\alpha^\nu a_\nu,$$

und für $n\geqq 1$

$$\frac{b_n}{(1-\alpha)^n} = \frac{t_n - t_{n-1}}{(1-\alpha)^n} = \sum_{\nu=0}^{\infty}\binom{n+\nu}{\nu}\alpha^\nu s_{n+\nu}$$

$$-\left(\sum_{\nu=0}^{\infty}\binom{n+\nu}{\nu}\alpha^{\nu+1}s_{n+\nu} + s_{n-1} + \sum_{\nu=1}^{\infty}\binom{n+\nu-1}{\nu}\alpha^\nu s_{n+\nu-1}\right)$$

$$= \sum_{\nu=0}^{\infty}\binom{n+\nu}{\nu}\alpha^\nu s_{n+\nu} - \left(s_{n-1} + \sum_{\nu=1}^{\infty}\left[\binom{n+\nu-1}{\nu-1} + \binom{n+\nu-1}{\nu}\right]\alpha^\nu s_{n+\nu-1}\right)$$

$$= \sum_{\nu=0}^{\infty}\binom{n+\nu}{\nu}\alpha^\nu s_{n+\nu} - \sum_{\nu=0}^{\infty}\binom{n+\nu}{\nu}\alpha^\nu s_{n+\nu-1} = \sum_{\nu=0}^{\infty}\binom{n+\nu}{\nu}\alpha^\nu a_{n+\nu};$$

$$b_n = (1-\alpha)^n\sum_{\nu=0}^{\infty}\binom{n+\nu}{\nu}\alpha^\nu a_{n+\nu} = \frac{1}{1-\alpha}T_\alpha(n;a_\nu) \quad \text{für } n\geqq 0.$$

Daß T_α auf a_n anwendbar ist, hat sich dabei von selbst mitergeben. Wir zeigen, daß umgekehrt aus der Anwendbarkeit von T_α auf a_n die Anwendbarkeit auf s_n folgt. Für ein festes $n\geqq 0$ sei

$$\nu^n\alpha^\nu|a_\nu| < M \quad (\nu>0,\ M \text{ von } \nu \text{ unabhängig}).$$

Dann ist, wenn μ ganz und $\frac{\nu-1}{2}\leqq\mu\leqq\frac{\nu}{2}$ ist,

$$\nu^n \alpha^\nu |s_\nu| < \nu^n \alpha^\nu |a_0| + M \sum_{\lambda=1}^{\mu} \frac{\nu^n \alpha^\nu}{\lambda^n \alpha^\lambda} + M \sum_{\lambda=\mu+1}^{\nu} \frac{\nu^n \alpha^\nu}{\lambda^n \alpha^\lambda}$$

$$< \nu^n \alpha^\nu |a_0| + M \nu^n \alpha^{\nu-\mu} \sum_{\sigma=0}^{\mu-1} \alpha^\sigma + M \left(\frac{\nu}{\mu+1}\right)^n \sum_{\sigma=0}^{\nu-\mu-1} \alpha^\sigma$$

$$< \nu^n \alpha^\nu |a_0| + \frac{M}{1-\alpha} (\nu^n \alpha^{\frac{\nu}{2}} + 2^n) = O(1) \quad \text{für } \nu \to \infty.$$

Wir formulieren das Ergebnis als

Satz 3. *Die Anwendbarkeit von T_α auf s_n ist gleichbedeutend mit der Anwendbarkeit von T_α auf a_n. Die Aussage $\lim_{n\to\infty} T_\alpha(n; s_\nu) = s$ ist gleichbedeutend mit der Aussage*

$$(2.2.1) \qquad \sum_{n=0}^{\infty} (1-\alpha)^n \sum_{\nu=0}^{\infty} \binom{n+\nu}{\nu} \alpha^\nu a_{n+\nu} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{T_\alpha(n; a_\nu)}{1-\alpha} = s,$$

in der links die T_α-Transformation der Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ steht.

Nun sei T_α auf a_n anwendbar. Wegen der auf a_n anstatt s_n angewandten Bedingung (2.1.2) konvergieren die Reihen

$$f(z) = \sum_{\nu=0}^{\infty} a_\nu z^\nu, \quad \frac{1}{n!} f^{(n)}(z) = \sum_{\nu=0}^{\infty} \binom{n+\nu}{\nu} a_{n+\nu} z^\nu \qquad (n \geqq 0)$$

vom Konvergenzradius $r \geqq \alpha$ absolut für $|z| \leqq \alpha$. Ist $f(z)$ in $z = \alpha$ regulär, so ist wegen des Abelschen Stetigkeitssatzes

$$\frac{1}{n!} f^{(n)}(\alpha) = \frac{1}{(1-\alpha)^{n+1}} T_\alpha(n; a_\nu),$$

also die Gleichung (2.2.1) gleichbedeutend damit, daß die Taylor-Entwicklung

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} f^{(n)}(\alpha) (z-\alpha)^n = \mathfrak{P}(z-\alpha)$$

von $f(z)$ an der Stelle $z = \alpha$ im Punkt $z = 1$ zur Summe s konvergiert. Verstehen wir unter $\mathfrak{G}(T_\alpha)$ das Kreisgebiet

$$\mathfrak{G}(T_\alpha): |z-\alpha| < 1-\alpha,$$

so gilt also

Satz 4. *T_α sei auf a_n anwendbar, so daß $f(z) = \sum_{\nu=0}^{\infty} a_\nu z^\nu$ für $|z| < \alpha$ regulär ist. Ist $f(z)$ auch für $z = \alpha$ regulär, so ist dann und nur dann T_α-$\sum_{n=0}^{\infty} a_n = s$, wenn sich $f(z)$ in das Gebiet $\mathfrak{G}(T_\alpha)$ hinein analytisch fortsetzen läßt und das Funktionselement $\mathfrak{P}(z-\alpha)$, das diese Fortsetzung bewirkt, im Punkt $z = 1$, also für $z - \alpha = 1 - \alpha$ zum Wert s konvergiert.*

Setzen wir $z - \alpha = y$, so bekommen wir im Falle der Regularität von $f(z)$ für $z = \alpha$ das Funktionselement $\mathfrak{P}(y)$ formal dadurch, daß

wir in $\sum_{\nu=0}^{\infty} a_\nu z^\nu$ mit $z = \alpha + y$ eingehen und nach Potenzen von y umordnen:

$$\sum_{\nu=0}^{\infty} a_\nu (\alpha+y)^\nu = \sum_{\nu=0}^{\infty} a_\nu \sum_{n=0}^{\nu} \binom{\nu}{n} \alpha^{\nu-n} y^n = \sum_{n=0}^{\infty} y^n \sum_{\nu=n}^{\infty} \binom{\nu}{n} \alpha^{\nu-n} a_\nu$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{y^n}{(1-\alpha)^{n+1}} T_\alpha(n; a_\nu) = \mathfrak{P}(y).$$

Die T_α-Transformation (2.2.1) von $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ erhalten wir dann, indem wir in der umgeordneten Reihe $y = 1-\alpha$ setzen. Wir können statt dessen, indem wir $\frac{y}{1-\alpha} = \frac{z-\alpha}{1-\alpha} = x$ setzen, auch $z = \alpha + (1-\alpha)x$ in $\sum_{\nu=0}^{\infty} a_\nu z^\nu$ einführen, nach Potenzen von x umordnen, was

$$f(\alpha + (1-\alpha)x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{1-\alpha} T_\alpha(n; a_\nu) = \mathfrak{P}((1-\alpha)x) = \mathfrak{Q}(x)$$

liefert, und hierauf $x = 1$ setzen.

Ist nun aber $f(z)$ in $z = \alpha$ singulär, so entsteht die Reihe (2.2.1) zwar immer noch aus der formal wie soeben gebildeten Potenzreihe $\mathfrak{P}(y)$ für $y = 1-\alpha$ oder $\mathfrak{Q}(x)$ für $x = 1$, doch können dann die Funktionselemente $\mathfrak{P}(y)$ und $\mathfrak{Q}(x)$, wenn sie positive Konvergenzradien besitzen, nicht die analytische Fortsetzung von $f(z)$ sein.

Wir werden in späteren Beweisen verschiedentlich mit $\mathfrak{P}(y)$ als der Fortsetzung von $f(z)$ arbeiten und dann außer der Anwendbarkeit von T_α auf s_n auch die Regularität von $f(z)$ in $z = \alpha$ verlangen müssen. Diese Bedingung ist aber immer noch allgemeiner, als wenn wir $r > \alpha$ als Voraussetzung für $T_\alpha\text{-}\lim s_n = s$ verlangen würden.

Die funktionentheoretische Fassung des T_α-Verfahrens zeigt, daß wir es, wie schon R. Wais [9] festgestellt hat, im wesentlichen mit einer verallgemeinerten Eulerschen Reihentransformation im Sinne von K. Knopp [5] zu tun haben. Bei einer solchen wird zur Summierung der Reihe $\sum_{\nu=0}^{\infty} a_\nu$ das z in $\sum_{\nu=0}^{\infty} a_\nu z^\nu$ ersetzt durch die Reihe $E(x) = \sum_{\lambda=0}^{\infty} \gamma_\lambda x^\lambda$, die gewissen Bedingungen genügen muß, dann wird nach Potenzen von x umgeordnet und schließlich $x = 1$ gesetzt. Das T_α-Verfahren erhalten wir für $E(x) = \alpha + (1-\alpha)x$. Die von K. Knopp an $E(x)$ gestellten Forderungen sind erfüllt mit der Ausnahme, daß das Gebiet $\mathfrak{G}(T_\alpha)$ der z-Ebene, in welches das Gebiet $|x| < 1$ durch die Abbildung $z = E(x)$ übergeht, für $\frac{1}{2} < \alpha < 1$ nicht alle Eigenschaften einer erzeugenden Figur besitzt [7]).

[7]) Auf die Anwendung des T_α-Verfahrens zur Summierung von Potenzreihen gehen wir in der vorliegenden Arbeit nicht ein. Da diese Frage auch bei R. Wais [9] nicht vollständig behandelt ist, sei hier wenigstens erwähnt, daß der Hauptsatz 2 von K. Knopp ([5], S. 332), angewendet auf das T_α-Verfahren, auch in den Fällen im Ergebnis richtig bleibt, in denen $\mathfrak{G}(T_\alpha)$ keine erzeugende Figur ist.

Im Anschluß an K. KNOPP hat F. LÖSCH [7] die EULERsche Reihentransformation noch weiter so verallgemeinert, daß bei der Anwendung auf die Potenzreihe $F(z) = \sum_{\nu=0}^{\infty} c_\nu z^\nu$ darin die TAYLOR-Transformation, d. h. die Entwicklung

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} F^{(n)}(z_0)(z - z_0)^n$$

von $F(z)$ um einen neuen Mittelpunkt z_0 als Spezialfall enthalten ist. Die T_α-Transformation des Funktionselementes $F(z)$ lautet nach (2. 2. 1) für die Stelle $z = z_1$

$$\sum_{n=0}^{\infty} (z_1 - \alpha z_1)^n \sum_{\nu=0}^{\infty} \binom{n+\nu}{\nu} (\alpha z_1)^\nu c_{n+\nu} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} F^{(n)}(\alpha z_1)(z_1 - \alpha z_1)^n.$$

Die für einen ganzen z-Bereich angesetzte TAYLOR-Transformation eines Funktionselementes im Sinne von F. LÖSCH stimmt also mit der für dieselben z-Werte angesetzten T_α-Transformation desselben nicht überein. Übereinstimmung hat man dagegen, wenn man sich auf eine feste Stelle $z = z_1$ beschränkt und $z_0 = \alpha z_1$ wählt.

2.3. Das Verhältnis der T_α-Verfahren verschiedener Ordnung zueinander hat R. WAIS [9] durch Hintereinanderschaltung zweier TAYLOR-Verfahren festgestellt. Es gilt

Satz 5. *Es sei* $0 < \alpha < 1$, $0 < \beta < 1$ *und* $\alpha + \beta - \alpha\beta = \gamma$ *gesetzt, so daß* $\operatorname{Max}(\alpha; \beta) < \gamma < 1$ *ist. Dann gilt*

$$T_\alpha T_\beta = T_\beta T_\alpha = T_\gamma.$$

Beweis. Für $\mu \geqq n \geqq 0$, $\nu \geqq 0$ ist

$$\binom{\nu}{\mu}\binom{\mu}{n} = \binom{\nu}{n}\binom{\nu - n}{\mu - n},$$

also für $n, \nu \geqq 0$, wenn wir unter einer leeren Summe 0 verstehen,

$$\begin{aligned}
T_\alpha T_\beta &= \frac{(1-\alpha)^{n+1}(1-\beta)\beta^\nu}{\alpha^n} \sum_{\mu=0}^{\infty} \binom{\mu}{n}\binom{\nu}{\mu} \frac{\alpha^\mu (1-\beta)^\mu}{\beta^\mu} \\
&= \frac{(1-\alpha)^{n+1}(1-\beta)\beta^\nu}{\alpha^n} \binom{\nu}{n} \sum_{\mu=n}^{\infty} \binom{\nu - n}{\mu - n} \frac{\alpha^\mu (1-\beta)^\mu}{\beta^\mu} \\
&= \frac{(1-\alpha)^{n+1}(1-\beta)^{n+1}\beta^\nu}{\beta^n} \binom{\nu}{n} \sum_{\lambda=0}^{\nu-n} \binom{\nu - n}{\lambda} \frac{\alpha^\lambda (1-\beta)^\lambda}{\beta^\lambda} \\
&= (1-\alpha)^{n+1}(1-\beta)^{n+1}\binom{\nu}{n}(\alpha + \beta - \alpha\beta)^{\nu-n}. \\
&= (1-\gamma)^{n+1}\binom{\nu}{n}\gamma^{\nu-n} = T_\gamma = T_\beta T_\alpha.
\end{aligned}$$

Folgerung. *Es sei* $0 < \beta < \gamma < 1$, $0 < a < \dfrac{1-\beta}{\gamma - \beta}$ *und* T_γ *auf* s_n *anwendbar, so daß gewiß auch* T_β *auf* s_n *anwendbar ist. Weiter sei* $T_\beta s \cong s a^n$ *für* $n \to \infty$. *Dann ist*

$$T_\gamma s \cong \frac{(1-\gamma)s}{1 - \beta - a(\gamma - \beta)} \left(\frac{(1-\gamma)a}{1 - \beta - a(\gamma - \beta)} \right)^n.$$

Zum Beweis setzen wir $\alpha = \frac{\gamma - \beta}{1 - \beta}$. Nach Satz 5 ist dann $T_\gamma = T_\alpha T_\beta$. Da T_γ auf s_n und also auf $|s_n|$ anwendbar ist, gilt nach Satz 1: $T_\gamma s = T_\alpha(T_\beta s)$. Die Behauptung ergibt sich nun aus Satz 2. Insbesondere dürfen wir $a = 1$ nehmen und erhalten damit

Satz 6. *Es sei* $0 < \beta < \gamma < 1$, $T_\beta\text{-}\lim s_n = s$ *und* T_γ *auf* s_n *anwendbar. Dann ist* $T_\gamma\text{-}\lim s_n = s$.

In einem gewissen eingeschränkten Sinn ist also das Taylorsche Verfahren umso stärker, je größer seine Ordnung α ist. Wir bezeichnen den Satz 6 als $T_\beta \to T_\gamma$-Satz. Bei dieser Ausdrucksweise ist aber zu beachten, daß aus $T_\beta\text{-}\lim s_n = s$ allein noch nicht $T_\gamma\text{-}\lim s_n = s$ folgt. Speziell ergibt sich aus Satz 6, daß die Taylor-Verfahren aller Ordnungen miteinander verträglich sind.

§ 4. Wir benötigen im folgenden die Umkehrung der T_α-Transformation, d. h. die Darstellung der s_n in den t_n, wenn $t_n = T_\alpha s$ ist. Wir setzen dazu voraus, daß T_α auf s_n anwendbar und $\sum_{\nu=0}^{\infty} a_\nu z^\nu$ an der Stelle $z = \alpha$ regulär ist. Das für $|z| \leqq \alpha$ konvergente Funktionselement

$$g(z) = \sum_{\nu=0}^{\infty} s_\nu z^\nu = \frac{1}{1-z} \sum_{\nu=0}^{\infty} a_\nu z^\nu$$

ist dann bei $z = \alpha$ ebenfalls regulär, für ein geeignetes $\varrho > 0$ ist also

$$g(z) = \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{g^{(\nu)}(\alpha)}{\nu!} (z-\alpha)^\nu \qquad \text{für } |z-\alpha| < \varrho$$

konvergent. Nun ist aber für $n \geqq 0$

$$\frac{1}{n!} g^{(n)}(z) = \sum_{\nu=0}^{\infty} \binom{n+\nu}{\nu} s_{n+\nu} z^\nu \qquad \text{für } |z| < \alpha,$$

und die rechts stehende Reihe konvergiert noch für $z = \alpha$, so daß man wegen des Abelschen Stetigkeitssatzes

$$\frac{1}{n!} g^{(n)}(\alpha) = \frac{t_n}{(1-\alpha)^{n+1}}$$

schreiben kann. Daher ist

$$g(z) = \frac{1}{1-\alpha} \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{t_\nu}{(1-\alpha)^\nu} (z-\alpha)^\nu \qquad \text{für } |z-\alpha| < \varrho,$$

und allgemein für $n \geqq 0$

$$\frac{1}{n!} g^{(n)}(z) = \frac{1}{(1-\alpha)^{n+1}} \sum_{\nu=0}^{\infty} \binom{n+\nu}{\nu} \frac{t_{n+\nu}}{(1-\alpha)^\nu} (z-\alpha)^\nu \qquad \text{für } |z-\alpha| < \varrho.$$

Betrachtet man nun das zu der rechts stehenden Potenzreihenentwicklung gehörige Borelsche Summabilitätspolygon[8]), so stellt man leicht

[8]) Vgl. Encyklopädie [1], S. 453—455.

fest, daß der Punkt $z = 0$ in dessen Innerem liegt, da die dargestellte Funktion nicht nur in $|z-\alpha| < \varrho$, sondern auch in $|z| < \alpha$ regulär ist. Bezeichnen wir die Borelsche Summe einer B-summierbaren Reihe $\sum_{\nu=0}^{\infty} c_\nu$ mit $\sum_{\nu=0}^{\infty}{}' c_\nu$, so gelangt man damit wegen $s_n = \frac{1}{n!} g^{(n)}(0)$ zu

Satz 7. *T_α sei auf s_n anwendbar und $\sum_{\nu=0}^{\infty} a_\nu z^\nu$ bei $z = \alpha$ regulär. Wird dann $T_\alpha s = t_n$ gesetzt, so ist für $n \geqq 0$*

$$(2.\,4.\,1) \qquad s_n = \frac{1}{(1-\alpha)^{n+1}} \sum_{\nu=0}^{\infty}{}' \binom{n+\nu}{\nu} \left(\frac{-\alpha}{1-\alpha}\right)^\nu t_{n+\nu}$$

mit gesicherter B-Summierbarkeit der rechts stehenden Reihe.

Wir wenden dieses Ergebnis sogleich an, um eine notwendige Bedingung für die T_α-Limitierbarkeit abzuleiten.

Es sei $0 < \alpha < \frac{1}{3}$, T_α-lim $s_n = s$ und $\sum_{\nu=0}^{\infty} a_\nu z^\nu$ bei $z = \alpha$ regulär. Dann ist

$$(2.\,4.\,2) \qquad s_n = o\left((1-2\alpha)^{-n}\right) \qquad \text{für } n \to \infty.$$

Der Beweis braucht nur für den Fall $s = 0$ geführt zu werden. Da dann $t_n = T_\alpha s$ eine Nullfolge, außerdem $\frac{\alpha}{1-\alpha} < \frac{1}{2}$ ist, ist die Reihe (2. 4. 1) nicht nur B-summierbar, sondern sogar konvergent, und, wenn $|t_n| < \varepsilon$ ist für $n > N$, dafür

$$(1-2\alpha)^n |s_n| < \frac{(1-2\alpha)^n \varepsilon}{(1-\alpha)^{n+1}} \sum_{\nu=0}^{\infty} \binom{n+\nu}{\nu} \left(\frac{\alpha}{1-\alpha}\right)^\nu = \frac{\varepsilon}{1-2\alpha}.$$

Die damit bewiesene Bedingung (2. 4. 2) geht wegen $\alpha < \frac{1}{3}$ hinaus über die Bedingung (2. 1. 2), daß $s_\nu = O(\nu^{-n} \alpha^{-\nu})$ ist für jedes feste n bei $\nu \to \infty$. Für $\alpha \geqq \frac{1}{3}$ bringt die entsprechende Überlegung keinen Gewinn. Eine in der Richtung von (2. 4. 2) liegende Bedingung kann man auch folgendermaßen bekommen. Nach Satz 4 ist $\sum_{\nu=0}^{\infty} a_\nu z^\nu$ für $|z-\alpha| < 1-\alpha$, also bei $0 < \alpha < \frac{1}{2}$ gewiß für $|z| < 1-2\alpha$ regulär. Daher hat $\sum_{\nu=0}^{\infty} s_\nu z^\nu$ mindestens den Konvergenzradius $1-2\alpha$, d. h. es ist

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} \sqrt[n]{|s_n|} \leqq \frac{1}{1-2\alpha}.$$

Die Bedingung (2. 4. 2) sagt mehr aus. Wir benützen sie zu einer teilweisen Verschärfung des Satzes 6:

Es sei $0 < \beta < \frac{1}{3}$, T_β-lim $s_n = s$ und $\sum_{\nu=0}^{\infty} a_\nu z^\nu$ bei $z = \beta$ regulär. Dann ist T_γ-lim $s_n = s$ für jedes γ mit $\beta < \gamma < 1-2\beta$.

Es genügt zu zeigen, daß T_γ auf s_n anwendbar ist, was wegen $s_n = o\left((1-2\beta)^{-n}\right)$ der Fall ist. Satz 6 und seine Verschärfung werden illustriert durch die Gebiete $\mathfrak{G}'(T_\alpha)$ (vgl. 2. 1. 3). Ist $\beta < \gamma$, so überdeckt

$\mathfrak{G}'(T_\gamma)$ denjenigen Teil des Gebietes $\mathfrak{G}'(T_\beta)$, für dessen z-Werte T_γ auf z^n anwendbar ist. Ist $\beta < \frac{1}{3}$, so wird $\mathfrak{G}'(T_\beta)$ überdeckt von allen Gebieten $\mathfrak{G}'(T_\gamma)$, die zu Ordnungen γ mit $\beta < \gamma < 1-2\beta$ gehören.

2. 5. Wir untersuchen nun, wie sich bei einer T_α-limitierbaren Folge eine Indexverschiebung auswirkt. Wir bezeichnen

mit t_n die T_α-Transformation der Folge $s_0 = 0, s_1, s_2, \ldots,$

mit t'_n die T_α-Transformation der Folge $s_1, s_2, s_3, \ldots$.

T_α ist entweder auf beide Folgen oder auf keine anwendbar. Nach R. Wais [9] folgt aus $t'_n \to s$ stets $t_n \to s$ und kann für $\frac{1}{2} < \alpha < 1$ umgekehrt von $t_n \to s$ auf $t'_n \to s$ geschlossen werden. Darüber hinaus beweisen wir den zusammenfassenden

Satz 8. *Die T_α-Transformationen t_n und t'_n seien vorhanden. Aus $t'_n \to s$ folgt stets $t_n \to s$. Ist $\frac{1}{2} < \alpha < 1$, so folgt aus $t_n \to s$ umgekehrt $t'_n \to s$. Für $0 < \alpha \leqq \frac{1}{2}$ ist der Schluß von $t_n \to s$ auf $t'_n \to s$ sicher dann richtig, wenn $\sum_{\nu=1}^{\infty} a_\nu z^\nu$ in $z = \alpha$ regulär ist.*

Beweis. Es ist

$$t_0 = (1-\alpha)\sum_{\nu=1}^{\infty} \alpha^\nu s_\nu, \quad t_n = (1-\alpha)^{n+1}\sum_{\nu=0}^{\infty}\binom{n+\nu}{\nu}\alpha^\nu s_{n+\nu} \quad \text{für } n \geqq 1,$$

$$t'_n = (1-\alpha)^{n+1}\sum_{\nu=0}^{\infty}\binom{n+\nu}{\nu}\alpha^\nu s_{n+\nu+1} \quad \text{für } n \geqq 0.$$

Daraus folgt $t_0 = \alpha t'_0$ und für $n \geqq 1$

$$t_n = (1-\alpha)\, t'_{n-1} + \alpha\, t'_n, \tag{2. 5. 1}$$

denn in der letzten Gleichung ist die rechte Seite gleich

$$(1-\alpha)^{n+1} s_n + (1-\alpha)^{n+1}\sum_{\nu=1}^{\infty}\left[\binom{n-1+\nu}{\nu} + \binom{n-1+\nu}{\nu-1}\right]\alpha^\nu s_{n+\nu}$$

$$= (1-\alpha)^{n+1}\sum_{\nu=0}^{\infty}\binom{n+\nu}{\nu}\alpha^\nu s_{n+\nu} = t_n.$$

Aus $t'_n \to s$ folgt also $t_n \to s$.

Aus (2. 5. 1) ergibt sich für t'_n die Rekursionsformel

$$t'_n = \frac{\alpha-1}{\alpha}\, t'_{n-1} + \frac{1}{\alpha}\, t_n \qquad (n \geqq 1),$$

welche zusammen mit $t'_0 = \frac{1}{\alpha}\, t_0$ für $n \geqq 0$ die Beziehung

$$t'_n = \frac{1}{\alpha}\sum_{\nu=0}^{n}\left(\frac{\alpha-1}{\alpha}\right)^{n-\nu} t_\nu = Vt \tag{2. 5. 2}$$

liefert, wobei V eine Dreiecksmatrix mit den Elementen

$$V_{n\nu} = \frac{1}{\alpha}\left(\frac{\alpha-1}{\alpha}\right)^{n-\nu} \quad \text{für } 0 \leqq \nu \leqq n \qquad (n \geqq 0)$$

ist. Man zeigt leicht, daß V permanent ist für $\frac{1}{2} < \alpha < 1$. Dann folgt aus $t_n \to s$ also $t'_n \to s$.

Nun sei $0<\alpha<\frac{1}{2}$ und $\sum_{\nu=1}^{\infty} a_\nu z^\nu$ für $z=\alpha$ regulär. Wenden wir auf die T_α-Transformation t_n der Folge $0, s_1, s_2, \ldots$ mit $a_0=0$ den Satz 7 für $n=0$ an, so ergibt sich

$$\frac{1}{1-\alpha}\sum_{\nu=0}^{\infty}{}'\left(\frac{-\alpha}{1-\alpha}\right)^\nu t_\nu = 0.$$

Setzen wir t_n als konvergent voraus, so ist diese Reihe wegen $\frac{\alpha}{1-\alpha}<1$ schon im gewöhnlichen Sinn konvergent, also

$$t_0 = -\sum_{\nu=1}^{\infty}\left(\frac{-\alpha}{1-\alpha}\right)^\nu t_\nu.$$

Damit folgt aus (2.5.2) für $n\geqq 0$

$$t_n' = -\frac{1}{\alpha}\left(\frac{\alpha-1}{\alpha}\right)^n\sum_{\nu=1}^{\infty}\left(\frac{-\alpha}{1-\alpha}\right)^\nu t_\nu + \frac{1}{\alpha}\sum_{\nu=1}^{n}\left(\frac{\alpha}{\alpha-1}\right)^{\nu-n} t_\nu$$

$$= -\frac{1}{\alpha}\sum_{\nu=n+1}^{\infty}\left(\frac{\alpha}{\alpha-1}\right)^{\nu-n} t_\nu = W t,$$

$$W = W_{n\nu} = \begin{cases} 0 & \text{für } 0\leqq\nu\leqq n,\\ -\frac{1}{\alpha}\left(\frac{\alpha}{\alpha-1}\right)^{\nu-n} & \text{für } \nu>n, \end{cases} \qquad (n\geqq 0).$$

Die Matrix W ist für $0<\alpha<\frac{1}{2}$ permanent. Aus $t_n\to s$ folgt also $t_n'\to s$.

Es bleibt noch der Fall $\alpha=\frac{1}{2}$ zu erledigen. Wir setzen

$$f(z)=\sum_{\nu=0}^{\infty} a_\nu z^\nu = z\,g(z), \quad g(z)=\sum_{\nu=0}^{\infty} a_{\nu+1} z^\nu.$$

Es strebe $T_\alpha s = t_n\to s$, und es sei $f(z)$ und damit $g(z)$ in $z=\alpha$ regulär. Nach **2.2** ist dann

$$(2.5.3)\qquad f\left(\frac{1}{2}+\frac{x}{2}\right)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{2^n}\sum_{\nu=0}^{\infty}\binom{n+\nu}{\nu}\frac{a_{n+\nu}}{2^\nu}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{c_n}{2^n}x^n$$

für $|x|<1$ regulär und bei $x=1$ konvergent zur Summe s:

$$(2.5.4)\qquad \sum_{n=0}^{\infty}\frac{c_n}{2^n}=s.$$

Da hiernach $\frac{c_n}{2^n}\to 0$ strebt für $n\to\infty$, und das Funktionselement (2.5.3) in $x=-1$ regulär ist und daselbst verschwindet, erhält man nach einem bekannten Satz von P. Fatou[9])

$$(2.5.5)\qquad \sum_{n=0}^{\infty}\frac{c_n}{(-2)^n}=0.$$

Zu beweisen ist, daß $t_n'\to s$ strebt, d. h. daß die in der Umgebung von $x=0$ sicher vorhandene Entwicklung von $g\left(\frac{1}{2}+\frac{x}{2}\right)$ nach Potenzen

[9]) Vgl. Encyklopädie [1], S. 485.

von x für $x = 1$ zum Wert s konvergiert. Nun ist

$$g\left(\frac{1}{2}+\frac{x}{2}\right) = \frac{2}{1+x}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{c_n}{2^n}x^n = 2\sum_{n=0}^{\infty}(-x)^n\sum_{\nu=0}^{n}\frac{c_\nu}{(-2)^\nu}.$$

Es handelt sich also darum zu zeigen, daß

$$\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\sum_{\nu=0}^{n}\frac{c_\nu}{(-2)^\nu} = \frac{s}{2}$$

ist. Bezeichnen wir die Teilsummen dieser Reihe mit C_n, so ist für $n \geqq 0$

$$C_{2n} = \sum_{\nu=0}^{n}\frac{c_{2\nu}}{2^{2\nu}}, \quad C_{2n+1} = \sum_{\nu=0}^{n}\frac{c_{2\nu+1}}{2^{2\nu+1}}.$$

Addition von (2.5.4) und (2.5.5) ergibt

$$2\sum_{\nu=0}^{\infty}\frac{c_{2\nu}}{2^{2\nu}} = s, \quad \text{d. h. } 2C_{2n} \to s,$$

Subtraktion ergibt

$$2\sum_{\nu=0}^{\infty}\frac{c_{2\nu+1}}{2^{2\nu+1}} = s, \quad \text{d. h. } 2C_{2n+1} \to s.$$

Damit ist Satz 8 in allen Teilen bewiesen.

§ 3.

Das S_α-Verfahren.

3.1. Wir definieren nun ein neues Limitierungsverfahren, das S_α-Verfahren, das dem T_α-Verfahren zunächst mindestens äußerlich verwandt ist. Es sei wieder $0 < \alpha < 1$. Wir setzen

$$S_\alpha = (1-\alpha)^{n+1}\binom{n+\nu}{\nu}\alpha^\nu \qquad (n, \nu \geqq 0, \text{ ganz}).$$

Der Vergleich der Transformationen

$$T_\alpha s = (1-\alpha)^{n+1}\sum_{\nu=0}^{\infty}\binom{n+\nu}{\nu}\alpha^\nu s_{n+\nu} \text{ und } S_\alpha s = (1-\alpha)^{n+1}\sum_{\nu=0}^{\infty}\binom{n+\nu}{\nu}\alpha^\nu s_\nu$$

zeigt, daß die Matrix S_α dadurch entsteht, daß die Elemente einer Zeile der Matrix T_α so weit nach links geschoben werden, daß keine verschwindenden Elemente mehr auftreten.

Für eine feste Nummer $n \geqq 0$ ist $\binom{n+\nu}{\nu} = \binom{\nu+n}{n} \simeq \frac{\nu^n}{n!}$ bei $\nu \to \infty$. Genau wie in **2.1** bei T_α zeigt man daher: *Für die Anwendbarkeit von S_α auf s_n ist notwendig und hinreichend die Bedingung*

$$s_\nu = O\left(\frac{1}{\nu^n\alpha^\nu}\right) \textit{ für jedes } n \geqq 0 \textit{ bei } \nu \to \infty;$$

ist sie erfüllt, so konvergieren die Reihen für $S_\alpha s$ für alle n absolut. S_α ist also genau dann auf s_n anwendbar, wenn T_α es ist. Aus der Anwendbarkeit von S_α auf s_n folgt die Konvergenz der Reihen $\sum_{\nu=0}^{\infty} s_\nu z^\nu$ und $\sum_{\nu=0}^{\infty} a_\nu z^\nu$ für $|z| < \alpha$.

Die Matrix S_α ist positiv und, wie man leicht verifiziert, permanent: Aus $s_n \to s$ folgt $S_\alpha s \to s$ für $n \to \infty$. Dies ist für $a = 1$ enthalten in dem folgenden

Satz 9. *Es sei $0 < a < \frac{1}{\alpha}$, s beliebig, ferner $s_n \cong s a^n$ für $n \to \infty$, so daß gewiß S_α auf s_n anwendbar ist. Dann gilt*

$$S_\alpha s \cong \frac{(1-\alpha)s}{1-\alpha a}\left(\frac{1-\alpha}{1-\alpha a}\right)^n.$$

Beweis. Zu $\varepsilon > 0$ gibt es eine Nummer m, so daß $|s_n - s a^n| < \varepsilon a^n$ ist für $n > m$. Also ist

$$\left| S_\alpha s - \frac{(1-\alpha)s}{1-\alpha a}\left(\frac{1-\alpha}{1-\alpha a}\right)^n \right| \leqq (1-\alpha)^{n+1} \left| \sum_{\nu=0}^{m} \binom{n+\nu}{\nu} \alpha^\nu (s_\nu - s a^\nu) \right|$$

$$+ (1-\alpha)^{n+1} \left| \sum_{\nu=m+1}^{\infty} \binom{n+\nu}{\nu} \alpha^\nu (s_\nu - s a^\nu) \right|$$

$$\leqq \left(\frac{1-\alpha}{1-\alpha a}\right)^{n+1} \left[\sum_{\nu=0}^{m} (1-\alpha a)^{n+1} \binom{n+\nu}{\nu} |s_\nu - s a^\nu| + \varepsilon \right]$$

$$< 2\varepsilon \left(\frac{1-\alpha}{1-\alpha a}\right)^{n+1} \quad \text{für } n > N,$$

wenn N so gewählt ist, daß die zuletzt auftretende Summe, deren Glieder für jedes feste ν gegen 0 streben bei $n \to \infty$, kleiner als ε ist für $n > N$. Daraus folgt die Behauptung.

Daß das S_α-Verfahren divergente Folgen zu limitieren vermag, möge die Folge $s_n = z^n$ zeigen. S_α ist auf z^n anwendbar für $|z| < \frac{1}{\alpha}$; es ist dann

$$S_\alpha(n; z^\nu) = \left(\frac{1-\alpha}{1-\alpha z}\right)^{n+1}.$$

Für das Gebiet $\mathfrak{G}'(S_\alpha)$ erhalten wir damit:

$$\mathfrak{G}'(S_\alpha): \left| z - \frac{1}{\alpha} \right| > \frac{1-\alpha}{\alpha}, \; |z| < \frac{1}{\alpha}.$$

Hier zeigt sich das S_α-Verfahren dem T_α-Verfahren überlegen. Man findet unschwer, daß $\mathfrak{G}'(S_\alpha)$ umfassender als $\mathfrak{G}'(T_\alpha)$ ist. Auch die Vereinigungsmenge aller $\mathfrak{G}'(S_\alpha)$ für α zwischen 0 und 1 ist umfassender als die Vereinigungsmenge aller $\mathfrak{G}'(T_\alpha)$, enthält erstere doch z. B. die Borelsche Halbebene $\mathfrak{G}'(B)$, während letztere ganz im Innern des Kreises $|z| = 3$ liegt.

3. 2. Im Gegensatz zum T_α-Verfahren läßt sich beim S_α-Verfahren die Frage der Indexverschiebung in einfacher und vollständiger Weise erledigen.

Satz 10. *Ist die Folge* $0, s_1, s_2, \ldots$ *S_α-limitierbar zum Wert s, so ist es auch die Folge $s_1, s_2, s_3, \ldots$, und umgekehrt.*

Beweis. Wir bezeichnen

mit t_n die S_α-Transformation der Folge $0, s_1, s_2, \ldots$,

mit t'_n die S_α-Transformation der Folge $s_1, s_2, s_3, \ldots$.

S_α ist entweder auf beide Folgen oder auf keine anwendbar. Der erstere Fall liege vor. Für $n \geqq 0$ ist

$$t_n = (1-\alpha)^{n+1} \sum_{\nu=1}^{\infty} \binom{n+\nu}{\nu} \alpha^\nu s_\nu, \quad t'_n = (1-\alpha)^{n+1} \sum_{\nu=0}^{\infty} \binom{n+\nu}{\nu} \alpha^\nu s_{\nu+1},$$

ferner ist $t'_0 = \frac{t_0}{\alpha}$ und für $n \geqq 1$

$$t'_n = \frac{1}{\alpha} (t_n - (1-\alpha) t_{n-1}); \tag{3. 2. 1}$$

denn in der letzten Gleichung ist die rechte Seite gleich

$$\frac{(1-\alpha)^{n+1}}{\alpha} \sum_{\nu=0}^{\infty} \left[\binom{n+\nu}{\nu} - \binom{n-1+\nu}{\nu}\right] \alpha^\nu s_\nu = (1-\alpha)^{n+1} \sum_{\nu=1}^{\infty} \binom{n+\nu-1}{\nu-1} \alpha^{\nu-1} s_\nu = t'_n.$$

Aus $t_n \to s$ folgt also $t'_n \to s$.

Aus (3. 2. 1) ergibt sich für t_n die Rekursionsformel

$$t_n = (1-\alpha) t_{n-1} + \alpha t'_n,$$

welche zusammen mit $t_0 = \alpha t'_0$

$$t_n = \sum_{\nu=0}^{\infty} \alpha (1-\alpha)^{n-\nu} t'_\nu = V t' \qquad \text{für } n \geqq 0$$

liefert. Die Dreiecksmatrix V mit den Elementen

$$V_{n\nu} = \alpha (1-\alpha)^{n-\nu} \quad \text{für } 0 \leqq \nu \leqq n \qquad (n \geqq 0)$$

erweist sich leicht als permanent. Aus $t'_n \to s$ folgt also $t_n \to s$.

3. 3. Wir untersuchen nun, wie sich die S_α-Transformation auswirkt, wenn wir von Folgen zu Reihen übergehen.

Die Anwendbarkeit von S_α auf s_n ist nach **3. 1** gleichbedeutend mit der Anwendbarkeit von T_α auf s_n, also nach **2. 2** gleichbedeutend mit der Anwendbarkeit von T_α auf a_n oder also von S_α auf a_n.

Es sei S_α auf s_n anwendbar. Wir setzen $t_n = S_\alpha s = \sum_{\nu=0}^{n} b_\nu$ für $n \geqq 0$ und wollen die b_n in den a_n ausdrücken. Es ist

$$b_0 = t_0 = (1-\alpha) \sum_{\nu=0}^{\infty} \alpha^\nu s_\nu = \sum_{\nu=0}^{\infty} \alpha^\nu a_\nu = a_0 + \alpha \sum_{\nu=0}^{\infty} \alpha^\nu a_{\nu+1},$$

und für $n \geqq 1$

$$b_n = t_n - t_{n-1} = (1-\alpha)^{n+1} \sum_{\nu=0}^{\infty} \binom{n+\nu}{\nu} \alpha^\nu s_\nu - (1-\alpha)^n \sum_{\nu=0}^{\infty} \binom{n-1+\nu}{\nu} \alpha^\nu s_\nu,$$

$$\frac{b_n}{(1-\alpha)^n} = \sum_{\nu=0}^{\infty} \left[\binom{n+\nu}{\nu} - \binom{n-1+\nu}{\nu} \right] \alpha^\nu s_\nu - \alpha \sum_{\nu=0}^{\infty} \binom{n+\nu}{\nu} \alpha^\nu s_\nu.$$

Die eckige Klammer in der ersten Summe verschwindet für $\nu = 0$ und ist gleich $\binom{n+\nu-1}{\nu-1}$ für $\nu \geqq 1$, also ist

$$\frac{b_n}{(1-\alpha)^n} = \sum_{\nu=0}^{\infty} \binom{n+\nu}{\nu} \alpha^{\nu+1} s_{\nu+1} - \sum_{\nu=0}^{\infty} \binom{n+\nu}{\nu} \alpha^{\nu+1} s_\nu = \alpha \sum_{\nu=0}^{\infty} \binom{n+\nu}{\nu} \alpha^\nu a_{\nu+1},$$

$$b_n = \alpha (1-\alpha)^n \sum_{\nu=0}^{\infty} \binom{n+\nu}{\nu} \alpha^\nu a_{\nu+1}.$$

Für $n \geqq 0$ ist somit

$$t_n = a_0 + \alpha \sum_{\mu=0}^{n} (1-\alpha)^\mu \sum_{\nu=0}^{\infty} \binom{\mu+\nu}{\nu} \alpha^\nu a_{\nu+1},$$

und daher die Aussage S_α-lim $s_n = s$ gleichwertig mit der Aussage

$$a_0 + \alpha \sum_{n=0}^{\infty} (1-\alpha)^n \sum_{\nu=0}^{\infty} \binom{n+\nu}{\nu} \alpha^\nu a_{\nu+1} = s.$$

Nun sei die Folge $s_0, s_1, s_2, \ldots$, S_α-limitierbar zum Wert s; dann ist es auch die Folge $0, s_0, s_1, \ldots$ und umgekehrt. Wenden wir auf die zweitgenannte Folge unser soeben erhaltenes Ergebnis an, so bekommen wir

Satz 11. *Die Anwendbarkeit von S_α auf s_n ist gleichbedeutend mit der Anwendbarkeit von S_α auf a_n. Die Aussage* $\lim_{n\to\infty} S_\alpha(n; s_\nu) = s$ *ist gleichbedeutend mit der Aussage*

$$\alpha \sum_{n=0}^{\infty} (1-\alpha)^n \sum_{\nu=0}^{\infty} \binom{n+\nu}{\nu} \alpha^\nu a_\nu = \frac{\alpha}{1-\alpha} \sum_{n=0}^{\infty} S_\alpha(n; a_\nu) = s.$$

Die Sätze 3 und 11 zeigen, daß sich die Verfahren T_α und S_α beim Übergang von Folgen zu Reihen ganz ähnlich verhalten wie das E_p-Verfahren ($p>0$). Die Aussage $\lim_{n\to\infty} E_p(n; s_\nu) = s$ ist nämlich (vgl. [3]) gleichbedeutend mit der Aussage

$$\frac{1}{2^p} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^{pn}} \sum_{\nu=0}^{n} \binom{n}{\nu} (2^p - 1)^{n-\nu} a_\nu = \frac{1}{2^p} \sum_{n=0}^{\infty} E_p(n; a_\nu) = s.$$

3. 4. Wir untersuchen nun, wie sich zwei S-Verfahren verschiedener Ordnung zueinander verhalten.

Ist $0<\beta<\gamma<1$, so sind die Verfahren S_β und S_γ nicht miteinander vergleichbar, d. h. es gibt Folgen, die S_β-, aber nicht S_γ-limitierbar sind, und umgekehrt auch Folgen, die S_γ-, aber nicht S_β-limitierbar sind. Das zeigen die sich überschneidenden Kreisbogenzweiecke $\mathfrak{G}'(S_\beta)$ und $\mathfrak{G}'(S_\gamma)$. Es ist also ohne Einschränkung keinesfalls möglich, die Verfahren S_α im Sinne wachsender Stärke zu ordnen. Dasjenige Teilgebiet von $\mathfrak{G}'(S_\beta)$ jedoch, dessen z-Werte so beschaffen sind, daß S_γ auf z^n anwendbar ist, nämlich der Durchschnitt von $\mathfrak{G}'(S_\beta)$ mit dem Kreis $|z|<\frac{1}{\gamma}$, liegt ganz innerhalb von $\mathfrak{G}'(S_\gamma)$. Es könnte also, in Analogie zu den Verhältnissen beim T_a-Verfahren, sein, daß das S_γ-Verfahren stärker ist als das S_β-Verfahren für solche Folgen, auf die sich beide Verfahren anwenden lassen. Der naheliegende Versuch, dies durch Iteration von S_α-Verfahren zu beweisen, führt zu nichts. Dagegen kommt man durch Kombination des S_α-Verfahrens mit dem Taylorschen Verfahren zum Ziel.

Satz 12. *Es sei* $0<\alpha<1$, $0<\beta<1$ *und* $\frac{\beta}{1-\alpha(1-\beta)}=\gamma$ *gesetzt, so daß* $\beta<\gamma<1$ *ist. Dann gilt*

(3. 4. 1) $$T_\alpha S_\beta = S_\gamma.$$

Beweis. Für $n, \nu, \mu \geqq 0$ ist

$$\binom{\mu+\nu}{\nu}\binom{\mu}{n} = \binom{\mu+\nu}{\nu+n}\binom{\nu+n}{n},$$

also für $n, \nu \geqq 0$

$$T_\alpha S_\beta = \frac{(1-\alpha)^{n+1}(1-\beta)\beta^\nu}{\alpha^n}\sum_{\mu=0}^{\infty}\binom{\mu}{n}\binom{\mu+\nu}{\nu}\alpha^\mu(1-\beta)^\mu$$

$$= \binom{n+\nu}{\nu}\frac{(1-\alpha)^{n+1}(1-\beta)\beta^\nu}{\alpha^n}\sum_{\mu=n}^{\infty}\binom{\mu+\nu}{\nu+n}\alpha^\mu(1-\beta)^\mu$$

$$= \binom{n+\nu}{\nu}(1-\alpha)^{n+1}(1-\beta)^{n+1}\beta^\nu\sum_{\eta=0}^{\infty}\binom{n+\nu+\eta}{\eta}\alpha^\eta(1-\beta)^\eta$$

$$= \binom{n+\nu}{\nu}\frac{(1-\alpha)^{n+1}(1-\beta)^{n+1}\beta^\nu}{(1-\alpha+\alpha\beta)^{n+\nu+1}} = \binom{n+\nu}{\nu}(1-\gamma)^{n+1}\gamma^\nu = S_\gamma.$$

Folgerung. *Es sei* $0<\beta<\gamma<1$, $0<a<\frac{\gamma(1-\beta)}{\gamma-\beta}$ *und* S_γ *auf* s_n *anwendbar, so daß gewiß auch* S_β *auf* s_n *anwendbar ist. Weiter sei* $S_\beta s \cong s a^n$ *für* $n\to\infty$. *Dann ist*

$$S_\gamma s \cong \frac{\beta(1-\gamma)s}{\gamma(1-\beta)-a(\gamma-\beta)}\left[\frac{\beta(1-\gamma)a}{\gamma(1-\beta)-a(\gamma-\beta)}\right]^n.$$

Zum Beweis setzen wir $\alpha=\frac{\gamma-\beta}{\gamma(1-\beta)}$. Dann können wir Satz 12 anwenden und nach Satz 1, da $S_\gamma|s|$ existiert für alle n, von (3. 4. 1) zu der Gleichung $S_\gamma s = T_a(S_\beta s)$ übergehen. Die Behauptung ergibt

sich nun aus Satz 2. Insbesondere dürfen wir $a = 1$ setzen und erhalten damit den folgenden $S_\beta \to S_\gamma$-Satz:

Satz 13. *Es sei* $0 < \beta < \gamma < 1$, $S_\beta\text{-}\lim s_n = s$ *und* S_γ *auf* s_n *anwendbar. Dann ist* $S_\gamma\text{-}\lim s_n = s$.

Mit der durch diesen Satz gegebenen Einschränkung ist also das S_α-Verfahren umso stärker, je größer seine Ordnung α ist. Speziell ergibt sich aus Satz 13, daß die S-Verfahren aller Ordnungen miteinander verträglich sind.

3. 5. Neben der Beziehung (3. 4. 1) besteht noch ein weiterer Zusammenhang zwischen den T- und S-Verfahren, der durch das Euler-Knoppsche Verfahren vermittelt wird.

Satz 14. *Es sei* $0 < \alpha < 1$ *und* $\alpha = \frac{1}{2^p}$, *so daß* $p > 0$ *ist. Dann gilt*

$$S_\alpha = E_p T_\alpha.$$

Beweis. Für $n, \nu \geqq 0$ hat man

$$E_p T_\alpha = \frac{(2^p-1)^n \alpha^\nu}{2^{pn}} \sum_{\mu=0}^{\infty} \binom{n}{\mu}\binom{\nu}{\mu} \frac{(1-\alpha)^{\mu+1}}{\alpha^\mu (2^p-1)^\mu} = (1-\alpha)^{n+1} \alpha^\nu \sum_{\mu=0}^{\infty} \binom{n}{\mu}\binom{\nu}{\mu}.$$

Auf Grund des Additionstheorems der Binomialkoeffizienten ist aber

$$\sum_{\mu=0}^{\infty} \binom{n}{\mu}\binom{\nu}{\mu} = \sum_{\mu=0}^{\nu} \binom{n}{\mu}\binom{\nu}{\nu-\mu} = \binom{n+\nu}{\nu},$$

also

$$E_p T_\alpha = (1-\alpha)^{n+1} \alpha^\nu \binom{n+\nu}{\nu} = S_\alpha.$$

Aus dem Satz 14 ergibt sich eine Reihe von Folgerungen. Zunächst gestattet er, aus dem Verhalten der T_α-Mittel einer Folge auf das Verhalten der S_α-Mittel zu schließen. Analog den Sätzen 2 und 9 beweist man unschwer: *Ist* $a > 0$ *und* $s_n \cong s a^n$ *für* $n \to \infty$, *so gilt*

$$E_p s \cong s \left(\frac{2^p - 1 + a}{2^p}\right)^n.$$

Nun sei T_α auf eine Folge s_n anwendbar. Wie wir wissen, ist dies gleichbedeutend mit der Anwendbarkeit von S_α auf s_n. Nach Satz 1 und 14 ist dann $S_\alpha s = E_p(T_\alpha s)$ mit $2^{-p} = \alpha$, und man bekommt:

Es sei $a > 0$, T_α *und damit* S_α *auf* s_n *anwendbar und* $T_\alpha s \cong s a^n$ *für* $n \to \infty$. *Dann gilt*

$$S_\alpha s \cong s (1 - \alpha + \alpha a)^n.$$

Für $a = 1$ ergibt sich insbesondere der $T_\alpha \to S_\alpha$-Satz:

Satz 15. *Aus* $T_\alpha\text{-}\lim s_n = s$ *folgt* $S_\alpha\text{-}\lim s_n = s$.

Alle T- und S-Verfahren sind daher miteinander verträglich. Denn ist $T_\alpha\text{-}\lim s_n = s$ und $S_\beta\text{-}\lim s_n = s'$, so ist auch $S_\alpha\text{-}\lim s_n = s$, also wegen der Verträglichkeit der S-Verfahren untereinander $s = s'$. Satz 15 wird illustriert durch die schon früher erwähnte Tatsache, daß das Gebiet $\mathfrak{G}'(T_\alpha)$ durch das Gebiet $\mathfrak{G}'(S_\alpha)$ überdeckt wird.

Des weiteren gestattet der Satz 14 die Aufstellung von Umkehrformeln der S_α-Transformation. S_α sei auf s_n anwendbar und $2^{-p} = \alpha$. Dann ist

$$t_n = S_\alpha s = E_p(T_\alpha s).$$

Die Umkehrung der E_p-Transformation ist bekannt. Aus $\tau_n = E_p(n; \sigma_\nu)$ für eine Folge σ_n folgt

$$\sigma_n = (-1)^n \sum_{\nu=0}^{n} (-1)^\nu \binom{n}{\nu} (2^p - 1)^{n-\nu} 2^{p\nu} \tau_\nu.$$

Dies liefert

$$T_\alpha s = \left(\frac{\alpha - 1}{\alpha}\right)^n \sum_{\nu=0}^{n} \binom{n}{\nu} \frac{t_\nu}{(\alpha - 1)^\nu}.$$

Verlangen wir jetzt noch, daß $\sum_{\nu=0}^{\infty} a_\nu z^\nu$ bei $z = \alpha$ regulär ist, so können wir den Satz 7 heranziehen und erhalten für $n \geqq 0$

$$s_n = \frac{(-1)^n}{(1-\alpha)\alpha^n} \sum_{\nu=0}^{\infty}{}' \binom{n+\nu}{\nu} \sum_{\mu=0}^{n+\nu} \binom{n+\nu}{\mu} \frac{t_\mu}{(\alpha-1)^\mu},$$

wobei unter $\sum'$ die sicher vorhandene Borel-Summe der Reihe zu verstehen ist.

3. 6. Vor allem ergibt sich aus Satz 14 eine funktionentheoretische Deutung des S_α-Verfahrens in den Fällen, in denen wir eine solche für das T_α-Verfahren kennen. Um sie zu erhalten, formulieren wir zunächst das Euler-Knoppsche Verfahren in seiner funktionentheoretischen Fassung[10]: Dann und nur dann ist $E_p\text{-}\lim s_n = s$, wenn das Funktionselement

$$g(x) = \sum_{\nu=0}^{\infty} a_\nu x^\nu$$

einen positiven Konvergenzradius r hat und die Entwicklung der somit in der Umgebung der Stelle $w = 0$ definierten Funktion

$$h(w) = g\left(\frac{w}{2^p - (2^p - 1)w}\right)$$

nach Potenzen von w für $w = 1$ zum Wert s konvergiert. Stets stimmt im Falle $r > 0$ die Folge der Teilsummen der Entwicklung von $h(w)$ für $w = 1$ mit der Folge $E_p s$ überein.

Nun sei $0 < \alpha < 1$, $p > 0$, T_α auf s_n anwendbar und

$$f(z) = \sum_{\nu=0}^{\infty} a_\nu z^\nu$$

für $z = \alpha$ regulär. Setzen wir (vgl. **2. 2**)

$$g(x) = f(\alpha + (1-\alpha)x) = \sum_{n=0}^{\infty} x^n \frac{T_\alpha a}{1-\alpha},$$

[10]) Vgl. K. Knopp [5], S. 325.

so ist $g(x)$ bei $x = 0$ regulär und $T_\alpha s$ die Folge der Teilsummen der rechts stehenden Reihe für $x = 1$. Anwendung des kombinierten Verfahrens $E_p T_\alpha$ auf s_n bedeutet daher nach unserer Vorbemerkung über das E_p-Verfahren Übergang zu der Funktion

$$h(w) = g\left(\frac{w}{2^p - (2^p - 1)w}\right) = f\left(\alpha + \frac{(1-\alpha)w}{2^p - (2^p - 1)w}\right)$$

und Untersuchung, ob ihre in der Umgebung von $w = 0$ sicher vorhandene Entwicklung nach Potenzen von w für $w = 1$ konvergiert. Ist Konvergenz zur Summe s vorhanden, so ist dies gleichbedeutend mit der Aussage $E_p(T_\alpha s) = (E_p T_\alpha)s \to s$. Nehmen wir speziell den Fall $2^{-p} = \alpha$, so bekommen wir

Satz 16. *S_α sei auf s_n anwendbar und $f(z) = \sum_{\nu=0}^{\infty} a_\nu z^\nu$ für $z = \alpha$ regulär. Dann stimmt die Folge der Teilsummen der in der Umgebung von $w = 0$ sicher vorhandenen Entwicklung der Funktion*

$$h(w) = f\left(\frac{\alpha}{1 - (1-\alpha)w}\right)$$

nach Potenzen von w für $w = 1$ überein mit der Folge $S_\alpha s$, so daß also dann und nur dann S_α-lim $s_n = s$ ist, wenn die genannte Entwicklung für $w = 1$ zum Wert s konvergiert.

Man kann diesem Zusammenhang — unabhängig von einer Anwendbarkeits- und Regularitätsvoraussetzung — noch in rein formaler Hinsicht nachgehen und die S_α-Transformation einer Reihe $\sum_{\nu=0}^{\infty} a_\nu$ nach folgender Vorschrift bilden. Man führe in $\sum_{\nu=0}^{\infty} a_\nu z^\nu$ für z die Reihe

$$z = \frac{\alpha}{1 - (1-\alpha)w} = \alpha \sum_{\nu=0}^{\infty} (1-\alpha)^\nu w^\nu$$

ein, entwickle formal nach Potenzen von w und setze sodann $w = 1$. In der Tat entsteht aus

$$\sum_{\nu=0}^{\infty} a_\nu \frac{\alpha^\nu}{[1-(1-\alpha)w]^\nu} = a_0 + \sum_{\mu=0}^{\infty} \frac{a_{\mu+1}\alpha^{\mu+1}}{[1-(1-\alpha)w]^{\mu+1}}$$

zunächst die Reihe

$$a_0 + \sum_{\mu=0}^{\infty} a_{\mu+1}\alpha^{\mu+1} \sum_{n=0}^{\infty} \binom{\mu+n}{n} (1-\alpha)^n w^n,$$

und aus ihr durch formales Umordnen nach Potenzen von w die Reihe

$$a_0 + \alpha \sum_{n=0}^{\infty} (1-\alpha)^n w^n \sum_{\mu=0}^{\infty} \binom{n+\mu}{\mu} \alpha^\mu a_{\mu+1},$$

deren Teilsummen für $w = 1$ nach **3. 3** die Glieder der Folge $S_\alpha s$ sind. Dies zeigt, daß sich das S_α-Verfahren mit

$$E(w) = \frac{\alpha}{1-(1-\alpha)w}$$

unter die von K. Knopp [5] betrachteten verallgemeinerten Eulerschen Reihentransformationen (vgl. **2. 2**) einordnen läßt. Allerdings besitzt das Gebiet

$$\mathfrak{G}(S_\alpha): \left| z - \frac{1}{2-\alpha} \right| < \frac{1-\alpha}{2-\alpha}$$

der z-Ebene, in welches das Gebiet $|w|<1$ durch die Abbildung $z = E(w)$ übergeht, nicht die für eine erzeugende Figur erforderlichen Eigenschaften.

Wir wollen die funktionentheoretische Seite des S_α-Verfahrens noch auf eine zweite Weise formulieren. Dazu setzen wir

$$a = \frac{1}{2-\alpha},$$

so daß $\frac{1}{2} < a < 1$ ist. Dann ist $\mathfrak{G} = \mathfrak{G}(S_\alpha)$ das Innere eines den Kreis $|z| = 1$ in $z = 1$ von innen berührenden Kreises. Der Punkt $z = \alpha$ liegt in $\mathfrak{G}$, und zwar links vom Kreismittelpunkt $z = a$. Wir bezeichnen mit $\mathfrak{L}$ die lineare Abbildung, die $\mathfrak{G}$ so auf sich selbst abbildet, daß die auf der reellen Achse gelegenen Randpunkte von $\mathfrak{G}$ Fixpunkte bilden und $z = \alpha$ in $z = a$ übergeht, daß also

$$\text{die Punkte } z = 2a-1,\ \alpha,\ 1$$
$$\text{bezüglich in die Punkte } z = 2a-1,\ a,\ 1$$

übergehen. Die Umkehrung $\mathfrak{L}^{(-1)}$ dieser Abbildung wird vermittelt durch die Funktion

$$l^{(-1)}(z) = \frac{\alpha}{2-(2-\alpha)z}.$$

Nun sei S_α auf s_n anwendbar und $f(z) = \sum_{\nu=0}^{\infty} a_\nu z^\nu$ bei $z = \alpha$ regulär. Dann ist die bei Vornahme der Abbildung $\mathfrak{L}$ aus $f(z)$ durch Mitabbilden entstehende Funktion

$$\bar{f}(z) = f(l^{(-1)}(z))$$

bei $z = a$ regulär. Ist h die im Satz 16 auftretende Funktion, so hat man in der Umgebung der Stelle $y = 0$

$$\bar{f}(a+y) = h\left(\frac{y}{1-a}\right).$$

Nun ist aber die Aussage $S_\alpha\text{-}\lim s_n = s$ gleichbedeutend damit, daß die Entwicklung der Funktion $h(w)$ nach Potenzen von w für $w = 1$ zum Wert s konvergiert, also ist sie gleichbedeutend damit, daß die Entwicklung der Funktion $\bar{f}(a+y)$ nach Potenzen von y für $y = 1-a$

zum Wert s konvergiert. Die letztgenannte Konvergenz bedingt die Regularität von $\bar{f}(a+y)$ für $|y|<1-a$, also die Regularität von $\bar{f}(z)$ und damit von $f(z)$ in $\mathfrak{G}$. Als Ergebnis formulieren wir

Satz 17 [11]. *S_α sei auf s_n anwendbar und $f(z)=\sum_{\nu=0}^{\infty} a_\nu z^\nu$ bei $z=\alpha$ regulär. Dann und nur dann ist $S_\alpha\text{-}\lim s_n = s$, wenn sich $f(z)$ in das Gebiet $\mathfrak{G}(S_\alpha)$ hinein analytisch fortsetzen läßt, so daß also auch die bei Vornahme der Abbildung $\mathfrak{L}$ aus $f(z)$ entstehende Funktion $\bar{f}(z)$ in $\mathfrak{G}(S_\alpha)$ regulär ist, und wenn die somit für $|y|<1-a$ konvergente Entwicklung der Funktion $\bar{f}(a+y)$ nach Potenzen von y für $y=1-a$ zum Wert s konvergiert.*

§ 4.

Der Zusammenhang der Verfahren T_α und S_α mit den Verfahren E_p und B.

4. 1. Wie die in **3. 1** und **1. 2** betrachteten Gebiete $\mathfrak{G}'(S_\alpha)$ und $\mathfrak{G}'(B)$ zeigen, sind die Verfahren S_α und B nicht miteinander vergleichbar. Dennoch besteht zwischen beiden ein enger Zusammenhang. Um ihn herzustellen, nehmen wir an, S_α sei auf s_n anwendbar. Da dann $\sum_{\nu=0}^{\infty} s_\nu x^\nu$ einen positiven Konvergenzradius hat, ist gewiß $\sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{s_\nu x^\nu}{\nu!}$ beständig konvergent. Es konvergiert also

$$S_\alpha s = (1-\alpha)^{n+1} \sum_{\nu=0}^{\infty} \binom{n+\nu}{\nu} \alpha^\nu s_\nu \text{ für } n \geqq 0,$$

$$Bs = b(x) = e^{-x} \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{x^\nu}{\nu!} s_\nu \text{ für } x \geqq 0.$$

[11]) Ein analoger Satz läßt sich für das Euler-Knoppsche Verfahren aufstellen. Wir setzen

$$a_1 = \frac{2^p - 1}{2^{p+1} - 1},$$

so daß $0<a_1<\frac{1}{2}$ bei $p>0$ ist, und verstehen unter $\mathfrak{L}_1$ die lineare Abbildung, die das Gebiet

$$\mathfrak{G}(E_p): |z-a_1| < 1-a_1$$

der z-Ebene so auf sich selbst abbildet, daß die auf der reellen Achse gelegenen Randpunkte von $\mathfrak{G}(E_p)$ Fixpunkte bilden und $z=0$ in den Mittelpunkt $z=a_1$ von $\mathfrak{G}(E_p)$ übergeht. Dann gilt:

Dann und nur dann ist $E_p\text{-}\lim s_n = s$, wenn das Funktionselement $f(z)=\sum_{\nu=0}^{\infty} a_\nu z^\nu$ einen positiven Konvergenzradius hat und sich in das Gebiet $\mathfrak{G}(E_p)$ hinein analytisch fortsetzen läßt, so daß also auch die bei Vornahme der Abbildung $\mathfrak{L}_1$ aus $f(z)$ entstehende Funktion $\bar{f}_1(z)$ in $\mathfrak{G}(E_p)$ regulär ist, und wenn die somit für $|y-a_1|<1-a_1$ konvergente Entwicklung der Funktion $\bar{f}_1(a_1+y)$ nach Potenzen von y für $y=1-a_1$ zum Wert s konvergiert.

Nun ist nach Borel mit

$$\sum_{\nu=0}^{\infty} c_\nu = c \text{ auch } \int_0^\infty e^{-x}\left(\sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{x^\nu}{\nu!}\, c_\nu\right) dx = c.$$

Also können wir schreiben

$$S_\alpha s = (1-\alpha)^{n+1} \lim_{A\to\infty} \int_0^A e^{-x}\left[\sum_{\nu=0}^{\infty} \binom{\nu+n}{n} \frac{\alpha^\nu x^\nu}{\nu!}\, s_\nu\right] dx.$$

Durch partielle Integration ergibt sich

$$S_\alpha s = \frac{(1-\alpha)^{n+1}}{n!} \lim_{A\to\infty} \left\{\left[e^{-x} \sum_{\nu=0}^{\infty} (\nu+n)\dots(\nu+2)\, \frac{\alpha^\nu x^{\nu+1}}{\nu!}\, s_\nu\right]_0^A \right.$$
$$\left. + \int_0^A e^{-x}\left[\sum_{\nu=0}^{\infty} (\nu+n)\dots(\nu+2)\, \frac{\alpha^\nu x^{\nu+1}}{\nu!}\, s_\nu\right] dx\right\}.$$

Wegen der Anwendbarkeit von S_α auf s_n gibt es zu einer festen Nummer n eine Schranke M, so daß

$$|s_\nu| < \frac{\alpha^{-\nu} M}{(\nu+1)(\nu+2)[(\nu+n)\dots(\nu+2)]} \qquad \text{für } \nu \geqq 0$$

ist. Damit bekommt man

$$\left| e^{-x} \sum_{\nu=0}^{\infty} (\nu+n)\dots(\nu+2)\, \frac{\alpha^\nu x^{\nu+1}}{\nu!}\, s_\nu \right| \leqq M e^{-x} \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{x^{\nu+1}}{(\nu+2)!}$$
$$= \frac{M(e^x - 1 - x)}{x e^x} \to 0 \text{ für } x \to \infty,$$

$$S_\alpha s = \frac{(1-\alpha)^{n+1}}{n!} \lim_{A\to\infty} \int_0^A e^{-x}\left[\sum_{\nu=0}^{\infty} (\nu+n)\dots(\nu+2)\, \frac{\alpha^\nu x^{\nu+1}}{\nu!}\, s_\nu\right] dx.$$

Integriert man in derselben Weise noch $(n-1)$-mal partiell, so ergibt sich

$$S_\alpha s = \frac{(1-\alpha)^{n+1}}{n!} \lim_{A\to\infty} \int_0^A e^{-x}\left[\sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{\alpha^\nu x^{\nu+n}}{\nu!}\, s_\nu\right] dx$$
$$= \frac{(1-\alpha)^{n+1}}{n!} \int_0^\infty x^n e^{-(1-\alpha)x}\, b(\alpha x)\, dx$$
$$= \frac{w^{n+1}}{n!} \int_0^\infty x^n e^{-wx}\, b(x)\, dx \quad \text{mit} \quad w = \frac{1-\alpha}{\alpha}.$$

Damit liegt der Weg offen, um von den B-Mitteln der Folge s_n auf ihre S_α-Mittel zu schließen:

Es sei $0 < \alpha < 1$, $-\infty < a < \frac{1-\alpha}{\alpha}$, S_α *auf* s_n *anwendbar und* $b(x) \simeq s e^{ax}$ *für* $x \to \infty$. *Dann ist*

$$S_\alpha s \simeq \frac{(1-\alpha)s}{1-\alpha-\alpha a}\left(\frac{1-\alpha}{1-\alpha-\alpha a}\right)^n \qquad \text{für } n \to \infty.$$

Nach Voraussetzung gibt es nämlich zu $\varepsilon > 0$ ein $y > 0$, so daß $|b(x) - s e^{ax}| < \varepsilon e^{ax}$ ist für $x \geqq y$, und weiter, wenn $|b(x) - s e^{ax}| < M$ ist für $0 \leqq x \leqq y$, eine Nummer N, so daß

$$\frac{M(w-a)^{n+1} y^{n+1}}{(n+1)!} < \varepsilon$$

ist für $n > N$. Beachtet man die Beziehung

$$\frac{1}{(w-a)^{n+1}} = \frac{1}{n!} \int_0^\infty x^n e^{-(w-a)x} dx,$$

so erhält man für $n > N$

$$\left| S_\alpha s - s \left(\frac{w}{w-a} \right)^{n+1} \right|$$

$$\leqq \frac{w^{n+1}}{n!} \left| \int_0^y x^n e^{-wx} (b(x) - s e^{ax}) \, dx \right| + \frac{w^{n+1}}{n!} \left| \int_y^\infty x^n e^{-wx} (b(x) - s e^{ax}) \, dx \right|$$

$$\leqq \frac{w^{n+1}}{n!} M \int_0^y x^n \, dx + \frac{w^{n+1}}{n!} \varepsilon \int_0^\infty x^n e^{-(w-a)x} \, dx$$

$$\leqq \left(\frac{w}{w-a} \right)^{n+1} \left[\frac{M(w-a)^{n+1} y^{n+1}}{(n+1)!} + \varepsilon \right] < 2\varepsilon \left(\frac{w}{w-a} \right)^{n+1},$$

woraus die Behauptung folgt. Für $a = 0$ ergibt sich

Satz 18. *Es sei* $B\text{-}\lim s_n = s$ *und* S_α *auf* s_n *anwendbar. Dann ist* $S_\alpha\text{-}\lim s_n = s$.

Die oben aufgetretene, bei festem $w > 0$ einer Funktion $f(x)$ die Folge

$$\frac{w^{n+1}}{n!} \int_0^\infty x^n e^{-wx} f(x) \, dx$$

zuordnende Integraltransformation ist für sich interessant und soll in einer gesonderten Untersuchung behandelt werden.

4. 2. Der $B \to S_\alpha$-Satz 18 läßt verschiedene Anwendungen zu. Zunächst einmal hat er die Verträglichkeit der Verfahren S_α und B zur Folge. Wegen des $E_p \to B$-Satzes und des $T_\alpha \to S_\alpha$-Satzes folgt daraus die Verträglichkeit der Verfahren S_α und E_p, ebenso der Verfahren T_α und E_p und schließlich der Verfahren T_α und B. Es gilt daher der zusammenfassende

Satz 19. *Die sämtlichen Verfahren* $E_p\,(p > 0)$, B, $S_\alpha\,(0 < \alpha < 1)$ *und* $T_\beta\,(0 < \beta < 1)$ *sind miteinander verträglich* [12]).

[12]) Auf die Beziehung der Verfahren T_α und S_α zu den Cesàroschen C_k-Verfahren $(k > 0)$ und zum Abelschen A-Verfahren gehen wir in der vorliegenden Arbeit nicht ein. Es sei jedoch erwähnt, daß wir die Verfahren C_k und A zu den im Satz 19 aufgezählten Verfahren hinzunehmen dürfen. Wegen Satz 4 gilt nämlich der folgende $T_\alpha \to A$-Satz: Ist $T_\alpha\text{-}\sum a_n = s$ und hat die Reihe $\sum a_n z^n$ den Konvergenzradius 1, so ist $A\text{-}\sum a_n = s$. Ein analoger $S_\alpha \to A$-Satz ergibt sich aus Satz 17.

Weiter lehrt Satz 18, daß das S_α-Verfahren bei Anwendung auf Potenzreihen mehr als das B-Verfahren zu leisten vermag, sofern alle Ordnungen α zwischen 0 und 1 herangezogen werden. Denn hat $\sum_{\nu=0}^{\infty} c_\nu z^\nu$ einen positiven Konvergenzradius ϱ, so ist die S_α-Transformation dieser Reihe vorhanden, wenn nur α genügend klein genommen wird; in diesen Fällen folgt aus der B-Summierbarkeit die S_α-Summierbarkeit. Daß aber S_α tatsächlich mehr als B liefern kann, zeigt schon die geometrische Reihe. Beschränkt man sich auf ein festes α, so leistet S_α wenigstens im Kreis $|z| < \varrho/\alpha$ mehr als B.

Wir kombinieren nun die Sätze 17 und 18. Das Funktionselement $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ habe den positiven Konvergenzradius r und es sei $B\text{-}\lim s_n = s$. Für genügend kleines α ist dann S_α auf s_n anwendbar, also $S_\alpha\text{-}\lim s_n = s$. Damit gelten die durch die eine Hälfte von Satz 17 sichergestellten Tatsachen. Insbesondere ist $f(z)$ in $\mathfrak{G}(S_\alpha)$ regulär. Für $\alpha \to 0$ geht aber $\mathfrak{G}(S_\alpha)$ in den Kreis $|z - \frac{1}{2}| < \frac{1}{2}$ über. Also ist $f(z)$ in diesen Kreis analytisch fortsetzbar. — Es folgt die von E. Phragmén [13]) festgestellte Tatsache, daß eine Potenzreihe in einem außerhalb ihres Borelschen Summabilitätspolygons gelegenen Punkt nicht B-summierbar ist. Das Funktionselement $F(z) = \sum_{\nu=0}^{\infty} c_\nu z^\nu$ besitze einen positiven Konvergenzradius. Um die Behauptung zu beweisen, genügt es zu zeigen: Ist $B\text{-}\sum_{\nu=0}^{\infty} c_\nu z^\nu$ vorhanden für $z = z_0 \neq 0$, so ist $F(z)$ im Innern des über der Strecke $0 \ldots z_0$ als Durchmesser beschriebenen Kreises regulär. Für den Sonderfall $z_0 = 1$ folgt dies aus unserer soeben angestellten Betrachtung. Der allgemeine Fall ergibt sich durch Anwendung des Sonderfalles auf das Funktionselement $G(z) = \sum_{\nu=0}^{\infty} c_\nu z_0^\nu z^\nu = F(z_0 z)$.

Schließlich verknüpfen wir die Sätze 14 und 18 miteinander. Der einfachen Formulierung halber beschränken wir uns dabei auf ein Funktionselement $f(z) = \sum_{\nu=0}^{\infty} a_\nu z^\nu$ vom Konvergenzradius 1. Es sei für ein solches $B\text{-}\sum_{\nu=0}^{\infty} a_\nu = s$; dann ist für jedes $\alpha = 2^{-p}$ mit $0 < \alpha < 1$, $p > 0$ die Entwicklung der Funktion $f(\alpha + y)$ nach Potenzen von y an der Stelle $y = 1 - \alpha$ durch das E_p-Verfahren summierbar zum Wert s. Wir haben damit eine Ergänzung des schon in der Einleitung genannten Satzes von M. Riesz (vgl. **5. 1**). Nach dessen einer Hälfte folgt aus $B\text{-}\sum_{\nu=0}^{\infty} a_\nu = s$ und $s_n = o(\lfloor n)$, daß die für $y = \frac{1}{2}$ genommene Entwicklung von $f(\frac{1}{2} + y)$ konvergiert zur Summe s. Verlangen wir nun

[13]) Vgl. Encyklopädie [1], S. 455.

statt $s_n = o(\sqrt{n})$ nur, daß $\sum_{\nu=0}^{\infty} a_\nu z^\nu$ für $|z|<1$ konvergiert, so ist die bei $y = 1-\alpha$ genommene Entwicklung von $f(\alpha+y)$ wenigstens noch E_p-summierbar zum Wert s, speziell also die für $y = \frac{1}{2}$ genommene Entwicklung von $f(\frac{1}{2}+y)$ zwar nicht mehr notwendig konvergent, aber doch wenigstens E_1-summierbar. Die benötigte Ordnung des E-Verfahrens ist umso niedriger, je weiter draußen die Entwicklungsstelle liegt.

4. 3. Vergleichen wir die Gebiete $\mathfrak{G}'(S_\alpha)$ und $\mathfrak{G}'(E_p)$, so stellen wir fest, daß $\mathfrak{G}'(E_p)$ überdeckt wird von $\mathfrak{G}'(S_\alpha)$, wenn $0<\alpha\leqq\frac{1}{2^{p+1}-1}$ ist, daß sich die beiden Gebiete jedoch überschneiden, wenn $\frac{1}{2^{p+1}-1}<\alpha<1$ ist. Immer aber liegt dasjenige Teilgebiet von $\mathfrak{G}'(E_p)$, dessen z-Werte so beschaffen sind, daß S_α auf z^n anwendbar ist, innerhalb von $\mathfrak{G}'(S_\alpha)$. Diese Verhältnisse finden im folgenden ihre Erklärung.

Satz 20. *Es sei* $0<\alpha<1$, $p>0$ *und* $\frac{\alpha}{\alpha+2^p(1-\alpha)}=\beta$ *gesetzt, so daß* $0<\beta<\alpha$ *ist. Dann gilt*

$$S_\alpha E_p = S_\beta.$$

Beweis. Für $n, \nu, \mu \geqq 0$ ist

$$\binom{n+\mu}{\mu}\binom{\mu}{\nu} = \binom{\mu+n}{n+\nu}\binom{n+\nu}{\nu},$$

also für $n, \nu \geqq 0$

$$\begin{aligned}
S_\alpha E_p &= \frac{(1-\alpha)^{n+1}}{(2^p-1)^\nu}\sum_{\mu=0}^{\infty}\binom{n+\mu}{\mu}\binom{\mu}{\nu}\frac{\alpha^\mu(2^p-1)^\mu}{2^{p\mu}}\\
&= \frac{(1-\alpha)^{n+1}}{(2^p-1)^\nu}\binom{n+\nu}{\nu}\sum_{\mu=\nu}^{\infty}\binom{\mu+n}{n+\nu}\frac{\alpha^\mu(2^p-1)^\mu}{2^{p\mu}}\\
&= \frac{(1-\alpha)^{n+1}\alpha^\nu}{2^{p\nu}}\binom{n+\nu}{\nu}\sum_{\eta=0}^{\infty}\binom{n+\nu+\eta}{\eta}\frac{\alpha^\eta(2^p-1)^\eta}{2^{p\eta}}\\
&= \binom{n+\nu}{\nu}\frac{(1-\alpha)^{n+1}\alpha^\nu 2^{p(n+1)}}{(2^p-2^p\alpha+\alpha)^{n+\nu+1}} = \binom{n+\nu}{\nu}(1-\beta)^{n+1}\beta^\nu = S_\beta.
\end{aligned}$$

Wir sind damit in der Lage, aus dem Verhalten der E_p-Mittel einer Folge auf dasjenige ihrer S_β-Mittel zu schließen:

Es sei $0<\beta<1$, $p>0, 0<a<\frac{1-\beta+2^p\beta}{2^p\beta}$, S_β *auf* s_n *anwendbar und* $E_p s \cong s a^n$ *für* $n\to\infty$. *Dann ist*

$$S_\beta s \cong \frac{(1-\beta)s}{1-\beta+2^p\beta-2^p\beta a}\left[\frac{1-\beta}{1-\beta+2^p\beta-2^p\beta a}\right]^n.$$

Zum Beweis setzen wir $\alpha = \frac{2^p\beta}{1-\beta+2^p\beta}$ und wenden nacheinander die Sätze 20, 1 und 9 an.

Insbesondere dürfen wir $a = 1$ setzen. Schreiben wir α anstatt β, so ergibt sich: Aus $E_p\text{-}\lim s_n = s$ folgt $S_\alpha\text{-}\lim s_n = s$ dann, wenn S_α auf s_n anwendbar ist. Nun ist für $E_p\text{-}\lim s_n = s$ die Bedingung $s_n = o((2^{p+1}-1)^n)$ notwendig[14]). Auf eine ihr genügende Folge ist S_α anwendbar, wenn $\alpha < \frac{1}{2^{p+1}-1}$ ist. In diesem Fall folgt also aus $E_p\text{-}\lim s_n = s$ allein, daß $S_\alpha\text{-}\lim s_n = s$ ist. Aber auch nur in diesem Fall, denn daß die beiden Verfahren für $\alpha > \frac{1}{2^{p+1}-1}$ unvergleichbar sind, sahen wir oben schon. Es bleibt noch der Grenzfall $\alpha = \frac{1}{2^{p+1}-1}$ zu untersuchen. Daß es dann S_α-limitierbare Folgen gibt, die nicht E_p-limitierbar sind, zeigen die Gebiete $\mathfrak{G}'(S_\alpha)$ und $\mathfrak{G}'(E_p)$. Wir geben noch umgekehrt eine Folge an, die in dem fraglichen Fall E_p-, aber nicht S_α-limitierbar ist. Aus $E_p s = t_n$ folgt

$$s_n = (-1)^n \sum_{\nu=0}^{n} (-1)^\nu \binom{n}{\nu} (2^p-1)^{n-\nu} 2^{p\nu} t_\nu .$$

Setzen wir $t_n = \frac{(-1)^n}{n+1}$, so ist $E_p\text{-}\lim s_n = 0$, jedoch

$$|s_n| = \sum_{\nu=0}^{n} \binom{n}{\nu} (2^p-1)^{n-\nu} \frac{2^{p\nu}}{\nu+1}$$

$$\geqq \frac{1}{n+1} \sum_{\nu=0}^{n} \binom{n}{\nu} 2^p-1)^{n-\nu} 2^{p\nu} = \frac{(2^{p+1}-1)^n}{n+1} = \frac{\alpha^{-n}}{n+1},$$

das S_α-Verfahren also auf s_n nicht anwendbar. Zusammenfassend gilt

Satz 21. *Aus $E_p\text{-}\lim s_n = s$ folgt $S_\alpha\text{-}\lim s_n = s$, wenn $\alpha(2^{p+1}-1) < 1$ ist. Ist $\alpha(2^{p+1}-1) \geqq 1$, so sind die Verfahren E_p und S_α unvergleichbar. Jedoch folgt aus $E_p\text{-}\lim s_n = s$ stets dann $S_\alpha\text{-}\lim s_n = s$, wenn S_α auf s_n anwendbar ist.*

Daraus ergibt sich nochmals die schon im Satz 19 festgestellte Tatsache, daß die Verfahren E_p und S_α miteinander verträglich sind.

Die bisherigen Ergebnisse lassen es berechtigt erscheinen, die Verfahren S_α bei wachsendem Index als eine Fortsetzung der Reihe der immer stärkeren Verfahren $E_p \ldots B$ über B hinaus anzusprechen. Zu dem $E_p \to E_q$-Satz für $p < q$ und dem $E_p \to B$-Satz treten der $S_\beta \to S_\alpha$-Satz für $0 < \beta < \alpha < 1$, der $E_p \to S_\alpha$-Satz und der $B \to S_\alpha$-Satz, bei denen allerdings die Anwendbarkeit von S_α auf die fragliche Folge vorausgesetzt werden muß. Ferner setzen die Gebiete $\mathfrak{G}'(S_\alpha)$ die Reihe der Gebiete $\mathfrak{G}'(E_p) \ldots \mathfrak{G}'(B)$ fort. Wiederum ist zu der Kennzeichnung $\left|z - \frac{1}{\alpha}\right| > \frac{1-\alpha}{\alpha}$ von $\mathfrak{G}'(S_\alpha)$, wie sie zunächst im Hinblick auf $\mathfrak{G}'(E_p)$ und $\mathfrak{G}'(B)$ nur erwartet werden mag, eine Einschränkung (nämlich $|z| < \alpha^{-1}$) zu machen. Daß aber überhaupt eine Einschränkung statt-

[14]) Vgl. K. Knopp [4], S. 134.

finden muß, ist natürlich, denn die Folge z^n kann durch eine positive reguläre Matrixtransformation für reelles $z > 1$ nicht zu einem endlichen Wert limitiert werden.

4. 4. Wir stellen nun einen Zusammenhang zwischen dem TAYLORschen und dem EULER-KNOPPschen Verfahren her und gehen dabei aus von der Frage, ob die Matrizen T_α und E_p miteinander vertauschbar sind. Sie sind es nicht, wie am einfachsten ein Beispiel zeigt.

Es sei $0 < \alpha, \beta < 1$; $p, q > 0$ und s_n die Folge $1, 0, 0, \ldots$. Dann ist für $n \geqq 0$

$$(T_\alpha E_p)s = T_\alpha(E_p s) = \frac{2^p(1-\alpha)}{2^p(1-\alpha)+\alpha}\left(\frac{(1-\alpha)(2^p-1)}{2^p(1-\alpha)+\alpha}\right)^n,$$

$$(E_q T_\beta)s = E_q(T_\beta s) = (1-\beta)\left(\frac{2^q-1}{2^q}\right)^n.$$

Soll also $T_\alpha E_p = E_q T_\beta$ sein, so muß notwendig

$$1-\beta = \frac{2^p(1-\alpha)}{2^p(1-\alpha)+\alpha}, \qquad \frac{2^q-1}{2^q} = \frac{(1-\alpha)(2^p-1)}{2^p(1-\alpha)+\alpha}$$

oder

$$\beta = \frac{\alpha}{2^p(1-\alpha)+\alpha}, \qquad 2^q = 2^p(1-\alpha)+\alpha \tag{4. 4. 1}$$

sein. Sieht man α und p als gegeben an und bestimmt β und q durch (4. 4. 1), so ist $0 < \beta < \alpha$ und $0 < q < p$. Es kann also weder $\beta = \alpha$ noch $q = p$ sein, d. h. es ist sicher $T_\alpha E_p \neq E_p T_\alpha$. Die Bedingungen (4. 4. 1) sind nun aber nicht nur notwendig für $T_\alpha E_p = E_q T_\beta$, sondern auch hinreichend:

Satz 22. *Es sei* $0 < \alpha < 1$, $p > 0$, *und* β *und* q *seien durch* (4. 4. 1) *bestimmt, so daß* $0 < \beta < \alpha$ *und* $0 < q < p$ *ist. Dann gilt*

$$T_\alpha E_p = E_q T_\beta. \tag{4. 4. 2}$$

Beweis. Wir schicken dem Beweis die folgende Bemerkung voran. Sind $A = a_{n\nu}$ und $B = b_{n\nu}$ reguläre Matrizen, und ist $w > 0$, so folgt aus $E_w A = E_w B$, daß $A = B$ ist. Die Beziehung $E_w A = E_w B$ besagt nämlich

$$\sum_{\mu=0}^{n}\binom{n}{\mu}\frac{a_{\mu\nu}}{(2^w-1)^\mu} = \sum_{\mu=0}^{n}\binom{n}{\mu}\frac{b_{\mu\nu}}{(2^w-1)^\mu} \qquad \text{für } n, \nu \geqq 0. \tag{4. 4. 3}$$

Bei festem ν ergeben sich aber aus dem unendlichen Gleichungssystem

$$\sum_{\mu=0}^{n}\binom{n}{\mu}\frac{a_{\mu\nu}}{(2^w-1)^\mu} = c_{n\nu} \qquad (n \geqq 0)$$

die $a_{n\nu}$ sukzessiv in eindeutiger Weise. Aus (4. 4. 3) folgt daher $a_{n\nu} = b_{n\nu}$.

Der Beweis der Formel (4. 4. 2) ergibt sich nun sehr einfach aus den Sätzen 20 und 14 und der Beziehung $E_u E_v = E_{u+v}$. Zunächst ist

$$S_\alpha E_p = S_\beta.$$

Setzen wir $2^w = \frac{1}{\alpha}$, so ist $w > 0$ und $2^{w+q} = \frac{1}{\beta}$, also

$$E_w T_\alpha E_p = E_w E_q T_\beta,$$

$$T_\alpha E_p = E_q T_\beta.$$

Ist T_β auf s_n anwendbar, so sind $T_\beta|s|$ und $E_q(T_\beta|s|)$ vorhanden, so daß wir von (4. 4. 2) zu

$$T_\alpha(E_p s) = E_q(T_\beta s) \tag{4. 4. 4}$$

übergehen können. Geben wir $p > 0$ und β mit $0 < \beta < 1$ vor, so lassen sich die Beziehungen (4. 4. 1) nach α und q auflösen. Wir erhalten

$$\alpha = \frac{2^p \beta}{2^p \beta + 1 - \beta}, \quad 2^q = \frac{2^p}{2^p \beta + 1 - \beta} \quad \text{mit } \beta < \alpha < 1,\ 0 < q < p.$$

Die Gleichung (4. 4. 4) bringt dann am unmittelbarsten die schon im Satz 19 erkannte Tatsache zum Ausdruck, daß die Verfahren E_p und T_β miteinander verträglich sind.

Nun sei $f(z) = \sum_{\nu=0}^{\infty} a_\nu z^\nu$ ein Funktionselement vom Konvergenzradius 1, und es sei $E_p\text{-}\sum_{\nu=0}^{\infty} a_\nu = s$ für ein $p > 0$. Wird β mit $0 < \beta < 1$ vorgegeben, so gilt die Gleichung (4. 4. 4), deren linke Seite für $n \to \infty$ gegen s konvergiert. Also konvergiert auch die rechte Seite, d. h. die Entwicklung von $f(\beta + y)$ nach Potenzen von y an der Stelle $y = 1 - \beta$ ist E_q-summierbar zum Wert s. Anstatt β können wir auch q mit $0 < q < p$ vorgeben und β aus p und q errechnen. Damit kommen wir zu der folgenden Formulierung:

Es sei $f(z) = \sum_{\nu=0}^{\infty} a_\nu z^\nu$ *konvergent für* $|z| < 1$ *und* $E_p\text{-}\sum_{\nu=0}^{\infty} a_\nu = s$ *für ein* $p > 0$. *Durchläuft* q *fallend das offene Intervall* $(0; p)$, *so durchläuft*

$$\beta = \frac{2^p - 2^q}{2^q(2^p - 1)}$$

steigend das offene Intervall $(0; 1)$, *und die Entwicklung von* $f(\beta + y)$ *nach Potenzen von* y *ist für* $y = 1 - \beta$ *jeweils* E_q*-summierbar zum Wert* s.

Man kommt in diesem Fall also zur Summierung einer E_p-summierbaren Reihe auch mit jeder niedrigeren Ordnung q aus, wenn man vorher eine geeignete TAYLOR-Transformation einschaltet. Je kleiner man q wählt, desto weiter draußen hat man zu entwickeln. Jedoch genügt die T-Transformation allein nicht, ein gewisser, wenn auch beliebig kleiner Rest an E-Verfahren bleibt — jedenfalls bei dem hier vorliegenden Ergebnis — notwendig.

§ 5.

Der Zusammenhang der Verfahren E_p, B und S_α mit dem T_α-Verfahren unter einer Nebenbedingung.

5.1. Bei unseren bisherigen Vergleichssätzen, also etwa dem $B \to S_\alpha$-Satz oder dem $T_\alpha \to S_\alpha$-Satz usw., war über die zu limitierende Folge keine andere Voraussetzung zu machen als die in der Natur der Sache liegende, daß die vorkommenden Verfahren anwendbar sind. In diesem und dem letzten Paragraphen werden wir über s_n ziemlich einschränkende Voraussetzungen machen, dafür aber viel schärfere Vergleiche anstellen. Wir werden zum Vergleich auch die gewöhnliche Konvergenz heranziehen und dadurch zu Umkehrsätzen unserer untersuchten Verfahren gelangen.

Zunächst handelt es sich um einen Vergleich der Verfahren E_p, B, S_β einerseits mit dem Verfahren T_α andererseits. Hardy und Littlewood [2] bewiesen, eine Vermutung von M. Riesz präzisierend, daß die Verfahren B und $T_{1/2}$ äquivalent sind, wenn man sich auf Folgen s_n mit $s_n = o(\sqrt{n})$ beschränkt. Daß gerade die Verfahren B und $T_{1/2}$ etwas miteinander zu tun haben werden, zeigen die Gebiete $\mathfrak{G}'(B)$ und $\mathfrak{G}'(T_\alpha)$. $\mathfrak{G}'(B)$ ist das Gebiet $\Re z < 1$, $\mathfrak{G}'(T_{1/2})$ das Gebiet $\Re z < 1$, $|z| < 2$. Vergleichen wir nun $\mathfrak{G}'(E_p)$ und $\mathfrak{G}'(T_\alpha)$, so finden wir

$$\mathfrak{G}'(E_p) = \mathfrak{G}'(T_\alpha) \text{ für } \alpha = \frac{2^p - 1}{2^{p+1} - 1},\ 0 < \alpha \leqq \frac{1}{3},\ 0 < p \leqq 1.$$

Derselbe Zusammenhang besteht auch für den Fall $\frac{1}{3} < \alpha < \frac{1}{2}$, $1 < p < \infty$, wenn wir davon absehen, daß dann zu $\mathfrak{G}'(T_\alpha)$ noch die Forderung $|z| < \frac{1}{\alpha}$ hinzutritt. Die Vermutung liegt nahe, daß bei dem angegebenen Zusammenhang zwischen p und α analog zum Rieszschen Satz auch die Verfahren E_p und T_α für alle Folgen $s_n = o(\sqrt{n})$ äquivalent sind. Ferner ist

$$\mathfrak{G}'(S_\beta) = \mathfrak{G}'(T_\alpha) \text{ für } \alpha = \frac{1}{2 - \beta},\ \frac{1}{2} < \alpha < 1,\ 0 < \beta < 1,$$

und wiederum ein dementsprechender Äquivalenzsatz zu vermuten. Diese Vermutungen sind richtig. Einschließlich des Rieszschen Satzes gilt

Satz 23. *Ist* $s_n = o(\sqrt{n})$, *also* $f(z) = \sum_{\nu=0}^{\infty} a_\nu z^\nu$ *für* $|z| < 1$ *konvergent, so gilt:*

(a) *Dann und nur dann ist* $E_p\text{-}\sum_{\nu=0}^{\infty} a_\nu = s$ *für ein* $p > 0$, *wenn,*

$$\alpha = \frac{2^p - 1}{2^{p+1} - 1}$$

gesetzt, die Entwicklung von $f(\alpha + y)$ *nach Potenzen von* y *für* $y = 1 - \alpha$ *konvergiert gegen* s.

(b) *Dann und nur dann ist* $B\text{-}\sum_{\nu=0}^{\infty} a_\nu = s$, *wenn die Entwicklung von* $f(\frac{1}{2}+y)$ *nach Potenzen von* y *für* $y=\frac{1}{2}$ *konvergiert gegen* s.

(c) *Dann und nur dann ist* $S_\beta\text{-}\sum_{\nu=0}^{\infty} a_\nu = s$ *für ein* β *mit* $0<\beta<1$, *wenn,*

$$\gamma = \frac{1}{2-\beta}$$

gesetzt, die Entwicklung von $f(\gamma+y)$ *nach Potenzen von* y *für* $y=1-\gamma$ *konvergiert gegen* s.

Damit ist der Rieszsche Satz nach zwei Richtungen hin verbreitert. Durchläuft p das Intervall $(0;\infty)$, so durchläuft α das Intervall $(0;\frac{1}{2})$; durchläuft β das Intervall $(0;1)$, so durchläuft γ das Intervall $(\frac{1}{2};1)$. Es zeigt sich wieder, daß die S_β-Verfahren die Reihe der Verfahren $E_p \ldots B$ in natürlicher Weise fortsetzen. Eine Verallgemeinerung des Satzes 23 werden wir in **5.4** kennen lernen. In **6.2** wird sich ergeben, daß die Voraussetzung $s_n = o(\sqrt{n})$ durch $a_n = o(1)$ ersetzt werden kann.

Beim Beweis des Satzes 23 schließen wir an den Hardy-Littlewoodschen Beweis des Rieszschen Satzes an. Teilweise dient auch eine von K. Knopp [4] gegebene Abschätzung als Vorbild. Hardy und Littlewood führen in ihrer Untersuchung ein gewisses (E,a)-Verfahren ein[15]). Da sich der Buchstabe E inzwischen für das Euler-Knoppsche Verfahren eingebürgert hat, wählen wir statt (E,a) die Bezeichnung F_a. Es handelt sich dann um folgendes:

Die Folge s_n *heißt* F_a*-limitierbar zum Wert* s *für ein* $a>0$, *wenn*

$$F_a s = \sqrt{\frac{a}{\pi n}} \sum_{\nu=-n}^{\infty} e^{-\frac{a\nu^2}{n}} s_{n+\nu} \to s$$

strebt für $n\to\infty$, *wobei noch die Konvergenz der Reihe für alle* $n>0$ *vorausgesetzt wird.*

Dieses permanente F_a-Verfahren (vgl. [19])) ist für $a=\frac{1}{2}$ das Bindeglied zwischen den Verfahren B und $T_{1/2}$. Bis auf gewisse Korrekturglieder stimmen sowohl die Koeffizienten der B-Transformation als auch die der $T_{1/2}$-Transformation mit den Koeffizienten der $F_{1/2}$-Transformation überein, und die Korrekturglieder spielen bei Folgen $s_n = o(\sqrt{n})$ keine Rolle. Der hier benutzte Zusammenhang zwischen $T_{1/2}$ und $F_{1/2}$ ist Teil einer allgemeineren Beziehung: Ist $a=(1-\varrho)/2\alpha$, so sind die Aussagen $T_\alpha\text{-}\lim s_n = s$ und $F_a\text{-}\lim s_n = s$ für Folgen $s_n = o(\sqrt{n})$ äquivalent. Es wird unsere Aufgabe sein, auch die Koeffizienten der

[15]) [2], S. 47. Dieses Verfahren wird nicht erst beim Beweis des Rieszschen Satzes herangezogen, sondern spielt schon beim Beweis des $0\text{-}B\to K$-Satzes (vgl. **6.2**) eine wesentliche Rolle.

E_p- und S_β-Transformationen mit denen geeigneter F_α-Transformationen zu vergleichen und den Einfluß der dabei auftretenden Korrekturglieder abzuschätzen.

5. 2. Die Verwandtschaft der Verfahren E_p, S_β und T_α äußert sich und ist teilweise begründet in der Tatsache, daß ihre zugehörigen Transformationskoeffizienten eine gemeinsame Voraussetzung erfüllen, die wir mit V bezeichnen wollen.

Voraussetzung $V = V(\lambda, a, \sigma)$ *für die Matrix* A. *Die Matrix* $A = a_{n\nu}$ $(n, \nu \geqq 0)$ *ist permanent. Es gibt positive Konstante* λ, a *und* σ, *so daß folgendes richtig ist:*

Für die positiven ganzen Zahlen n *und* m *mit* $m = \lambda n + \varrho$ *und* $0 \leqq \varrho < \mathrm{Max}\,(1; \lambda)$ *ist bei* $-\sigma n < \mu < \sigma n$ (μ *ganz*) *und* $m + \mu \geqq 0$

$$(5.\,2.\,1) \qquad a_{n,\,m+\mu} = \sqrt{\frac{a}{\pi m}}\, e^{-\frac{a\mu^2}{m} + \frac{\mu}{m} O(1) + \frac{\mu^3}{m^2} O(1)} \left[1 + O\left(\frac{1}{m}\right)\right],$$

wobei die O-Aussage für $n \to \infty$ *gilt, gleichmäßig in* ϱ *und* μ *bei den angegebenen Einschränkungen. Ferner ist für jedes positive* $\tau < \lambda$ *und jedes* $t > \lambda$

$$(5.\,2.\,2) \qquad \sum_{0 \leqq \nu \leqq \tau n} a_{n\nu} s_\nu = o(1), \quad \sum_{t n \leqq \nu} a_{n\nu} s_\nu = o(1) \qquad (n \to \infty),$$

sofern s_n *für ein geeignetes positives* h *die Voraussetzung* $s_n = O(n^h)$ *erfüllt.*

Der erste Teil des Beweises von Satz 23 wird darin bestehen zu zeigen, daß die Matrizen E_p, S_β und T_α die Voraussetzung V erfüllen. Wir behandeln zuerst E_p und setzen für $p > 0$

$$r = q + 1 = 2^p > 1.$$

Wie wir wissen, ist

$$E_p = a_{n\nu} = \frac{1}{r^n} \binom{n}{\nu} q^{n-\nu} \qquad (n, \nu \geqq 0)$$

permanent. Wir setzen weiter

$$\lambda = \frac{1}{r}, \quad a = \frac{r}{2(r-1)} = \frac{2^{p-1}}{2^p - 1}$$

und wählen ein beliebiges, von jetzt an festgehaltenes positives

$$\sigma < \mathrm{Min}\left(\frac{1}{2r}; \frac{r-1}{2r}\right).$$

Es ist dann $\lambda < 1$ und $\mathrm{Max}\,(1; \lambda) = 1$. Wir zeigen, daß mit diesen Konstanten (5. 2. 1) gilt. Dabei setzen wir n größer als eine geeignete Anfangsnummer voraus, und zwar wählen wir n so groß, daß für ganzes μ mit $-\sigma n < \mu < \sigma n$ die Hilfsungleichungen

$$0 < m < n, \quad \frac{1}{2r} < \frac{m+\mu}{n} < \frac{r+1}{2r} < 1, \quad \frac{|\mu|}{m} < \frac{1}{2}, \quad \frac{|\mu|}{n-m} < \frac{3}{4}$$

gelten, sofern $0 \leqq \varrho < 1$ und $m = \lambda n + \varrho$ ganz ist. Sind n, μ und ϱ

in dieser Weise eingeschränkt, so erhalten wir aus der STIRLINGschen Formel

$$n! = \left(\frac{n}{e}\right)^n \sqrt{2\pi n}\left[1 + O\left(\frac{1}{n}\right)\right]$$

nach kurzer Zwischenrechnung die Abschätzung

$$a_{n,m+\mu} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sqrt{\frac{n}{m(n-m)}}\, PQ\left[1 + O\left(\frac{1}{m}\right)\right] \tag{5.2.3}$$

mit den Abkürzungen

$$P = \left(1+\frac{\mu}{m}\right)^{-m-\mu-\frac{1}{2}} \left(1-\frac{\mu}{n-m}\right)^{-n+m+\mu-\frac{1}{2}},$$

$$Q = \left(\frac{n}{mr}\right)^n \left(\frac{n-m}{qm}\right)^{-n+m+\mu},$$

in der das O gleichmäßig in μ und ϱ gilt für $n \to \infty$ oder, was dasselbe ist, für $m \to \infty$. Nun ist für $0 \leqq x \leqq 1$

$$\log(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{\vartheta_1}{3} x^3 \quad \text{mit } 0 < \vartheta_1 < 1,$$

und für $-1 < x \leqq 0$

$$\log(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{\vartheta_2}{1+x} x^3 \quad \text{mit } 0 < \vartheta_2 < 1,$$

also nach unseren Hilfsungleichungen

$$\log\left(1+\frac{\mu}{m}\right) = \frac{\mu}{m} - \frac{\mu^2}{2m^2} + \frac{\mu^3}{m^3} O(1),$$

$$\log\left(1-\frac{\mu}{n-m}\right) = -\frac{\mu}{n-m} - \frac{\mu^2}{2(n-m)^2} - \frac{\mu^3}{(n-m)^3} O(1).$$

Damit wird

$$\log P = -\frac{\mu^2}{2m} - \frac{\mu^2}{2(n-m)} + \frac{\mu}{m}\left[-\frac{1}{2} + \frac{1}{4}\frac{\mu}{m} - \frac{1}{2}\frac{\mu^2}{m^2} O(1)\right]$$

$$+ \frac{\mu}{n-m}\left[\frac{1}{2} + \frac{1}{4}\frac{\mu}{n-m} + \frac{1}{2}\frac{\mu^2}{(n-m)^2} O(1)\right]$$

$$+ \frac{\mu^3}{m^2}\left[\frac{1}{2} - O(1) - \frac{\mu}{m} O(1)\right] + \frac{\mu^3}{(n-m)^2}\left[-\frac{1}{2} + O(1) - \frac{\mu}{n-m} O(1)\right].$$

Die vier eckigen Klammern sind alle $O(1)$, und wegen

$$\frac{1}{n-m} = \frac{1}{r-1}\frac{1}{m}\left[1 + O\left(\frac{1}{m}\right)\right]$$

ist ferner

$$-\frac{\mu^2}{2m} - \frac{\mu^2}{2(n-m)} = -\frac{\mu^2}{2m}\frac{r}{r-1} + \frac{\mu^2}{m^2} O(1),$$

so daß wir

$$P = e^{-\frac{a\mu^2}{m} + \frac{\mu}{m} O(1) + \frac{\mu^3}{m^2} O(1)}$$

erhalten. Weiter ist

$$\log Q = -n\log\left(1+\frac{\varrho r}{n}\right)+(n-m-\mu)\left[\log\left(1+\frac{\varrho r}{n}\right)-\log\left(1-\frac{\varrho r}{(r-1)n}\right)\right]$$
$$= -n\left[\frac{\varrho r}{n}+O\left(\frac{1}{n^2}\right)\right]+((1-\lambda)n-\varrho-\mu)\left[\frac{\varrho r}{n}+\frac{\varrho r}{(r-1)n}+O\left(\frac{1}{n^2}\right)\right]$$
$$= \frac{\mu}{n}O(1)+O\left(\frac{1}{n}\right),\quad Q = e^{\frac{\mu}{m}O(1)}\left[1+O\left(\frac{1}{m}\right)\right].$$

Zusammen mit

$$\sqrt{\frac{n}{m(n-m)}} = \sqrt{\frac{2a}{m}}\left[1+O\left(\frac{1}{m}\right)\right]$$

erhalten wir aus (5. 2. 3) damit (5. 2. 1).

Es sei nun weiter $0<\tau<\frac{1}{r}<t\leqq 1$ [16]) und $s_n = O(n^h)$ für ein $h>0$. Wir wählen ein positives $\sigma'<\sigma$, so daß, $a_{n\nu} = a(n,\nu)$ gesetzt, für ein geeignetes $a'>0$

$$a(n, m\pm[\sigma' n]) = O\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\,e^{-a'\frac{[\sigma' n]^2}{m}}\right) \qquad \text{für } n\to\infty\ ^{17}),$$

und für genügend großes n

$$\tau n < m-[\sigma' n] < \frac{n}{r} < m+[\sigma' n] < tn$$

ist. Wegen

$$\frac{a(n,\nu)}{a(n,\nu-1)} = \frac{n-\nu+1}{q\nu} \qquad \text{für } 0<\nu\leqq n$$

ist die Folge $a_{n\nu}$ bei festem n steigend für $0\leqq\nu\leqq\frac{n}{r}$ und fallend für $\frac{\nu n}{r}\leqq\nu\leqq n$. Wenn wir daher in den folgenden Summen die Anzahl der Summanden durch $O(n)$, die $a_{n\nu}$ durch $a(n, m-[\sigma' n])$ bzw. $a(n, m+[\sigma' n])$ und die s_ν durch $O(n^h)$ abschätzen, so erhalten wir

$$\sum_{0\leqq\nu\leqq\tau n} a_{n\nu}s_\nu = O\left(n^{h+\frac{1}{2}}\,e^{-a'\frac{[\sigma' n]^2}{m}}\right) = o(1),\qquad \sum_{tn\leqq\nu\leqq n} a_{n\nu}s_\nu = o(1).$$

Damit ist gezeigt, daß E_p die Voraussetzung V erfüllt.

Wir behandeln nun die Matrix

$$S_\beta = a_{n\nu} = a(n,\nu) = (1-\beta)^{n+1}\binom{n+\nu}{\nu}\beta^\nu \qquad (0<\beta<1)$$

und zeigen, uns kürzer fassend, daß auch sie die Voraussetzung V erfüllt, und zwar mit

$$\lambda = \frac{\beta}{1-\beta},\quad a = \frac{1-\beta}{2}$$

[16]) Für $t>1$ ist die zweite Gleichung (5. 2. 2) wegen $a_{n\nu}=0$ für $\nu>n$ sicher richtig.

[17]) Daß σ' und a' so gewählt werden können, folgt aus (5. 2. 1). Für genügend kleines σ' ist sicher das Glied

$$\frac{[\sigma' n]^3}{m^2}O(1) < \frac{a}{2}\frac{[\sigma' n]^2}{m}.$$

und einem beliebigen, jetzt festgehaltenen positiven $\sigma \leqq \frac{\lambda}{2}$. Ist $m = \lambda n + \varrho$ ganz mit $0 \leqq \varrho < \mathrm{Max}\,(1;\lambda)$, so ist für $n > 0$ und $-\sigma n < \mu < \sigma n$

$$0 < m, \quad \frac{\lambda n}{2} < m + \mu, \quad \frac{|\mu|}{n+m} < \frac{|\mu|}{m} < \frac{1}{2},$$

und für $n \to \infty$, d. h. auch für $m \to \infty$

$$a_{n,m+\mu} = \frac{1-\beta}{\sqrt{2\pi}} \sqrt{\frac{m+n}{mn}}\, PQ\left[1 + O\left(\frac{1}{m}\right)\right]$$

mit

$$P = \left(1+\frac{\mu}{m}\right)^{-m-\mu-\frac{1}{2}} \left(1+\frac{\mu}{n+m}\right)^{n+m+\mu+\frac{1}{2}} = e^{-\frac{a\mu^2}{m} + \frac{\mu}{m} O(1) + \frac{\mu^3}{m^2} O(1)},$$

$$Q = \left(\frac{(1-\beta)m}{\beta n}\right)^n \left(\beta\left(1+\frac{n}{m}\right)\right)^{n+m+\mu} = e^{\frac{\mu}{m} O(1)} \left[1 + O\left(\frac{1}{m}\right)\right].$$

Zusammen mit

$$\sqrt{\frac{m+n}{mn}} = \frac{1}{\sqrt{m(1-\beta)}} \left[1 + O\left(\frac{1}{m}\right)\right]$$

ergibt sich (5. 2. 2).

Es sei nun weiter $0 < \tau < \lambda < t$ und $s_n = O(n^h)$ für ein $h > 0$. Wir wählen ein positives σ', so daß für ein geeignetes $a' > 0$

$$a(n, m \pm [\sigma' n]) = O\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\, e^{-a' \frac{[\sigma' n]^2}{m}}\right) \qquad \text{für } n \to \infty,$$

und für genügend großes n

$$\tau n < m - [\sigma' n] < \lambda n < m + [\sigma' n] < t n$$

ist. Wegen

$$\frac{a(n,\nu)}{a(n,\nu-1)} = \frac{\beta(n+\nu)}{\nu} \qquad \text{für } \nu > 0$$

ist die Folge $a_{n\nu}$ bei festem n steigend für $0 \leqq \nu \leqq \lambda n$ und fallend für $\lambda n \leqq \nu$. Daher ist

$$\sum_{0 \leqq \nu \leqq \tau n} a_{n\nu} |s_\nu| = O\left(n^{h+\frac{1}{2}}\, e^{-\frac{a'[\sigma' n]^2}{m}}\right) = o(1).$$

Setzen wir $\nu^h a_{n\nu} = b_{n\nu} = b(\eta, \nu)$, so ist

$$\sum_{t n \leqq \nu} a_{n\nu} |s_\nu| = O\Big(\sum_{t n \leqq \nu} b_{n\nu}\Big).$$

Wegen

$$\frac{b(n,\nu)}{b(n,\nu-1)} = \frac{\beta \nu^h (n+\nu)}{(\nu-1)^h \nu} \leqq \frac{\nu^h}{(\nu-1)^h} \beta\left(1+\frac{1}{t}\right) \qquad \text{für } t n \leqq \nu$$

und $\beta(1+t^{-1}) < 1$ ist bei genügend großem n für ein geeignetes $\gamma < 1$

$$\frac{b(n,\nu)}{b(n,\nu-1)} < \gamma \qquad \text{für } t n \leqq \nu,$$

und daher $\sum_{t_n \leqq \nu} b_{n\nu}$ von derselben Größenordnung wie der erste Summand, d. h.

$$\sum_{t_n \leqq \nu} a_{n\nu} |s_\nu| = O\left(n^{h-\frac{1}{2}} e^{-\frac{\alpha'[\sigma' n]^2}{m}}\right) = o(1).$$

Damit ist gezeigt, daß S_β die Voraussetzung V erfüllt.

Ganz ähnlich wie E_p und S_β behandelt man schließlich die Matrix T_α. Wir geben nur das Ergebnis an, nämlich daß $T_\alpha (0 < \alpha < 1)$ die Voraussetzung V erfüllt mit

$$\lambda = \frac{1}{1-\alpha}, \quad a = \frac{1-\alpha}{2\alpha}, \quad 0 < \sigma \leqq \frac{\lambda - 1}{2}\ ^{18}).$$

5. 3. Der zweite Teil des Beweises von Satz 23 besteht in dem folgenden Nachweis:

(*) *Die Matrix A erfülle die Voraussetzung $V(\lambda, a, \sigma)$, und es sei $s_n = O\left(n^{h+\frac{1}{2}}\right)$ für ein $h \geqq 0$. Aus $t_n = As = O(n^h)$ folgt $t'_n = F_a s = O(n^h)$, und umgekehrt. Die Aussage bleibt richtig, wenn überall O durch o ersetzt wird.*

Wir beweisen nur den O-Fall. Der o-Fall wäre ganz ebenso zu behandeln. Um von $t'_n = O(n^h)$ auf $t_n = O(n^h)$ zu schließen, setzen wir $m = \lambda n + \varrho$ für $n > 0$, wo $0 \leqq \varrho = \varrho(n) < 1$ und $\lambda n + \varrho$ ganz ist, und prüfen, ob $t_n - t'_m = O(n^h)$ ist für $n \to \infty$ oder, was dasselbe ist, für $m \to \infty$. Um von $t_n = O(n^h)$ auf $t'_n = O(n^h)$ zu schließen, bestimmen wir zu jedem $m > 0$ ein nicht negatives $\varrho = \varrho(m) < \lambda$, so daß $m - \varrho$ ein ganzzahliges Vielfaches von λ ist, setzen $n = (m - \varrho)/\lambda$ und prüfen, ob $t'_m - t_n = O(n^h)$ ist für $n \to \infty$. Unsere Aufgabe besteht also darin, zu zeigen:

Ist $0 \leqq \varrho < \mathrm{Max}(1; \lambda)$ und sind n und $m = \lambda n + \varrho$ positiv ganz, so ist gleichmäßig in ϱ

$$t_n - t'_m = O(n^h). \tag{5. 3. 1}$$

Wir setzen bei positivem $\eta < 1$

$$\bar{t}_n = \sum_{(1-\eta)m < \nu < (1+\eta)m} a_{n\nu} s_\nu = \sum_{|\mu| \leqq \eta m} a_{n, m+\mu}\, s_{m+\mu},$$

$$\bar{t}'_m = \sqrt{\frac{a}{\pi m}} \sum_{|\mu| \leqq \eta m} s_{m+\mu} e^{-\frac{a\mu^2}{m}}.$$

Wegen (5. 2. 2) ist

$$t_n = \bar{t}_n + \sum_{0 \leqq \nu \leqq (1-\eta)m} a_{n\nu} s_\nu + \sum_{(1+\eta)m \leqq \nu} a_{n\nu} s_\nu = \bar{t}_n + o(1).$$

---

[18]) Der Wert $\frac{\lambda - 1}{2}$ stellt nur eine mögliche Schranke dar und liegt nicht in der Natur des T_α-Verfahrens begründet.

Ferner ist

$$t'_m = \bar{t}'_m + \sqrt{\frac{a}{\pi m}} \sum_{-m \leqq \mu \leqq -\eta m} s_{m+\mu} e^{-\frac{a\mu^2}{m}} + \sqrt{\frac{a}{\pi m}} \sum_{\eta m \leqq \mu} s_{m+\mu} e^{-\frac{a\mu^2}{m}},$$

$$\sum_{-m \leqq \mu \leqq -\eta m} s_{m+\mu} e^{-\frac{a\mu^2}{m}} = \sum_{0 \leqq \nu \leqq (1-\eta)m} s_\nu e^{-\frac{a(m-\nu)^2}{m}}$$

$$= O\left(m^{h+\frac{3}{2}} e^{-a\eta^2 m}\right) = o(1),$$

$$\sum_{\eta m \leqq \mu} s_{m+\mu} e^{-\frac{a\mu^2}{m}} = O\left(\sum_{\eta m \leqq \mu} \mu^{h+\frac{1}{2}} e^{-a\eta\mu}\right) = O\left(\sum_{\eta m \leqq \mu} e^{-\frac{a\eta\mu}{2}}\right) = o(1),$$

$$t'_m = \bar{t}'_m + o(1).$$

Mit (5. 3. 1) ist also gleichwertig $\bar{t}_n - \bar{t}'_m = O(n^h)$.

Wir denken uns nun η so klein gewählt, daß aus $|\mu| < \eta m$ auch $|\mu| < \sigma n$ folgt für alle in Frage kommenden Paare n, m. Dann können wir in die Summe für $\bar{t}_n$ mit (5. 2. 1) eingehen. Wir nehmen η auch noch so klein, daß für das dort im Exponenten auftretende Glied $\frac{\mu^3}{m^2} O(1)$ gilt

$$\left|\frac{\mu^3}{m^2} O(1)\right| < \frac{a\mu^2}{2m} \quad \text{für } |\mu| < \eta m.$$

Berücksichtigen wir noch die für beliebiges $\lambda > 0$, $b > 0$, $l \geqq 0$ gültige Formel[19])

$$(5.3.2) \quad \sum_{|\mu| < \lambda m} |\mu|^l e^{-\frac{b\mu^2}{m}} \simeq \sum_{\mu=-\infty}^{\infty} |\mu|^l e^{-\frac{b\mu^2}{m}} \simeq \sqrt{\frac{m}{b}}^{l+1} \Gamma\left(\frac{l+1}{2}\right) \quad (m \to \infty)$$

---

[19]) Die Formel ergibt sich durch Übergang von den Summen zu Integralen (vgl. K. Knopp [4], S. 143, Fußnote). Z. B. ist, weil das bei $|x| = \sqrt{\frac{lm}{2b}}$ gelegene Maximum von $|x|^l e^{-\frac{bx^2}{m}}$ den Wert $\left(\sqrt{\frac{lm}{2be}}\right)$ hat,

$$\left| \sum_{\mu=-\infty}^{\infty} |\mu|^l e^{-\frac{b\mu^2}{m}} - \int_{-\infty}^{\infty} |x|^l e^{-\frac{bx^2}{m}} dx \right| < C\left(\sqrt{\frac{lm}{2be}}\right)$$

mit einer von m und l unabhängigen Konstanten C, also

$$\left| \sum_{\mu=-\infty}^{\infty} |\mu|^l e^{-\frac{b\mu^2}{m}} - \sqrt{\frac{m}{b}}^{l+1} \Gamma\left(\frac{l+1}{2}\right) \right| < C\left(\sqrt{\frac{lm}{2be}}\right).$$

Es ist auch

$$\sum_{\mu=-m}^{\infty} e^{-\frac{b\mu^2}{m}} \simeq \sqrt{\frac{m}{b}}\, \Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\frac{\pi m}{b}},$$

woraus die Permanenz der F_b-Verfahren folgt.

und die für beliebiges x gültige Abschätzung $|e^x - 1| \leqq |x|\, e^{|x|}$, so erhalten wir

$$\bar{t}_n - \bar{t}'_m = \sum_{|\mu| \leqq \eta m} s_{m+\mu} \left(a_{n,\, m+\mu} - \sqrt{\frac{a}{\pi m}}\, e^{-\frac{a\mu^2}{m}} \right) = \Sigma' + \Sigma'',$$

$$\Sigma' = O\left(\frac{1}{m}\right) \sum_{|\mu| \leqq \eta m} s_{m+\mu} \sqrt{\frac{a}{\pi m}}\, e^{-\frac{a\mu^2}{m} + \frac{\mu}{m} O(1) + \frac{\mu^3}{m^2} O(1)},$$

$$\Sigma'' = \sum_{|\mu| \leqq \eta m} s_{m+\mu} \sqrt{\frac{a}{\pi m}}\, e^{-\frac{a\mu^2}{m}} \left(e^{\frac{\mu}{m} O(1) + \frac{\mu^3}{m^2} O(1)} - 1 \right);$$

$$\Sigma' = O\left(m^{h-1} \sum_{|\mu| \leqq \eta m} e^{-\frac{a\mu^2}{m} + \left| \frac{\mu^3}{m^2} O(1) \right|} \right)$$

$$= O\left(m^{h-1} \sum_{|\mu| \leqq \eta m} e^{-\frac{a\mu^2}{2m}} \right) = O\left(m^{h-\frac{1}{2}} \right) = O(m^h);$$

$$|\Sigma''| \leqq \sum_{|\mu| \leqq \eta m} |s_{m+\mu}| \sqrt{\frac{a}{\pi m}} \left(\left| \frac{\mu}{m} O(1) \right| + \left| \frac{\mu^3}{m^2} O(1) \right| \right) e^{-\frac{a\mu^2}{m} + \left| \frac{\mu}{m} O(1) \right| + \left| \frac{\mu^3}{m^2} O(1) \right|},$$

$$\Sigma'' = O\left(m^{h-1} \sum_{|\mu| \leqq \eta m} |\mu|\, e^{-\frac{a\mu^2}{2m}} \right) + O\left(m^{h-2} \sum_{|\mu| \leqq \eta m} |\mu|^3 e^{-\frac{a\mu^2}{2m}} \right) = O(m^h).$$

Also ist $t_n - t'_m = O(n^h)$ und damit (*) bewiesen.

5. 4. Wenden wir (*) im o-Fall und für $h = 0$ an, so ergibt sich die Äquivalenz von A und F_a, sofern $s_n = o(\sqrt{n})$ ist. Zusammen mit den Ergebnissen aus **5. 2** folgt: Für Folgen $s_n = o(\sqrt{n})$ ist

E_p äquivalent mit F_a für $a = \frac{2^{p-1}}{2^p - 1} \left(0 < p,\ \frac{1}{2} < a < \infty \right)$,

S_β „ „ F_a „ $a = \frac{1-\beta}{2} \left(0 < \beta < 1,\ 0 < a < \frac{1}{2} \right)$,

T_α „ „ F_a „ $a = \frac{1-\alpha}{2\alpha}$ $(0 < \alpha < 1,\ 0 < a < \infty)$ [20].

Also ist für solche Folgen

T_α äquivalent mit E_p für $\alpha = \frac{2^p - 1}{2^{p+1} - 1} \left(0 < p,\ 0 < \alpha < \frac{1}{2} \right)$,

T_α „ „ S_β „ $\alpha = \frac{1}{2 - \beta} \left(0 < \beta < 1,\ \frac{1}{2} < \alpha < 1 \right)$.

Nehmen wir die Äquivalenz der Verfahren B und $F_{1/2}$ hinzu [21], so ist damit Satz 23 bewiesen.

Wir können den Satz 23 nun noch durch Heranziehung des Multiplikationssatzes der T-Transformation verallgemeinern. Wir verstehen dabei unter $T_0 = E_0$ die Einheitsmatrix, unter dem T_0- bzw. E_0-Verfahren das Verfahren der gewöhnlichen Konvergenz.

---

[20] Vgl. Hardy und Littlewood [2], S. 51, Theorem 4. 3.

[21] Vgl. Hardy und Littlewood [2], S. 48, Theorem 3. 4.

Es sei $0 < \alpha < 1$, $0 < \gamma \leqq \alpha$, $\delta = (\alpha - \gamma)/(1 - \gamma)$ und $s_n = o(\sqrt{n})$. Dann ist $0 \leqq \delta < \alpha$ und $T_\alpha = T_\delta T_\gamma$, also

(5. 4. 1) $\qquad T_\alpha s \to s$ äquivalent mit $T_\delta(T_\gamma s) \to s$.

Da auch $T_\gamma s = o(\sqrt{n})$ ist[22]), können wir im Falle $0 < \alpha < \frac{1}{2}$,

$$2^p = \frac{1-\alpha}{1-2\alpha}, \text{ d. h. } \alpha = \frac{2^p - 1}{2^{p+1} - 1} \left(0 < \alpha < \frac{1}{2},\ p > 0\right)$$

und

$$2^q = \frac{1-\delta}{1-2\delta}, \text{ d. h. } \delta = \frac{2^q - 1}{2^{q+1} - 1} \left(0 \leqq \delta < \frac{1}{2},\ q \geqq 0\right)$$

gesetzt, von (5. 4. 1) zu der Aussage

$$E_p s \to s \text{ äquivalent mit } E_q(T_\gamma s) \to s$$

übergehen, die also gilt, wenn

(5. 4. 2) $\quad p > 0,\ 0 < \gamma \leqq \frac{2^p - 1}{2^{p+1} - 1},\ 2^q = \frac{2^p}{1 + \gamma(2^{p+1} - 1)} \qquad (0 \leqq q < p)$

ist. Im Falle $\alpha = \frac{1}{2}$ können wir von (5. 4. 1) zu der Aussage

$$Bs \to s \text{ äquivalent mit } E_q(T_\gamma s) \to s$$

übergehen, die also gilt, wenn

(5. 4. 3) $\qquad 0 < \gamma \leqq \frac{1}{2},\ 2^q = \frac{1}{2\gamma} \qquad (0 \leqq q)$

ist. Schließlich sei $\frac{1}{2} < \alpha < 1$. Wir setzen in diesem Falle

$$\beta = \frac{2\alpha - 1}{\alpha}, \text{ d. h. } \alpha = \frac{1}{2 - \beta} \left(\frac{1}{2} < \alpha < 1,\ 0 < \beta < 1\right)$$

und

$$\varepsilon = \frac{2\delta - 1}{\delta}, \text{ d. h. } \delta = \frac{1}{2 - \varepsilon} \left(\frac{1}{2} < \delta < 1,\ 0 < \varepsilon < 1\right),$$

während für $0 \leqq \delta < \frac{1}{2}$ der bisherige Zusammenhang zwischen δ und q gelten soll. Dann können wir von (5. 4. 1) zu der Aussage

$$S_\beta s \to s \text{ äquivalent mit } \begin{cases} \text{(I)} & E_q(T_\gamma s) \to s \text{ für } 0 \leqq \delta < \frac{1}{2}, \\ \text{bzw. (II)} & B(T_\gamma s) \to s \quad \text{„} \quad \delta = \frac{1}{2}, \\ \text{„ (III)} & S_\varepsilon(T_\gamma s) \to s \quad \text{„} \quad \frac{1}{2} < \delta < 1 \end{cases}$$

übergehen, die also gilt, wenn

---

[22]) Setzen wir $t = \frac{2}{1-\alpha}$, so ist wegen (5. 2. 2)

$$T_\alpha s = \frac{(1-\alpha)^{n+1}}{\alpha^n} \sum_{n \leqq \nu < tn} \binom{\nu}{n} \alpha^\nu s_\nu + o(1) = o(\sqrt{n}) + o(1) = o(\sqrt{n}).$$

$$(5.4.4)\quad 0<\beta<1,\ \begin{cases} \text{(I)}\ \dfrac{\beta}{2-\beta}<\gamma\leqq\dfrac{1}{2-\beta},\ 2^q=\dfrac{1-\beta}{\gamma(2-\beta)-\beta} \\ \qquad\qquad (0\leqq q), \\ \text{bzw. (II)}\ \gamma=\dfrac{\beta}{2-\beta}, \\ \text{„ (III)}\ 0<\gamma<\dfrac{\beta}{2-\beta},\ \varepsilon=\dfrac{\beta-\gamma(2-\beta)}{1-\gamma(2-\beta)} \\ \qquad\qquad (0<\varepsilon<\beta) \end{cases}$$

ist. Wir fassen zusammen in dem folgenden

Satz 24. *Ist* $s_n=o(\sqrt{n})$, *also* $f(z)=\sum_{\nu=0}^{\infty}a_\nu z^\nu$ *für* $|z|<1$ *konvergent, so gilt:*

(a) *Werden* p, γ und q *gemäß* (5.4.2) *gewählt, so ist dann und nur dann* $E_p\text{-}\sum_{\nu=0}^{\infty}a_\nu=s$, *wenn die Entwicklung von* $f(\gamma+y)$ *nach Potenzen von* y *für* $y=1-\gamma$ *durch das* E_q*-Verfahren zum Wert* s *summierbar ist.*

(b) *Werden* γ *und* q *gemäß* (5.4.3) *gewählt, so ist dann und nur dann* $B\text{-}\sum_{\nu=0}^{\infty}a_\nu=s$, *wenn die Entwicklung von* $f(\gamma+y)$ *nach Potenzen von* y *für* $y=1-\gamma$ *durch das* E_q*-Verfahren zum Wert* s *summierbar ist.*

(c) *Werden* β, γ, q *und* ε *gemäß* (5.4.4) *gewählt, so ist dann und nur dann* $S_\beta\text{-}\sum_{\nu=0}^{\infty}a_\nu=s$, *wenn die Entwicklung von* $f(\gamma+y)$ *nach Potenzen von* y *für* $y=1-\gamma$ *im Falle* (I) *durch das* E_q*-, im Falle* (II) *durch das* B*-, im Falle* (III) *durch das* S_ε*-Verfahren zum Wert* s *summierbar ist.*

In jedem der Fälle (a), (b), (c) kommen wir für $q=0$ zu Satz 23 zurück.

§ 6.

Die Äquivalenz der Verfahren E_p, B, S_α und T_α für beschränkte Folgen. Umkehrsätze.

6.1. Wir schränken nun die Größenordnung von s_n noch weiter ein und verlangen anstatt $s_n=o(\sqrt{n})$ sogar $s_n=O(1)$. Dann sind unsere untersuchten Verfahren überhaupt alle äquivalent:

Satz 25. *Die Verfahren* $E_p\,(p>0)$, B, $S_\beta\,(0<\beta<1)$, $T_\alpha\,(0<\alpha<1)$ *und* $F_a\,(a>0)$ *sind für beschränkte Folgen äquivalent.*

Da die Verfahren E_p, B und S_β nach § 5 je mit einem geeigneten T_α und die Verfahren T_α je mit einem geeigneten F_a äquivalent sind,

immer unter der Voraussetzung $s_n = O(1)$, genügt es zu zeigen, daß die Verfahren F_a unter sich äquivalent sind [23]).

Es sei s_n beschränkt und $0 < a < b$. Aus $F_b s \to s$ folgt $F_a s \to s$. Nach **5. 4** ist dies, wenn

$$\alpha = \frac{1}{2a+1}, \quad \beta = \frac{1}{2b+1}$$

gesetzt wird, gleichwertig mit der Aussage, daß aus $T_\beta s \to s$ auch $T_\alpha s \to s$ folgt. Die letzte Aussage ist aber richtig nach Satz 6. Es bleibt umgekehrt noch zu zeigen, daß aus $F_a s \to s$ auch $F_b s \to s$ folgt. Diese Tatsache bildet das Kernstück des HARDY-LITTLEWOODschen Beweises des O-$B \to K$-Satzes und des KNOPPschen Beweises des O-$E_p \to K$-Satzes [24]). Sie beruht ihrerseits wieder auf dem folgenden

Hilfssatz. *Ist s_n beschränkt und strebt $F_a s \to 0$ für ein $a > o$, so strebt für $\lambda = 1, 2, \ldots$ auch*

$$(6.1.1.) \qquad H_n^{(\lambda)} = \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{\nu=-n}^{\infty} \left(\frac{\nu^2}{n}\right)^\lambda e^{-\frac{a\nu^2}{n}} s_{n+\nu} \to 0 \qquad \text{für } n \to \infty.$$

Im Anschluß an HARDY und LITTLEWOOD und K. KNOPP benutzen wir nun zuerst den Hilfssatz, um von $F_a s \to s$ auf $F_b s \to s$ zu schließen. Für den Hilfssatz selbst geben wir nachher einen neuen Beweis an.

Nach dem bisher Bewiesenen genügt es, von $F_a s \to s$ auf $F_b s \to s$ mit $b = 2a$ zu schließen. Außerdem darf $s = 0$ gesetzt werden. Aus $H_n^{(0)} = o(1)$ ist also auf

$$G_n = \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{\nu=-n}^{\infty} e^{-\frac{2a\nu^2}{n}} s_{n+\nu} = o(1)$$

zu schließen. Wegen

$$e^{-\frac{a\nu^2}{n}} = \sum_{\lambda=o}^{l} \frac{(-a)^\lambda}{\lambda!} \left(\frac{\nu^2}{n}\right)^\lambda + \frac{(-a)^{l+1}}{(l+1)!} \left(\frac{\nu^2}{n}\right)^{l+1} e^{-\frac{\vartheta a \nu^2}{n}}$$

mit $0 < \vartheta < 1$ bekommen wir für $l, n = 1, 2, \ldots$

$$G_n = \sum_{\lambda=o}^{l} \frac{(-a)^\lambda}{\lambda!} H_n^{(\lambda)} + R_n^{(l)}, \quad R_n^{(l)} = \frac{(-a)^{l+1}}{(l+1)!} \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{\nu=-n}^{\infty} \left(\frac{\nu^2}{n}\right)^{l+1} e^{-a(1+\vartheta)\frac{\nu^2}{n}} s_{n+\nu}.$$

---

[23]) Ist die Äquivalenz der Verfahren E_p, S_β, T_α und F_a bewiesen, so folgt die Möglichkeit, auch noch das B-Verfahren hinzuzufügen, unter Vermeidung des (in § 5 nicht selbständig bewiesenen) RIESZschen Satzes aus dem $E_p \to B$- und dem $B \to S_\beta$-Satz.

[24]) Wegen des O-$B \to K$- und des O-$E_p \to K$-Satzes vgl. **6. 2.** HARDY und LITTLEWOOD ([2], S. 41—44) benutzen eine Integralform des F_a-Verfahrens. Bei K. KNOPP ([4], S. 144—147) ist die Beweisanordnung so getroffen, daß nur von $F_1 s \to s$ auf $F_2 s \to s$ geschlossen zu werden braucht. Diese Punkte sind nicht wesentlich.

Bedeuten K, $K_1, \ldots$ geeignete, von n und l unabhängige positive Konstante, so ist (vgl. [19])

$$|R_n^{(l)}| < \frac{K a^{l+1}}{(l+1)!\, n^{l+\frac{3}{2}}} \sum_{\nu=-\infty}^{\infty} \nu^{2l+2}\, e^{-\frac{a\nu^2}{n}}$$

$$< \frac{K\,\Gamma\left(l+\frac{3}{2}\right)}{\sqrt{a}\,\Gamma(l+2)} + \frac{K_1 (l+1)^{l+1}}{\sqrt{n}(l+1)!\, e^{l+1}} < \frac{K_2}{\sqrt{l}} + \frac{K_3}{\sqrt{n}\sqrt{l}} < \frac{K_4}{\sqrt{l}}.$$

Daher konvergiert die Reihe

$$G_n = \sum_{\lambda=0}^{\infty} \frac{(-a)}{\lambda!} H_n^{(\lambda)}$$

gleichmäßig in n, zusammen mit (6. 1. 1) folgt also $G_n = o(1)$.

Es ist nun noch der Hilfssatz zu beweisen. Für ein festes $\lambda \geqq 0$ ist

$$\frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{\nu=n+1}^{\infty} \left(\frac{\nu^2}{n}\right)^{\lambda} e^{-\frac{a\nu^2}{n}} s_{n+\nu} = O\left(\frac{1}{n^{\lambda+\frac{1}{2}}} \sum_{\nu=n+1}^{\infty} \nu^{2\lambda}\, e^{-a\nu}\right) = o(1).$$

Setzen wir daher

$$f_n^{(\lambda)}(x) = \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{\nu=-n}^{n} \left(\frac{\nu^2}{n}\right)^{\lambda} e^{-\frac{x\nu^2}{n}} s_{n+\nu} \quad (n>0, \text{ ganz};\ \lambda \geqq 0, \text{ ganz};\ x>0),$$

so ist von $s_n = O(1)$ und $f_n^{(0)}(a) = o(1)$ auf $f_n^{(\lambda)}(a) = o(1)$ für $\lambda = 1, 2, \ldots$ zu schließen. Nun dürfen wir aber in $F_a s = o(1)$ zu jedem kleineren positiven a übergehen. Also haben wir von $s_n = O(1)$ und

$$\lim_{n\to\infty} f_n^{(0)}(x) = 0 \quad \text{für } 0 < x \leqq a \tag{6. 1. 2}$$

auf $f_n^{(\lambda)}(a) = o(1)$ für $\lambda = 1, 2, \ldots$ zu schließen. Wir ziehen dazu einen Satz von M. Müller[25]) über die Vertauschbarkeit von Grenzübergang und Differentiation heran.

Für ein festes λ ist die Funktionenfolge $f_n^{(\lambda)}(x)$ an jeder Stelle $x_0 > 0$ gleichgradig differenzierbar. Ist nämlich $|s_n| < M$, so ist wegen

$$e^{-\frac{h\nu^2}{n}} = 1 - \frac{h\nu^2}{n} + \frac{h^2\nu^4}{2n^2}\, e^{-\frac{\vartheta h \nu^2}{n}}$$

---

[25]) M. Müller [8], S. 94, Satz 1. Der Satz besagt, daß von

$$\text{(A)} \lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x) \quad \text{auf (B)} \lim_{n\to\infty} f_n'(x_0) = f'(x_0)$$

geschlossen werden darf, wenn (A) für $c \leqq x \leqq d$ gilt mit $c < d$, wenn $c \leqq x_0 \leqq d$ ist, und wenn für $n = 1, 2 \ldots$ die Funktionen $f_n(x)$ an der Stelle x_0 gleichgradig differenzierbar sind, d. h. wenn $f_n'(x_0)$ vorhanden ist und es zu jedem $\varepsilon > 0$ ein von n unabhängiges $\delta > 0$ gibt, so daß

$$\left| \frac{f_n(x_0+h) - f_n(x_0)}{h} - f_n'(x_0) \right| < \varepsilon \qquad \text{für } 0 < |h| < \delta$$

ist. Ist $x_0 = c$ oder $x_0 = d$, so ist unter Differenzierbarkeit einseitige Differenzierbarkeit zu verstehen. Die Existenz von $f'(x_0)$ ist in der Behauptung (B) inbegriffen.

mit $0<\vartheta<1$ und wegen (5.3.2) für $0<|h|<\frac{x_0}{2}$

$$\left|\frac{f_n^{(\lambda)}(x_0+h)-f_n^{(\lambda)}(x_0)}{h}-\frac{d}{dx}f_n^{(\lambda)}(x_0)\right|<\frac{M}{\sqrt{n}}\sum_{\nu=-n}^{n}\left(\frac{\nu^2}{n}\right)^{\lambda}e^{-\frac{x_0\nu^2}{n}}\left|\frac{e^{-\frac{h\nu^2}{n}}-1}{h}+\frac{\nu^2}{n}\right|$$

$$<\frac{M|h|}{\sqrt{n}}\sum_{\nu=-n}^{n}\left(\frac{\nu^2}{n}\right)^{\lambda+2}e^{-\frac{x_0\nu^2}{2n}}<M_1|h|$$

mit einer von n unabhängigen Konstanten M_1, woraus die behauptete gleichgradige Differenzierbarkeit folgt. Wegen

$$\frac{d}{dx}f_n^{(\lambda)}(x)=-f_n^{(\lambda+1)}(x)$$

erhalten wir nun aus (6.1.2) durch wiederholte Anwendung des Satzes von M. Müller

$$\lim_{n\to\infty}f_n^{(\lambda)}(x)=0 \qquad \text{für } 0<x\leqq a$$

und $\lambda=1,2,\ldots$. Damit ist der Hilfssatz, also auch Satz 25 bewiesen.

6.2. Wir wenden uns nun den Umkehrsätzen der Verfahren E_p, B, S_α und T_α zu. Nach Hardy und Littlewood [2] folgt aus $B\text{-}\lim s_n=s$ rückwärts $s_n\to s$, wenn $a_n=O\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)$ ist; man bezeichnet diesen Satz als $O\text{-}B\to K$-Satz. Ihm entsprechend gilt mit derselben Umkehrbedingung der $O\text{-}E_p\to K$-Satz, wie K. Knopp [4] direkt bewiesen hat, oder wie auch aus dem $E_p\to B$-Satz folgt. Schließlich kennt man den $O\text{-}T_\alpha\to K$-Satz, wiederum mit der Umkehrbedingung $a_n=O\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)$[26]. Diese Sätze sind wegen des $B\to S_\alpha$-, des $E_p\to S_\alpha$- und des $T_\alpha\to S_\alpha$-Satzes enthalten[27] in dem folgenden $O\text{-}S_\alpha\to K$-Satz:

Satz 26. *Aus* $S_\alpha\text{-}\sum_{n=0}^{\infty}a_n=s$ *und* $a_n=O\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)$ *folgt* $\sum_{n=0}^{\infty}a_n=s$.

Seinem Beweis schicken wir voraus den Beweis des Satzes 27.

Satz 27. *Es sei* $h\geqq 0$. *Aus* $S_\alpha s=O(n^h)$ *und* $a_n=O(n^{h-\frac{1}{2}})$ *folgt* $s_n=O(n^h)$. *Die Aussage bleibt richtig, wenn überall* O *durch* o *ersetzt wird.*

Wir beweisen nur den O-Fall. Der o-Fall wäre ganz ebenso zu behandeln. Wir benutzen, daß die Matrix $S_\alpha=a_{n\nu}$ die Voraussetzung $V(\lambda,a,\sigma)$ aus **5.2** erfüllt. Zu jedem ganzen $m>0$ bestimmen wir ein nicht negatives $\varrho=\varrho(m)<\lambda$, so daß $m-\varrho$ ein ganzzahliges Vielfaches

[26]) Vgl. Hardy und Littlewood [2], S. 52 und R. Wais [9], S. 47.

[27]) Die Bedingung $a_n=O\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)$ hat die Anwendbarkeit von S_α auf s_n zur Folge.

von λ ist, setzen $n = (m - \varrho)/\lambda$, $t_n = S_\alpha s$ und bei positivem $\eta < 1$

$$\bar{t}_n = \sum_{(1-\eta)m < \nu < (1+\eta)m} a_{n\nu} s_\nu = \sum_{|\mu| < \eta m} a_{n, m+\mu} s_{m+\mu}.$$

Wegen $a_n = O(n^{h-\frac{1}{2}})$ können wir (5. 2. 2) anwenden und erhalten

$$t_n = \bar{t}_n + o(1), \qquad \bar{t}_n = O(n^h),$$

wobei sich die O- und o-Aussagen auf $n \to \infty$ oder, was dasselbe ist, auf $m \to \infty$ beziehen. Ebenfalls wegen (5. 2. 2) ist

$$\sum_{|\mu| < \eta m} a_{n, m+\mu} = 1 + o(1),$$

so daß wir

$$\begin{aligned} s_m &= (1 + o(1)) \sum_{|\mu| < \eta m} a_{n, m+\mu} s_m \\ &= (1 + o(1)) \sum_{|\mu| < \eta m} a_{n, m+\mu} (s_m - s_{m+\mu}) + O(m^h) \end{aligned}$$

setzen können. Wir denken uns nun η so klein gewählt, daß aus $|\mu| < \eta m$ auch $|\mu| < \sigma n$ folgt für alle in Frage kommenden Paare n, m. Dann können wir (5. 2. 1) heranziehen. Wir nehmen η auch noch so klein, daß für das dort im Exponenten auftretende Glied $\frac{\mu^3}{m^2} O(1)$ gilt:

$$\left| \frac{\mu^3}{m^2} O(1) \right| < \frac{a \mu^2}{2m} \qquad \text{für } |\mu| < \eta m.$$

Wegen $a_n = O(n^{h-\frac{1}{2}})$ ist

$$|s_m - s_{m+\mu}| = |\mu| O(m^{h-\frac{1}{2}}) \qquad \text{für } |\mu| < \eta m,$$

also wird

$$s_m = O(m^{h-1} \sum_{|\mu| < \eta m} |\mu| e^{-\frac{a\mu^2}{2m}}) + O(m^h) = O(m^h).$$

Damit ist Satz 27 bewiesen. Der o-Fall ergibt für $h = 0$ den o-$S_\alpha \to K$-Satz, d. h. den Satz 26 mit der stärkeren Voraussetzung $a_n = o\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)$ anstatt $a_n = O\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)$. Für $h = \frac{1}{2}$ ergibt der o-Fall: Aus $S_\alpha s = o(\sqrt{n})$ und $a_n = o(1)$ folgt $s_n = o(\sqrt{n})$. Insbesondere folgt aus S_α-$\lim s_n = s$ und $a_n = o(1)$ stets $s_n = o(\sqrt{n})$, und wir dürfen in dieser Aussage S_α durch E_p oder B oder T_α ersetzen. Daher ist es erlaubt, in Satz 23 die Voraussetzung $s_n = o(\sqrt{n})$ durch $a_n = o(1)$ zu ersetzen, wie bezüglich des Rieszschen Satzes schon von Hardy und Littlewood [2] festgestellt wurde.

Wir beweisen nun den Satz 26 und dürfen dazu $s = 0$ setzen. Aus den Voraussetzungen folgt auf Grund des Satzes 27 zunächst, daß s_n beschränkt ist. Wählen wir daher eine positive Zahl a, so ist nach Satz 25 F_σ-$\lim s_n = 0$, also (vgl. den Übergang von t_m' zu $\bar{t}_m'$ in 5. 3 mit $\eta_1 = \frac{1}{2}$)

$$\sqrt{\frac{a}{\pi n}} \sum_{|\nu| < n/2} e^{-\frac{a\nu^2}{n}} s_{n+\nu} = o(1).$$

Zusammen mit (vgl. (5. 3. 2))

$$\sqrt{\frac{a}{\pi n}} \sum_{|\nu| \leq n/2} e^{-\frac{a\nu^2}{n}} = 1 + o(1), \quad \sum_{|\nu| \leq n/2} |\nu| e^{-\frac{a\nu^2}{n}} \cong \frac{n}{a},$$

$$|s_n - s_{n+\nu}| < \frac{|\nu| M}{\sqrt{n}} \quad \text{für} \quad |\nu| < \frac{n}{2}$$

erhalten wir

$$s_n = \sqrt{\frac{a}{\pi n}} \sum_{|\nu| \leq n/2} e^{-\frac{a\nu^2}{n}} (s_n - s_{n+\nu}) + o(1),$$

$$|s_n| < \sqrt{\frac{a}{\pi}} \frac{M}{n} \sum_{|\nu| \leq n/2} |\nu| e^{-\frac{a\nu^2}{n}} + o(1),$$

$$\overline{\lim_{n \to \infty}} |s_n| \leqq \frac{M}{\sqrt{\pi a}}.$$

Dies gilt für jedes $a > 0$, also ist $s_n = o(1)$. Damit ist Satz 26 bewiesen.

(Eingegangen am 3. April 1948.)

Schriftenverzeichnis.

L. Bieberbach.

[1] Neuere Untersuchungen über Funktionen von komplexen Variablen. Encyklopädie der mathematischen Wissenschaften, Band **II, 3, 1** (1909—1921), S. 379—532.

G. H. Hardy und J. E. Littlewood.

[2] Theorems concerning the summability of series by Borel's exponential method, Rendiconti Circolo mat. Palermo **41** (1916), S. 36—58.

K. Knopp.

[3] Über das Eulersche Summierungsverfahren, Math. Zeitschr. **15** (1922), S. 226—253.

K. Knopp.

[4] Über das Eulersche Summierungsverfahren (II. Mitteilung), Math. Zeitschr. **18** (1923), S. 125—156.

K. Knopp.

[5] Über Polynomentwicklungen im Mittag-Lefflerschen Stern durch Anwendung der Eulerschen Reihentransformation, Acta math. **47** (1926), S. 313—335.

K. Knopp.

[6] Über eine Klasse konvergenzerhaltender Integraltransformationen und den Äquivalenzsatz der *C*- und *H*-Verfahren, Math. Zeitschr. **47** (1942), S. 229—264.

F. Lösch.

[7] Eine Verallgemeinerung der Eulerschen Reihentransformation mit funktionentheoretischen Anwendungen, Math. Zeitschr. **30** (1929), S. 725—753.

M. Müller.

[8] Über die Vertauschbarkeit von Grenzübergang und Differentiation, Jahresbericht Deutsch. Math. Vereinigung **50** (1940), S. 93—104.

R. Wais.

[9] Das Taylorsche Summierungsverfahren, Dissertation Tübingen (1935), 58 S.

Über die Beziehung zwischen dem Bernsteinschen und Cesàroschen Limitierungsverfahren.

Von

J. Karamata in Beograd.

In der Note „Sur la sommabilité de S. Bernstein et quelques procédés de sommation qui s'y rattachent" [Rec. Math. (Nouvelle Série), Moscou, **21** (63), 1947, S. 13—22] bewies ich durch Umwege den folgenden Satz. *Sei*

$$s_n = \sum_{\nu=0}^{n} u_\nu, \quad n = 0, 1, 2, \ldots, \quad s_{-1} = u_{-1} = 0;$$

aus

$$B_n = \sum_{\nu=0}^{n} \cos\left(\frac{\nu\pi}{2n+1}\right) u_\nu \to s, \quad n \to \infty, \tag{1}$$

folgt

$$\sigma_n = \frac{1}{n+1} \sum_{\nu=0}^{n} \frac{s_{\nu-1} + s_\nu}{2} \to s, \quad n \to \infty, \tag{2}$$

und umgekehrt.

Einen direkten Beweis dieses Satzes erhält man, wenn man die B_n durch die σ_n ausdrückt. Drückt man nämlich nach (2) die u_ν durch die σ_n aus und setzt sie in (1) ein, so erhält man mit Hilfe der Formel

$$\sin(2\nu+1)\alpha - 3\sin(2\nu-1)\alpha + 4\sin(2\nu-3)\alpha - 4\sin(2\nu-5)\alpha + \cdots$$
$$\cdots + (-1)^\nu 4\sin\alpha = -2\sin\alpha\,\mathrm{tg}\,\alpha\sin 2\nu\alpha, \qquad \nu = 1, 2, 3, \ldots$$

die Beziehung

$$B_n = 2(n+1)\sin\left(\frac{\pi}{2}\,\frac{1}{2n+1}\right)$$
$$\left\{\sigma_n - n\,\mathrm{tg}\left(\frac{\pi}{2}\,\frac{1}{2n+1}\right)\frac{\sum_{\nu=0}^{n-1}(\nu+1)\cos\left(\frac{\pi}{2}\,\frac{2\nu+1}{2n+1}\right)\sigma_\nu}{n(n+1)/2}\right\}.$$

Danach folgt erstens (1) aus (2) da

$$\lim_{n\to\infty} B_n = \frac{\pi}{2}\left\{1 - \frac{\pi}{4}2\int_0^1 t\cos\left(\frac{\pi}{2}t\right)dt\right\}s = s$$

ist.

Wegen

$$2(n+1)\sin\left(\frac{\pi}{2}\,\frac{1}{2n+1}\right) > \frac{2n+2}{2n+1} > 1,$$

$$n\,\mathrm{tg}\left(\frac{\pi}{2}\,\frac{1}{2n+1}\right) < \frac{\pi}{4} \quad \text{und} \quad \cos\left(\frac{\pi}{2}\,\frac{2\nu+1}{2n+1}\right) < 1,$$

ist zweitens

$$|B_n| > |\sigma_n| - \frac{\pi}{4} \frac{\sum_{\nu=0}^{n-1} (\nu+1)|\sigma_\nu|}{n(n+1)/2}, \tag{3}$$

woraus, durch bekannte Schlußweise (2) aus (1) gefolgert wird, da $1-\frac{\pi}{4} > 0$ ist.

Wäre nämlich $\sigma_n \neq O(1)$, so wäre für unendlich viele Indizes m,

$$|\sigma_m| \geqq |\sigma_\nu| \text{ für jedes } 0 \leqq \nu \leqq m,$$

also, wegen (3), auch

$$|B_m| \geqq \left(1-\frac{\pi}{4}\right)|\sigma_m|,$$

was $\sigma_n \neq O(1)$ widerspricht, da $B_n \to s$.

Wird weiter p so gewählt, daß

$$|\sigma_p| \to \limsup_{n\to\infty} |\sigma_n|, \quad p \to \infty,$$

so wird

$$|s| = \lim_{p\to\infty} |B_p| \geqq \limsup_{p\to\infty} \left\{ |\sigma_p| - \frac{\pi}{4} \frac{\sum_{\nu=0}^{p-1} (\nu+1)|\sigma_\nu|}{p(p+1)/2} \right\} \geqq \left(1-\frac{\pi}{4}\right) \limsup_{n\to\infty} |\sigma_n|;$$

da aber o. B. d. A. $s = 0$ vorausgesetzt werden kann, so folgt daraus die Behauptung.

(Eingegangen am 24. Juni 1948.)

Eine Bemerkung über die Dirichletschen L-Reihen.

Von

W. Stoll in Tübingen.

Es wird ein neuartiger Beweis des folgenden, zuerst von DIRICHLET bewiesenen Satzes gegeben:

Wenn p eine Primzahl der Form $4k-1$ ist, und wenn $\left(\frac{-p}{k}\right)$ das KRONECKERsche Symbol bedeutet, dann gilt

$$L(p) = \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{-p}{k}\right) \frac{1}{k} > 0.$$

Es wird benutzt werden:

1. Die Entwicklung

$$x = \frac{1}{2} - \frac{1}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin 2\pi k x}{k} \qquad \text{für } 0 < x < 1. \tag{1}$$

2. Einfache Sätze über LEGENDRESche und KRONECKERsche Symbole.
3. Aus der Theorie der DIRICHLET-Reihen

$$L(s,p) = \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{-p}{k}\right) \frac{1}{k^s} = \prod_{q} \frac{1}{1 - \left(\frac{-p}{q}\right) q^{-s}} > 0, \tag{2}$$

wobei q alle Primzahlen durchläuft und $s > 1$ ist.

Beweis. Die Reste r_n mit $n^2 \equiv r_n \bmod p$, $n = 1, 2, \ldots, \frac{1}{2}(p-1)$ sind gerade alle quadratischen Reste modulo p in $0 < r_n < p$. Mit Gl. (1) wird

$$\begin{aligned} b = \sum_{n=1}^{\frac{p-1}{2}} \frac{r_n}{p} &= \sum_{n=1}^{\frac{p-1}{2}} \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} \sin 2\pi k \frac{r_n}{p}\right) \\ &= \frac{p-1}{4} - \frac{1}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} \sum_{n=1}^{\frac{p-1}{2}} \sin 2\pi k \frac{r_n}{p}. \end{aligned} \tag{3}$$

Dann ist für das LEGENDRESche Symbol $\left(\frac{m}{p}\right)$:

$$1 + \left(\frac{m}{p}\right) = \begin{cases} 2, & \text{wenn } m \text{ Rest ist, also } m = r_n \text{ für ein } n, \\ 0, & \text{wenn } m \text{ Nichtrest ist, also } m \neq r_n \text{ für alle } n. \end{cases} \tag{4}$$

Also wird

$$\sum_{n=1}^{\frac{p-1}{2}} \sin 2\pi k \frac{r_n}{p} = \frac{1}{2} \sum_{m=1}^{p-1} \left(1 + \left(\frac{m}{p}\right)\right) \sin 2\pi k \frac{m}{p}$$

$$= \frac{1}{2} \Im \mathfrak{m} \sum_{m=0}^{p-1} \left(e^{2\pi i \frac{k}{p}}\right)^m + \frac{1}{2} \sum_{m=1}^{p-1} \left(\frac{m}{p}\right) \sin 2\pi k \frac{m}{p} \tag{5}$$

$$= 0 + \frac{1}{2} \sum_{m=1}^{p-1} \left(\frac{m}{p}\right) \sin 2\pi k \frac{m}{p}.$$

Wenn $(k, p) = 1$ ist, so durchläuft $s \equiv km$ ein reduziertes Restsystem modulo p, wenn m ein solches durchläuft. Also gilt:

$$\sum_{m=1}^{p-1} \left(\frac{m}{p}\right) \sin 2\pi k \frac{m}{p} = \left(\frac{k}{p}\right) \sum_{m=1}^{p-1} \left(\frac{km}{p}\right) \sin 2\pi \frac{km}{p}$$

$$= \left(\frac{-p}{k}\right) \sum_{s=1}^{p-1} \left(\frac{s}{p}\right) \sin 2\pi \frac{s}{p} = \left(\frac{-p}{k}\right) R, \tag{6}$$

wobei $R = \Im \mathfrak{m} \sum_{s=1}^{p-1} \left(\frac{s}{p}\right) e^{2\pi i \frac{s}{p}}$ gesetzt ist.

Aus Gl. (5) und (6) erhält man für $(k, p) = 1$

$$\sum_{n=1}^{p-1} \sin 2\pi k \frac{r_n}{p} = \frac{1}{2} \left(\frac{-p}{k}\right) R. \tag{7}$$

Gl. (7) bleibt auch für $(k, p) > 1$, also $(k, p) = p$ richtig, da dann auf beiden Seiten dieser Gleichung Null steht. Aus Gl. (7) und (3) folgt

$$b = \frac{p-1}{4} - \frac{R}{2\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{-p}{k}\right) \frac{1}{k} = \frac{p-1}{4} - \frac{R}{2\pi} L(p). \tag{8}$$

Damit hat sich zugleich ergeben, daß die Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{-p}{k}\right) \frac{1}{k^s}$ für $s = 1$ konvergiert, also konvergiert sie für $s \geqq 1$ gleichmäßig. Daher erhält man unter Benutzung von Gl. (2)

$$L(p) = \lim_{s \to 1+0} L(s, p) \geqq 0. \tag{9}$$

Wäre nun $L(p) = 0$, so wäre $p = 4b + 1$. Dies ist aber für $p = 3$ sicher nicht richtig, da dann $b = \frac{1}{3}$ ist. Für $p > 3$ ist aber b ganz, denn es gilt dann

$$pb = \sum_{n=1}^{\frac{p-1}{2}} r_n \equiv \sum_{n=1}^{\frac{p-1}{2}} n^2 = p \frac{p^2-1}{24} \equiv 0 \bmod p. \tag{10}$$

Da aber p von der Form $4k - 1$ vorausgesetzt war, ist $p = 4b + 1$ mit ganzem b unmöglich. Es ist demnach $L(p) \neq 0$, also $L(p) > 0$, w. z. b. w.

Führt man die ganze Rechnung nochmals mit den Nichtresten t_n durch, ersetzt aber in Gl. (4) $1+\left(\frac{m}{p}\right)$ durch $1-\left(\frac{m}{p}\right)$, so erhält man ganz analog

$$\frac{1}{p}\sum_{n=1}^{\frac{p-1}{2}} t_n = \frac{p-1}{4} + \frac{R}{2\pi} L(p), \tag{11}$$

oder mit Gl. (8)

$$\sum_{m=1}^{p-1}\left(\frac{m}{p}\right) m = \sum_{n=1}^{\frac{p-1}{2}} r_n - \sum_{n=1}^{\frac{p-1}{2}} t_n = -\frac{R}{\pi} L(p). \tag{12}$$

Benutzt man weiter aus der Theorie der Gaussschen Summen, daß $R>0$ ist, so erhält man durch elementare Schlüsse leicht den Satz:

Die Anzahl aller quadratischen Reste zwischen 0 und $\frac{1}{2}p$ ist kleiner als die Anzahl aller quadratischen Reste zwischen $\frac{1}{2}p$ und p, $(p=4k-1)$. (Vgl. Landau, Vorlesungen über Zahlentheorie, Bd. I, S. 177ff., Satz 217—219.)

(Eingegangen am 5. September 1948.)

Abschätzungen der Wurzeln algebraischer Gleichungen.

Von

W. Specht in Erlangen.

I.

Bezeichnet A die Norm

$$A = |(1 + |a_1|^2 + |a_2|^2 + \cdots + |a_n|^2)^{\frac{1}{2}}| \tag{1}$$

einer algebraischen Gleichung

$$f(x) = x^n + a_1 x^{n-1} + a_2 x^{n-2} + \cdots + a_n = 0$$

mit beliebigen komplexen Koeffizienten $a_1, a_2, \ldots, a_n$, so gilt bekanntlich für jede Wurzel ξ der Gleichung $f(x) = 0$ die Ungleichung

$$|\xi| \leqq A. \tag{2}$$

Diese vom Grad n der Gleichung unabhängige Abschätzung ist im Falle $A > 1$ insofern genau, als Gleichungen hinreichend großen Grades mit der Norm A angegeben werden können, deren absolut größte Wurzeln einem vorgegebenen Werte vom Betrage A beliebig nahe kommen [1]).

Die Ungleichung (2) ist, wie die nachfolgenden Untersuchungen zeigen werden, Sonderfall einer allgemeineren Ungleichung. Es gilt nämlich der

Satz 1. *Die ihrer absoluten Größe* $|\xi_1| \geqq |\xi_2| \ldots \geqq |\xi_n|$ *nach geordneten Wurzeln einer algebraischen Gleichung* $f(x) = 0$ *mit der Norm* A *erfüllen die Ungleichungen*

$$|\xi_1 \xi_2 \ldots \xi_k| \leqq A \text{ und } |\xi_k| \leqq |\sqrt[k]{A}| \text{ für } k = 1, 2, 3, \ldots. \tag{3}$$

Diese Schranke ist für jedes k *in dem Sinne genau, daß Gleichungen hinreichend großen Grades* n *mit der Norm* A *angegeben werden können, deren* k*-te Wurzeln einem vorgegebenen Werte vom Betrage* $|\sqrt[k]{A}|$ *beliebig nahe kommen.*

Für den Beweis dieses Satzes kann vorausgesetzt werden, daß die Wurzeln der Gleichung $f(x) = 0$ sämtlich voneinander verschieden sind. Denn bekanntlich sind die Wurzeln einer algebraischen Gleichung

[1]) Der triviale Fall $A = 1$ wird weiterhin stets ausgeschlossen.

stetige Funktionen ihrer Koeffizienten, während für eine Gleichung $f(x)=0$ mit mehrfachen Wurzeln stets eine Folge $f_m(x)=0$ von Gleichungen gleichen Grades angegeben werden kann, derart daß jede Gleichung der Folge lauter verschiedene Wurzeln besitzt und die Grenzbeziehung $\lim_{m\to\infty} f_m(x)=f(x)$ besteht.

Ferner kann vorausgesetzt werden, daß wenigstens die ersten k Wurzeln der Gleichung $f(x)=0$ dem absoluten Betrage nach größer als 1 sind. Denn $|\xi_1|\leqq 1$ führt sogleich auf $|\xi_1|\leqq A$; für ein $k>1$ aber kann aus $|\xi_k|\leqq 1$ und der bereits als bekannt vorausgesetzten Ungleichung $|\xi_1\xi_2\ldots\xi_{k-1}|\leqq A$ die verlangte Ungleichung $|\xi_1\xi_2\ldots\xi_k|\leqq A$ entnommen werden.

Gelten also für k verschiedene komplexe Zahlen $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_k$, deren absoluten Beträge größer als 1 sind, die Gleichungen

$$f(\xi_\varkappa)=\xi_\varkappa^n+a_1\xi_\varkappa^{n-1}+a_2\xi_\varkappa^{n-2}+\cdots+a_n=0$$

oder

$$1+\sum_{\nu=1}^{n}\frac{a_\nu}{\xi_\varkappa^\nu}=0 \qquad (\varkappa=1,2,\ldots,k),$$

so besteht mit beliebigen komplexen Werten $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k$ auch die Gleichung

$$\sum_{\varkappa=1}^{k}\alpha_\varkappa+\sum_{\nu=1}^{n}a_\nu\left(\sum_{\varkappa=1}^{k}\frac{\alpha_\varkappa}{\xi_\varkappa^\nu}\right)=0,$$

aus der mit Hilfe der bekannten Cauchyschen Ungleichung [2])

$$\left|\sum_{\varkappa=1}^{k}\alpha_\varkappa\right|^2=\left|\sum_{\nu=1}^{n}a_\nu\left(\sum_{\varkappa=1}^{k}\frac{\alpha_\varkappa}{\xi_\varkappa^\nu}\right)\right|^2\leqq(A^2-1)\sum_{\nu=1}^{n}\left|\sum_{\varkappa=1}^{k}\frac{\alpha_\varkappa}{\xi_\varkappa^\nu}\right|^2$$

$$\leqq(A^2-1)\sum_{\nu=1}^{\infty}\sum_{\varkappa,\lambda=1}^{k}\frac{\alpha_\varkappa\bar{\alpha}_\lambda}{\xi_\varkappa^\nu\bar{\xi}_\lambda^\nu}=(A^2-1)\sum_{\varkappa,\lambda=1}^{k}\frac{\alpha_\varkappa\bar{\alpha}_\lambda}{\xi_\varkappa\bar{\xi}_\lambda-1}$$

folgt, da die auftretenden unendlichen Reihen absolut konvergieren. Die Hermitesche Form

$$H(\alpha)=\sum_{\varkappa,\lambda=1}^{k}\left(\frac{A^2-1}{\xi_\varkappa\bar{\xi}_\lambda-1}-1\right)\alpha_\varkappa\bar{\alpha}_\lambda$$

in den Parametern $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k$ nimmt demnach niemals negative Werte an, so daß insbesondere für ihre Determinante D die Ungleichung

$$D=\left|\frac{A^2-1}{\xi_\varkappa\bar{\xi}_\lambda-1}-1\right|\geqq 0$$

besteht. Da diese Determinante, wie gleich gezeigt wird, den Wert

$$D=\frac{(A^2-1)^{k-1}\,|\,\Delta(\xi)\,|^2}{\prod_{\varkappa,\lambda}(\xi_\varkappa\bar{\xi}_\lambda-1)}\cdot(A^2-|\,\xi_1\xi_2\ldots\xi_k\,|^2) \tag{4}$$

besitzt, wenn $\Delta(\xi)$ das Differenzenprodukt $\Delta(\xi)=\prod_{1\leqq\varkappa<\lambda\leqq k}(\xi_\varkappa-\xi_\lambda)$ bezeichnet, folgt damit sogleich die Ungleichung (3).

[2]) Vgl. Hardy-Littlewood-Polya, Inequalities, 2.4.

Der Wert (4) der Determinante D läßt sich leicht aus der Identität

$$D(x,y) = \left| \frac{A^2-1}{x_\varkappa y_\lambda - 1} - 1 \right| \tag{5}$$
$$= \frac{(A^2-1)^{k-1}\, \Delta(x)\, \Delta(y)}{\prod\limits_{\varkappa,\lambda}(x_\varkappa y_\lambda - 1)} \cdot (A^2 - x_1 x_2 \cdots x_k y_1 y_2 \cdots y_k)$$

entnehmen, die für jede Wertereihe $x_1, x_2, \ldots, x_k,\ y_1, y_2, \ldots, y_k$ besteht, die die in $D(x,y)$ auftretenden Nenner nicht zum Verschwinden bringt. Offenbar ist, wenn zur Abkürzung $G(x,y) = \prod\limits_{\varkappa,\lambda}(x_\varkappa y_\lambda - 1)$ gesetzt wird, der Ausdruck $G(x,y)\, D(x,y)$ eine ganzrationale Funktion der Größen $x_\varkappa, y_\varkappa$, die sowohl in den $x_\varkappa$, als auch in den $y_\varkappa$ alternierend ist, weshalb eine Gleichung

$$G(x,y)\ D(x,y) = \Delta(x)\, \Delta(y)\, F(x,y)$$

mit einer in den $x_\varkappa$ bzw. $y_\varkappa$ symmetrischen ganzrationalen Funktion $F(x,y)$ besteht. Überdies bleibt $F(x,y)$, wie man sofort erkennt, unverändert, wenn jedes $y_\varkappa$ durch das entsprechende $x_\varkappa$, und jedes $x_\varkappa$ durch das entsprechende $y_\varkappa$ ersetzt wird, eine Eigenschaft, die durch die Gleichung $F(x,y) = F(y,x)$ dargestellt wird.

Die Determinante $D(x,y)$ kann nun in eine Summe von Determinanten zerlegt werden:

$$D(x,y) = \left| \frac{A^2-1}{x_\varkappa y_\lambda - 1} \right| - \sum \begin{vmatrix} 1 & \frac{A^2-1}{x_1 y_2 - 1} & \cdots & \frac{A^2-1}{x_1 y_k - 1} \\ 1 & \frac{A^2-1}{x_2 y_2 - 1} & \cdots & \frac{A^2-1}{x_2 y_k - 1} \\ \cdot & \cdot & & \cdot \\ \cdot & \cdot & & \cdot \\ \cdot & \cdot & & \cdot \\ 1 & \frac{A^2-1}{x_k y_2 - 1} & \cdots & \frac{A^2-1}{x_k y_k - 1} \end{vmatrix},$$

wobei die Summe über die Determinanten zu erstrecken ist, die aus der angegebenen durch gleichzeitige zyklische Vertauschung der $x_\varkappa$ bzw. $y_\varkappa$ entstehen. Mithin ist

$$D(x,y) = (A^2-1)^k \left| \frac{1}{x_\varkappa y_\lambda - 1} \right| - (A^2-1)^{k-1}\,(D_1 + D_2 + \cdots + D_k),$$

worin D_1 die Determinante

$$D_1 = \begin{vmatrix} 1 & \frac{1}{x_1 y_2 - 1} & \cdots & \frac{1}{x_1 y_k - 1} \\ 1 & \frac{1}{x_2 y_2 - 1} & \cdots & \frac{1}{x_2 y_k - 1} \\ \cdot & \cdot & & \cdot \\ \cdot & \cdot & & \cdot \\ \cdot & \cdot & & \cdot \\ 1 & \frac{1}{x_k y_2 - 1} & \cdots & \frac{1}{x_k y_k - 1} \end{vmatrix}$$

bezeichnet und die Determinanten $D_2, D_3, \ldots, D_k$ aus D_1 durch gleichzeitige zyklische Vertauschung der $x_\varkappa$ bzw. $y_\varkappa$ hervorgehen. Nun gilt die Gleichung

$$G(x,y)\left|\frac{1}{x_\varkappa y_\lambda - 1}\right| = \Delta(x)\,\Delta(y),$$

sodaß nur noch die Determinanten $D_\varkappa$ zu bestimmen sind.

Aus der Determinante D_1 entsteht aber, wenn die erste Zeile von den anderen Zeilen abgezogen und die Nenner der Elemente der ersten Zeile herausgenommen werden, die $(k-1)$-reihige Determinante

$$D_1 = \frac{(x_1 y_1 - 1)}{(x_1 y_1 - 1)(x_1 y_2 - 1)\ldots(x_1 y_k - 1)}\begin{vmatrix} \frac{x_1 - x_2}{x_2 y_2 - 1} y_2 & \cdots & \frac{x_1 - x_2}{x_2 y_k - 1} y_k \\ \cdot & & \cdot \\ \cdot & & \cdot \\ \cdot & & \cdot \\ \frac{x_1 - x_k}{x_k y_2 - 1} y_2 & \cdots & \frac{x_1 - x_k}{x_k y_k - 1} y_k \end{vmatrix}$$

$$= \frac{(x_1 y_1 - 1) y_2 y_3 \ldots y_k (x_1 - x_2)(x_1 - x_3)\ldots(x_1 - x_k)}{(x_1 y_1 - 1)(x_1 y_2 - 1)\ldots(x_1 y_k - 1)}\left|\frac{1}{x_\varrho y_\sigma - 1}\right|$$

$$(\varrho, \sigma = 2, 3, \ldots, k),$$

sodaß schließlich folgt

$$D_1 = \frac{\Delta(x)\,\Delta(y)}{G(x,y)} \cdot S_1(x,y)$$

mit einer Funktion

$$(6) \qquad S_1(x,y) = \frac{(x_1 y_1 - 1)(x_2 y_1 - 1)\ldots(x_k y_1 - 1) y_2 y_3 \ldots y_k}{(y_1 - y_2)(y_1 - y_3)\ldots(y_1 - y_k)}.$$

Entsprechend ist

$$D_\varkappa = \frac{\Delta(x)\,\Delta(y)}{G(x,y)} \cdot S_\varkappa(x,y) \qquad (\varkappa = 1, 2, \ldots, k),$$

wobei wiederum die Funktionen $S_\varkappa(x,y)$ aus $S_1(x,y)$ durch gleichzeitige zyklische Vertauschung der $x_\varkappa$ bzw. $y_\varkappa$ hervorgehen. Daher gilt

$$G(x,y)\,D(x,y) = (A^2 - 1)^{k-1}\,\Delta(x)\,\Delta(y)\,(A^2 - 1 - S(x,y)),$$

worin $S(x,y) = S_1(x,y) + S_2(x,y) + \cdots + S_k(x,y)$ eine ganzrationale, in den Größen $x_\varkappa$ bzw. $y_\varkappa$ symmetrische Funktion bezeichnet, die überdies die Eigenschaft $S(y,x) = S(x,y)$ besitzt. Nun ist aber für $y_1 = 0$ bei beliebigen anderen Werten der Größen $x_\varkappa$ und $y_\varkappa$, die die auftretenden Nenner nicht zum Verschwinden bringen,

$$S_1(x,y) = -1;\ S_\varkappa(x,y) = 0 \text{ für } \varkappa \neq 1, \text{ also } S(x,y) + 1 = 0,$$

weshalb $S(x,y) + 1$ durch y_1 teilbar ist. Dann ist aber wegen der eben angegebenen Eigenschaften von $S(x,y)$

$$1 + S(x,y) = C.\,y_1 y_2 \ldots y_k\,x_1 x_2 \ldots x_k,$$

mit einer konstanten Größe C, da $1 + S(x,y)$ höchstens vom Grade $2k$ ist.

Um C zu bestimmen, setze man $x_\varkappa = \varrho^\varkappa$; $y_\varkappa = \varrho^{-\varkappa}$ für $\varkappa = 1, 2, \ldots, k$ mit einer primitiven k-ten Einheitswurzel ϱ. Für diese Werte gilt nach (6)

$$S_1(x, y) = S_2(x, y) = \cdots = S_k(x, y) = 0, \text{ also } 1 + S(x, y) = 1$$

und daher $C = 1$. Damit ist Formel (5) und folglich auch (4) bewiesen.

Außerdem ist noch zu zeigen, daß die Schranken in dem angegebenen Sinne genau sind. Bezeichnet α_m die einzige positive Wurzel der Gleichung

$$(7) \qquad x^{2m} - (A^2 - 1)(x^{2(m-1)} + x^{2(m-2)} + \cdots + x^2 + 1) = 0,$$

so besitzt die Gleichung

$$(8) \quad f_m(x) = x^m - \frac{A^2 - 1}{\alpha_m^m}\left[(\alpha_m x)^{m-1} + (\alpha_m x)^{m-2} + \cdots + \alpha_m x + 1\right] = 0$$

die Wurzel $\xi = \alpha_m$ und die Norm A.

Ist nun $A > 1$, so ist für alle hinreichend großen Grade m gewiß $A^2 > 1 + \frac{1}{m}$. Dann ist auch $\alpha_m > 1$ und daher wegen (7)

$$0 < \alpha_m^2 - 1 = (A^2 - 1)\frac{\alpha_m^{2m} - 1}{\alpha_m^{2m}} < A^2 - 1.$$

Die Gleichung

$$h(y) = y^m(y - 1) - (A^2 - 1)(y^m - 1) = 0$$

besitzt die beiden positiven Wurzeln 1 und α_m^2, sodaß die Ableitung $h'(y)$ eine positive Nullstelle η zwischen 1 und α_m^2 besitzt. Wegen

$$h'(y) = (m + 1)y^m - m A^2 y^{m-1}$$

findet man

$$\eta = \frac{m}{m + 1} A^2 \quad \text{und} \quad A^2 - \frac{A^2}{m + 1} \leqq \alpha_m^2 < A^2.$$

Mithin gilt für die Folge der Gleichungen (8)

$$\lim_{m \to \infty} \xi_1 = \lim_{m \to \infty} \alpha_m = A.$$

Die Gleichung

$$(9) \quad f_m(x^k) = x^{mk} - \frac{A^2 - 1}{\alpha_m^m}\left[(\alpha_m x^k)^{m-1} + (\alpha_m x^k)^{m-2} + \cdots + \alpha_m x^k + 1\right] = 0$$

besitzt gleichfalls die Norm A und die k Wurzeln

$$\xi_\varkappa = \varrho^\varkappa \sqrt[k]{\alpha_m} \qquad (\varkappa = 1, 2, \ldots, k),$$

worin ϱ eine primitive k-te Einheitswurzel bezeichnet. Für die Folge der Gleichungen (9) gilt daher

$$\lim_{m\to\infty} |\xi_1 \xi_2 \ldots \xi_k| = \lim_{m\to\infty} \alpha_m = A;$$

$$\lim_{m\to\infty} |\xi_k| = \lim_{m\to\infty} |\sqrt[k]{\alpha_m}| = |\sqrt[k]{A}|.$$

Besitzt schließlich eine Gleichung $f(x) = 0$ die Norm A und die Wurzel ξ, so besitzt bei beliebigem ε vom Betrage $|\varepsilon| = 1$ die Gleichung $g(x) = \varepsilon^n f(\varepsilon^{-1} x) = 0$ gleichfalls die Norm A und die Wurzel $\eta = \varepsilon \xi$. Damit ist der Satz 1 in allen seinen Teilen bewiesen.

Für reelle Gleichungen gilt insbesondere:

Satz 2. *Die imaginären Wurzeln einer reellen Gleichung $f(x) = 0$ mit der Norm A liegen im Kreisbereich $|z| \leqq |\sqrt{A}|$ der Zahlenebene.*

Denn da eine reelle Gleichung $f(x) = 0$ mit einer imaginären Wurzel ξ stets auch die konjugiertkomplexe Wurzel $\bar{\xi}$ besitzt, ist nach Satz 1

$$\xi \bar{\xi} \leqq |\xi_1 \xi_2| \leqq A \text{ oder } |\xi| \leqq \sqrt{A}.$$

Schließlich gestattet Satz 1 noch eine Ergänzung der Abschätzung der absoluten Potenzsummen, die ich früher angegeben habe[3]):

Satz 3. *Die absoluten Potenzsummen $S_m = |\xi_1|^m + |\xi_2|^m + \cdots + |\xi_n|^m$ der Wurzeln einer algebraischen Gleichung $f(x) = 0$ mit der Norm A genügen für jedes positive m der Ungleichung*

$$S_m \leqq A^m + n - 1. \tag{10}$$

Der Beweis stützt sich auf folgende Bemerkung[4]): Gelten für positive Zahlen $a_1, a_2, \ldots, a_n$ und $b_1, b_2, \ldots, b_n$ die Ungleichungen

$$a_1 \geqq a_2 \geqq \ldots \geqq a_n > 0 \text{ und } a_1 a_2 \ldots a_\nu \leqq b_1 b_2 \ldots b_\nu \quad (\nu = 1, 2, \ldots, n),$$

so besteht auch die Ungleichung $a_1 + a_2 + \ldots + a_n \leqq b_1 + b_2 + \ldots + b_n$.

Da nämlich nach Satz 1 für jedes positive m die Ungleichungen

$$|\xi_1^m \xi_2^m \ldots \xi_\nu^m| \leqq A^m \qquad (\nu = 1, 2, \ldots, n)$$

gelten, hat man nur $a_\nu = |\xi_\nu^m|$ und $b_1 = A^m$, $b_2 = b_3 = \cdots = b_n = 1$ zu setzen, um die Voraussetzungen zu erfüllen. Hieraus ergibt sich sogleich (10).

II.

Die Methode des ersten Abschnittes läßt eine Anwendung auf eine Frage ähnlicher Art zu, die ich bereits früher behandelt habe[5]). Es ergeben sich dabei wesentlich schärfere Schranken:[6])

[3]) Vgl. W. Specht, Wurzelabschätzungen bei algebraischen Gleichungen. Jahresber. D. M. V. 49 (1939), 179—190, Satz 4.

[4]) Vgl. a. a. O. [3]), Satz 1.

[5]) Vgl. W. Specht, Zur Theorie der algebraischen Gleichungen. Jahresber. D. M. V. 48 (1938), 142—145.

[6]) Auch hier werde der triviale Fall $\alpha = 0$ ausgeschlossen.

Satz 4. *Die ihrer absoluten Größe nach geordneten Wurzeln ξ_ν einer algebraischen Gleichung $f(x) = x^n + a_1 x^{n-1} + a_2 x^{n-2} + \cdots + a_n = 0$ erfüllen mit*

$$\alpha = \max\left(|\sqrt[\nu]{a_\nu}|\right) \qquad (\nu = 1, 2, \ldots, n) \tag{11}$$

die Ungleichungen

$$|\xi_1 \xi_2 \ldots \xi_k| \leqq \frac{(k+1)^{\frac{k+1}{2}}}{k^{\frac{k}{2}}} \alpha^k;$$

$$|\xi_k| \leqq (k+1)^{\frac{1}{2k}} \sqrt{\frac{k+1}{k}}\, \alpha \qquad (k = 1, 2, 3, \ldots). \tag{12}$$

Die Verbesserung der Abschätzungen läßt sich am deutlichsten aus einem Vergleich der gröberen Schranke

$$|\xi_1 \xi_2 \ldots \xi_k| \leqq \frac{(k+1)^{\frac{k+1}{2}}}{k^{\frac{k}{2}}} \alpha^k < \sqrt{e\,(k+1)} \cdot \alpha^k$$

mit dem früheren Ergebnis

$$|\xi_1 \xi_2 \ldots \xi_k| \leqq (k+1)\,\alpha^k$$

erkennen.

Setzt man zum Beweise des Satzes

$$x = \alpha y; \quad a_\nu = \alpha^\nu b_\nu; \quad \xi_\nu = \alpha \eta_\nu \qquad (\nu = 1, 2, \ldots, n),$$

so besitzt die algebraische Gleichung

$$g(y) = \frac{1}{\alpha^n} f(\alpha y) = y^n + b_1 y^{n-1} + b_2 y^{n-2} + \cdots + b_n = 0 \qquad (|b_\nu| \leqq 1)$$

die (der absoluten Größe nach geordneten) Wurzeln $\eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_n$, für die insbesondere die Ungleichung $|\eta_1| < 2$ besteht. Daher kann das Verfahren der vollständigen Induktion herangezogen und die Ungleichung

$$|\eta_1 \eta_2 \ldots \eta_{k-1}| \leqq \frac{k^{\frac{k}{2}}}{(k-1)^{\frac{k-1}{2}}} \tag{13}$$

als bewiesen angenommen werden.

Wir benötigen zum Beweise ferner die für $k > 1$ gültige Ungleichung

$$\begin{aligned}(k+1)\log(k+1) - 2k\log k + (k-1)\log(k-1) > \\ k\log(k+1) - (2k-1)\log k + (k-1)\log(k-1) > 0,\end{aligned} \tag{14}$$

die sehr leicht aus der für jeden Wert x des Intervalls $0 < x < 1$, insbesondere also für $x = \frac{1}{k}$ bei $k > 1$ gültigen Ungleichung

$$\frac{1}{x}\log(1-x^2) - \log(1-x) = \sum_1^\infty \frac{x^{2m}}{2m}\left(1 - \frac{2m^2 x}{(m+1)(2m+1)}\right) > 0$$

entwickelt werden kann.

Die Voraussetzung (13) erlaubt die weitere Annahme $|\eta_k| > 1$, da im Falle $|\eta_k| \leqq 1$ aus (14) die Abschätzung

$$|\eta_1 \eta_2 \dots \eta_k| \leqq |\eta_1 \eta_2 \dots \eta_{k-1}| \leqq \frac{k^{\frac{k}{2}}}{(k-1)^{\frac{k-1}{2}}} < \frac{(k+1)^{\frac{k+1}{2}}}{k^{\frac{k}{2}}}$$

fließt. Schließlich können wir noch die Voraussetzung machen:

$$|\eta_k|^{k+\mu} > |\eta_1 \eta_2 \dots \eta_k| \text{ mit } \mu = \frac{\log(k+1)}{\log(k+1) - \log k},$$

da im Falle

$$|\eta_k|^{k+\mu} \leqq |\eta_1 \eta_2 \dots \eta_k| \text{ oder } |\eta_k|^{k+\mu-1} \leqq |\eta_1 \eta_2 \dots \eta_{k-1}|$$

aus (13) und (14) die Ungleichung

$$\begin{aligned}(k+\mu-1)\log|\eta_1 \eta_2 \dots \eta_k| &\leqq (k+\mu)\log|\eta_1 \eta_2 \dots \eta_{k-1}| \\ &\leqq \frac{k+\mu}{2}(k\log k - (k-1)\log(k-1)),\end{aligned}$$

also

$$\log|\eta_1 \eta_2 \dots \eta_k| \leqq$$

$$\frac{1}{2}\,\frac{((k+1)\log(k+1) - k\log k)(\log(k+1) - \log k)}{(\log(k+1) - \log k)(k\log(k+1) - (k-1)\log k)} \cdot (k\log k - (k-1)\log(k-1))$$

$$< \frac{1}{2}((k+1)\log(k+1) - k\log k)$$

folgt.

Damit haben wir, wenn

$$(15) \qquad \mu = \frac{\log(k+1)}{\log(k+1) - \log k}; \quad \lambda = \frac{1}{k+\mu}; \quad u = |\eta_1 \eta_2 \dots \eta_k|^{\lambda}$$

gesetzt wird, die Voraussetzung

$$(16) \qquad |\eta_1| \geqq |\eta_2| \geqq \dots \geqq |\eta_k| > u > 1,$$

wobei noch, ebenso wie im Beweise des Satzes 1, die Einschränkung gemacht werden darf, daß die Größen $\eta_1, \eta_2, \dots, \eta_k$ sämtlich voneinander verschieden sind.

Dann gilt mit beliebigen komplexen Werten $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k$ die Gleichung

$$\sum_{\varkappa=1}^{k} \alpha_\varkappa + \sum_{\nu=1}^{n} b_\nu \left(\sum_{\varkappa=1}^{k} \frac{\alpha_\varkappa}{\eta_\varkappa^\nu}\right) = 0,$$

aus der mit Hilfe der Cauchyschen Ungleichung unter Heranziehung der in (15) eingeführten positiven Größe u folgt:

$$\begin{aligned}\left|\sum_{\varkappa} \alpha_\varkappa\right|^2 &\leqq \left|\sum_{\nu=1}^{n} b_\nu \left(\sum_{\varkappa} \frac{\alpha_\varkappa}{\eta_\varkappa^\nu}\right)\right|^2 \leqq \left(\sum_{\nu=1}^{n} |b_\nu| \left|\sum_{\varkappa} \frac{\alpha_\varkappa}{\eta_\varkappa^\nu}\right|\right)^2 \leqq \left(\sum_{\nu=1}^{n} \left|\sum_{\varkappa} \frac{\alpha_\varkappa}{\eta_\varkappa^\nu}\right|\right)^2 \\ &= \left(\sum_{\nu=1}^{n} \left|\sum_{\varkappa} \frac{\alpha_\varkappa}{\eta_\varkappa^\nu}\right| u^\nu \cdot \frac{1}{u^\nu}\right)^2 \leqq \sum_{\nu=1}^{n} \left|\sum_{\varkappa} \frac{\alpha_\varkappa}{\eta_\varkappa^\nu}\right|^2 u^{2\nu} \sum_{\nu=1}^{n} \frac{1}{u^{2\nu}} \\ &\leqq \sum_{1}^{\infty} \left|\sum_{\varkappa} \frac{\alpha^\varkappa}{\eta_\varkappa^\nu}\right|^2 u^{2\nu} \cdot \sum_{1}^{\infty} \frac{1}{u^{2\nu}} = \frac{u^2}{u^2-1} \sum_{\varkappa,\lambda=1}^{k} \frac{\alpha_\varkappa \bar{\alpha}_\lambda}{\eta_\varkappa \bar{\eta}_\lambda - u^2},\end{aligned}$$

da sämtliche unendlichen Reihen wegen (16) absolut konvergieren.

Infolgedessen nimmt die Hermitesche Form

$$H(\alpha) = \sum_{\varkappa,\lambda} \left(\frac{u^2}{u^2-1} \cdot \frac{1}{\eta_\varkappa \bar{\eta}_\lambda - u^2} - 1 \right) \alpha_\varkappa \bar{\alpha}_\lambda$$

niemals negative Werte an, so daß insbesondere ihre Determinante

$$D = \left| \frac{u^2}{(u^2-1)(\eta_\varkappa \bar{\eta}_\lambda - u^2)} - 1 \right| \geqq 0.$$

Setzt man hierin

$$\frac{1}{u^2-1} = A^2 - 1; \quad \eta_\varkappa = u\,\xi_\varkappa \qquad (\varkappa = 1, 2, \ldots, k),$$

so folgt nach (4) die Ungleichung

$$|\xi_1 \xi_2 \ldots \xi_k|^2 \leqq A^2 \text{ oder } |\eta_1 \eta_2 \ldots \eta_k|^2 \leqq u^{2k} \cdot \frac{u^2}{u^2-1}$$

und mit (15)

$$u^{2\mu}(u^2 - 1) \leqq u^2. \tag{16}$$

Da in (16) das Gleichheitszeichen allein für den Wert $u_0 = \left| \sqrt{\frac{k+1}{k}} \right| > 1$ erreicht wird, ist demnach für jeden anderen Wert u, der (16) erfüllt, $u \leqq u_0$ und damit

$$|\eta_1 \eta_2 \ldots \eta_k| = u^{k+\mu} \leqq \left(\frac{k+1}{k} \right)^{\frac{k+\mu}{2}} = \frac{(k+1)^{\frac{k+1}{2}}}{k^{\frac{k}{2}}}.$$

Für reelle Gleichungen läßt sich aus Satz 4 insbesondere entnehmen:

Satz 5. *Die imaginären Wurzeln einer reellen Gleichung*

$$f(x) = x^n + a_1 x^{n-1} + a_2 x^{n-2} + \ldots + a_n = 0 \quad \textit{mit} \quad |\sqrt[\nu]{a_\nu}| \leqq \alpha$$

liegen im Kreisbereich $|z| \leqq \frac{1}{2} \sqrt[4]{108} \cdot \alpha < 1{,}612\,\alpha$.

Für eine imaginäre Wurzel ξ der reellen Gleichung $f(x) = 0$ ist nämlich

$$\xi \bar{\xi} \leqq |\xi_1 \xi_2| \leqq \frac{1}{2} \sqrt{27}\,\alpha^2 \text{ oder } |\xi| \leqq \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt[4]{27}\,\alpha = \frac{1}{2} \sqrt[4]{108}\,\alpha.$$

Satz 4 liefert für die Abschätzung der absoluten Potenzsummen einer algebraischen Gleichung nicht wesentlich mehr als die früher bereits mitgeteilten Ergebnisse [7]), obwohl sie verbessert werden können. Denn es gilt

Satz 6. *Die absoluten Potenzsummen* $S_m = |\xi_1|^m + |\xi_2|^m + \cdots + |\xi_n|^m$ *der Wurzeln einer algebraischen Gleichung*

$$f(x) = x^n + a_1 x^{n-1} + a_2 x^{n-2} + \cdots + a_n = 0$$

[7]) Vgl. a. a. O. [3]), Satz 2.

erfüllen mit

$$\alpha = \max\left(\sqrt[\nu]{|a_\nu|}\right) \qquad (\nu = 1, 2, \ldots, n)$$

für jedes ganze positive m die Ungleichung

(17) $$S_m \leqq (n + \gamma_m)\, \alpha^m$$

mit einer vom Grade n unabhängigen Konstanten γ_m, insbesondere ist

(17.1) $$S_1 \leqq \left(n + 1 - \frac{2}{n+2}\right)\alpha < (n+1)\,\alpha.$$

Der Beweis ergibt sich leicht mit Hilfe der schon für Satz 2 herangezogenen Bemerkung aus dem

Satz 7. *Es seien $\beta_1 \geqq \beta_2 \geqq \ldots \geqq \beta_n \geqq 0$ die der Größe nach geordneten absoluten Beträge der Koeffizienten $a_1, a_2, \ldots a_n$ einer algebraischen Gleichung $f(x) = 0$; man setze für $k = 1, 2, \ldots, n$*

$$\varrho_k = 1 + \beta_1 + \beta_2 + \cdots + \beta_k; \quad \sigma_k = \max\,(1, \beta_1 + \beta_2 + \cdots + \beta_{n-k+1});$$
$$\delta_k = \min\,(\varrho_k, \sigma_k).$$

Dann gilt für die ihrer absoluten Größe nach geordneten Wurzeln ξ_ν der Gleichung $f(x) = 0$

(18) $$|\xi_1\, \xi_2 \ldots \xi_k| \leqq \delta_k$$

(19) $$S_m = |\xi_1|^m + |\xi_2|^m + \cdots + |\xi_n|^m$$
$$\leqq \delta_1^m + \left(\frac{\delta_2}{\delta_1}\right)^m + \left(\frac{\delta_3}{\delta_2}\right)^m + \cdots + \left(\frac{\delta_n}{\delta_{n-1}}\right)^m$$

bei beliebigem positivem m.

Ehe wir an den Beweis des Satzes 7 gehen, wollen wir aus ihm die Ungleichungen (17) und (17.1) herleiten.

Setzen wir wie früher $x = \alpha y$, $a_\nu = \alpha^\nu b_\nu$, $\xi_\nu = \alpha \eta_\nu$ für $\nu = 1, 2, \ldots, n$, so hat die Gleichung

$$g(y) = \frac{1}{\alpha^n} f(\alpha y) = y^n + b_1 y^{n-1} + b_2 y^{n-2} + \cdots + b_n = 0 \text{ mit } |b_\nu| \leqq 1$$

die Wurzeln η_ν. Nach Satz 7 erhalten wir

$$\varrho_k \leqq 1 + k; \quad \sigma_k \leqq n - k + 1; \quad \delta = \min\,(1 + k,\ n - k + 1)$$

und daher

$$|\eta_1\, \eta_2 \ldots \eta_k| \leqq 1 + k \qquad \text{für } 1 \leqq k \leqq \left[\frac{n}{2}\right];$$
$$|\eta_1\, \eta_2 \ldots \eta_k| \leqq n - k + 1 \qquad \text{für } \left[\frac{n}{2}\right] < k \leqq n.$$

Daraus folgt für gerades $n = 2s$

$$S_1^* = |\eta_1| + |\eta_2| + \cdots + |\eta_n|$$
$$\leqq 2 + \frac{3}{2} + \frac{4}{3} + \cdots + \frac{s+1}{s} + \frac{s-1}{s} + \cdots + \frac{2}{3} + \frac{1}{2}$$
$$= 2s + 1 - \frac{1}{s+1} = n + \frac{n}{n+2},$$

dagegen für ungerades $n = 2s + 1$

$$S_1^* \leqq 2 + \frac{3}{2} + \frac{4}{3} + \cdots + \frac{s+1}{s} + 1 + \frac{s}{s+1} + \frac{s-1}{s} + \cdots + \frac{2}{3} + \frac{1}{2}$$
$$= 2s + 2 - \frac{1}{s+1} = n + \frac{n-1}{n+1},$$

sodaß (17.1) in beiden Fällen erfüllt ist. Auf ähnlichem Wege erhält man für ein beliebiges ganzes m

bei $n = 2s$:
$$S_m^* = |\eta_1|^m + |\eta_2|^m + \cdots + |\eta_n|^m$$
$$= \sum_{\sigma=1}^{s} \left(\frac{\sigma+1}{\sigma}\right)^m + \sum_{\sigma=1}^{s} \left(\frac{\sigma}{\sigma+1}\right)^m$$

bei $n = 2s + 1$:
$$S_m^* = |\eta_1|^m + |\eta_2|^m + \cdots + |\eta_n|^m$$
$$= \sum_{\sigma=1}^{s} \left(\frac{\sigma+1}{\sigma}\right)^m + 1 + \sum_{\sigma=1}^{s} \left(\frac{\sigma}{\sigma+1}\right)^m$$

und weiter

$$\sum_{\sigma=1}^{s} \left(\frac{\sigma+1}{\sigma}\right)^m + \sum_{\sigma=1}^{s} \left(\frac{\sigma}{\sigma+1}\right)^m$$
$$= 2s + 2\binom{m}{2} \sum_{\sigma} \frac{1}{\sigma^2} + 2\binom{m}{4} \sum_{\sigma} \frac{1}{\sigma^4} + \cdots + \left(1 - \frac{1}{s+1}\right)^m$$
$$< 2s + \left(1 - \frac{1}{s+1}\right)^m + 2 \sum_{\mu=1}^{\infty} \binom{m}{2\mu} \zeta(2\mu)$$

mit der bekannten Zetafunktion $\zeta(s)$. Damit folgt

$$S_m^* < n + \left(\frac{n}{n+2}\right)^m + 2 \sum_{\mu} \binom{m}{2\mu} \zeta(2\mu) \leqq n + \gamma_m$$

mit einer von n unabhängigen Konstanten γ_m.

Für den Beweis des Satzes 7 ziehen wir einen Hilfssatz über die charakteristischen Wurzeln einer Matrix heran[8]): Setzt man für eine Matrix $A = (a_{\varkappa\lambda})$ des Grades n

$$z_\varkappa = \sum_{\lambda} |a_{\varkappa\lambda}|; \quad s_\lambda = \sum_{\varkappa} |a_{\varkappa\lambda}|; \quad z = \max(z_\varkappa); \quad s = \max(s_\lambda)$$
$$(\varkappa, \lambda = 1, 2 \ldots, n),$$

so gilt für jede charakteristische Wurzel ω der Matrix die Ungleichung

$$|\omega| \leqq \min(z, s).$$

Wir wenden dies insbesondere auf die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} -a_1 & -a_2 & \ldots & -a_{n-1} & -a_n \\ 1 & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \ldots & 0 & 0 \\ . & . & & . & . \\ . & . & & . & . \\ . & . & & . & . \\ 0 & 0 & \ldots & 1 & 0 \end{pmatrix},$$

[8]) Vgl. a. a. O. [5]).

die die charakteristische Gleichung

$$|xE - A| = x^n + a_1 x^{n-1} + a_2 x^{n-2} + \cdots + a_n = 0$$

besitzt, und auf ihre k-te Determinantenmatrix $C_k(A)$ des Grades $\binom{n}{k}$ an, die aus den k-reihigen Unterdeterminanten der Matrix A besteht und bekanntlich die charakteristischen Wurzeln $\eta = \xi_{\varkappa_1} \xi_{\varkappa_2} \ldots \xi_{\varkappa_k}$ für alle Reihen $1 \leqq \varkappa_1 < \varkappa_2 < \ldots < \varkappa_k \leqq n$ besitzt, wenn wieder $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$ die ihrer absoluten Größe nach geordneten Wurzeln der Matrix A sind.

Zur Abschätzung der Größen η haben wir aus je k Spalten bzw. aus je k Zeilen der Matrix A die Unterdeterminanten zu entnehmen, ihrem Betrage nach abzuschätzen und aus diesen Werten die Summe zu bilden. Die Unterdeterminanten aus je k Spalten ergeben die Abschätzung [9])

$$|\xi_1 \xi_2 \ldots \xi_k| \leqq 1 + \beta_1 + \beta_2 + \cdots + \beta_k.$$

Greifen wir dagegen k Zeilen aus A heraus, unter denen die erste Zeile nicht vorkommt, so hat offenbar genau eine Unterdeterminante den Betrag 1, während alle anderen verschwinden. Wählen wir aber die erste Zeile und $k-1$ beliebige andere Zeilen, so können diese nach Umordnung der Spalten in der Gestalt geschrieben werden:

$$\begin{vmatrix} -a_{\varkappa_1} & -a_{\varkappa_2} \ldots & -a_{\varkappa_{k-1}} & -a_{\lambda_1} & -a_{\lambda_2} \ldots & -a_{\lambda_{n-k+1}} \\ 1 & 0 \ldots & 0 & 0 & 0 \ldots & 0 \\ 0 & 1 \ldots & 0 & 0 & 0 \ldots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 \ldots & 1 & 0 & 0 \ldots & 0 \end{vmatrix}.$$

Eine hieraus gebildete k-reihige Unterdeterminante wird Null, wenn sie zwei von den letzten $n-k+1$ Spalten enthält. Die aus den ersten $k-1$ Spalten und einer weiteren Spalte gebildeten Unterdeterminanten aber ergeben den Ausdruck

$$|a_{\lambda_1}| + |a_{\lambda_2}| + \cdots + |a_{\lambda_{n-k+1}}| \leqq \beta_1 + \beta_2 + \cdots + \beta_{n-k+1}.$$

Mithin ist auch

$$|\xi_1 \xi_2 \ldots \xi_k| \leqq \max(1, \beta_1 + \beta_2 + \cdots + \beta_{n-k+1}),$$

wie zu zeigen war. Alles Weitere läßt sich nun hieraus ohne Schwierigkeit entnehmen.

[9]) Vgl. a. a. O. [5]).

(Eingegangen am 23. Juli 1948.)

Strahlenkomplexe mit integrablen Pfaffschen Differentialformen.

Von

Wolfgang Haack in Bad Gandersheim.

In einem Strahlenkomplex wird die Umgebung I. Ordnung eines Komplexstrahles $\mathfrak{A}$ durch die Formel von KOENIGS[1]) bestimmt, aus der sich unmittelbar drei PFAFFsche Differentialformen ergeben. Wir wollen einleitend beschreiben, wie man zu den Formen kommt. Bekanntlich ist jeder Punkt $\mathfrak{z}$ des Strahles $\mathfrak{A}$ die Spitze eines Kegels, dessen Erzeugenden dem Komplex angehören. Wandert $\mathfrak{z}$ auf $\mathfrak{A}$, so dreht sich die Tangentenebene des Komplexkegels, die durch $\mathfrak{A}$ geht, um $\mathfrak{A}$. Dem uneigentlichen Punkt von $\mathfrak{A}$ ist der Zylinder des Komplexes zugeordnet. Auf $\mathfrak{A}$ gibt es einen Punkt $\mathfrak{x}$, den *Zentralpunkt*, dessen Kegel den Zylinder in $\mathfrak{A}$ senkrecht schneidet. Ausgehend vom Zentralpunkt läßt sich die Formel von KOENIGS einfach erklären. Wir betrachten eine beliebige Regelfläche des Komplexes durch $\mathfrak{A}$. Ihr reziproker Drall sei δ; der Abstand ihres Kehlpunktes von $\mathfrak{x}$ sei $\overline{\varphi}$, und ihre Kehlpunktnormale bilde mit der Tangentenebene des Zylinders den Winkel φ. Dann lautet die *Formel von KOENIGS:*

$$\overline{\varphi} \operatorname{tg} \varphi = \delta - k, \tag{1}$$

dabei ist k die einzige Invariante I. Ordnung des Komplexes, der *Hauptdrall*. Wir setzen $k \neq 0$ voraus. Sind zwei der drei Größen $\overline{\varphi}$, δ, φ gegeben, so ist im allgemeinen die dritte aus (1) bestimmt. Nur drei Klassen von Regelflächen des Komplexes bilden Ausnahmen, für sie bleibt die dritte Größe unbestimmt[2]). Die drei Klassen sind:

$$\begin{aligned} &1.\quad \delta = k;\ \overline{\varphi} = 0, \\ &2.\quad \overline{\varphi} = 0;\ \varphi = \frac{\pi}{2}, \\ &3.\quad \delta = k;\ \varphi = 0. \end{aligned} \tag{2}$$

Wie an anderer Stelle gezeigt wurde[3]), erfüllen die Regelflächen jeder Klasse je eine *PFAFFsche Differentialgleichung*, die im allgemeinen nicht integrabel ist. Es liegt daher die Frage nahe, ob es nicht-entartete Strahlenkomplexe gibt, in denen eine, zwei oder alle drei PFAFF-

[1]) G. KOENIGS, La géometrie réglée et ses applications, Paris 1895.

[2]) SANNIA, Saggio di geom. diff. dei complessi di retta, Ann. di Math. III, **17** 179—223.

[3]) W. HAACK, Diff. Geom. d. Strahlenkomplexe I, Math. Z. **40** (1935) 560—581.

schen Formen vollständig integrabel sind. Die Frage läßt sich beantworten und die entsprechenden Komplexe lassen sich bestimmen, ohne die allgemeine Theorie der Strahlenkomplexe heranzuziehen.

Wir geben zunächst einen Überblick über die Regelflächen der drei ausgezeichneten Klassen, aus dem sich der Gang der folgenden Untersuchung ergibt. Die Regelflächen der ersten Klasse, die durch $\mathfrak{A}$ gehen, haben sämtlich den gleichen Drall und den gleichen Kehlpunkt. Ist die I. Pfaffsche Differentialgleichung vollständig integrabel, so bilden ihre durch $\mathfrak{A}$ gehenden Regelflächen ein Strahlensystem, und zwar ein isotropes Strahlensystem, das bekanntlich dadurch gekennzeichnet ist, daß die durch denselben Strahl gehenden Regelflächen gleichen Drall und gleichen Kehlpunkt besitzen. Daher gilt der

Satz 1. *Ist in einem Strahlensystem die I. Pfaffsche Form vollständig integrabel, so besteht der Komplex aus einer Schar isotroper Strahlensysteme*[4]*).*

Die isotropen Strahlensysteme stehen in enger Beziehung zu den Minimalflächen. Nach Ribaucour ist die Mittenhüllfläche eines isotropen Strahlensystems eine Minimalfläche[5]). Daher gehört zu jedem Komplex mit integrabler I. Linearform eine *Schar von Minimalflächen*, die in besonderen Fällen in eine einzige Minimalfläche zusammenfallen können.

Die Regelflächen der II. Klasse, die durch $\mathfrak{A}$ gehen, haben wegen $\overline{\varphi} = 0$ denselben Kehlpunkt, der mit dem Zentralpunkt von $\mathfrak{A}$ zusammenfällt, und berühren im Kehlpunkt den Zylinder des Komplexes, d. h. die Regelflächen haben nicht nur den Kehlpunkt, sondern sogar die Kehlpunktnormale gemeinsam.

Die Regelflächen der III. Klasse, die durch $\mathfrak{A}$ gehen, haben den gleichen Drall und schneiden in den Kehlpunkten, die im allgemeinen voneinander verschieden sind, den Zylinder senkrecht. Die Zylinder des Komplexes gehören als Grenzfall den beiden letzten Klassen an.

Satz 2. *Sind die linearen Differentialformen, die die Regelflächen der II. bzw. III. Klasse bestimmen, integrabel, so bilden die durch* $\mathfrak{A}$ *gehenden Regelflächen jeder Klasse ein Strahlensystem, dabei sind diejenigen der II. Klasse zylindrische Strahlensysteme, deren Regelflächen durch denselben Strahl den gleichen Kehlpunkt, aber verschiedenen Drall haben. Dagegen sind die Systeme der III. Klasse solche zylindrischen Strahlensysteme, deren Regelflächen durch denselben Strahl* $\mathfrak{A}$ *den gleichen Drall, aber verschiedene Kehlpunkte haben.*

Wir beginnen mit der Frage, ob es solche zylindrischen Strahlensysteme überhaupt gibt. Denn andernfalls kann es auch keine Komplexe geben, deren II. und III. Form integrabel sind. Es ist überraschend, daß diese beiden Klassen von Strahlensystemen bisher in der Literatur

[4]) K. Zindler, Liniengeometrie m. Anw., Berlin 1906.

[5]) A. Ribaucour, Etudes des élassoides or surfaces à courbure nulle. Acad. royale de Belg. XLIV 1881.

nicht beachtet wurden, zumal da die isotropen Strahlensysteme so häufig den Gegenstand geometrischer Untersuchungen bildeten. In neueren Darstellungen kennzeichnet man die isotropen Strahlensysteme meist durch die Eigenschaft, daß alle durch den betrachteten Strahl gehenden reellen Regelflächen des Systems den gleichen Drall haben, und leitet daraus ab, daß dann auch die Kehlpunkte der Regelflächen zusammenfallen. Der gemeinsame Drall bzw. der gemeinsame Kehlpunkt erscheinen als Eigenschaften, die sich gegenseitig bedingen. Das ist jedoch nur solange richtig, wie man zylindrische Strahlensysteme ausschließt. Läßt man auch zylindrische Strahlensysteme zu, so gibt es solche, deren Regelflächen gemeinsamen Drall, aber verschiedene Kehlpunkte und umgekehrt gemeinsamen Kehlpunkt, aber verschiedenen Drall haben. In beiden Fällen sind die Zylinder der Systeme Ebenen.

Im zweiten Teil werden wir eine explizite Parameterdarstellung der Komplexe mit integrablen Differentialformen ableiten; dabei gehen wir aus von der Ribaucourschen Darstellung der isotropen Strahlensysteme durch zwei konjugiert imaginäre Minimalkurven und bestimmen zunächst alle Komplexe, die eine Schar isotroper Strahlensysteme enthalten, deren I. Form also integrabel ist. Sie sind bestimmt durch zwei willkürliche Funktionen zweier Veränderlicher. Anschließend wird gezeigt, daß die reellen Komplexe mit d r e i integrablen Linearformen durch zwei willkürliche Funktionen einer komplexen Veränderlichen bestimmt sind.

Wenn auch die folgenden Entwicklungen unabhängig von der allgemeinen Theorie der Strahlenkomplexe durchgeführt werden, so wollen wir hier doch auf den Zusammenhang mit der Theorie hinweisen[6]). Ein Strahlenkomplex besitzt eine Invariante I. Ordnung, den Halbdrall k, und außer den invarianten Ableitungen von k noch drei Invarianten II. Ordnung p, q, r. Die notwendige und hinreichende Bedingung für die Integrabilität der I. Linearform ist $r = 0$, diejenige der II. oder III. Linearform $q = 0$. Wenn also eine der beiden letzten Formen integrabel ist, so ist es auch die andere. Ist in einem Komplex $q = 0$, so sind die Zylinder des Komplexes Ebenen.

Aus der expliziten Parameterdarstellung wird im letzten Abschnitt der Zusammenhang mit den Minimalflächen entwickelt. Insbesondere ergibt sich eine geometrische Deutung für die von Weierstrass angegebene integralfreie Darstellung der Minimalflächen. Der Sonderfall, in dem die Schar der Mittenhüllflächen der isotropen Strahlensysteme des Komplexes in ein und dieselbe Minimalfläche zusammenfallen, wird zum Schluß genauer behandelt. Zu jeder reellen Minimalfläche gibt es höchstens ∞^4 reelle Strahlenkomplexe mit integrablen Pfaffschen Formen.

[6]) W. Haack, Differentialgeometrie Teil II, Wolfenbüttel 1948.

I. Zylindrische Strahlensysteme.

Zur Darstellung der Geraden des Euklidischen Raumes bedienen wir uns der Studyschen dualen Einheitsvektoren. Mit den von Clifford eingeführten dualen Zahlen, deren duale Einheit ε durch $\varepsilon^2 = 0$ gekennzeichnet ist, faßt Study zwei Vektoren $\mathfrak{a}$, $\bar{\mathfrak{a}}$, von denen $\mathfrak{a}$ ein Einheitsvektor in Richtung der darzustellenden Geraden $\mathfrak{A}$ ist und $\bar{\mathfrak{a}}$ das Moment der in $\mathfrak{A}$ wirkenden Einheitskraft in bezug auf den Koordinatenanfangspunkt angibt, zum dualen Einheitsvektor

$$\mathfrak{A} = \mathfrak{a} + \varepsilon \bar{\mathfrak{a}} \quad \text{mit} \quad \mathfrak{A}\mathfrak{A} = \mathfrak{a}\mathfrak{a} + 2\varepsilon\, \mathfrak{a}\bar{\mathfrak{a}} = 1$$

zusammen. Wir werden künftig duale Größen durch große Buchstaben wiedergeben. Den Realteil bezeichnen wir mit dem entsprechenden kleinen, den Dualteil mit dem überstrichenen kleinen Buchstaben. Es ist wohl das Verdienst von W. Blaschke, den Vorteil der Verwendung dualer Vektoren für die metrische differentielle Liniengeometrie erkannt und genutzt zu haben.

Fällt man vom Koordinatenanfangspunkt das Lot auf die Gerade $\mathfrak{A}$, so genügt der Ortsvektor $\underline{\mathfrak{a}}$ des Lotfußpunktes der Gleichung

$$\underline{\mathfrak{a}} = \mathfrak{a} \times \bar{\mathfrak{a}}. \tag{I 1}$$

Ein beliebiger Punkt $\mathfrak{z}$ der Geraden $\mathfrak{A}$ läßt sich daher in der Form schreiben [7])

$$\mathfrak{z} = (\mathfrak{a} \times \bar{\mathfrak{a}}) + \mu\, \mathfrak{a}. \tag{I 2}$$

1. Ebene Zylinder. Sind die Komponenten der Vektoren $\mathfrak{a}$, $\bar{\mathfrak{a}}$ Funktionen eines Parameters w, so beschreibt $\mathfrak{A}$ eine Regelfläche und insbesondere einen Zylinder, wenn $\mathfrak{a}$ konstant ist. Durch die Gleichungen

$$\mathfrak{A}(w) = \mathfrak{a} + \varepsilon\, \bar{\mathfrak{a}}(w)$$

wird also ein Zylinder gegeben. Der Punkt z mit den Gleichungen

$$\mathfrak{z}(w) = (\mathfrak{a} \times \bar{\mathfrak{a}}(w)) + \mu(w)\, \mathfrak{a} \tag{I 3}$$

beschreibt eine Kurve des Zylinders. Der Zylinder ist dann und nur dann eben, wenn $\mathfrak{z}(w)$ für jede Funktion $\mu(w)$ eine ebene Kurve ist, oder wenn die Schmiegungsebene von $\mathfrak{z}(w)$ den Zylinder berührt, d. h. wenn die Gleichung gilt:

$$(\mathfrak{a}\, \mathfrak{z}_w\, \mathfrak{z}_{ww}) = 0; \qquad \mathfrak{z}_w = \frac{d\mathfrak{z}}{dw}; \qquad \mathfrak{z}_{ww} = \frac{d^2\mathfrak{z}}{dw^2}.$$

Setzen wir hier für z den Ausdruck (I 3) ein, so folgt

$$(\mathfrak{a},\, \mathfrak{a} \times \bar{\mathfrak{a}}_w,\, \mathfrak{a} \times \bar{\mathfrak{a}}_{ww}) = 0$$

[7]) Blaschke, Analytische Geometrie, Wolfenbüttel 1948. Haack, Diff. Geom. II.

oder

$$[\mathfrak{a} \times (\mathfrak{a} \times \bar{\mathfrak{a}}_w)] \cdot (\mathfrak{a} \times \bar{\mathfrak{a}}_{ww}) = 0,$$
$$[(\mathfrak{a}\,\mathfrak{a}_w)\,\mathfrak{a} - (\mathfrak{a}\,\mathfrak{a})\,\bar{\mathfrak{a}}_w] \cdot (\mathfrak{a} \times \bar{\mathfrak{a}}_{ww}) = 0$$

und daraus

(I 4) $$(\mathfrak{a}\,\bar{\mathfrak{a}}_w\,\bar{\mathfrak{a}}_{ww}) = 0.$$

Durch Quadrieren des Spatproduktes ergibt sich sofort, daß (I 4) gleichwertig ist mit

(I 4a) $$|\bar{\mathfrak{a}}_w \times \bar{\mathfrak{a}}_{ww}| = 0.$$

Die Gerade $\mathfrak{A}(w)$ *beschreibt einen Zylinder, wenn* $\mathfrak{a} =$ const *ist und* $\bar{\mathfrak{a}}(w)$ *der Gleichung* (I 4) *oder* (I 4a) *genügt.*

2. Zylindrische Strahlensysteme, deren Regelflächen gleichen Drall haben. Die Komponenten des dualen Vektors $\mathfrak{A}$ seien Funktionen der zwei Parameter t, w. Wir setzen voraus, daß $\mathfrak{A}$ ein zylindrisches System ist, und daß die Regelflächen $t =$ const die Zylinder des Systems sind. Dann ist $\mathfrak{a}$ unabhängig von w, und wir können schreiben

(I 5) $$\mathfrak{A}(t, w) = \mathfrak{a}(t) + \varepsilon\,\bar{\mathfrak{a}}(t, w).$$

Denken wir t und w als Funktionen eines Parameters σ, so beschreibt $\mathfrak{A}$ eine Regelfläche des Systems. Die Ableitungen nach σ bezeichnen wir durch Punkte. Dann ist

(I 6) $$\dot{\mathfrak{A}} = \mathfrak{a}_t \dot{t} + \varepsilon\,(\bar{\mathfrak{a}}_t \dot{t} + \bar{\mathfrak{a}}_w \dot{w})$$

und das Skalarprodukt

(I 7) $$\dot{\mathfrak{A}}\,\dot{\mathfrak{A}} = \mathfrak{a}_t\,\mathfrak{a}_t \dot{t}^2 + \varepsilon(2\,(\mathfrak{a}_t \bar{\mathfrak{a}}_t)\,\dot{t}^2 + 2\,(\mathfrak{a}_t \bar{\mathfrak{a}}_w)\,\dot{t}\dot{w}).$$

Der reziproke Drall δ der Regelfläche $\mathfrak{A}(\sigma)$ ist bekanntlich der halbe Quotient aus dem dualen und realen Teil von $\dot{\mathfrak{A}}\,\dot{\mathfrak{A}}$:

(I 8) $$\delta = \frac{(\mathfrak{a}_t \bar{\mathfrak{a}}_t)\,\dot{t} + (\mathfrak{a}_t \bar{\mathfrak{a}}_w)\,\dot{w}}{(\mathfrak{a}_t\,\mathfrak{a}_t)\,\dot{t}}.$$

Wenn die durch den betrachteten Strahl $\mathfrak{A}$ gehenden Regelflächen sämtlich den gleichen Drall haben, muß δ unabhängig von $\dot{t} : \dot{w}$ sein. Das ist nur der Fall, wenn die Gleichung gilt

(I 9) $$\mathfrak{a}_t \bar{\mathfrak{a}}_w = 0.$$

Damit sind die zylindrischen Strahlensysteme, deren Regelflächen gemeinsamen Drall haben, gekennzeichnet. Wir wollen zeigen: *Aus* (I 9) *folgt, daß die Zylinder des Systems eben sind.* Aus den Gleichungen (I 5) folgt durch Differentiation

(I 9a) $$\mathfrak{a}\,\mathfrak{a}_t = 0, \qquad \mathfrak{a}\,\bar{\mathfrak{a}}_w = 0, \qquad \mathfrak{a}\,\bar{\mathfrak{a}}_{uw} = 0,$$

und wegen (I 9)

$$\mathfrak{a}_t \bar{\mathfrak{a}}_{uw} = 0.$$

Diese Gleichungen bedeuten, daß $\mathfrak{a}$ senkrecht zu $\bar{\mathfrak{a}}_w$ und $\bar{\mathfrak{a}}_{ww}$ ist und ferner, daß $\mathfrak{a}_t$ senkrecht zu $\bar{\mathfrak{a}}_w$ und $\bar{\mathfrak{a}}_{ww}$ ist. Dann müssen entweder $\mathfrak{a}$ und $\mathfrak{a}_t$ einander parallel sein, oder $\bar{\mathfrak{a}}_w$ ist parallel $\bar{\mathfrak{a}}_{ww}$. Ist $\mathfrak{a}_t \neq 0$, so ist der erste Fall wegen $\mathfrak{a}\,\mathfrak{a}_t = 0$ bei reellen Vektoren nicht möglich, daher gilt

$$\bar{\mathfrak{a}}_w \times \bar{\mathfrak{a}}_{ww} = 0. \tag{I 10}$$

Nach (I 4a) sind also die Zylinder des Systems eben.

3. Zylindrische Strahlensysteme, deren Regelflächen gleichen Kehlpunkt haben. Schließen wir Bündel paralleler Strahlen aus, so sind die Regelflächen $w = \text{const}$ sicher keine Zylinder; sie besitzen also eine Kehlpunktnormale. Wir übernehmen die Formeln (I 5) bis (I 8) und berechnen zunächst die Kehlpunktnormale $\mathfrak{N}^0$ der Regelflächen $w = \text{const}$. Es ist

$$\mathfrak{N}^0 = \frac{\mathfrak{A}_t}{\sqrt{\mathfrak{A}_t\,\mathfrak{A}_t}} = \frac{\mathfrak{a}_t + \varepsilon\,\bar{\mathfrak{a}}_t}{\sqrt{\mathfrak{a}_t\,\mathfrak{a}_t}}\left(1 - \varepsilon\,\frac{\mathfrak{a}_t\,\bar{\mathfrak{a}}_t}{\mathfrak{a}_t\,\mathfrak{a}_t}\right). \tag{I 11}$$

Wird durch $\dot{t}$, $\dot{w}$ eine beliebige Fortschreitungsrichtung im Strahlensystem gegeben, so ist die Kehlpunktnormale der zugehörigen Regelfläche

$$\mathfrak{N} = \frac{\dot{\mathfrak{A}}}{\sqrt{\dot{\mathfrak{A}}\,\dot{\mathfrak{A}}}}.$$

Nach (I 7) folgt durch einfache Umformung

$$\frac{1}{\sqrt{\dot{\mathfrak{A}}\,\dot{\mathfrak{A}}}} = \frac{1}{\sqrt{\mathfrak{a}_t\,\mathfrak{a}_t}\,\dot{t}}\left[1 - \varepsilon\,\frac{(\mathfrak{a}_t\,\bar{\mathfrak{a}}_t)\,\dot{t} + (\mathfrak{a}_t\,\bar{\mathfrak{a}}_w)\,\dot{w}}{(\mathfrak{a}_t\,\mathfrak{a}_t)\,\dot{t}}\right]$$

und daraus

$$\mathfrak{N} = \frac{1}{\sqrt{\mathfrak{a}_t\,\mathfrak{a}_t}\,\dot{t}}\,[\mathfrak{a}_t\,\dot{t} + \varepsilon\,(\bar{\mathfrak{a}}_t\,\dot{t} + \bar{\mathfrak{a}}_w\,\dot{w})]\left[1 - \varepsilon\,\frac{(\mathfrak{a}_t\,\bar{\mathfrak{a}}_t)\,\dot{t} + (\mathfrak{a}_t\,\bar{\mathfrak{a}}_w)\,\dot{w}}{(\mathfrak{a}_t\,\mathfrak{a}_t)\,\dot{t}}\right]. \tag{I 12}$$

Es sei $\mathfrak{R}$ die Gerade, die $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{N}^0$ senkrecht schneidet; sie wird bestimmt durch das Vektorprodukt von $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{N}^0$. Nach (I 11) läßt sich $\mathfrak{R}$ darstellen

$$\mathfrak{R} = \mathfrak{A} \times \mathfrak{N}^0 = \frac{1}{\sqrt{\mathfrak{a}_t\,\mathfrak{a}_t}}\left(1 - \varepsilon\,\frac{\mathfrak{a}_t\,\bar{\mathfrak{a}}_t}{\mathfrak{a}_t\,\mathfrak{a}_t}\right)(\mathfrak{a} \times \mathfrak{a}_t + \varepsilon\,[(\mathfrak{a} \times \bar{\mathfrak{a}}_t) + (\bar{\mathfrak{a}} \times \mathfrak{a}_t)]). \tag{I 13}$$

Wenn die Regelflächen des Strahlensystems gemeinsame Kehlpunkte haben, müssen sich die Geraden $\mathfrak{R}$ und $\mathfrak{R}$ schneiden, unabhängig von der Richtung $\dot{t} : \dot{w}$. Zwei Geraden schneiden sich, wenn der Dualteil ihres Skalarproduktes verschwindet. Unter Beachtung von $\varepsilon^2 = 0$ bilden wir das Skalarprodukt

$$\mathfrak{R}\,\mathfrak{R} = \frac{\varepsilon}{(\mathfrak{a}_t\,\mathfrak{a}_t\,t\cdot)}\,[((\mathfrak{a}_t\,\mathfrak{a}\,\bar{\mathfrak{a}}_t) + (\bar{\mathfrak{a}}_t\,\mathfrak{a}\,\mathfrak{a}_t))\,\dot{t} + (\bar{\mathfrak{a}}_w\,\mathfrak{a}\,\mathfrak{a}_t)\,\dot{w}]\,,$$

oder

$$\mathfrak{R}\,\mathfrak{R} = \varepsilon\,\frac{(\mathfrak{a}\,\mathfrak{a}_t\,\bar{\mathfrak{a}}_w)\,\dot{w}}{(\mathfrak{a}_t\,\mathfrak{a}_t)\,t\cdot}. \tag{I 14}$$

Da der Realteil von $\mathfrak{R}\mathfrak{R}$ unabhängig von $\dot{t}:\dot{w}$ verschwindet, ergibt sich die Tatsache: *In jedem zylindrischen Strahlensystem sind die Kehlpunktnormalen aller durch einen Strahl gehenden Regelflächen zueinander parallel.* Wenn die Kehlpunkte zusammenfallen, haben daher alle Regelflächen dieselbe Kehlpunktnormale. Die rechte Seite von (I 14) muß unabhängig von $\dot{t}:\dot{w}$ sein, d. h. es ist

$$(\mathfrak{a}\,\mathfrak{a}_t\,\bar{\mathfrak{a}}_w) = 0. \tag{I 15}$$

Das ist die Bedingung dafür, daß die Regelflächen des zylindrischen Strahlensystems gemeinsame Kehlpunkte haben.

Wir wollen zeigen: *Ist in einem zylindrischen Strahlensystem die Bedingung* (I 15) *erfüllt, so sind die Zylinder des Systems Ebenen.* Ausgehend von (I 9a) nehmen wir an, $\mathfrak{a}_t$ sei nicht parallel zu $\bar{\mathfrak{a}}_w$; dann können wir nach den beiden ersten Gleichungen (I 9a) schreiben

$$\mathfrak{a} = \lambda\,(\mathfrak{a}_t \times \bar{\mathfrak{a}}_w).$$

Jetzt folgt aber aus (I 15) unter Voraussetzung reeller Vektoren

$$\mathfrak{a}_t \times \bar{\mathfrak{a}}_w = 0 \tag{I 16}$$

entgegen unserer Annahme. Daher gilt

$$\mathfrak{a}_t = \nu\,\bar{\mathfrak{a}}_w.$$

Differenzieren wir (I 16) nach w und beachten die letzte Gleichung, so folgt

$$\mathfrak{a}_t \times \bar{\mathfrak{a}}_{ww} = \nu\,(\bar{\mathfrak{a}}_w \times \bar{\mathfrak{a}}_{ww}) = 0.$$

Damit haben wir wieder die Bedingung für ein Strahlensystem mit ebenen Zylindern (I 4a) erhalten. Wir wollen die Ergebnisse dieses Abschnittes zusammenfassen in dem

Satz 3: *Besitzen die durch einen beliebigen Strahl* $\mathfrak{A}$ *gehenden reellen Regelflächen eines Strahlensystems gleichen Drall und gleichen Kehlpunkt, so ist das System isotrop; haben die Regelflächen dagegen gleichen Drall aber verschiedene Kehlpunkte, oder gleichen Kehlpunkt aber verschiedenen Drall, so ist das System zylindrisch mit ebenen Zylindern.*

II. Bestimmung der Strahlenkomplexe mit integrablen Linearformen.

Nach dem Vorhergehenden besteht ein Strahlenkomplex, dessen I. Pfaffsche Differentialform vollständig integrabel ist, aus einer Schar von isotropen Strahlensystemen. Ist die II. oder III. Pfaffsche Form integrabel, so müssen auf jeden Fall die Zylinder des Komplexes eben sein. Wir werden zunächst alle Komplexe bestimmen, deren I. Form integrabel ist. Aus dieser Menge sondern wir durch die Forderung, daß die Zylinder eben sind, eine Untermenge aus und zeigen, daß in allen Komplexen der Untermenge die drei Pfaffschen Formen integrabel sind.

4. Ausgezeichnete Parameter. In jedem regulären Komplex mit drei (unabhängigen) integrablen Pfaffschen Formen gibt es sicher drei Parameter u^1, u^2, u^3 derart, daß für $u^i = \text{const}$ jeweils eine der Formen verschwindet. Es seien $u^3 = \text{const}$ die isotropen Strahlensysteme des Komplexes. Dann bestimmen die simultanen Gleichungen $u^1 = \text{const}$, $u^2 = \text{const}$ die Zylinder des Komplexes, oder in anderen Worten, das sphärische Bild $\mathfrak{a}$ des Komplexes hängt nur von den beiden Parametern u^1, u^2 ab. Wir können daher statt u^1, u^2 neue Parameter $u = u(u^1, u^2)$ und $v = v(u^1, u^2)$ einführen, daß $u = \text{const}$ und $v = \text{const}$ die Minimallinien des sphärischen Bildes des Komplexes sind. Die Bedingung dafür lautet

$$\left.\begin{matrix} du \\ dv \end{matrix}\right\} = [\mathfrak{a}_1 \mathfrak{a}_1 \, du^1 - (\mathfrak{a}_1 \mathfrak{a}_2 + \sqrt{(\mathfrak{a}_1 \mathfrak{a}_2)(\mathfrak{a}_1 \mathfrak{a}_2) - (\mathfrak{a}_1 \mathfrak{a}_1)(\mathfrak{a}_2 \mathfrak{a}_2)}) \, du^2] \, X(u^1, u^2).$$

Da $\mathfrak{a}$ nur Funktion der zwei Veränderlichen u^1, u^2 ist, gibt es stets integrierende Faktoren $X(u^1, u^2)$. Schreiben wir noch w statt u^3, so können wir stets annehmen, daß $u = \text{const}$, $v = \text{const}$ die Minimallinien des sphärischen Bildes und $w = \text{const}$ isotrope Strahlensysteme sind.

Etwas schwieriger ist der Beweis, daß die gleichen Parameter u, v, w unter gewissen Voraussetzungen in jedem Strahlenkomplex eingeführt werden können, in dem lediglich die I. Pfaffsche Form integrabel ist. Wir nehmen wieder an, $w = \text{const}$ seien die isotropen Strahlensysteme des Komplexes, also $dw = 0$ die I. Differentialform. Wenn der Komplex nicht entartet (Hauptdrall nicht verschwindet), so liegen die Zylinder des Komplexes nicht in den Systemen $w = \text{const}$. Betrachten wir ein Stück Ω des Parameterraumes u^1, u^2, w, wo u^1, u^2 noch nicht näher bestimmt sind, so können wir $w = \text{const}$ als Schar paralleler Ebenen des Parameterraumes deuten. Durch jeden Punkt von Ω geht eine Kurve, die dem Zylinder durch den entsprechenden Strahl des Komplexes zugeordnet ist. Diese Kurven bilden in Ω eine Kongruenz von Transversalen durch die Ebenen $w = \text{const}$. Dann ist es stets möglich, in Ω solche Parameter u^1, u^2 zu wählen, daß die Transversalen durch die simultanen Gleichungen $u^1 = \text{const}$, $u^2 = \text{const}$ gegeben sind. Dadurch ist aber das sphärische Bild $\mathfrak{a}$ des Komplexes wieder unabhängig von w und die Einführung isotroper Parameter u, v der Einheitskugel führt nur über integrable Differentialformen. Die Untersuchung beschränkt sich jedoch auf die Umgebung eines Strahles $\mathfrak{A}$, die in einem Gebiet Ω liegt.

5. Strahlenkomplexe mit einer Schar isotroper Strahlensysteme. Nach Ribaucour läßt sich ein isotropes Strahlensystem durch zwei isotrope Kurven $\mathfrak{p}(u)$ und $\mathfrak{q}(v)$ darstellen, indem man die Schmiegungsebenen der beiden Kurven miteinander zum Schnitt bringt. Sind $\mathfrak{p}, \mathfrak{q}$ zugleich Funktionen noch einer zweiten (reellen) Veränderlichen w, so ergibt sich eine Schar von isotropen Strahlensystemen,

die den Komplex erzeugen. Daher ist der Strahlenkomplex bestimmt durch die Vektoren

(II 1) $$\mathfrak{p}(u,w), \qquad \mathfrak{q}(v,w)$$

mit den Bedingungen

(II 2) $$\mathfrak{p}_u \mathfrak{p}_u \equiv 0, \qquad \mathfrak{q}_v \mathfrak{q}_v \equiv 0.$$

Die Gleichungen der Schmiegungsebenen der Kurven $\mathfrak{p}$, $\mathfrak{q}$ sind, wenn $\mathfrak{x}$ ein beliebiger Punkt der Schmiegungsebene ist,

(II 3) $$(\mathfrak{x} - \mathfrak{p}(u,w)) \cdot (\mathfrak{p}_u \times \mathfrak{p}_{uu}) = 0; \qquad (\mathfrak{x} - \mathfrak{q}(v,w)) \cdot (\mathfrak{q}_v \times \mathfrak{q}_{vv}) = 0.$$

Da $\mathfrak{p}, \mathfrak{q}$ Minimalkurven sind, ist nach (II 2)

(II 2a) $$\tfrac{1}{2}\mathfrak{p}_u \mathfrak{p}_u = \mathfrak{p}_u \mathfrak{p}_{uu} = 0, \qquad \tfrac{1}{2}\mathfrak{q}_v \mathfrak{q}_v = \mathfrak{q}_v \mathfrak{q}_{vv} = 0$$

und demnach, wenn $\mathfrak{p}_u$ nicht parallel zu $\mathfrak{p}_{uu}$ ist:

(II 4) $$\lambda(\mathfrak{p}_u \times \mathfrak{p}_{uu}) = \mathfrak{p}_u, \qquad \bar{\lambda}(\mathfrak{q}_v \times \mathfrak{q}_{vv}) = \mathfrak{q}_v,$$

dabei sind $\lambda, \bar{\lambda}$ Proportionalitätsfaktoren. Dadurch vereinfachen sich die Gleichungen der Schmiegungsebenen zu

(II 5) $$(\mathfrak{x} - \mathfrak{p}) \cdot \mathfrak{p}_u = 0, \qquad (\mathfrak{x} - \mathfrak{q}) \cdot \mathfrak{q}_v = 0.$$

Ihre Schnittgerade hat für irgend ein Wertsystem der Parameter u, v, w, wie wir zeigen werden, die Studyschen Linienkoordinaten

(II 6) $$\mathfrak{a} = (\mathfrak{p}_u \times \mathfrak{q}_v)\,\varrho; \qquad \bar{\mathfrak{a}} = [\mathfrak{p}_u (\mathfrak{q}\,\mathfrak{q}_v) - \mathfrak{q}_v (\mathfrak{p}\,\mathfrak{p}_u)]\,\varrho.$$

Es ist zu beweisen, daß jeder Punkt $\mathfrak{x}$, der den beiden Gleichungen (II 5) genügt, auf der Geraden $\mathfrak{a}, \bar{\mathfrak{a}}$ liegt. $\mathfrak{x}$ liegt auf der Geraden, wenn

$$\mathfrak{x} \times \mathfrak{a} = \bar{\mathfrak{a}}.$$

Setzen wir für $\mathfrak{a}$ den Wert ein, so folgt

$$\mathfrak{x} \times (\mathfrak{p}_u \times \mathfrak{q}_v)\,\varrho = \bar{\mathfrak{a}}$$

oder

$$(\mathfrak{x}\,\mathfrak{q}_v)\,\mathfrak{p}_u - (\mathfrak{x}\,\mathfrak{p}_u)\,\mathfrak{q}_v = \frac{1}{\varrho}\,\bar{\mathfrak{a}}.$$

Nach (II 5) ist aber

$$\mathfrak{x}\,\mathfrak{q}_v = \mathfrak{q}\,\mathfrak{q}_v, \qquad \mathfrak{x}\,\mathfrak{p}_u = \mathfrak{p}\,\mathfrak{p}_u.$$

Durch Einsetzen dieser Werte in die vorletzte Gleichung ergibt sich (II 6).

Die Gleichungen (II 6) *geben eine Parameterdarstellung aller Strahlenkomplexe, die eine Schar isotroper Strahlensysteme enthalten.* ϱ ist ein an sich willkürlicher Normierungsfaktor, den wir so wählen, daß

(II 7) $$\frac{1}{\varrho} = +\sqrt{(\mathfrak{p}_u \times \mathfrak{q}_v)(\mathfrak{p}_u \times \mathfrak{q}_v)} = i(\mathfrak{p}_u \mathfrak{q}_v), \qquad i = \sqrt{-1}$$

damit $\mathfrak{a}$ Einheitsvektor ist.

Wir wollen schon hier auf den Zusammenhang mit den *Minimalflächen* hinweisen. Bekanntlich umhüllen in einem isotropen Strahlensystem die Mittenebenen, das sind die zu $\mathfrak{A}$ senkrechten Ebenen durch den Mittelpunkt von $\mathfrak{A}$, eine Minimalfläche. Zu jedem isotropen Strahlensystem des Komplexes (II 6) gehört eine Minimalfläche $\mathfrak{m}$, deren Punkte durch die Vektorgleichung

$$\mathfrak{m} = \tfrac{1}{2}(\mathfrak{p}(u, w) + \mathfrak{q}(v, w)), \qquad w = \text{const} \tag{II 8}$$

gegeben sind.

6. Vereinfachte Darstellung der Komplexe (II 6). Wir wollen zeigen, daß ein Strahlenkomplex mit einer Schar isotroper Strahlensysteme durch zwei konjugiert komplexe Funktionen bestimmt ist. Wir beginnen mit dem

Hilfssatz: *Die isotropen Tangentenvektoren der Minimalkurven* $\mathfrak{p}(u, w)$, $\mathfrak{q}(v, w)$ *in* (II 1) *lassen sich stets in der Form schreiben*

$$\mathfrak{p}_u(u, w) = \Phi(u, w)\,\hat{\mathfrak{p}}_u(u), \qquad \mathfrak{q}_v(v, w) = \Psi(v, w)\,\hat{\mathfrak{q}}_v(v), \tag{II 9}$$

wo $\hat{\mathfrak{p}}_u$ *und* $\hat{\mathfrak{q}}_v$ *nicht von* w *abhängen.*

Zum Beweis gehen wir davon aus, daß der Vektor $\mathfrak{a}$ in (II 6, 7) von w unabhängig ist. Differentiation von $\mathfrak{a}$ nach w gibt:

$$(\mathfrak{p}_{uw} \times \mathfrak{q}_v + \mathfrak{p}_u \times \mathfrak{q}_{vw})(\mathfrak{p}_u\,\mathfrak{q}_v) - (\mathfrak{p}_u \times \mathfrak{q}_v)(\mathfrak{p}_{uw}\,\mathfrak{q}_v + \mathfrak{p}_u\,\mathfrak{q}_{vw}) = 0.$$

Durch skalare Multiplikation mit $\mathfrak{p}_u$, $\mathfrak{q}_v$ folgt:

$$(\mathfrak{p}_{uw}\,\mathfrak{q}_v\,\mathfrak{p}_u) = 0, \qquad (\mathfrak{q}_{vw}\,\mathfrak{q}_v\,\mathfrak{p}_u) = 0.$$

Daher sind $\mathfrak{p}_{uw}$ und $\mathfrak{q}_{vw}$ Linearkombinationen von $\mathfrak{p}_u$, $\mathfrak{q}_v$. Wir können also schreiben

$$\mathfrak{p}_{uw} = \alpha\,\mathfrak{q}_v + \beta\,\mathfrak{p}_u, \qquad \mathfrak{q}_{vw} = \gamma\,\mathfrak{q}_v + \delta\,\mathfrak{p}_u.$$

Multiplizieren wir die linke Gleichung skalar mit $\mathfrak{p}_u$ und die rechte mit $\mathfrak{q}_v$, so ergibt sich $\alpha = 0$, $\delta = 0$ und es bleibt

$$\mathfrak{p}_{uw} = \beta\,\mathfrak{p}_u, \qquad \mathfrak{q}_{vw} = \gamma\,\mathfrak{q}_v. \tag{II 9 a}$$

Aus diesen Gleichungen folgt sofort die Behauptung des Hilfssatzes. Sind nämlich p_u^i die Komponenten von $\mathfrak{p}_u$, so folgt durch Integration aus (II 9 a)

$$p_u^i = C^i(u) \cdot e^{\int \beta(u, w)\, dw}$$

Betrachten wir $C^i(u)$ als Komponenten des Vektors $\hat{\mathfrak{p}}_u$, so ist

$$\mathfrak{p}_u = e^{\int \beta(u, w)\, dw} \cdot \hat{\mathfrak{p}}_u(u).$$

Jetzt können wir für $\hat{\mathfrak{p}}_u$ und $\hat{\mathfrak{q}}_v$ die aus der Theorie der Minimalkurven bekannte Form der Darstellung eines Paares konjugierter isotroper Vektoren wählen

$$\begin{aligned} \hat{\mathfrak{p}}_u &= \tfrac{1}{2}(1 - u^2)\,\mathfrak{i} + \tfrac{i}{2}(1 + u^2)\,\mathfrak{j} + u\,\mathfrak{k}, \\ \hat{\mathfrak{q}}_v &= \tfrac{1}{2}(1 - v^2)\,\mathfrak{i} - \tfrac{i}{2}(1 + v^2)\,\mathfrak{j} + v\,\mathfrak{k}. \end{aligned} \tag{II 10}$$

Zur späteren Anwendung erwähnen wir, daß

$$\text{(II 11)} \qquad \hat{\mathfrak{p}}_u \hat{\mathfrak{p}}_{uuu} = -1, \quad \hat{\mathfrak{q}}_v \hat{\mathfrak{q}}_{vvv} = -1.$$

Dabei bedeuten die Indizes die Ableitungen von $\hat{\mathfrak{p}}_u$, $\hat{\mathfrak{q}}_v$.

In den Gleichungen (II 6) des Strahlenkomplexes treten die Skalarprodukte $\mathfrak{q}\mathfrak{q}_v$ und $\mathfrak{p}\mathfrak{p}_u$ auf. Sie lassen sich durch (II 9) genauer bestimmen. Wir setzen

$$\text{(II 12)} \qquad \Phi(u, w) = F_{uuu}(u, w).$$

Dann folgt durch partielle Integration aus (II 9), da nach (II 10) $\hat{\mathfrak{p}}_{uuuu} = 0$ ist,

$$\text{(II 13)} \qquad \mathfrak{p}(u, w) = \int F_{uuu} \hat{\mathfrak{p}}_u \, du = F_{uu} \hat{\mathfrak{p}}_u - F_u \hat{\mathfrak{p}}_{uu} + F \hat{\mathfrak{p}}_{uuu} + \mathfrak{W}(w)$$

mit dem willkürlichen Vektor $\mathfrak{W}(w)$. Skalare Multiplikation der letzten Gleichung mit $\hat{\mathfrak{p}}_u$ gibt

$$\mathfrak{p} \hat{\mathfrak{p}}_u = F \hat{\mathfrak{p}}_u \hat{\mathfrak{p}}_{uuu} + \mathfrak{W} \hat{\mathfrak{p}}_u$$

oder, wegen (II 11)

$$\text{(II 14)} \qquad \mathfrak{p} \hat{\mathfrak{p}}_u = -F(u, w) + \mathfrak{W} \hat{\mathfrak{p}}_u, \qquad \mathfrak{q} \hat{\mathfrak{q}}_v = -\bar{F}(v, w) + \overline{\mathfrak{W}} \hat{\mathfrak{q}}_v.$$

Mit diesen Ergebnissen gelangen wir zu einer neuen Darstellung der Komplexe (II 6). Nach (II 7) und (II 9) werden

$$\text{(II 15)} \qquad \mathfrak{a} = \frac{\hat{\mathfrak{p}}_u \times \hat{\mathfrak{q}}_v}{i(\hat{\mathfrak{p}}_u \cdot \hat{\mathfrak{q}}_v)}$$

und

$$\text{(II 16)} \qquad \bar{\mathfrak{a}} = \frac{1}{i(\hat{\mathfrak{p}}_u \hat{\mathfrak{q}}_v)} \{\hat{\mathfrak{p}}_u (\mathfrak{q} \hat{\mathfrak{q}}_v) - \hat{\mathfrak{q}}_v (\mathfrak{p} \hat{\mathfrak{p}}_u)\}.$$

$\mathfrak{a}, \bar{\mathfrak{a}}$ sind nur reell, wenn $\mathfrak{p}, \mathfrak{q}$ konjugiert komplex sind. Nach Einsetzen der Werte (II 14) gilt der

Satz 4: *Jeder reelle Strahlenkomplex, der eine Schar isotroper Strahlensysteme enthält, d. h. dessen I. Pfaffsche Differentialform integrabel ist, läßt sich in einem Gebiet Ω durch die Gleichungen darstellen*

$$\text{(II 17)} \qquad \mathfrak{a} = \frac{\hat{\mathfrak{p}}_u \times \hat{\mathfrak{q}}_v}{i(\hat{\mathfrak{p}}_u \cdot \hat{\mathfrak{q}}_v)};$$

$$\bar{\mathfrak{a}} = \frac{1}{i(\hat{\mathfrak{p}}_u \cdot \hat{\mathfrak{q}}_v)} \{[F(u, w) - \mathfrak{W} \hat{\mathfrak{p}}_u] \hat{\mathfrak{q}}_v - [\bar{F}(v, w) - \overline{\mathfrak{W}} \hat{\mathfrak{q}}_v] \hat{\mathfrak{p}}_u\},$$

dabei sind $\hat{\mathfrak{p}}_u$, $\hat{\mathfrak{q}}_v$ die isotropen Vektoren (II 10) *und $F(u, w)$, $\bar{F}(v, w)$ zwei willkürliche konjugiert komplexe Funktionen der reellen Veränderlichen w und der konjugiert komplexen Veränderlichen u, v; $\mathfrak{W}(w)$, $\overline{\mathfrak{W}}(w)$ sind willkürliche Vektorfunktionen von w.*

Da $F(u, w)$ eine willkürliche Funktion ist und $\mathfrak{W}\hat{\mathfrak{p}}_u$ ebenfalls nur von u, w abhängt, kann man die Ausdrücke in einer neuen willkürlichen Funktion F_1 zusammenfassen und schreiben

$$\text{(II 17a)}\quad F_1(u, w) = F(u, w) + \mathfrak{W}\hat{\mathfrak{p}}_u; \quad F_2(v, w) = \bar{F}(v, w) + \overline{\mathfrak{W}}\hat{\mathfrak{q}}_v.$$

In den Strahlenkomplexen (II 17) wird durch $w = \text{const}$ eine Schar isotroper Strahlensysteme bestimmt. Die Mittenhüllflächen dieser Systeme bilden eine Schar von Minimalflächen. Für den Ortsvektor $\mathfrak{m}$ der Minimalflächen gilt nach (II 8) und (II 13)

$$\text{(II 18)}\quad \mathfrak{m} = \frac{1}{2}\left\{\int \frac{\partial^3 F}{\partial u^3}\hat{\mathfrak{p}}_u(u)\,du + \int \frac{\partial^3 \bar{F}}{\partial v^3}\hat{\mathfrak{q}}_v(v)\,dv\right\} + \frac{1}{2}\{\mathfrak{W} + \overline{\mathfrak{W}}\}.$$

Dabei sind die Integrationskonstanten in dem Vektor $\mathfrak{W}(w) + \overline{\mathfrak{W}}(w)$ enthalten. Alle Komplexe (II 17), für die die Summe $\mathfrak{W}(w) + \overline{\mathfrak{W}}(w)$ den gleichen Wert hat, haben als Mittenhüllflächen dieselbe Schar von Minimalflächen. Daraus folgt der

Satz 5: *Ist eine Schar von Minimalflächen gegeben, so werden die Strahlenkomplexe, die diese Schar zu Mittenhüllflächen haben, durch eine willkürliche Vektorfunktion* $(\mathfrak{W}(w) - \overline{\mathfrak{W}}(w))$ *des Parameters* w *bestimmt.*

Gibt man in (II 17) und (II 18) dem Parameter w irgend einen festen Wert, so zeigen die Gleichungen den Zusammenhang zwischen einer beliebigen Minimalfläche und den zugehörigen isotropen Strahlensystemen. Man erkennt sofort die Richtigkeit von Ribaucours Ergebnis, daß zu jeder Minimalfläche ∞^3 isotrope Strahlensysteme gehören, die durch den willkürlichen Vektor $\mathfrak{W} - \overline{\mathfrak{W}}$ bestimmt werden. Bedeutungsvoller dürfte der folgende Hinweis sein: In der Literatur wird seit Weierstrass eine isotrope Kurve durch das Integral

$$\mathfrak{p} = \int U(u)\hat{\mathfrak{p}}_u(u)\,du$$

dargestellt und gezeigt, daß man zu einer integralfreien Darstellung der isotropen Kurven bzw. der Minimalflächen kommt, indem man $U(u)$ als dritte Ableitung einer Funktion F deutet, also setzt

$$\text{(II 18a)}\qquad U(u) = F'''(u),$$

wie es auch hier in (II 12), (II 13) geschah. War dieser Vorgang bisher ein rein analytischer Kunstgriff, so zeigt der Vergleich von (II 17) mit (II 18) jetzt den geometrischen Sinn:

Die Funktion F *bestimmt die isotropen Strahlensysteme, die zur Minimalfläche mit der Funktion* F''' *gehören.*

7. Strahlenkomplexe mit drei integrablen Pfaffschen Formen. Nach Satz 2 und 3 sind in einem Komplex mit drei integrablen Linearformen die Zylinder eben. Zur Bestimmung der Komplexe gehen wir aus von den Gleichungen (II 15) und (II 16) und

unterwerfen sie der Bedingung (I 4). Da $\mathfrak{a}$, $\hat{\mathfrak{p}}_u$, $\hat{\mathfrak{q}}_v$ unabhängig von w sind, wird

$$(\mathfrak{a}\ \bar{\mathfrak{a}}_w\ \bar{\mathfrak{a}}_{ww}) = (\mathfrak{a},\ \hat{\mathfrak{p}}_u(\mathfrak{q}_w\hat{\mathfrak{q}}_v) - \hat{\mathfrak{q}}_v(\mathfrak{p}_w\hat{\mathfrak{p}}_u),\ \hat{\mathfrak{p}}_u(\mathfrak{q}_{uw}\hat{\mathfrak{q}}_v) - \hat{\mathfrak{q}}_v(\mathfrak{p}_{ww}\hat{\mathfrak{p}}_u)) = 0$$

oder nach einfacher Umrechnung

$$(\mathfrak{a}\ \hat{\mathfrak{p}}_u\hat{\mathfrak{q}}_v)\{(\mathfrak{p}_w\hat{\mathfrak{p}}_u)(\mathfrak{q}_{uw}\hat{\mathfrak{q}}_v) - (\mathfrak{q}_w\hat{\mathfrak{q}}_v)(\mathfrak{p}_{ww}\hat{\mathfrak{p}}_u)\} = 0.$$

Das linke Spatprodukt ist sicher von Null verschieden, daher muß die rechte Klammer verschwinden, die wir in der Form schreiben wollen

$$\text{(II 19)}\qquad \frac{\mathfrak{p}_{uw}\hat{\mathfrak{p}}_u}{\mathfrak{p}_w\hat{\mathfrak{p}}_u} = \frac{\mathfrak{q}_{uw}\hat{\mathfrak{q}}_v}{\mathfrak{q}_w\hat{\mathfrak{q}}_v}.$$

Hier ist die linke Seite eine Funktion von u, w und die rechte eine Funktion von v, w; sie können nur einander gleich sein, wenn jede Seite gleich derselben Funktion $W(w)$ von w allein ist. D. h.

$$\text{(II 19a)}\qquad \frac{\mathfrak{p}_{ww}\hat{\mathfrak{p}}_u}{\mathfrak{p}_w\hat{\mathfrak{p}}_u} = W(w),\qquad \frac{\mathfrak{q}_{ww}\hat{\mathfrak{q}}_v}{\mathfrak{q}_w\hat{\mathfrak{q}}_v} = W(w).$$

Durch Integration über w folgt sofort

$$\ln(\mathfrak{p}_w\hat{\mathfrak{p}}_u) = \int W(w)\,dw + U_0(u),\qquad \ln(\mathfrak{q}_w\hat{\mathfrak{q}}_v) = \int W(w)\,dw + V_0(v)$$

oder

$$\text{(II 19b)}\qquad \mathfrak{p}_w\hat{\mathfrak{p}}_u = e^{\int W\,dw}\cdot e^{U_0};\qquad \mathfrak{q}_w\hat{\mathfrak{q}}_v = e^{\int W\,dw}\cdot e^{V_0}.$$

Setzen wir

$$\text{(II 19c)}\qquad e^{\int W\,dw} = \Omega(w);\qquad e^{U_0} = U_1;\qquad e^{V_0} = V_1,$$

so wird

$$\mathfrak{p}_w\hat{\mathfrak{p}}_u = U_1(u)\,\Omega(w),\qquad \mathfrak{q}_w\hat{\mathfrak{q}}_v = V_1(v)\,\Omega(w)$$

und nach nochmaliger Integration über w

$$\text{(II 20)}\qquad \mathfrak{p}\hat{\mathfrak{p}}_u = U_1\int\Omega\,dw + U_2,\qquad \mathfrak{q}\hat{\mathfrak{q}}_v = V_1\int\Omega\,dw + V_2.$$

Da Ω nur von der Veränderlichen w abhängt, ist es stets möglich, eine neue Veränderliche $\hat{w}$ einzuführen, so daß

$$\text{(II 20a)}\qquad \hat{w} = \int\Omega\,dw.$$

Wir wollen annehmen, daß von vornherein diese Veränderliche gewählt sei und wieder w statt $\hat{w}$ schreiben. Mit diesem ausgezeichneten Parameter ist

$$\text{(II 21)}\qquad \Omega(w) = 1,\qquad \int W\,dw = 0,\qquad W(w) = 0.$$

Durch die Formeln (II 20) sind die Komplexe bestimmt. Wir stellen das Ergebnis in einem Satz zusammen und bringen anschließend die fehlenden Teile des Beweises.

Satz 6: *Ein nicht-entarteter Strahlenkomplex, dessen drei Pfaffsche Differentialformen vollständig integrabel sind, läßt sich mittels der isotropen Vektoren* $\hat{\mathfrak{p}}_u$, $\hat{\mathfrak{q}}_v$ (II 10) *durch die Gleichungen darstellen*

$$\text{(II 22)} \quad \mathfrak{a} = \frac{\hat{\mathfrak{p}}_u \times \hat{\mathfrak{q}}_v}{i\,(\hat{\mathfrak{p}}_u\,\hat{\mathfrak{q}}_v)}, \quad \bar{\mathfrak{a}} = \frac{1}{i\,(\hat{\mathfrak{p}}_u\,\hat{\mathfrak{q}}_v)}\,\{-(U_1 w + U_2)\hat{\mathfrak{q}}_v + (V_1 w + V_2)\hat{\mathfrak{p}}_u\}.$$

Dabei sind U_1, U_2 *und* V_1, V_2 *willkürliche Funktionen der konjugiert komplexen Veränderlichen* u, *bzw.* v.

Zusatz 1: *Die Strahlen der Komplexe sind reell, wenn* U_1, V_1 *und* U_2, V_2 *zwei Paare konjugiert komplexer Funktionen sind.*

Da mit einer komplexen Funktion U zugleich die konjugiert komplexe Funktion bestimmt ist, gilt der

Zusatz 2: *Ein reeller Strahlenkomplex mit drei integrablen Differentialformen ist durch zwei willkürliche Funktionen* U_1, U_2 *einer komplexen Veränderlichen bestimmt.*

8. Integrabilität der II. und III. Linearform. Der Beweis des Satzes 6 ist noch nicht vollständig. Zwar ist in den Komplexen (II 22) die I. Differentialform integrabel und ergibt mit $dw = 0$ eine Schar isotroper Strahlensysteme, dagegen ist bis jetzt nur bewiesen, daß die Zylinder des Komplexes eben sind. Wenn wir das Ergebnis der allgemeinen Theorie (s. Einleitung) nicht voraussetzen wollen, so müssen wir noch zeigen, daß die II. und III. Differentialform integrabel sind. Das geschieht am einfachsten durch Berechnung der Formen.

In (II 22) seien u, v Funktionen eines Parameters t. Dann bestimmt das Vektorpaar $\mathfrak{a}(t, w)$, $\bar{\mathfrak{a}}(t, w)$ ein Strahlensystem. Die Regelflächen des Systems haben gemeinsamen Drall, wenn nach (I 9)

$$a_t\,\bar{\mathfrak{a}}_w = 0.$$

Schreiben wir die Gleichungen (II 22) abgekürzt

$$\text{(II 23)} \quad \mathfrak{a} = \varrho\,(\hat{\mathfrak{p}}_u \times \hat{\mathfrak{q}}_v), \quad \bar{\mathfrak{a}} = \varrho\,\{(V_1 w + V_2)\hat{\mathfrak{p}}_u - (U_1 w + U_2)\hat{\mathfrak{q}}_v\},$$

so sind die Ableitungen

$$\text{(II 24)} \quad \begin{aligned} \mathfrak{a}_t &= \varrho_t\,(\hat{\mathfrak{p}}_u \times \hat{\mathfrak{q}}_v) + \varrho\,[(\hat{\mathfrak{p}}_{uu} \times \hat{\mathfrak{q}}_v)\,\dot{u} + (\hat{\mathfrak{p}}_u \times \hat{\mathfrak{q}}_{vv})\dot{v}\ ], \\ \bar{\mathfrak{a}}_w &= \varrho\,(V_1 \hat{\mathfrak{p}}_u - U_1 \hat{\mathfrak{q}}_v). \end{aligned}$$

Für das Skalarprodukt ergibt sich

$$\text{(II 25)} \quad V_1\,(\hat{\mathfrak{p}}_{uu}\,\hat{\mathfrak{p}}_u\,\hat{\mathfrak{q}}_v)\,\dot{u} - U_1\,(\hat{\mathfrak{q}}_{vv}\,\hat{\mathfrak{p}}_u\,\hat{\mathfrak{q}}_v)\,\dot{v} = 0.$$

Da in der Gleichung nur die beiden Veränderlichen u, v auftreten, ist sie vollständig integrabel. Damit ist die Integrabilität der II. Differentialform bewiesen. (II 25) läßt sich vereinfachen, wenn man $\hat{\mathfrak{p}}_u$, $\hat{\mathfrak{q}}_v$ in der Form (II 10) annimmt; dann ist

$$\text{(II 26)} \quad \begin{aligned} \hat{\mathfrak{p}}_{uu} &= -u\,\mathfrak{i} + i\,u\,\mathfrak{j} + \mathfrak{k} \\ \hat{\mathfrak{q}}_{vv} &= -v\,\mathfrak{i} - i\,v\,\mathfrak{j} + \mathfrak{k}. \end{aligned}$$

Nach (II 23) läßt sich (II 25) schreiben

$$V_1 (\mathfrak{a}\, \hat{\mathfrak{p}}_{uu})\, \dot{u} - U_1 (\mathfrak{a}\, \hat{\mathfrak{q}}_{vv})\, \dot{v} = 0.$$

Wegen (II 22), (II 26) ist aber

(II 27) $$\mathfrak{a}\, \hat{\mathfrak{p}}_{uu} = -1, \quad \mathfrak{a}\, \hat{\mathfrak{q}}_{vv} = -1.$$

Daher gilt der

Satz 7: *Die II. Differentialform des Strahlenkomplexes* (II 22) *lautet*

(II 28) $$V_1\, du - U_1\, dv = 0.$$

Sie ist vollständig integrabel und bestimmt die Strahlensysteme des Komplexes, deren Regelflächen gemeinsamen Drall haben.

Wenden wir uns schließlich zur III. Differentialform, die für die Regelflächen mit gemeinsamen Kehlpunkten verschwindet. Es seien wieder $\mathfrak{a}(t, w)$, $\bar{\mathfrak{a}}(t, w)$ Strahlensysteme des Komplexes (II 22). Nach (I 15) haben die Regelflächen des Systems gemeinsamen Kehlpunkt, wenn die Gleichung gilt:

(II 29) $$(\mathfrak{a}\, \mathfrak{a}_t\, \bar{\mathfrak{a}}_w) = 0$$

oder $$(\mathfrak{a} \times \bar{\mathfrak{a}}_w) \cdot \mathfrak{a}_t = 0.$$

Aus (II 23, 24) folgt sofort wegen $\hat{\mathfrak{p}}_u \cdot \hat{\mathfrak{p}}_u = \hat{\mathfrak{q}}_v \cdot \hat{\mathfrak{q}}_v = 0$

$$(\mathfrak{a} \times \bar{\mathfrak{a}}_w) = -\varrho^2 (\hat{\mathfrak{p}}_u \hat{\mathfrak{q}}_v)\, (V_1 \hat{\mathfrak{p}}_u + U_1 \hat{\mathfrak{q}}_v).$$

Dann ergibt sich aus (II 24) und (II 29)

$$V_1 (\hat{\mathfrak{p}}_{uu}\, \hat{\mathfrak{p}}_u\, \hat{\mathfrak{q}}_v)\, \dot{u} + U_1 (\hat{\mathfrak{q}}_{vv}\, \hat{\mathfrak{p}}_u\, \hat{\mathfrak{q}}_v)\, \dot{v} = 0.$$

Beachten wir (II 27), so gilt

Satz 8: *Die III. Differentialform des Strahlenkomplexes* (II 22) *ist*

(II 30) $$V_1\, du + U_1\, dv = 0.$$

Sie ist vollständig integrabel und bestimmt die Strahlensysteme des Komplexes, deren Regelflächen gemeinsamen Kehlpunkt haben.

Die durch (II 28, 30) bestimmten Strahlensysteme sind reell, wenn U_1, V_1 konjugiert komplexe Funktionen sind. Die einfache Form der Gleichungen (II 28, 30) läßt unmittelbar eine geometrische Eigenschaft der Komplexe erkennen. Das sphärische Bild eines zylindrischen Strahlensystems ist eine Kurve. Die beiden Scharen von zylindrischen Strahlensystemen (II 28, 30) erzeugen daher auf der Einheitskugel zwei Kurvenscharen, für die der Satz gilt:

Satz 9: *In einem Komplex mit drei integrablen Differentialformen erzeugen die sphärischen Bilder der zylindrischen Strahlensysteme, die durch das Verschwinden der II. und III. Differentialform bestimmt werden, ein isometrisches Kurvennetz der Einheitskugel.*

Obwohl der Satz unmittelbar einleuchtend ist, wollen wir den Beweis kurz andeuten. Wir führen neue Parameter ein durch

$$d\bar{u} = \frac{dv}{V_1} + \frac{du}{U_1}, \qquad i\, d\bar{v} = \frac{dv}{V_1} - \frac{du}{U_1}.$$

Lösen wir die Gleichungen nach du, dv auf und berechnen $du\,dv$, so folgt

$$du\,dv = \frac{1}{4}\,U_1\,V_1\,(d\bar{u}^2 + d\bar{v}^2).$$

Da nach Abs. 4 u, v isotrope Parameter sind, bilden $u, \bar{v}$ ein isometrisches Parametersystem.

III. Zusammenhang mit Minimalkurven und -flächen.

Die isotropen Kurven und Minimalflächen, die zu den Strahlenkomplexen mit drei integrablen Linearformen gehören, sind in einfacher Weise angeordnet. Wir wollen in den folgenden Abschnitten die Beziehungen genauer betrachten.

9. Minimal-Kurven und Flächen. In den Gleichungen (II 17, 18) bestimmen wir die Funktionen $F, \overline{F}, \mathfrak{W}, \overline{\mathfrak{W}}$ so, daß (II 22) erfüllt ist. Dazu setzen wir

$$\text{(III 1)} \qquad \begin{aligned} F(u,w) - \mathfrak{W}\,\mathfrak{p}_u &= U_3\,w + U_4 + (\mathfrak{g}_3\,w + \mathfrak{g}_4)\cdot \mathfrak{p}_u, \\ \overline{F}(v,w) - \overline{\mathfrak{W}}\,\mathfrak{q}_v &= V_3\,w + V_4 + (\bar{\mathfrak{g}}_3\,w + \bar{\mathfrak{g}}_4)\cdot \mathfrak{q}_v. \end{aligned}$$

Man erkennt sofort, daß die Gleichungen (II 17) die Form von (II 22) annehmen, wenn $\mathfrak{g}_3, \mathfrak{g}_4, \bar{\mathfrak{g}}_3\,\bar{\mathfrak{g}}_4$ feste Vektoren sind. Jetzt können wir nach (II 13) und (II 18) die Minimalkurven und -flächen anschreiben, die zu dem Komplex gehören. Mit $\mathfrak{p}_j, \mathfrak{q}_j$ bezeichnen wir die konjugiert komplexen isotropen Kurven

$$\text{(III 2)} \qquad \mathfrak{p}_j = \int U_j'''\,\mathfrak{p}_u\,du + \mathfrak{g}_j, \quad \mathfrak{q}_j = \int V_j'''\,\mathfrak{q}_v\,dv + \bar{\mathfrak{g}}_j, \quad [j = 3, 4].$$

Ferner nennen wir die Kurvenschar

$$\text{(III 3)} \qquad \mathfrak{p}(u,w) = \mathfrak{p}_3\,w + \mathfrak{p}_4$$

ein *Büschel isotroper Kurven*; ebenso wollen wir die Flächenschar

$$\text{(III 4)} \qquad \mathfrak{m}(u,v,w) = \frac{1}{2}\,(\mathfrak{p}_3 + \mathfrak{q}_3)\,w + \frac{1}{2}\,(\mathfrak{p}_4 + \mathfrak{q}_4)$$

ein Büschel von Minimalflächen nennen. Dann gilt

Satz 10: *Bringt man die Schmiegungsebenen des Büschels isotroper Kurven*

$$\text{(III 5)} \qquad \mathfrak{p}(u,w) = \mathfrak{p}_3(u)\,w + \mathfrak{p}_4(u),$$

in dem $\mathfrak{p}_3(u), \mathfrak{p}_4(u)$ zwei beliebige isotrope Kurven sind, zum Schnitt mit den Schmiegungsebenen der entsprechenden Kurven des konjugiert komplexen Büschels

$$\text{(III 6)} \qquad \mathfrak{q}(v,w) = \mathfrak{q}_3(v)\,w + \mathfrak{q}_4(v),$$

so erzeugen die Schnittgeraden einen Strahlenkomplex mit drei integrablen Pfaffschen Differentialformen.

Die Mittenhüllflächen der in dem Komplex enthaltenen isotropen Strahlensysteme bilden das Büschel (III 4) von Minimalflächen. Aus (III 2) erkennt man, daß durch Parallelverschiebung des Koordinatensystems stets

$$\text{III 7)} \qquad \bar{\mathfrak{g}}_4 + \mathfrak{g}_4 = 0$$

gemacht werden kann. Dann läßt sich daß Büschel von Minimalflächen in der Form darstellen

$$\text{(III 8)} \qquad \mathfrak{m}(u,v,w) =$$

$$\tfrac{1}{2}\left[\int U_3''' \hat{\mathfrak{p}}_u\, du + \int V_3''' \hat{\mathfrak{q}}_v\, dv + \mathfrak{g}_3 + \bar{\mathfrak{g}}_3\right] w + \tfrac{1}{2}\left[\int U_4''' \hat{\mathfrak{p}}_u\, du + \int V_4''' \hat{\mathfrak{q}}_v\, dv\right].$$

Aus dem Vergleich mit den Gleichungen (II 17, 18), (III 1, 7) folgt

Satz 11: *Ist ein Büschel von Minimalflächen gegeben* (III 8), *so gibt es höchstens* ∞^6 *Strahlenkomplexe, die die Minimalflächen des Büschels als Mittenhüllflächen ihrer isotropen Strahlensysteme besitzen.*

Erwähnenswert ist der Sonderfall, in dem

$$\text{(III 9)} \qquad U_3 = V_3 = 0, \quad \mathfrak{g}_3 + \bar{\mathfrak{g}}_3 = 0$$

sind; dann ist (III 8) unabhängig von w. Die isotropen Strahlenkomplexe haben sämtlich dieselbe Minimalfläche als Mittenhüllfläche. Da man w durch $\overline{w} = \alpha w + \beta$ ersetzen kann, ohne den Komplex zu ändern, folgt aus Satz 11 sofort

Satz 12: *Ist eine beliebige Minimalfläche*

$$\text{(III 10)} \qquad \mathfrak{m}(u,v) = \tfrac{1}{2}\left[\int U_4''' \hat{\mathfrak{p}}_u\, du + \int V_4''' \hat{\mathfrak{q}}_v\, dv\right]$$

gegeben, so gibt es höchstens ∞ *Strahlenkomplexe, die* $\mathfrak{m}$ *als gemeinsame Mittenhüllfläche ihrer isotropen Strahlensysteme besitzen. Die Komplexe lassen sich mit zwei willkürlichen festen Vektoren* $\mathfrak{g}_3$, $\mathfrak{g}_4$ *durch die Gleichungen darstellen*

$$\text{(III 10a)} \qquad \mathfrak{a} = \frac{\hat{\mathfrak{p}}_u \times \hat{\mathfrak{q}}}{i(\hat{\mathfrak{p}}_u \cdot \hat{\mathfrak{q}}_v)},$$

$$\bar{\mathfrak{a}} = \frac{1}{i(\hat{\mathfrak{p}}_u \cdot \hat{\mathfrak{q}}_v)} \left\{[U_4 + (\mathfrak{g}_3 w + \mathfrak{g}_4)\cdot \hat{\mathfrak{p}}_u]\,\hat{\mathfrak{q}}_v - [V_4 - (\mathfrak{g}_3 w + \mathfrak{g}_4)\cdot \hat{\mathfrak{q}}_v]\,\hat{\mathfrak{p}}_u\right\}.$$

Dabei kann $\mathfrak{g}_3$ *ohne Beschränkung der Allgemeinheit als Einheitsvektor gewählt werden.*

10. Die Hüllfläche des Komplexes. Da die Zylinder der Komplexe eben sind, läßt sich jeder Strahlenkomplex (II 22) aus einer zweiparametrigen Ebenenschar derart erzeugen, daß in jeder Ebene ein Büschel paralleler Geraden liegt, die dem Komplex angehören. Die Ebenen umhüllen im allgemeinen eine Fläche, die wir die *Hüllfläche des Komplexes* nennen wollen. Aus (II 22) läßt sich leicht die Gleichung einer Zylinderebene berechnen. Bekanntlich genügt der

Ortsvektor $\mathfrak{x}$ eines Punktes der Geraden $(\mathfrak{a}, \bar{\mathfrak{a}})$ der Gleichung

(III 1.1) $$\mathfrak{x} = \mathfrak{a} \times \bar{\mathfrak{a}} + \lambda \mathfrak{a},$$

wo λ ein Parameter für die Punkte der Geraden ist. Nach (II 22) wird

(III 12) $$\begin{aligned}\mathfrak{a} \times \bar{\mathfrak{a}} = \varrho^2 \{ &-(U_1 w + U_2)\,(\hat{\mathfrak{p}}_u \times \hat{\mathfrak{q}}_v) \times \hat{\mathfrak{q}}_v \\ &+ (V_1 w + V_2)\,(\hat{\mathfrak{p}}_u \times \hat{\mathfrak{q}}_v) \times \hat{\mathfrak{d}}_u \}.\end{aligned}$$

Die vektorischen Produkte lassen sich umformen

(III 13) $$\begin{aligned}(\hat{\mathfrak{p}}_u \times \hat{\mathfrak{q}}_v) \times \hat{\mathfrak{q}}_v &= \quad (\hat{\mathfrak{p}}_u \cdot \hat{\mathfrak{q}}_v)\,\hat{\mathfrak{q}}_v = -\frac{i}{\varrho}\,\hat{\mathfrak{q}}_v, \\ (\hat{\mathfrak{p}}_u \times \hat{\mathfrak{q}}_v) \times \hat{\mathfrak{p}}_u &= -\,(\hat{\mathfrak{p}}_u \cdot \hat{\mathfrak{q}}_v)\,\hat{\mathfrak{p}}_u = +\frac{i}{\varrho}\,\hat{\mathfrak{p}}_u.\end{aligned}$$

Durch Einsetzen folgt

$$\mathfrak{a} \times \bar{\mathfrak{a}} = i\varrho \{ + (U_1 w + U_2)\,\hat{\mathfrak{q}}_v + (V_1 w + V_2)\,\hat{\mathfrak{p}}_u \}.$$

Für den Ortsvektor $\mathfrak{x}$ eines Punktes der Zylinderebene erhalten wir schließlich

(III 14) $$\mathfrak{x} = \varrho \{ + i\,(U_1 w + U_2)\,\hat{\mathfrak{q}}_v + i\,(V_1 w + V_2)\,\hat{\mathfrak{p}}_u + \lambda\,(\hat{\mathfrak{p}}_u \times \hat{\mathfrak{q}}_v) \}.$$

Ein Punkt in der Ebene wird durch die laufenden Parameter w, λ festgelegt. Zu jedem Wert der Parameter u, v, gehört eine Ebene. Durch Elimination von u, v ergibt sich die Hüllfläche des Komplexes. Die Normale der Ebene (III 14) ist bestimmt durch den Vektor

(III 15) $$\mathfrak{n}\,(u, v) = U_1\,\hat{\mathfrak{q}}_v - V_1\,\hat{\mathfrak{p}}_u.$$

Aus dieser Formel folgt sofort eine Beziehung zu dem isometrischen Kurvennetz, das nach (II 28, 30) durch die Nullinien der II. und III. Differentialform auf der Einheitskugel bestimmt wird. Durch Ableitung von (II 22) erhält man

(III 15a) $$\mathfrak{a}_u = +\,i\,\varrho\,\hat{\mathfrak{q}}_v, \qquad \mathfrak{a}_v = +\,i\,\varrho\,\hat{\mathfrak{p}}_u.$$

Aus (II 28, 30) und (III 15) folgt sofort der

Satz 13: *Durch das Verschwinden der III. Differentialform (II 30) wird auf der Einheitskugel eine Schar von Kurven bestimmt, deren Tangenten parallel zur Normalen der Zylinderebenen des Komplexes sind. Die Tangenten der Nullinien der II. Form sind parallel zu den Zylinderebenen und senkrecht zu* $\mathfrak{a}$.

11. Zusammenfallende Minimalflächen. Der Sonderfall, in dem die Schar der isotropen Strahlensysteme ein und dieselbe Minimalfläche als Mittenhüllfläche besitzt, läßt sich leichter übersehen. Nach Satz 9 bilden die Nullinien der II. und III. Differentialform ein isometrisches Kurvennetz auf der Einheitskugel. Im Sonderfall (III 9) ist dieses Netz ein System von Meridianen und Parallelkreisen.

Aus (III 9), (III 1) und (II 17), (II 22) folgt

(III 16) $$U_1 = -\,\hat{\mathfrak{p}}_u \mathfrak{g}_3, \qquad V_1 = +\,\hat{\mathfrak{q}}_v \mathfrak{g}_3.$$

Dann wird die Linearform (II 28)

$$(\text{III } 17) \qquad (\hat{\mathfrak{q}}_v \mathfrak{g}_3)\, du + (\hat{\mathfrak{p}}_u \mathfrak{g}_3)\, dv = 0$$

und die Linearform (II 30)

$$(\text{III } 18) \qquad (\hat{\mathfrak{q}}_v \mathfrak{g}_3)\, du - (\hat{\mathfrak{p}}_u \mathfrak{g}_3)\, dv = 0.$$

Bezeichnen wir die Ableitung von $\mathfrak{a}$ in Richtung (III 17), d. h. in Richtung der II. Differentialform, mit $\dot{\mathfrak{a}}$, so folgt aus (III 15 a)

$$(\text{III } 19) \qquad \dot{\mathfrak{a}} = i\varrho\,[(\hat{\mathfrak{p}}_u \mathfrak{g}_3)\,\hat{\mathfrak{q}}_v - (\hat{\mathfrak{q}}_v \mathfrak{g}_3)\,\hat{\mathfrak{p}}_u].$$

Skalare Multiplikation mit $\mathfrak{g}_3$ führt zu

$$\dot{\mathfrak{a}}\,\mathfrak{g}_3 = 0.$$

Da $\mathfrak{a}$ Einheitsvektor ist, müssen die Nullinien der II. Form Kreise der Einheitskugel sein, deren Ebenen senkrecht zu $\mathfrak{g}_3$ sind. Daher gilt der

Satz 14: *Wenn die Mittenhüllflächen der Schar isotroper Strahlensysteme des Komplexes $\mathfrak{A}$ in ein und dieselbe Minimalfläche zusammenfallen, dann bestimmt die II. Differentialform auf der Einheitskugel des sphärischen Bildes eine Schar von Parallelkreisen und die III. Form die zugehörige Schar von Meridianen.*

Um einen Einblick in den Aufbau eines Komplexes dieser Klasse zu gewinnen, gehen wir von dem Punkt $\mathfrak{m}$ einer Minimalfläche aus. Zu $\mathfrak{m}$ gehören ∞^1 Geraden des Komplexes, die parallel zur Normalen der Minimalfläche in $\mathfrak{m}$ sind und in einer Ebene liegen. Diese schneidet die Tangentenebene in $\mathfrak{m}$ in einer Geraden der Richtung $\dot{\mathfrak{a}}$ (III 19). Ziehen wir die Parallele $\mathfrak{P}$ zu $\dot{\mathfrak{a}}$ durch $\mathfrak{m}$ und lassen $\mathfrak{m}$ die Punkte der Minimalfläche durchlaufen, so sind die von $\mathfrak{P}$ umhüllten Kurven der Minimalfläche (d. h. die Rückkehrkanten einer Torsenschar des von $\mathfrak{P}$ erzeugten Strahlensystems) ebene Kurven. Um das zu zeigen, differenzieren wir (III 10)

$$\mathfrak{m}_u = \frac{1}{2} U_4''''\,\hat{\mathfrak{p}}_u, \qquad \mathfrak{m}_v = \frac{1}{2} V_4''''\,\hat{\mathfrak{q}}_v.$$

Es gibt eine Fortschreitungsrichtung $\dot{u} : \dot{v}$ derart, daß $\dot{\mathfrak{m}} = \mathfrak{m}_u \dot{u} + \mathfrak{m}_v \dot{v}$ parallel zu $\dot{\mathfrak{a}}$ wird. Dann ist

$$2\,\dot{\mathfrak{m}} = U_4''''\,\hat{\mathfrak{p}}_u \dot{u} + V_4''''\,\hat{\mathfrak{q}}_v \dot{v} = (\hat{\mathfrak{p}}_u \mathfrak{g}_3)\,\hat{\mathfrak{q}}_v - (\hat{\mathfrak{q}}_v \mathfrak{g}_3)\,\hat{\mathfrak{p}}_u.$$

Durch Koeffizientenvergleich folgt

$$(\text{III } 20) \qquad \dot{u} = -\frac{1}{U_4''''}(\hat{\mathfrak{q}}_v \mathfrak{g}_3), \qquad \dot{v} = +\frac{1}{V_4''''}(\hat{\mathfrak{p}}_u \mathfrak{g}_3).$$

Damit wird

$$2\,\dot{\mathfrak{m}} = (\hat{\mathfrak{p}}_u \mathfrak{g}_3)\,\hat{\mathfrak{q}}_v - (\hat{\mathfrak{q}}_v \mathfrak{g}_3)\,\hat{\mathfrak{p}}_u$$

und

$$\dot{\mathfrak{m}}\,\mathfrak{g} = 0.$$

D. h. die Kurven sind eben und senkrecht zu $\mathfrak{g}_3$. Also gilt

Satz 15. *Fallen in einem Strahlenkomplex mit 3 integrablen Differentialformen die Mittenhüllflächen der isotropen Strahlensysteme in ein und dieselbe Minimalfläche* $\mathfrak{m}$ *zusammen, so gehören zu jedem Punkt von* $\mathfrak{m}$ ∞^1 *Komplexgeraden, die ein zylindrisches Strahlenbüschel bilden. Zieht man in jedem Punkt von* $\mathfrak{m}$ *die zur Ebene des Büschels parallele Tangente* $\mathfrak{P}$, *so umhüllen die Geraden* $\mathfrak{P}$ *auf* $\mathfrak{m}$ *eine Schar ebener Kurven, deren Ebenen einander parallel und zu dem willkürlichen Einheitsvektor* $\mathfrak{g}_3$ *senkrecht sind.*

Zum Schluß sei ein besonders einfacher Komplex der betrachteten Klasse angegeben: Es sei K eine Kettenlinie, die durch Rotation um die z-Achse das Katenoid K_r erzeugt. E sei eine beliebige Evolvente von K. Bei der Rotation beschreibt E die Drehfläche E_r. Längs eines Meridians von E_r bilden die Tangenten der Parallelkreise einen Zylinder. Die zu den Erzeugenden senkrechten Tangenten des Zylinders sind die Strahlen eines Komplexes mit drei integrablen Pfaffschen Differentialformen, dessen isotrope Strahlensysteme sämtlich das Katenoid K_r als gemeinsame Mittenhüllfläche besitzen.

(Eingegangen am 1. Oktober 1948.)

Über Zerfällungen in ungleiche Primzahlen.

Von

Hans-Egon Richert in Hamburg.

Herr R. SPRAGUE[1]) bewies mit einem sehr einfachen Verfahren die Möglichkeit der Zerfällung aller natürlichen Zahlen > 128 in ungleiche Quadratzahlen.

Nimmt man zu seiner Beweisidee den Satz von TSCHEBISCHEFF, daß zwischen den Grenzen $n > 3$ und $2n - 2$ stets mindestens eine Primzahl liegt, hinzu, so ergibt sich der folgende Zerfällungssatz:

Jede natürliche Zahl $n > 6$ ist als Summe ungleicher Primzahlen darstellbar.

Beweis. Aus den k ersten Primzahlen $p_1, p_2, \ldots, p_k$ sei bereits eine Serie von s_0 aufeinanderfolgenden Zahlen als Summe von lauter ungleichen der $p_1, p_2, \ldots, p_k$ derart hergestellt, daß

$$s_0 \geqq p_{k+1}$$

ist. Durch Addition von p_{k+1} zu den p_{k+1} letzten Zahlen der s_0-Serie wird diese auf eine s_1-Serie mit

$$s_1 = s_0 + p_{k+1}$$

verlängert, wo wieder alle s_1 aufeinanderfolgenden Zahlen als Summe ungleicher Primzahlen dargestellt sind.

So kann man unbeschränkt fortfahren, denn aus

$$s_{r-1} \geqq p_{k+r}$$

und

$$s_r = s_{r-1} + p_{k+r}$$

folgt stets wieder

$$s_r \geqq 2\,p_{k+r}$$

und da nach dem Satze von TSCHEBISCHEFF für $p_l > 3$

$$2\,p_l - 2 > p_{l+1} > p_l$$

ist, auch

$$s_r \geqq p_{k+r+1}.$$

---

[1]) R. SPRAGUE, Über Zerlegungen in ungleiche Quadratzahlen, Math. Zeitschr. **51**, 289–290 (1948). Vgl. hierzu die Note desselben Verfassers, Über Zerlegungen in n-te Potenzen mit lauter verschiedenen Grundzahlen, ebenda, 466–468 (1948).

Da gemäß der nachfolgenden Tabelle aus den Primzahlen

$$p_1 = 2,\ p_2 = 3,\ p_3 = 5,\ p_4 = 7,\ p_5 = 11$$

als Induktionsanfang eine s_n-Serie der gewünschten Art mit

$$s_0 \geqq p_6 = 13 \quad (> 3)$$

hergestellt ist, ist somit der Satz vollständig bewiesen.

$7 = 7$	$12 = 7 + 5$	$16 = 11 + 5$
$8 = 5 + 3$	$13 = 11 + 2$	$17 = 7 + 5 + 3 + 2$
$9 = 7 + 2$	$14 = 11 + 3$	$18 = 11 + 7$
$10 = 7 + 3$	$15 = 7 + 5 + 3$	$19 = 11 + 5 + 3$
$11 = 11$		

(Eingegangen am 18. Oktober 1948.)

Die E_p- und S_α-Summierbarkeit einer Potenzreihe an der Konvergenzgrenze.

Von

W. Meyer-König in Stuttgart.

1. Das Borelsche Summierungsverfahren oder B-Verfahren läßt sich einerseits als der Grenzfall $p \to \infty$ des Euler-Knoppschen oder E_p-Verfahrens $(p > 0)$ auffassen, andererseits als der Grenzfall $\alpha \to 0$ eines vom Verf. als S_α-Verfahren bezeichneten Verfahrens $(0 < \alpha < 1)$. In der vorliegenden Note soll eine Deutung des E_p- und S_α-Verfahrens gegeben werden, welche diese Tatsache und die enge Verwandtschaft aller drei Verfahren besonders augenfällig macht. Eine Modifikation des durch die genannte Deutung nahegelegten Grenzübergangs vom E_p- bzw. S_α-Verfahren zum B-Verfahren führt auf eine Untersuchung von J. Karamata [3][1]), in der das Verhalten der B-Mittel einer Potenzreihe an der Konvergenzgrenze mit dem Verhalten der durch die Reihe dargestellten Funktion in Zusammenhang gebracht wird. Den Karamatas chen B-Sätzen werden hier entsprechende E_p- und S_α-Sätze zur Seite gestellt, die für $p \to \infty$ bzw. $\alpha \to 0$ in die B-Sätze übergehen[2]).

Zunächst seien einige Bezeichnungen und bekannte Tatsachen zusammengestellt[3]). Die Reihe

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n, \tag{1.1}$$

um deren Summierung es sich handeln soll, besitze beliebige komplexe Glieder und die Teilsummen $s_n = \sum_{\nu=0}^{n} a_\nu$. Ihr werde das Funktionselement

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n = (1-z) \sum_{n=0}^{\infty} s_n z^n \tag{1.2}$$

der komplexen Veränderlichen z zugeordnet. Die Reihe (1.1) heißt E_p-summierbar (oder die Folge s_n ihrer Teilsummen E_p-limitierbar)

---

[1]) Vgl. das Schrifttum am Schluß der Note.

[2]) Ein Teil dieser Ergebnisse findet sich ohne Beweis in [6].

[3]) Zum E_p-Verfahren vgl. [4]; zum B-Verfahren vgl. [1], S. 455 und 481; zum S_α-Verfahren vgl. [5].

zum Wert s für ein $p>0$, wenn die für ganzes $n \geqq 0$ erklärten E_p-Mittel

$$E_p(n; s_\nu) = \frac{1}{2^{pn}} \sum_{\nu=0}^{n} \binom{n}{\nu} (2^p - 1)^{n-\nu} s_\nu$$

$$= a_0 + \frac{1}{2^p} \sum_{\mu=0}^{n-1} \frac{1}{2^{p\mu}} \sum_{\nu=0}^{\mu} \binom{\mu}{\nu} (2^p - 1)^{\mu-\nu} a_{\nu+1} = a_0 + \frac{1}{2^p} \sum_{\mu=0}^{n-1} E_p(\mu; a_{\nu+1})$$

von s_n gegen s streben für $n \to \infty$. Die Reihe (1. 1) heißt B-summierbar zum Wert s, wenn die B-Mittel

$$B(x; s_\nu) = e^{-x} \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{x^\nu}{\nu!} s_\nu$$

$$= a_0 + \int_{t=0}^{x} e^{-t} \left(\sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{t^\nu}{\nu!} a_{\nu+1} \right) dt = a_0 + \int_{t=0}^{x} B(t; a_{\nu+1})\, dt$$

vorhanden sind für $x>0$ und gegen s streben für $x \to \infty$; dabei hat die Existenz der $B(x; s_\nu)$ diejenige der $B(x; a_{\nu+1})$ zur Folge und umgekehrt. Die Reihe (1. 1) heißt S_α-summierbar zum Wert s für ein α mit $0<\alpha<1$, wenn die S_α-Mittel

$$S_\alpha(n; s_\nu) = (1-\alpha)^{n+1} \sum_{\nu=0}^{\infty} \binom{n+\nu}{\nu} \alpha^\nu s_\nu$$

$$= a_0 + \frac{\alpha}{1-\alpha} \sum_{\mu=0}^{n} (1-\alpha)^{\mu+1} \sum_{\nu=0}^{\infty} \binom{\mu+\nu}{\nu} \alpha^\nu a_{\nu+1} = a_0 + \frac{\alpha}{1-\alpha} \sum_{\mu=0}^{n} S_\alpha(\mu; a_{\nu+1})$$

vorhanden sind für ganzes $n \geqq 0$ und gegen s streben für $n \to \infty$; dabei hat die Existenz der $S_\alpha(n; s_\nu)$ diejenige der $S_\alpha(n; a_{\nu+1})$ zur Folge und umgekehrt. — Ist $a \neq 1$, so verstehen wir unter $\mathfrak{K}(a)$ das abgeschlossene Kreisgebiet

$$\mathfrak{K}(a): \ |z-a| \leqq |1-a|.$$

2. Wir wollen nun einen möglichst natürlichen Weg aufzeigen, der vom E_p-Verfahren für $p \to \infty$ zum B-Verfahren führt. Die bei der üblichen funktionentheoretischen Deutung des E_p-Verfahrens benützte Abbildung

$$w = \frac{2^p z}{(2^p - 1) z + 1}, \qquad z = \frac{w}{2^p - (2^p - 1) w}$$

der z-Ebene auf eine w-Ebene verliert für $p \to \infty$ ihren Sinn und ist daher für unseren Zweck nicht dienlich. Dagegen wird die im folgenden Satz enthaltene Deutung des E_p-Verfahrens brauchbar sein.

Satz E. *Es sei $p>0$ und es bezitze das Funktionselement* (1. 2) *einen positiven Konvergenzradius*[4]). *Dann stimmt die Folge der Teil-*

[4]) Da aus $E_p\text{-}\sum_{n=0}^{\infty} a_n = s$ stets $a_n = o((2^{p+1}-1)^n)$ für $n \to \infty$ folgt, schränkt diese Voraussetzung die Anwendbarkeit des Satzes auf E_p-summierbare Reihen nicht ein.

summen der in der Umgebung von $z = \infty$ gewiß vorhandenen Entwicklung der Funktion $f\left(\frac{1}{z}\right)$ nach Potenzen von $\frac{1}{z+(2^p-1)}$ für $z = 1$ überein mit der Folge $E_p(n; s_\nu)$, so daß also dann und nur dann $E_p\text{-}\sum_{n=0}^{\infty} a_n = s$ ist, wenn die genannte Entwicklung für $z = 1$ zum Wert s konvergiert.

Beweis. Wir setzen $2^p - 1 = q > 0$. Für genügend großes $|z|$ ist

$$f\left(\frac{1}{z}\right) = a_0 + \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{a_{\nu+1}}{(z+q)^{\nu+1}} \frac{1}{\left(1 - \frac{q}{z+q}\right)^{\nu+1}}$$

$$= a_0 + \frac{1}{z+q} \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{a_{\nu+1}}{(z+q)^{\nu}} \sum_{\lambda=0}^{\infty} \binom{\nu+\lambda}{\nu} \frac{q}{(z+q)^{\lambda}}.$$

Indem wir nach Potenzen von $\frac{1}{z+q}$ ordnen, was nach dem Weierstrassschen Doppelreihensatz erlaubt ist, erhalten wir

$$f\left(\frac{1}{z}\right) = a_0 + \frac{1}{z+q} \sum_{\nu=0}^{\infty} a_{\nu+1} \sum_{\mu=\nu}^{\infty} \binom{\mu}{\nu} \frac{q^{\mu-\nu}}{(z+q)^{\mu}}$$

$$= a_0 + \frac{1}{z+q} \sum_{\mu=0}^{\infty} \frac{1}{(z+q)^{\mu}} \sum_{\nu=0}^{\mu} \binom{\mu}{\nu} q^{\mu-\nu} a_{\nu+1},$$

woraus sich die Behauptung ergibt.

Unsere Absicht ist es nun, uns durch Satz E zu einem Verfahren führen zu lassen, welches als der Grenzfall $p \to \infty$ des E_p-Verfahrens aufgefaßt werden kann. Dazu nehmen wir der Einfachheit halber für den Augenblick an, daß (1. 2) den Konvergenzradius 1 besitzt. Dann ist die Funktion $f(1/z)$ im Äußeren des Einheitskreises regulär, so daß es sich bei der in Satz E auftretenden, an der Stelle $z = 1$ zu nehmenden Entwicklung um die Potenzreihenentwicklung von $f(1/z)$ im Äußeren von $\mathfrak{K}(-(2^p-1))$ handelt. Für $p \to \infty$ geht das Entwicklungsgebiet in die Halbebene $\Re z > 1$ über. Es liegt nahe, an die Stelle der dort nicht mehr möglichen Potenzreihenentwicklung die Darstellung von $f(1/z)$ als Laplace-Integral zu setzen. Die Funktion $f(1/z) - a_0$ ist bei $z = \infty$ regulär und verschwindend, ferner für $\Re z > 1$ regulär, also (vgl. z. B [2], S. 65, Satz 3) ist für $\Re z > 1$

$$f\left(\frac{1}{z}\right) - a_0 = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_{n+1}}{z^{n+1}} = \int_0^{\infty} e^{-zt} F(t)\, dt \quad \text{mit} \quad F(t) = \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{t^{\nu}}{\nu!} a_{\nu+1}.$$

Im Anschluß an Satz E betrachten wir daher dasjenige Verfahren, bei dem die Reihe (1. 1) zum Wert s summierbar heißt, wenn die bei $z = 1$ genommene rechte Seite der Laplaceschen Darstellung

$$f\left(\frac{1}{z}\right) = a_0 + \int_0^{\infty} e^{-zt} \left(\sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{t^{\nu}}{\nu!} a_{\nu+1} \right) dt$$

existiert und den Wert s hat. Das so nahegelegte Summierungsverfahren ist aber gerade das B-Verfahren, wenn wir die unnötig starke Voraussetzung, daß (1. 2) den Konvergenzradius 1 besitzt, nachträglich wieder fallen lassen und nur verlangen, was unbedingt erforderlich ist, nämlich daß die Reihe für $F(t)$ konvergiert für $t > 0$. Damit ist das B-Verfahren in natürlicher Weise aus dem E_p-Verfahren heraus entwickelt. — Dem Satz E entspricht beim S_α-Verfahren der folgende

Satz S. *Es sei* $0 < \alpha < 1$ *und es seien die* S_α*-Mittel der Folge* s_n *vorhanden, so daß das Funktionselement* (1. 2) *mindestens den Konvergenzradius* α *besitzt; ferner sei, falls* α *der genaue Konvergenzradius von* (1. 2) *ist,* $f(z)$ *für* $z = \alpha$ *regulär. Dann stimmt die Folge der Teilsummen der in der Umgebung von* $z = 1/\alpha$ *gewiß vorhandenen Entwicklung der Funktion* $f(1/z)$ *nach Potenzen von* $z - 1/\alpha$ *für* $z = 1$ *überein mit der Folge* $S_\alpha(n; s_\nu)$, *so daß also dann und nur dann* $S_\alpha\text{-}\sum_{n=0}^{\infty} a_n = s$ *ist, wenn die genannte Entwicklung für* $z = 1$ *zum Wert* s *konvergiert.*

Beweis. Daß (1. 2) mindestens den Konvergenzradius α hat, folgt aus der Konvergenz der Reihen für $S_\alpha(n; s_\nu)$ unmittelbar. Setzen wir

$$g(z) = f\left(\frac{1}{z}\right) = a_0 + \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{a_{\nu+1}}{z^{\nu+1}} \quad \text{für} \quad |z| > \frac{1}{\alpha}, \tag{2. 1}$$

so gilt wegen der Regularität von $g(z)$ für $z = 1/\alpha$ in der Umgebung dieser Stelle

$$f\left(\frac{1}{z}\right) = g\left(\frac{1}{\alpha}\right) + \sum_{\mu=1}^{\infty} \frac{1}{\mu!}\, g^{(\mu)}\left(\frac{1}{\alpha}\right)\left(z - \frac{1}{\alpha}\right)^{\mu}. \tag{2. 2}$$

Nun ist nach (2. 1) für ganzes $\mu \geqq 1$

$$\frac{1}{\mu!}\, g^{(\mu)}(z) = (-1)^{\mu} \sum_{\nu=0}^{\infty} \binom{\mu+\nu}{\nu} \frac{a_{\nu+1}}{z^{\nu+\mu+1}} \quad \text{für} \quad |z| > \frac{1}{\alpha}. \tag{2. 3}$$

Entweder liegt $z = 1/\alpha$ im Innern des Konvergenzgebietes dieser Reihen; dann dürfen wir in (2. 3) ohne weiteres $1/\alpha$ für z einsetzen. Oder liegt jene Stelle am Rande des Konvergenzgebietes; auch dann dürfen wir nach dem Abelschen Stetigkeitssatz $1/\alpha$ für z einsetzen, weil die dadurch entstehende Reihe konvergiert. Es ist also

$$\frac{1}{\mu!}\, g^{(\mu)}\left(\frac{1}{\alpha}\right) = (-1)^{\mu}\, \alpha^{\mu+1} \sum_{\nu=0}^{\infty} \binom{\mu+\nu}{\nu} \alpha^{\nu}\, a_{\nu+1} \quad \text{für} \quad \mu \geqq 1.$$

Aus (2. 1) ergibt sich durch dieselbe Überlegung

$$g\left(\frac{1}{\alpha}\right) = a_0 + \alpha \sum_{\nu=0}^{\infty} \alpha^{\nu}\, a_{\nu+1},$$

und damit aus (2.2) in der Umgebung von $z = 1/\alpha$ die Entwicklung

$$f\left(\frac{1}{z}\right) = a_0 + \alpha \sum_{\mu=0}^{\infty} (-1)^\mu \alpha^\mu \left(z - \frac{1}{\alpha}\right)^\mu \sum_{\nu=0}^{\infty} \binom{\mu+\nu}{\nu} \alpha^\nu a_{\nu+1},$$

woraus die Behauptung folgt.

Genau so wie sich oben das B-Verfahren aus dem E_p-Verfahren für $p \to \infty$ ergab, läßt es sich vermöge des Satzes S aus dem S_α-Verfahren für $\alpha \to 0$ gewinnen. Insgesamt zeigt unsere Betrachtung, wie das B-Verfahren in der Mitte zwischen dem E_p- und dem S_α-Verfahren steht, und wie alle drei Verfahren einer gemeinsamen Quelle, nämlich geeigneter Darstellung der Funktion $f(1/z)$, entspringen.

Wir vollziehen nun den Grenzübergang $p \to \infty$ bzw. $\alpha \to 0$ noch auf eine zweite Weise. Der Konvergenzradius von (1.2) sei 1. Die bei E_p bzw. S_α eine Rolle spielenden, für $z = 1$ zu nehmenden Potenzreihenentwicklungen konvergieren dann im Äußeren von $\mathfrak{K}(-(2^p - 1))$ bzw. im Inneren von $\mathfrak{K}(1/\alpha)$. Betrachten wir sie auf dem Rand dieser Gebiete, so lassen sie sich dort als Fouriersche Reihe auffassen, an deren Stelle wir im Grenzfall das Fouriersche Integral setzen können. Es ist danach zu vermuten, daß die B-Summierbarkeit der Reihe (1.1) zusammenhängt mit dem Verhalten des bei $z = 1$ zu nehmenden Fourier-Integrals der Funktion $f(1/z)$ auf der Geraden $\mathfrak{R}z = 1$. In der Tat besteht hier ein Zusammenhang. J. Karamata [3] hat als ersten Satz einer Gruppe von drei Sätzen über das B-Verfahren den folgenden bewiesen.

Satz B. *Das Funktionselement* (1.2) *besitze den Konvergenzradius* 1 *und sei in* $\mathfrak{K}(\frac{1}{2})$ *beschränkt. Dann ist*

$$B(x; s_\nu) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin xt}{t} f\left(\frac{1}{1+it}\right) dt \quad \text{für} \quad x > 0,$$

so daß also dann und nur dann $B\text{-}\sum_{n=0}^{\infty} a_n = s$ *ist, wenn das einfache* Fourier-*Integral der Funktion* $f(1/z)$ *auf der Geraden* $\mathfrak{R}z = 1$, *genommen an der Stelle* $z = 1$, *zum Wert* s *konvergiert.*

Die Sätze E und S können als Analoga zu diesem Satz B gelten, wodurch derselbe in den Gesamtzusammenhang der Verfahren E_p, B und S_α hereingestellt ist. Es ergibt sich nun die Aufgabe, auch die E_p- und S_α-Analoga zu den beiden anderen Karamatascheen Sätzen aufzuzeigen.

3. Besitzt das Funktionselement (1.2) den Konvergenzradius 1 und bedeutet k eine positive reelle Zahl, ist ferner wie stets $p > 0$ und $0 < \alpha < 1$, so gelten die folgenden Sätze.

Satz E'. *Strebt* $(1-z)^k f(z) \to A$ *für* $z \to 1$ *in* $\mathfrak{K}\left(\frac{2^p - 1}{2^{p+1} - 1}\right)$, *so ist*

$$E_p(n; s_\nu) \cong \frac{A n^k}{2^{pk}\, \Gamma(k+1)} \quad \text{für} \quad n \to \infty.$$

Satz B'. *Strebt* $(1-z)^k f(z) \to A$ *für* $z \to 1$ *in* $\mathfrak{K}\left(\frac{1}{2}\right)$, *so ist*

$$B(x; s_\nu) \simeq \frac{A x^k}{\Gamma(k+1)} \quad \text{für } x \to \infty.$$

Satz S'. *Strebt* $(1-z)^k f(z) \to A$ *für* $z \to 1$ *in* $\mathfrak{K}\left(\frac{1}{2-\alpha}\right)$, *so ist*

$$S_\alpha(n; s_\nu) \simeq \left(\frac{\alpha}{1-\alpha}\right)^k \frac{A n^k}{\Gamma(k+1)} \quad \text{für } n \to \infty.$$

Satz B' ist der zweite der von J. Karamata bewiesenen Sätze. Die Analogie der drei Sätze zueinander ist offensichtlich. Die Gebiete $\mathfrak{K}\left(\frac{2^p-1}{2^{p+1}-1}\right)$ bzw. $\mathfrak{K}\left(\frac{1}{2-\alpha}\right)$ gehen für $p \to \infty$ bzw. $\alpha \to 0$ in $\mathfrak{K}\left(\frac{1}{2}\right)$ über, so daß das B-Verfahren wieder in der Mitte zwischen dem E_p- und dem S_α-Verfahren steht. Die von J. Karamata zum Beweis des Satzes B' benützte Methode läßt sich auch zum Beweis der Sätze E' und S' anwenden. An die Stelle des Laplace-Poissonschen Integrals treten dabei die folgenden Formeln. Es seien a und b komplex, m und n ganz, und es sei $n \geqq 0$; dann ist für $0 < |a| < |b|$

$$(3.1)\quad \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{e^{i m \Phi}}{(a + b e^{i\Phi})^{n+1}}\, d\Phi = \begin{cases} \dfrac{(-a)^{m-n-1}}{b^m} \binom{m-1}{n} & \text{für } m > 0, \\ 0 & \text{für } m \leqq 0, \end{cases}$$

und für $0 < |b| < |a|$

$$(3.2)\quad \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{e^{i m \Phi}}{(a + b e^{i\Phi})^{n+1}}\, d\Phi = \begin{cases} 0 & \text{für } m > 0, \\ \dfrac{(-1)^{n+1}(-a)^{m-n-1}}{b^m} \binom{-m+n}{n} & \text{für } m \leqq 0. \end{cases}$$

Die Herleitung dieser Formeln mit Hilfe des Residuensatzes nach Ausführung der Substitution $z = e^{i\Phi}$ sei übergangen.

Beweis des Satzes E'. Wir setzen $r = 2^p > 1$, $q = r - 1 > 0$, und, hier und bei den folgenden Schritten an J. Karamata anschließend,

$$(3.3)\qquad \varphi(t) = e^t (1 - e^{-t})^{k+1} = \sum_{\nu=0}^{\infty} (-1)^\nu \binom{k+1}{\nu} e^{-(\nu-1)t}.$$

Ist $\varepsilon > 0$, so liegt der Kreis

$$(3.4)\qquad z = \frac{1}{-q + (r+\varepsilon) e^{i\Phi}}, \quad -\pi \leqq \Phi \leqq \pi$$

im Innern des Einheitskreises; für $\varepsilon \to 0$ geht er von innen in den Rand des Gebietes $\mathfrak{K}\left(\frac{2^p-1}{2^{p+1}-1}\right)$ über. Nun setzen wir z aus (3.4) in

$$(3.5)\qquad \sum_{n=0}^{\infty} s_n z^{n+1} = \frac{z}{1-z} f(z)$$

ein; die linke Seite konvergiert dann gleichmäßig in Φ. Durch Multiplikation der entstehenden Gleichung mit $(2\pi)^{-1} \varphi(i m \Phi)$, wobei

m positiv ganz ist, und Integration bekommen wir

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{s_n}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{\varphi(i\,m\,\Phi)}{(-q+(r+\varepsilon)e^{i\Phi})^{n+1}}\, d\Phi \tag{3.6}$$
$$= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{\varphi(i\,m\,\Phi)}{(r+\varepsilon)e^{i\Phi}-r} f\left(\frac{1}{-q+(r+\varepsilon)e^{i\Phi}}\right) d\Phi.$$

Auf der linken Seite erhalten wir, wenn wir $\varphi(i\,m\,\Phi)$ gemäß (3.3) als unendliche Reihe mit der konvergenten Majorante $\sum_{\nu=0}^{\infty} \left|\binom{k+1}{\nu}\right|$ darstellen und (3.1) anwenden,

$$\sum_{n=0}^{\infty} s_n \sum_{\nu=0}^{\infty} (-1)^{\nu} \binom{k+1}{\nu} \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{e^{-i(\nu-1)\,m\,\Phi}}{(-q+(r+\varepsilon)e^{i\Phi})^{n+1}}\, d\Phi$$
$$= \frac{1}{(r+\varepsilon)^m} \sum_{n=0}^{m-1} \binom{m-1}{n} q^{m-1-n} s_n.$$

Für $\varepsilon \to 0$ geht dieser Ausdruck in $r^{-1} E_p(m-1; s_\nu)$ über. Sodann vollziehen wir den Grenzübergang $\varepsilon \to 0$ auch auf der rechten Seite von (3.6). Dazu schreiben wir den Integranden in der Form

$$F(\Phi, \varepsilon) = e^{im\Phi}(-q+(r+\varepsilon)e^{i\Phi})^k \left(\frac{1-e^{-im\Phi}}{(r+\varepsilon)e^{i\Phi}-r}\right)^{k+1} (1-z)^k f(z),$$

wobei z aus (3.4) zu entnehmen ist. Für $0<|\Phi|<\frac{\pi}{2}$, $0<\varepsilon$ ist

$$\left|\frac{1-e^{-im\Phi}}{(r+\varepsilon)e^{i\Phi}-r}\right| \leqq \frac{m|\Phi|\,e^{m|\Phi|}}{(r+\varepsilon)|\sin\Phi|} < K,$$

wo K von Φ und ε unabhängig ist; zusammen mit der Hauptvoraussetzung erkennt man leicht, daß $F(\Phi, \varepsilon)$ beschränkt ist für $|\Phi| \leqq \pi$, $0<\varepsilon<1$. Weiter ist

$$\lim_{\varepsilon \to 0} F(\Phi, \varepsilon) = \begin{cases} 0 \text{ für } \Phi = 0, \\ G(\Phi) \text{ für } |\Phi| \leqq \pi,\ \Phi \neq 0, \end{cases}$$

wobei die Funktion $G(\Phi) =$

$$e^{im\Phi}(-q+re^{i\Phi})^k \left(\frac{1-e^{-im\Phi}}{re^{i\Phi}-r}\right)^{k+1} \left(1-\frac{1}{-q+re^{i\Phi}}\right)^k f\left(\frac{1}{-q+re^{i\Phi}}\right)$$

mit dem Wert $(m/r)^{k+1} A$ bei $\Phi = 0$ stetig ist für $|\Phi| \leqq \pi$. Die rechte Seite von (3.6) strebt daher für $\varepsilon \to 0$ gegen $(2\pi)^{-1} \int_{-\pi}^{\pi} G(\Phi)\, d\Phi$. Insgesamt bekommen wir aus (3.6) also

$$\frac{1}{m^k} E_p(m-1; s_\nu) = \frac{m}{2\pi r^k} \int_{-\pi}^{\pi} e^{im\Phi} \left(\frac{1-e^{-im\Phi}}{im\Phi}\right)^{k+1} g(\Phi)\, d\Phi,$$

$$g(\Phi) = \left(\frac{i\Phi}{e^{i\Phi}-1}\right)^{k+1} (-q+re^{i\Phi})^k \left(1-\frac{1}{-q+re^{i\Phi}}\right)^k f\left(\frac{1}{-q+re^{i\Phi}}\right).$$

Wir nehmen nun die Zerlegung $\int_{-\pi}^{\pi} = \int_{-\pi}^{0} + \int_{0}^{\pi}$ vor. Wegen $g(\Phi) \to A$ für $\Phi \to \pm 0$ und wegen

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{it} \left(\frac{1 - e^{-it}}{it} \right)^{k+1} dt = \frac{1}{\Gamma(k+1)} \tag{3.7}$$

(vgl. [3], S. 159) erhalten wir, indem wir auf jedes der beiden Teilintegrale einen geläufigen Permanenzsatz anwenden, dessen Voraussetzungen leicht als erfüllt zu erkennen sind,

$$\lim_{m \to \infty} \frac{1}{m^k} E_p(m-1; s_\nu) = A \lim_{m \to \infty} \frac{m}{2\pi r^k} \int_{-\pi}^{\pi} e^{im\Phi} \left(\frac{1 - e^{-im\Phi}}{im\Phi} \right)^{k+1} d\Phi = \frac{A}{r^k \Gamma(k+1)}$$

Damit ist Satz E' bewiesen.

Beweis des Satzes S'. Die jetzt anzustellenden Überlegungen verlaufen ganz analog zu denen des letzten Beweises, so daß wir uns kurz fassen können. Wir setzen $\beta = 1/\alpha > 1$ und $\gamma = \beta - 1 > 0$. Der Kreis

$$z = \frac{1}{\beta - (\gamma - \varepsilon) e^{i\Phi}}, \quad -\pi \leqq \Phi \leqq \pi \tag{3.8}$$

liegt für $0 < \varepsilon < \gamma$ im Inneren des Einheitskreises und geht für $\varepsilon \to 0$ von innen in den Rand des Gebietes $\mathfrak{K}\left(\frac{1}{2-\alpha}\right)$ über. Wir setzen z aus (3.8) in (3.5) ein, multiplizieren die entstehende Gleichung für ein ganzes positives m mit $(2\pi)^{-1} \varphi(-im\Phi)$ und erhalten durch Integration

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{s_n}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{\varphi(-im\Phi)}{(\beta - (\gamma - \varepsilon) e^{i\Phi})^{n+1}} d\Phi = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{\varphi(-im\Phi)}{\gamma - (\gamma - \varepsilon) e^{i\Phi}} f\left(\frac{1}{\beta - (\gamma - \varepsilon) e^{i\Phi}} \right) d\Phi.$$

Vermöge (3.3) und (3.2) ergibt sich auf der linken Seite

$$\left(\frac{\gamma - \varepsilon}{\beta} \right)^m \sum_{n=0}^{\infty} \binom{m+n}{n} \frac{s_n}{\beta^{n+1}} - (k+1) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{s_n}{\beta^{n+1}}.$$

Der Grenzübergang $\varepsilon \to 0$ liefert insgesamt

$$\frac{1}{m^k} (S_\alpha(m; s_\nu) - (k+1) S_\alpha(0; s_\nu)) = \frac{m}{2\pi \gamma^k} \int_{-\pi}^{\pi} e^{-im\Phi} \left(\frac{e^{im\Phi} - 1}{im\Phi} \right)^{k+1} h(\Phi) d\Phi,$$

$$h(\Phi) = \left(\frac{i\Phi}{e^{i\Phi} - 1} \right)^{k+1} (\beta - \gamma e^{i\Phi})^k \left(1 - \frac{1}{\beta - \gamma e^{i\Phi}} \right)^k f\left(\frac{1}{\beta - \gamma e^{i\Phi}} \right) \to A \text{ für } \Phi \to \pm 0.$$

9254-52 23 B

Daraus folgt

$$\lim_{m\to\infty}\frac{1}{m^k}S_x(m;s_\nu)=A\lim_{m\to\infty}\frac{m}{2\pi\gamma^k}\int_{-\pi}^{\pi}e^{-im\Phi}\left(\frac{e^{im\Phi}-1}{im\Phi}\right)^{k+1}d\Phi=\frac{A}{\gamma^k\Gamma(k+1)}.$$

4. Wir kommen nun noch zum dritten der von J. KARAMATA bewiesenen Sätze über das B-Verfahren und zu den entsprechenden Sätzen für E_p und S_x. Das Funktionselement (1. 2) besitze wieder den Konvergenzradius 1, dagegen sei jetzt k eine positive ganze Zahl[5]). Bedeutet

$$C_k(n;s_\nu)=\sigma_k(n;s_\nu)/\binom{n+k}{n}\text{ mit }\sigma_k(n;s_\nu)=\sum_{\nu=0}^{n}\binom{n-\nu+k-1}{n-\nu}s_\nu$$

$(n=0,1,\ldots)$ die Folge der CESÀROschen Mittel k-ter Ordnung der Folge s_n, so gilt:

Satz E''. *Strebt $f(z)\to A$ für $z\to 1$ in $\mathfrak{K}\left(\frac{2p-1}{2^{p+1}-1}\right)$, so ist die Folge $C_k(n;s_\nu)$ durch das E_p-Verfahren limitierbar zum Wert A.*

Satz B''. *Strebt $f(z)\to A$ für $z\to 1$ in $\mathfrak{K}(\frac{1}{2})$, so ist die Folge $C_k(n;s_\nu)$ durch das B-Verfahren limitierbar zum Wert A.*

Satz S''. *Strebt $f(z)\to A$ für $z\to 1$ in $\mathfrak{K}\left(\frac{1}{2-\alpha}\right)$, so ist die Folge $C_k(n;s_\nu)$ durch das S_x-Verfahren limitierbar zum Wert A.*

Beweis des Satzes E''. An den KARAMATAschen Beweis des Satzes B'' anschließend setzen wir z aus (3. 4) in

$$\sum_{n=0}^{\infty}\sigma_k(n;s_\nu)\,z^{n+k+1}=\frac{z^{k+1}}{(1-z)^{k+1}}f(z) \tag{4.1}$$

ein, multiplizieren die entstehende Gleichung für ein ganzes $m>k$ mit $(2\pi)^{-1}\varphi(im\Phi)$ und erhalten durch Integration

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\sigma_k(n;s_\nu)}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{\varphi(im\Phi)}{(-q+(r+\varepsilon)e^{i\Phi})^{n+k+1}}d\Phi$$
$$=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{\varphi(im\Phi)}{((r+\varepsilon)e^{i\Phi}-r)^{k+1}}f\left(\frac{1}{-q+(r+\varepsilon)e^{i\Phi}}\right)d\Phi. \tag{4.2}$$

Auf der linken Seite ergibt sich vermöge (3. 3) und (3. 1)

$$\sum_{n=0}^{m-1-k}\sigma_k(n;s_\nu)\frac{q^{m-n-k-1}}{(r+\varepsilon)^m}\binom{m-1}{n+k}$$
$$=\frac{1}{(r+\varepsilon)^m}\binom{m-1}{m-k-1}\sum_{n=0}^{m-k-1}C_k(n;s_\nu)\,q^{m-k-1-n}\binom{m-k-1}{n}.$$

Dieser Ausdruck geht für $\varepsilon\to 0$ in

$$\frac{\Gamma(m)}{r^{k+1}\Gamma(m-k)\Gamma(k+1)}E_p(m-k-1;\,C_k(n;s_\nu))$$

---

[5]) Der folgende Satz B'' wurde von J. KARAMATA für positives reelles k bewiesen. Wir beschränken uns hier auf positives ganzes k.

über. Der Integrand

$$\overline{F}(\Phi, \varepsilon) = e^{im\Phi}\left(\frac{1-e^{-im\Phi}}{(r+\varepsilon)e^{i\Phi}-r}\right)^{k+1} f\left(\frac{1}{-q+(r+\varepsilon)e^{i\Phi}}\right)$$

auf der rechten Seite von (4. 2) ist beschränkt für $|\Phi| \leqq \pi$, $0 < \varepsilon < 1$, und es ist

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \overline{F}(\Phi, \varepsilon) = \begin{cases} 0 \text{ für } \Phi = 0, \\ \overline{G}(\Phi) \text{ für } |\Phi| \leqq \pi, \ \Phi \neq 0, \end{cases}$$

wobei die Funktion

$$\overline{G}(\Phi) = e^{im\Phi}\left(\frac{1-e^{-im\Phi}}{r(e^{i\Phi}-1)}\right)^{k+1} f\left(\frac{1}{-q+re^{i\Phi}}\right)$$

mit dem Wert $(m/r)^{k+1} A$ bei $\Phi = 0$ stetig ist für $|\Phi| \leqq \pi$. Da die rechte Seite von (4. 2) somit für $\varepsilon \to 0$ gegen $(2\pi)^{-1} \int_{-\pi}^{\pi} \overline{G}(\Phi)\, d\Phi$ strebt, erhalten wir aus (4. 2)

$$E_p(m-k-1;\ C_k(n;\ s_\nu))$$
$$= \frac{m^k \Gamma(m-k)\Gamma(k+1)}{\Gamma(m)} \frac{m}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{im\Phi}\left(\frac{1-e^{-im\Phi}}{im\Phi}\right)^{k+1} \bar{g}(\Phi)\, d\Phi,$$

$$\bar{g}(\Phi) = \left(\frac{i\Phi}{e^{i\Phi}-1}\right)^{k+1} f\left(\frac{1}{-q+re^{i\Phi}}\right) \to A \qquad \text{für } \Phi \to \pm 0,$$

und daraus auf Grund des Permanenzsatzes bei Integralmittelbildung und wegen (3. 7)

$$\lim_{m \to \infty} E_p(m-k-1;\ C_k(n;\ s_\nu))$$
$$= A\Gamma(k+1) \lim_{m \to \infty} \frac{m}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{im\Phi}\left(\frac{1-e^{-im\Phi}}{im\Phi}\right)^{k+1} d\Phi = A.$$

Beweis des Satzes S''. Wir gehen analog zum vorigen Beweis vor. Wir setzen z aus (3. 8) in (4. 1) ein, multiplizieren die entstehende Gleichung für ein ganzes positives m mit $(2\pi)^{-1} \varphi(-im\Phi)$ und erhalten durch Integration

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\sigma_k(n;\ s_\nu)}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{\varphi(-im\Phi)}{(\beta-(\gamma-\varepsilon)e^{i\Phi})^{n+k+1}}\, d\Phi$$
$$= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{\varphi(-im\Phi)}{(\gamma-(\gamma-\varepsilon)e^{i\Phi})^{k+1}} f\left(\frac{1}{\beta-(\gamma-\varepsilon)e^{i\Phi}}\right) d\Phi.$$

Der Grenzübergang $\varepsilon \to 0$ liefert

$$S_\alpha(m+k;\ C_k(n;\ s_\nu)) - \frac{\Gamma(k+2)\,\Gamma(m+1)}{\Gamma(m+k+1)}\, S_\alpha(k;\ C_k(n;\ s_\nu))$$

$$= \frac{m^k\,\Gamma(m+1)\,\Gamma(k+1)}{\Gamma(m+k+1)}\,\frac{m}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} e^{-im\Phi}\left(\frac{e^{im\Phi}-1}{im\Phi}\right)^{k+1}\bar{h}(\Phi)\,d\Phi,$$

$$\bar{h}(\Phi) = \left(\frac{i\Phi}{e^{i\Phi}-1}\right)^{k+1} f\left(\frac{1}{\beta-\gamma e^{i\Phi}}\right) \to A \quad \text{für} \quad \Phi \to \pm 0,$$

woraus die Behauptung folgt.

Schrifttum.

L. Bieberbach.

[1] Neuere Untersuchungen über Funktionen von komplexen Variablen. Encyklopädie der mathematischen Wissenschaften, Band **II, 3, 1** (1909—1921), S. 379 bis 532.

G. Doetsch.

[2] Theorie und Anwendung der Laplace-Transformation, Berlin (1937).

J. Karamata.

[3] Über die B-Limitierbarkeit einer Potenzreihe am Rande, Math. Zeitschr **44** (1939), S. 156—160.

K. Knopp.

[4] Über das Eulersche Summierungsverfahren, Math. Zeitschr. **15** (1922), S. 226 bis 253; Über das Eulersche Summierungsverfahren (II. Mitteilung), Math. Zeitschr. **18** (1923), S. 125—156.

W. Meyer-König.

[5] Untersuchungen über einige verwandte Limitierungsverfahren, Math. Zeitschr. **52**, Heft 3 (1949), S. 257—304.

[6] Die E_p-Summierbarkeit einer Potenzreihe an der Konvergenzgrenze, Archiv der Mathematik **1**, Heft 3 (1948/49), S. 227—229.

(Eingegangen am 13. November 1948.)

Uneigentliche Integrale mit parabolischen Funktionen über einen der beiden Parameter.

Von

Herbert Buchholz in Darmstadt.

1. Einleitung.

Wir nehmen für die nachstehenden Untersuchungen als Ausgangspunkt die beiden recht allgemeinen Reihenentwicklungen (1) und (2). Die einzelnen Glieder der Reihe (1) enthalten u. a. das Produkt von

$$1 \qquad \sum_{\lambda=0}^{\infty} \frac{\Gamma(\lambda+\alpha+1)}{\lambda!}\, h^{\lambda} \cdot \mathrm{M}_{\varkappa_1+\lambda,\ \frac{\mu_1}{2}}(t) \cdot \mathrm{M}_{\varkappa_2+\lambda,\ \frac{\mu_2}{2}}(\tau)$$

$$= \frac{\Gamma(1+\mu_1)\,\Gamma(1+\mu_2)\,\Gamma(1+\alpha-\mu_1)\,\Gamma(1+\alpha-\mu_2)}{(2\pi i)^2}$$

$$\int_0^{(t+)} \int_0^{(\tau+)} \mathrm{e}^{-\frac{1}{2}\cdot\frac{1+h}{1-h}(u+v)} (u\cdot v)^{\alpha/2} \cdot t^{\frac{1-\mu_1}{2}} \cdot \tau^{\frac{1-\mu_2}{2}} \cdot \frac{h^{-\alpha/2}}{1-h} \cdot (u-t)^{\frac{\mu_1-\alpha}{2}-1}$$

$$\cdot (v-\tau)^{\frac{\mu_2-\alpha}{2}-1} \cdot \mathrm{I}_{\alpha}\left(2\sqrt{u\,v}\cdot\frac{h^{1/2}}{h-1}\right)$$

$$\mathrm{M}_{\frac{\alpha+1}{2}-\varkappa_1,\ \frac{\mu_1-\alpha-1}{2}}(u-t) \cdot \mathrm{M}_{\frac{\alpha+1}{2}-\varkappa_2,\ \frac{\mu_2-\alpha-1}{2}}(v-\tau) \cdot \mathrm{d}\,u \cdot \mathrm{d}\,v$$

$$(\Re(\alpha) > -1, \quad |h| < 1, \quad \mathrm{arc}_a(u-t,\ v-\tau) = -\pi)$$

zwei konfluenten hypergeometrischen oder parabolischen Funktionen der ersten Art, die durch das Funktionszeichen $M_{\varkappa,\,\mu/2}(z)$ bezeichnet werden. Sie haben in der Reihe (1) sowohl verschiedene Argumente als auch verschiedene erste und zweite Parameter. Außerdem nimmt in dieser Reihe in beiden Funktionen der vordere Parameter von Glied zu Glied um die Einheit zu. Die Reihe (1) konvergiert absolut und gleichmäßig für jedes $|h| < 1$ bei sonst beliebigen Werten der $\varkappa$, μ, t und τ. Auf die Möglichkeit des Nachweises dieser Behauptung werden wir sowieso im Text zu sprechen kommen. Der Summenwert der Reihe (1) wurde zuerst von A. Erdelyi in [1] angegeben mit dem einzigen Unterschied gegenüber (1), daß er auf der rechten Seite statt der Schleifenintegrale gewöhnliche Linienintegrale verwendet. Wir ziehen aus gleich erkennbar werdenden Gründen die hier gewählte Schreibweise vor.

In der ersten Form der Reihe (2) werden die einzelnen Reihenglieder im wesentlichen von dem Produkt zweier konfluenten hyper-

$$(2)\qquad \sum_{\lambda=0}^{\infty} \frac{\Gamma(\alpha+1+\lambda)}{\lambda!}\cdot(-h)^{\lambda}\cdot \mathrm{W}_{-\lambda-\frac{\mu+1}{2},\,\frac{\mu}{2}}(s)\cdot \mathrm{W}_{+\lambda+\frac{\mu+1}{2},\,\frac{\mu}{2}}(t)$$

$$= \sum_{\lambda=0}^{\infty} \frac{\Gamma(\alpha+1+\lambda)\,\Gamma(\mu+1+\lambda)}{\Gamma(\mu+1)\cdot\lambda!}\cdot h^{\lambda}\cdot \mathrm{W}_{-\lambda-\frac{\mu+1}{2},\,\frac{\mu}{2}}(s)\cdot \mathrm{M}_{\lambda+\frac{\mu+1}{2},\,\frac{\mu}{2}}(t)$$

$$= \mathrm{e}^{-t/2}\cdot t^{\frac{1+\mu}{2}}\cdot \sum_{\lambda=0}^{\infty} \Gamma(\alpha+1+\lambda)\cdot h^{\lambda}\cdot \mathrm{W}_{-\lambda-\frac{\mu+1}{2},\,\frac{\mu}{2}}(s)\cdot \mathrm{L}_{\lambda}^{(\mu)}(t)$$

$$= (s\cdot t)^{\frac{\mu+1}{2}}\cdot \mathrm{e}^{-(s+t)/2}\cdot \frac{\Gamma(\alpha+1)}{\Gamma(\mu+1)}\cdot \int_0^{\infty} \mathrm{e}^{-w\cdot s}\cdot \frac{w^{\mu}(1+w)^{\alpha}}{[w(1-h)+1]^{1+\alpha}}$$

$$\cdot {}_1\mathrm{F}_1\left(\alpha+1,\,\mu+1;\,-\frac{h\,t\cdot w}{1+w(1-h)}\right)\cdot \mathrm{d}\,w$$

$$(|h|<1,\ \Re(\mu)>-1,\ \alpha\neq -1,-2\ldots)$$

geometrischen Funktionen der zweiten Art gebildet, für die das Symbol $\mathrm{W}_{\varkappa,\,\mu/2}(z)$ üblich geworden ist. Da aber z. B. nach der unter (2) genannten Arbeit für ein $\lambda = 0, 1, 2\ldots$

$$\mathrm{W}_{\lambda+\frac{\mu+1}{2},\,\frac{\mu}{2}}(t) = (-)^{\lambda}\cdot \frac{\Gamma(\mu+\lambda+1)}{\Gamma(\mu+1}\cdot \mathrm{M}_{\lambda+\frac{\mu+1}{2},\,\frac{\mu}{2}}(t)$$

$$= t^{(1+\mu)/2}\cdot \mathrm{e}^{-t/2}\cdot (-)^{\lambda}\cdot\lambda!\cdot \mathrm{L}_{\lambda}^{(\mu)}(t)$$

ist, so kann die Reihe (2) auch noch in den anderen beiden angegebenen Formen geschrieben werden. Dabei bedeutet dann $\mathrm{L}_{\lambda}^{(\mu)}$ das Laguerre-Polynom in derselben Definition wie in der Arbeit [2]. Die Reihe (2) konvergiert ebenfalls absolut und gleichmäßig für jedes $|h|<1$ und $\Re(\mu)>-1$ bei sonst beliebigen reellen oder komplexen Werten von s und t. Ihr Summenwert wurde für einen ein wenig spezielleren Fall ($\alpha=\mu$) bereits in der Arbeit [2] hergeleitet. Im vorliegenden Fall kann er auf genau die gleiche Weise bestimmt werden.

Die angeführten beiden Reihen sollen im folgenden dazu benutzt werden, um aus ihnen eine Reihe weiterer allgemeiner Beziehungen zu gewinnen, die besonders für die mathematische Darstellung der verschiedenen Wellentypen von Bedeutung sind. Dabei hat der hier gewählte Weg den großen Vorzug, durch geeignete Spezialisierung des hinteren Parameters μ gleichzeitig die Beziehungen für die Wellentypen in den Koordinaten des Drehparabols und des parabolischen Zylinders zu liefern.

Für das eingeschlagene Verfahren ist es z. T. wesentlich, daß die Reihen zunächst in Integrale verwandelt werden, die über den vorderen Parameter erstreckt werden. Das hat seinen inneren Grund darin, daß die verschiedenen auszuführenden Rechenoperationen wohl an den Integralen, nicht aber an den Reihen ausgeführt werden können.

Wir beginnen zunächst mit der Umwandlung der ersten Reihe in ein solches Integral. Wegen der Formeln, die dazu benötigt werden und die das asymptotische Verhalten der beiden konfluenten hypergeometrischen Funktionen für große Werte des vorderen Parameters beschreiben, werden wir der Einfachheit halber stets auf die Arbeit [2] verweisen, auf die im Text auch als Bericht Bezug genommen wird.

1.1. Ein Integral über den vorderen Parameter zweier M-Funktionen.

Wir knüpfen unmittelbar an die obige Gl. 1 (1) an und setzen darin im Hinblick auf die weiteren Rechnungen

$$h^{1/2} = \pm\, i \cdot \operatorname{tg} \varphi/2 \quad t = -\, i\,\xi' \quad \tau = +\, i\eta' \qquad (\xi', \eta' > 0,\ i = \sqrt{-1}).$$

Sie nimmt dann nach den Substitutionen $u = -\,ix$ und $v = +\,iy$ die Form der Gl. (1) an, denn es ist $\mathrm{I}_\alpha(\pm iz) = \exp(\mp \pi i \alpha/2) \cdot \mathrm{J}_\alpha(z)$.

$$(1)\quad K(-\,i\xi', +\,i\eta'; -\operatorname{tg}^2\varphi/2) \equiv \sum_{\lambda=0}^{\infty} \frac{\Gamma(\lambda+\alpha+1)}{\lambda!} \cdot (-)^\lambda \cdot \left(\operatorname{tg}\frac{\varphi}{2}\right)^{2\lambda}$$

$$\cdot\, \mathrm{M}_{\varkappa_1+\lambda,\ \frac{\mu_1}{2}}(-\,i\xi') \cdot \mathrm{M}_{\varkappa_2+\lambda,\ \frac{\mu_2}{2}}(+\,i\eta')$$

$$= \cos^2\varphi/2 \cdot (\operatorname{tg}\varphi/2)^{-\alpha} \cdot \xi'^{\frac{1-\mu_1}{2}} \cdot \eta'^{\frac{1-\mu_2}{2}}$$

$$\cdot \frac{\Gamma(1+\mu_1)\,\Gamma(1+\mu_2)\,\Gamma(1+\alpha-\mu_1)\,\Gamma(1+\alpha-\mu_2)}{(2\pi i)^2} \cdot \int_0^{(\xi'+)} \int_0^{(\eta'+)} \mathrm{e}^{\frac{i}{2}\cdot\cos\varphi\cdot(x-y)} \cdot (xy)^{\alpha/2}$$

$$(x-\xi')^{\frac{\mu_1-\alpha}{2}} \cdot (y-\eta')^{\frac{\mu_2-\alpha}{2}} \cdot \mathrm{J}_\alpha\left(2\sqrt{xy}\cdot\frac{\sin\varphi}{2}\right)$$

$$\mathrm{M}_{\frac{\alpha+1}{2}-\varkappa_1,\ \frac{\mu_1-\alpha-1}{2}}(-\,i\,(x-\xi')) \cdot \mathrm{M}_{\frac{\alpha+1}{2}-\varkappa_2,\ \frac{\mu_2-\alpha-1}{2}}(+\,i\,(y-\eta'))\cdot \mathrm{d}x\cdot \mathrm{d}y$$

$$\left(\left|\operatorname{tg}\frac{\varphi}{2}\right| < 1,\quad \Re(\alpha) > 0,\quad \operatorname{arc}_\alpha(x-\xi',\ y-\eta') = -\,\pi\right).$$

Nun kann man aber offenbar für ein $\varepsilon \to 0$ wegen $\Gamma(-\lambda-\varepsilon) \to -\,1/\varepsilon \cdot (-)^\lambda/\lambda!$ nach dem Residuensatz von Cauchy die erste Zeile dieser Gleichung auch wie folgt anschreiben:

$$K\left(-\,i\xi', +\,i\eta', -\operatorname{tg}^2\frac{\varphi}{2}\right) = \frac{-1}{2\pi i} \int_{+\infty\cdot \operatorname{arc}_\alpha(0)}^{(0+)} \Gamma(-s')\,\Gamma(s'+\alpha+1) \cdot \left(\operatorname{tg}\frac{\varphi}{2}\right)^{2s'}$$

$$\cdot\, \mathrm{M}_{\varkappa_1+s',\ \frac{\mu_1}{2}}(-\,i\xi') \cdot \mathrm{M}_{\varkappa_2+s',\ \frac{\mu_2}{2}}(+\,i\eta') \cdot \mathrm{d}s'.$$

Darin kommt der Integrationsweg vom Punkte $+\infty \cdot \operatorname{arc}(0)$[1]) her, verläuft dicht oberhalb der positiv reellen z-Achse, umschlingt den Null-

[1]) Durch die Bezeichnung $\infty \cdot \operatorname{arc}_\alpha(0)$ soll ausgedrückt werden, daß der Weg vom Punkt ∞ herkommt und anfangs der Phasenwinkel von s' dabei gleich Null ist.

punkt im mathematisch positiven Sinne und zieht dicht unterhalb der positiv reellen s-Achse wieder zum Punkt ∞ zurück. Innerhalb dieses Integrationsweges liegen mithin einzig und allein die unendlich vielen einfachen Pole der Funktion $\Gamma(-s')$ in den Punkten $s' = \lambda$ mit $\lambda = 0, 1, 2 \ldots$. Die Konvergenz dieses Integrals ist dabei von genau derselben Art wie die der unendlichen Reihe in (1). Sie ist also für ein $|\operatorname{tg}(\varphi/2)| < 1$ mit Sicherheit für beliebige Werte der verschiedenen Parameter vorhanden. Das letzte Integral läßt sich noch etwas symmetrischer schreiben, indem man $s' = s - (1 + \alpha)/2$ setzt. Damit ist dann bis jetzt die Gl. (2) entstanden, in der u. a. der Parameter α

$$(2) \quad -\frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\infty \cdot \operatorname{arc}_a(0)}^{((\alpha+1)/2+)} \Gamma\left(-s + \frac{\alpha+1}{2}\right) \cdot \Gamma\left(s + \frac{\alpha+1}{2}\right) \cdot \left(\operatorname{tg}\frac{\varphi}{2}\right)^{2s}$$

$$\cdot \frac{M_{\varkappa_1 - \frac{\alpha+1}{2} + s, \frac{\mu_1}{2}}(-i\xi')}{\Gamma(1+\mu_1)} \cdot \frac{M_{\varkappa_2 - \frac{\alpha+1}{2} + s, \frac{\mu_2}{2}}(+i\eta')}{\Gamma(1+\mu_2)} \cdot \mathrm{d}s \equiv$$

$$\equiv K\left(-i\xi', +i\eta', -\operatorname{tg}^2\frac{\varphi}{2}\right) \cdot \frac{\left(\operatorname{tg}\frac{\varphi}{2}\right)^{\alpha+1}}{\Gamma(1+\mu_1)\,\Gamma(1+\mu_2)}$$

$$= \frac{1}{2} \cdot \sin\varphi \cdot \xi'^{\frac{1-\mu_1}{2}} \cdot \eta'^{\frac{1-\mu_2}{2}} \cdot \frac{\Gamma(1+\alpha-\mu_1)\,\Gamma(1+\alpha-\mu_3)}{(2\pi i)^2}$$

$$\int\limits_0^{(\xi'+)} \int\limits_0^{(\eta'+)} e^{+\frac{i}{2} \cdot \cos\varphi\,(x-y)} \cdot (xy)^{\alpha/2} \cdot (x-\xi')^{\frac{\mu_1-\alpha}{2}-1} \cdot (y-\eta')^{\frac{\mu_2-\alpha}{2}-1}$$

$$\cdot J_\alpha\left(2\sqrt{xy} \cdot \frac{\sin\varphi}{2}\right) \cdot M_{\frac{\alpha+1}{2}-\varkappa_1, \frac{\mu_1-\alpha-1}{2}}(-i(x-\xi'))$$

$$\cdot M_{\frac{\alpha+1}{2}-\varkappa_2, \frac{\mu_1-\alpha-1}{2}}(+i(y-\eta')) \cdot \mathrm{d}x \cdot \mathrm{d}y$$

$$\left(\Re(\alpha) > -1;\ \operatorname{arc}_a(x-\xi', y-\eta') = -\pi;\ \left|\operatorname{tg}\frac{\varphi}{2}\right| < 1\right)$$

jeden beliebigen Wert haben kann, der mit der Forderung $\Re(\alpha) > -1$ verträglich ist.

Es fragt sich jetzt, inwieweit es möglich ist, auf der linken Seite von Gl. (2) den Integrationsweg so weit zu öffnen, bis er parallel zur imaginären Achse der z-Ebene verläuft. Wenn das ohne den Einzug einer Schleife in diesen Weg möglich sein soll, so muß im Integranden von (2) der äußerste linke Pol in der nach rechts laufenden Polkette immer noch rechts von dem äußersten rechten Pol der nach links strebenden Polkette liegen, d. h. es muß $-(1 + \Re(\alpha))/2 < (1 + \Re(\alpha))/2$ oder $\Re(\alpha) > -1$ sein. Unter den Gültigkeitsbedingungen der Gl. (2) gehört also ein geradliniger und parallel zur imaginären Achse verlaufender Weg auch stets zu den geometrisch möglichen. Es bleibt mithin nur noch nachzuprüfen, ob der Übergang von dem Integrations-

weg (2) zu einem solchen geradlinigen Weg auch zulässig ist. Wir wollen den Nachweis dafür unter Beschränkung auf reelle Werte von μ_1 und μ_2 führen. Dagegen mögen α und $\operatorname{tg}(\varphi/2)$ komplexwertig sein.

Zu diesem Zweck müssen wir das Verhalten des Absolutbetrages des Integranden von (2) auf dem rechten unendlich fernen Halbkreis der s-Ebene kennen. Nun ist mit $s = |s| \cdot \exp(i\chi)$ [2]

$$(3\,a)\quad \left|\Gamma\left(s+\frac{\alpha+1}{2}\right)\Gamma\left(-s+\frac{\alpha+1}{2}\right)\right| = \left|\frac{-\pi}{\cos\pi\left(s-\frac{\alpha}{2}\right)}\cdot\frac{\Gamma\left(s+\frac{1+\alpha}{2}\right)}{\Gamma\left(s+\frac{1-\alpha}{2}\right)}\right|$$

$$\sim\begin{cases} 2\pi\cdot\exp\left[\Re(\alpha)\cdot\ln|s| - \chi\cdot\Im(\alpha) - \pi\cdot|s|\cdot|\sin\chi|\right] & \left(0<|\chi|\leqq\frac{\pi}{2}\right) \\ \left|\frac{\pi}{\cos\pi\left(s-\frac{\alpha}{2}\right)}\right|\cdot\exp\left(\Re(\alpha)\cdot\ln|s|\right) & (\chi=0) \end{cases}$$

$$(3\,b)\quad \left|\left(\operatorname{tg}\frac{\varphi}{2}\right)^{2s}\right| \sim \exp\left\{2|s|\cdot\left[\cos\chi\cdot\ln\left|\operatorname{tg}\frac{\varphi}{2}\right| - \sin\chi\cdot\operatorname{arc}\left(\operatorname{tg}\frac{\varphi}{2}\right)\right]\right\}$$

$$\operatorname{tg}\frac{\varphi}{2} = \left|\operatorname{tg}\frac{\varphi}{2}\right| e^{i\cdot\operatorname{arc}\left(\operatorname{tg}\frac{\varphi}{2}\right)}.$$

Die Verschiedenartigkeit des Ausdrucks für den Absolutbetrag des Produkts der beiden Γ-Funktionen im Falle eines $\chi = 0$ und $\chi \neq 0$ können wir demnach für den vorliegenden Zweck außer Betracht lassen, wenn wir nur ein für allemal die Übereinkunft treffen, daß der unendlich ferne Halbkreis nicht gerade durch eine Nullstelle von $\cos(\pi(s-\alpha/2))$ geht. Das läßt sich aber offenbar stets so einrichten. Aus demselben Grunde darf auch der asymptotische Näherungsausdruck für den Absolutbetrag von $M_{\cdot,\mu/2}(\pm i\eta)$ im Falle eines $|s|\to\infty$ für den ganzen Winkelbereich $|\chi| \leqq \pi/2$ in Anspruch genommen werden. Damit bekommt man dann im ganzen für den Absolutbetrag des Integranden von Gl. (2) für ein $|s|\to\infty$ im Winkelbereich $|\operatorname{arc}(s)| \leqq \pi/2$

$$(3)\quad \frac{1}{2}\cdot(\xi'\eta')^{1/4}\cdot|s|^{\Re(\alpha)-\frac{\mu_1+\mu_2+1}{2}}\cdot\exp\left\{2\cdot|s|\cdot\left[\cos\chi\cdot\ln\left|\operatorname{tg}\frac{\varphi}{2}\right| - \sin\chi\cdot\operatorname{arc}\left(\operatorname{tg}\frac{\varphi}{2}\right) - \frac{\pi}{2}\cdot|\sin\chi|\right] + 2\cdot\sqrt{|s|}\cdot\left[\sqrt{\xi'}\cdot\left|\sin\left(\frac{\chi}{2}-\frac{\pi}{4}\right)\right| + \sqrt{\eta'}\cdot\left|\sin\left(\frac{\chi}{2}+\frac{\pi}{4}\right)\right|\right] - \sigma\cdot\Im(\alpha)\right\} \qquad \left(|s|\to\infty\,|\chi| \leqq \frac{\pi}{2}\right)$$

die asymptotische Darstellung (3). Für $\chi = 0$ beschreibt sie im besonderen das Verhalten des Integranden von (2) auf dem zu (2) gehörenden, die positiv reelle s-Achse eng umschlingenden Schleifenweg. Für die Konvergenz dieses Integrals ist also, wie wir schon wissen, erforderlich, daß $|\operatorname{tg}(\varphi/2)| < 1$ ist. Für $\chi = \pm\pi/2$ ergibt sich aus (3) im besonderen die Bedingung für die Konvergenz des Integrals (2), wenn sein Integrationsweg eine Parallele zur imaginären Achse der

s-Ebene ist. Bei dieser Wegführung hat mithin gemäß (3) der Absolutbetrag von $\operatorname{tg}(\varphi/2)$ für die Konvergenz keinerlei Bedeutung mehr, sondern es kommt jetzt allein auf den Phasenwinkel des reell- oder komplexwertigen $\operatorname{tg}(\varphi/2)$ an, und zwar muß mit Rücksicht auf die Konvergenz $|\arc(\operatorname{tg}(\varphi/2))| < \pi/2$ sein. Bei einem reellen Winkel φ z. B. verschwindet also der Integrand von (2) auf den unendlich fernen Wegteilen wie $\exp(-\pi \cdot |s|)$, und die Überführung des einen Integrationsweges in den anderen ist infolgedessen immer statthaft, wenn gleichzeitig $|\operatorname{tg}(\varphi/2)| < 1$ und $|\arc(\operatorname{tg}(\varphi/2))| < \pi/2$ ist.

Bezeichnet dann σ denjenigen positiven oder negativen reellen Wert von s, der als die Schnittpunktsabzisse des geradlinigen, zur imaginären Achse parallelen Weges mit der reellen s-Achse aufgefaßt werden kann, so nimmt nunmehr die Gl. (2) die Gestalt der Gl. (4) an.

$$
\begin{aligned}
(4)\quad & \frac{1}{2\pi i}\int_{-\sigma-i\infty}^{-\sigma+i\infty} \Gamma\left(-s+\frac{\alpha+1}{2}\right)\Gamma\left(+s+\frac{\alpha+1}{2}\right)\cdot\left(\operatorname{tg}\frac{\varphi}{2}\right)^{2s} \\
& \cdot \frac{\mathbf{M}_{\varkappa_1-\frac{\alpha+1}{2}+s,\,\frac{\mu_1}{2}}(-i\,\xi')}{\Gamma(1+\mu_1)} \cdot \frac{\mathbf{M}_{\varkappa_2-\frac{\alpha+1}{2}+s,\,\frac{\mu_2}{2}}(+i\,\eta')}{\Gamma(1+\mu_2)} \cdot \mathrm{d}\,s \\
& = \frac{1}{2}\cdot\sin\varphi\cdot\xi'^{\frac{1-\mu_1}{2}}\cdot\eta'^{\frac{1-\mu_2}{2}}\cdot\frac{\Gamma(1+\alpha-\mu_1)\,\Gamma(1+\alpha-\mu_2)}{(2\pi i)^2} \\
& \cdot\int_0^{(\xi'+)}\int_0^{(\eta'+)} \mathrm{e}^{+\frac{i}{2}\cdot\cos\varphi\cdot(x-y)}\cdot(x\,y)^{\alpha/2}\cdot(x-\xi')^{\frac{\mu_1-\alpha}{2}-1}\cdot(y-\eta')^{\frac{\mu_2-\alpha}{2}-1} \\
& \times \mathrm{J}_\alpha\left(2\sqrt{x\,y}\cdot\frac{\sin\varphi}{2}\right)\cdot\mathbf{M}_{\frac{\alpha+1}{2}-\varkappa_1,\,\frac{\mu_1-\alpha-1}{2}}(-i\,(x-\xi')) \\
& \cdot\mathbf{M}_{\frac{\alpha+1}{2}-\varkappa_2,\,\frac{\mu_2-\alpha-1}{2}}(+i\,(y-\eta'))\cdot\mathrm{d}\,x\cdot\mathrm{d}\,y \\
& (\Re(\alpha) > -1,\ \arc_a(x-\xi',\ y-\eta') = -\pi; \\
& \left|\arc\left(\operatorname{tg}\frac{\varphi}{2}\right)\right| < \frac{\pi}{2},\ |\sigma| < \frac{1+\Re(\alpha)}{2}\Big).
\end{aligned}
$$

Die oben eingeführte Beschränkung auf reelle Werte von μ_1 und μ_2, die nur im Hinblick auf die einfachere Schreibweise der Gl. (3) erfolgt war, kann im übrigen auch fallen gelassen werden, ohne daß deswegen an den Konvergenzbedingungen etwas Wesentliches zu ändern wäre.

Daß man von (4) wieder zu (2) zurückgelangen kann, indem man für ein $|\operatorname{tg}(\varphi/2)| < 1$ und ein $|\arc(\operatorname{tg}(\varphi/2))| < \pi/2$ den Integrationsweg in (4) von oben und unten her nach rechts an die positiv reelle s-Achse heranlegt und auf die dort liegenden Pole zusammenzieht, versteht sich von selbst. Es liegt dabei aber nahe, die Frage aufzuwerfen, ob es nicht auch zulässig ist, den Integrationsweg von (4) nach links an die negativ reelle Achse der s-Ebene heranzuführen.

Die Antwort auf diese Frage läßt sich leicht finden, denn sie läuft offenbar auf die andere gleichwertige Frage hinaus, ob es auch noch statthaft ist, in (4) den Integrationsweg wie bisher nach rechts herumzulegen, nachdem man vorher im Integranden durchweg s durch $-s$ ersetzt hat. Da nun aber nach Gl. 1.21 (5) z. B.

$$\mathbf{M}_{x_1-\frac{\alpha+1}{2}-s,\frac{\mu_1}{2}}(-i\xi') \equiv \mathbf{M}_{x_1-\frac{\alpha+1}{2}-s,\frac{\mu_1}{2}}(+i\xi'\cdot e^{-\pi i})$$

$$= e^{-\frac{\pi i}{2}(1+\mu_1)}\cdot \mathbf{M}_{-x_1+\frac{\alpha+1}{2}+s,\frac{\mu_1}{2}}(+i\xi')$$

ist, so läßt sich nach dieser Substitution für die erste Zeile der Gl. (4) schreiben:

$$(4')\quad \frac{e^{+\frac{\pi i}{2}(\mu_2-\mu_1)}}{2\pi i}\int_{+\sigma-i\infty}^{+\sigma+\infty i}\Gamma\left(+s+\frac{\alpha+1}{2}\right)\Gamma\left(-s+\frac{\alpha+1}{2}\right)\cdot\left(\operatorname{ctg}\frac{\varphi}{2}\right)^{2s}$$

$$\cdot\frac{\mathbf{M}_{-x_1+\frac{\alpha+1}{2}+s,\frac{\mu_1}{2}}(+i\xi')}{\Gamma(1+\mu_1)}\cdot\frac{\mathbf{M}_{-x_2+\frac{\alpha+1}{2}+s,\frac{\mu_2}{2}}(-i\eta')}{\Gamma(1+\mu_2)}\cdot ds.$$

Der Absolutbetrag des im Winkelraum $|\arc(s)| \leqq \pi/2$ gültigen asymptotischen Näherungswertes dieses Integranden weicht aber von (3) nur insofern ab, als darin jetzt $\operatorname{tg}(\varphi/2)$ durch $\operatorname{ctg}(\varphi/2)$ zu ersetzen ist und die Vorzeichen der beiden $\pi/4$-Summanden in der zweiten Zeile von (3) zu vertauschen sind; der Übergang von dem geradlinigen Integrationsweg von (4') zu dem Schleifenweg um die positiv reelle Achse herum, darf also auch im vorliegenden Falle vollzogen werden, falls jetzt die Ungleichungen

$$|\operatorname{ctg}(\varphi/2)| < 1 \quad \text{und} \quad |\arc(\operatorname{ctg}(\varphi/2))| < \pi/2$$

erfüllt sind. Löst man nun noch das Integral (4') nach dem Residuensatz auf und beachtet dabei die Gl. (2), um den Zusammenhang mit der Größe K von Gl. (1) zu gewinnen, so gelangt man zu der Entwicklung (5), deren Konvergenz es nur mehr erfordert, daß

$$(5)\quad K\left(-i\xi', +i\eta', -\operatorname{tg}^2\frac{\varphi}{2}\right) = e^{+\frac{\pi i}{2}(\mu_2-\mu_1)}\left(\operatorname{ctg}\frac{\varphi}{2}\right)^{2(\alpha+1)}$$

$$\cdot\sum_{\lambda=0}^{\infty}\frac{\Gamma(\lambda+\alpha+1)}{\lambda!}\cdot(-)^\lambda\cdot\left[\operatorname{ctg}\frac{\varphi}{2}\right]^{2\lambda}\quad\left(\left|\operatorname{ctg}\frac{\varphi}{2}\right|<1\right)$$

$$\cdot\mathbf{M}_{-x_1+\alpha+1+\lambda,\frac{\mu_1}{2}}(+i\xi')\cdot\mathbf{M}_{-x_1+\alpha+1+\lambda,\frac{\mu_2}{2}}(-i\eta')$$

$|\operatorname{ctg}(\varphi/2)| < 1$ bleibt. Für ein reellwertiges φ mit $|\varphi| < \pi/2$ gestattet also das Doppelintegral der Gl. (1) die dort in der ersten Zeile stehende Reihenentwicklung. Liegt aber φ im Intervall $\pi/2 < |\varphi| < 3\pi/2$, so gehört zu dem Doppelintegral die Reihenentwicklung (5). Die Konvergenzbereiche der beiden Reihenentwicklungen schließen sich also

gegenseitig aus. Der Übergang von der Reihe (1) zu den Integraldarstellungen (2) und (4) hat damit zugleich zu einer Reihentransformation geführt.

Ein wichtiger Sonderfall von (4) liegt in der Wahl der Parameter gemäß der Festsetzung $\mu_1 = \mu_2 = \alpha = \mu$ vor. Dann hat nämlich der Faktor $x - \xi'$ unter dem Doppelintegral insgesamt den Exponenten $\mu_1 - \alpha - 1 = -1$ und ebenso lautet der Exponent von $y - \eta'$. Der Integrand des Doppelintegrals hat mithin in diesem Falle innerhalb der beiden geschlossenen Integrationswege in der komplexen x- und y-Ebene einen einfachen Pol an den Stellen $x = \xi'$ und $y = \eta'$. Die Bestimmung des Integralwertes fällt unter diesen Umständen äußerst einfach aus, und man erhält sofort nach dem Residuensatz von CAUCHY aus (4) die Gl. (6). Obwohl jetzt in dieser Gleichung auf der rechten Seite kein Integral mehr auftritt, in Rücksicht auf dessen Konvergenz die Beschränkung von μ auf $\Re(\mu) > -1$ erforderlich wäre, wollen wir doch an dieser Bedingung festhalten, um bei dem Integral auf der linken Seite besondere Schleifenbildungen zu vermeiden. Haben die beiden M-Funktionen in den Integralen (4) und (6) die Argumente $+ i\xi'$ und $- i\eta'$, so ergibt sich der Wert dieser Integrale aus (4) und (6), indem man auch auf der rechten Seite dieser Gleichungen ξ' und η' miteinander vertauscht. Wie man sieht, spielen in (6) die Größen $\varkappa_1$ und $\varkappa_2$ lediglich die Rolle willkürlicher Parameter. Man könnte also z. B. $\varkappa_1 = \varkappa_2 = (1 + \mu)/2$ setzen, ohne an dem Ergebnis etwas zu ändern.

(6) $$\frac{1}{2\pi i}\int_{-\sigma-i\infty}^{-\sigma+i\infty} \Gamma\left(-s+\frac{\mu+1}{2}\right)\Gamma\left(+s+\frac{\mu+1}{2}\right)\cdot\left(\operatorname{tg}\frac{\varphi}{2}\right)^{2s} \cdot \frac{M_{\varkappa_1-\frac{\mu+1}{2}+s,\,\frac{\mu}{2}}(-i\xi')}{\Gamma(1+\mu)}\cdot\frac{M_{\varkappa_2-\frac{1+\mu}{2}+s,\,\frac{\mu}{2}}(+i\eta')}{\Gamma(1+\mu)}\cdot ds$$
$$= \frac{1}{2}\cdot\sin\varphi\cdot(\xi'\eta')^{\frac{1}{2}}\cdot e^{+\frac{i}{2}\cdot\cos\varphi\cdot(\xi'-\eta')}\cdot J_\mu\left(\sqrt{\xi'\eta'}\cdot\sin\varphi\right)$$
$$\left(\left|\operatorname{arc}\left(\operatorname{tg}\frac{\varphi}{2}\right)\right| < \frac{\pi}{2},\ |\sigma| < \frac{1+\Re(\alpha)}{2} = \frac{1+\Re(\mu)}{2},\quad \Re(\mu) > -1\right)$$

Verfährt man mit $\varkappa_1$ und $\varkappa_2$ in dieser Weise und löst die linke Seite von (6) durch Zusammenziehen des Integrationsweges auf die positiv reelle s-Achse und Anwendung des CAUCHYschen Satzes in eine unendliche Reihe auf, so geht diese Gleichung in die Beziehung (6a) über. Umgekehrt kann man diese Tatsache auch so ausdrücken:

(6a) $$\sum_{\lambda=0}^{\infty}\frac{(-)^\lambda\,\lambda!}{\Gamma(1+\mu+\lambda)}\left(\operatorname{tg}\frac{\varphi}{2}\right)^{2\lambda}\cdot L_\lambda^{(\mu)}(x)\,L_\lambda^{(\mu)}(y)$$
$$= e^{\frac{x+y}{2}(1-\cos\varphi)}\frac{J_\mu\left(\sqrt{xy}\cdot\sin\varphi\right)}{(xy)^{\mu/2}}\cdot\left(\operatorname{ctg}\frac{\varphi}{2}\right)^{\mu}\cdot\cos^2\frac{\varphi}{2}\cdot$$

Verfährt man mit der Reihe (6 a) in derselben Weise wie mit der Reihe (1) und wählt dabei als analytische Fortsetzung für die LAGUERRE-Polynome $L_\lambda^{(\mu)}(-i\xi')$ bei nicht mehr ganzzahligem Zeiger λ die Funktion $M_{\lambda+\frac{1+\mu}{2},\frac{\mu}{2}}(-i\xi')$, so würde man auch von der Gl. (6 a) aus zu der Gl. (6) gelangen. Jedoch könnte man auch an eine andere Möglichkeit der analytischen Fortsetzung von $L_\lambda^{(\mu)}(-i\xi')$ denken, denn es geht ja auch die Funktion $W_{\varkappa,\mu/2}(-i\xi')$ für $\varkappa = \lambda + (1+\mu)/2$ im wesentlichen in das eben genannte LAGUERRE-Polynom über. Eine genauere Konvergenzbetrachtung nach Art der oben durchgeführten zeigt aber sofort, daß bei dieser Fortsetzung der zunächst zu benutzende Schleifenweg nicht geöffnet werden dürfte.

Wir besprechen dann noch an dieser Stelle eine Verallgemeinerung der Gl. (6), die auf der bei G. N. WATSON [3] bewiesenen Formel (7)

$$(7)\quad \int_0^{+\pi} e^{+iz\cdot\cos\psi\cdot\cos\varphi}\cdot J_\mu(z\cdot\sin\psi\cdot\sin\varphi)\cdot C_r^{\mu+\frac{1}{2}}(\cos\varphi)\cdot\sin^{\mu+1}\varphi\,.\,d\varphi$$

$$= \left(\frac{2\pi}{z}\right)^{1/2}\cdot i^r\cdot\sin^\mu\psi\,.\,C_r^{\mu+\frac{1}{2}}(\cos\psi)\cdot J_{\mu+r+\frac{1}{2}}(z)$$

$$\left(r = 0, 1, 2\ldots\ \Re(\mu) > -\frac{1}{2}\right)$$

beruht, in der $C_r^{\mu+1/2}$ das GEGENBAUER'sche Polynom bedeutet. Multipliziert man demzufolge die Gl. (6) mit $C_r^{\mu+1/2}(\cos\varphi)\cdot\sin^\mu\varphi$ und integriert über φ zwischen den Grenzen $0\ldots+\pi$, so steht auf der rechten Seite von (6), von dem Faktor $1/2\cdot(\xi'\eta')^{1/2}$ abgesehen, dasselbe Integral wie auf der linken Seite von Gl. (7), wenn man noch setzt

$$z\cdot\cos\psi = \frac{1}{2}\cdot(\xi'-\eta')\qquad z\cdot\sin\psi = (\xi'\eta')^{1/2}\qquad z = \frac{1}{2}(\xi'+\eta').$$

Auf der linken Seite von (6) hat man es nach der angegebenen Operation und der zulässigen Vertauschung der Reihenfolge der Integrationen mit dem Integral (8) zu tun, dessen zweite Form aus

$$(8)\quad \int_0^{\pi}\left(\operatorname{tg}\frac{\varphi}{2}\right)^{2s}\cdot C_p^{\mu+\frac{1}{2}}(\cos\varphi)\cdot\sin^\mu\varphi\cdot d\varphi = (-)^r\cdot\int_0^{\pi}\left(\operatorname{tg}\frac{\varphi}{2}\right)^{-2s}\cdot$$

$$C_r^{\mu+\frac{1}{2}}(\cos\varphi)\cdot\sin^\mu\varphi\cdot d\varphi\qquad (r = 0, 1, 2\ldots)$$

$$-(1+\Re(\mu)<\Re(2s)<1+\Re(\mu)$$

der ersten durch die Substitution $\varphi = \pi - \varphi'$ unter Beachtung der Relation $C_r^\nu(\cos\varphi) = (-)^r\cdot C_r^\nu\cos\varphi)$ hervorgeht. Auf Grund der bekannten Definitionsgleichung für das GEGENBAUERsche Polynom ist nun aber die linke Seite von (8) identisch mit

$$\frac{\Gamma(r+2\mu+1)}{r!\,\Gamma(2\mu+1)}\cdot\sum_{\lambda=0}^{r}\frac{(-r)_\lambda\,(r+2\mu+1)_\lambda}{(\mu+1)_\lambda}\cdot\int_0^{\pi}\left(\operatorname{tg}\frac{\varphi}{2}\right)^{2s}\cdot\sin^\mu\varphi\cdot\sin^{2\lambda}\frac{\varphi}{2}\cdot d\varphi.$$

Wegen

$$\int_0^{\pi} \left(\operatorname{tg}\frac{\varphi}{2}\right)^{2s} \cdot \sin^{\mu}\varphi \cdot \sin^{2\lambda}\frac{\varphi}{2} \cdot \mathrm{d}\varphi = 2^{\mu} \cdot \int_0^{\pi} \left(\sin\frac{\varphi}{2}\right)^{2s+\mu+2\lambda} \cdot \left(\cos\frac{\varphi}{2}\right)^{\mu-2s} \cdot \mathrm{d}\varphi = 2^{\mu} \cdot \frac{\Gamma\left(s+\lambda+\frac{\mu+1}{2}\right)\Gamma\left(-s+\frac{\mu+1}{2}\right)}{\Gamma(\lambda+\mu+1)}$$

ist mithin

$$(8') \quad \int_0^{\pi} \left(\operatorname{tg}\frac{\varphi}{2}\right)^{2s} \cdot C_r^{\mu+\frac{1}{2}}(\cos\varphi) \cdot \sin^{\mu}\varphi \cdot \mathrm{d}\varphi = \frac{2^{\mu}}{\Gamma(\mu+1)} \cdot \binom{2\mu+r}{2\mu} \cdot \Gamma\left(-s+\frac{\mu+1}{2}\right)\Gamma\left(+s+\frac{\mu+1}{2}\right) \cdot {}_3F_2\left(-r, r+2\mu+1, s+\frac{\mu+1}{2}; 1+\mu, 1+\mu; 1\right)$$

$$\left(-\frac{1+\Re(\mu)}{2} < \Re(s) < +\frac{1+\Re(\mu)}{2}\right).$$

Gleichzeitig folgt aus (8) und (8') unter Hinweis auf das Prinzip der analytischen Fortsetzung, daß für alle s die Relation (9) gelten muß.

$$(9) \quad {}_3F_2\left(-r, r+2\mu+1, s+\frac{\mu+1}{2}; 1+\mu, 1+\mu; 1\right) = (-)^r \cdot {}_3F_2\left(-r, r+2\mu+1, -s+\frac{\mu+1}{2}, 1+\mu, 1+\mu; 1\right).$$

Aus der Gl. (6) hat sich damit im ganzen die Beziehung (10) ergeben.

$$(10) \quad \frac{1}{2\pi i}\int_{-\sigma-i\infty}^{-\sigma+i\infty} \left\{\Gamma\left(+s+\frac{\mu+1}{2}\right)\Gamma\left(-s+\frac{\mu+1}{2}\right)\right\}^2 \cdot {}_3F_2\left(-r, r+2\mu+1, s+\frac{\mu+1}{2}, 1+\mu, 1+\mu; 1\right) \cdot \frac{M_{x-\frac{\mu+1}{2}+s,\frac{\mu}{2}}(-i\xi')}{\Gamma(1+\mu)} \cdot \frac{M_{x-\frac{\mu+1}{2}+s,\frac{\mu}{2}}(+i\eta')}{\Gamma(1+\mu)} \cdot \mathrm{d}s = \pi^{1/2} \cdot i^r \cdot \frac{r!\,\Gamma(2\mu+1)\,\Gamma(\mu+1)}{\Gamma(2\mu+r+1)} \cdot \frac{(\xi'\eta')^{\frac{1+\mu}{2}}}{(\xi'+\eta')^{\mu+\frac{1}{2}}} \cdot C_r^{\mu+\frac{1}{2}}\left(\frac{\xi'-\eta'}{\xi'+\eta'}\right) \cdot J_{\mu+r+\frac{1}{2}}\left(\frac{\xi'+\eta'}{2}\right)$$

$$\left(r = 0, 1, 2\ldots, \quad |\sigma| < \frac{1+\Re(\mu)}{2}\right).$$

Hat in dieser Formel auf der linken Seite die erste M-Funktion das Argument $+i\xi'$ und die zweite das Argument $-i\eta'$, was als eine Vertauschung von ξ' und η' aufgefaßt werden kann, so muß die rechte Gleichungsseite bei sonst unverändertem Aufbau mit $(-)^r$ multipliziert werden.

Für die Herleitung der Gl. (10) war es wesentlich, daß in der Ausgangsgl. (6) die Reihe auf der linken Seite in Gestalt eines Parameterintegrals vorlag, weil es sonst gar nicht möglich gewesen wäre, die Integration nach φ zwischen den Grenzen 0 und π durchzuführen. Nachdem nun auf diese Weise für die rechte Seite von Gl. (10) ebenfalls eine Integraldarstellung gewonnen werden konnte, erhebt sich in diesem Zusammenhang sofort die Frage, ob nicht noch nachträglich aus dem Integral eine unendliche Reihe hergeleitet werden kann. Um diese Frage zu entscheiden, brauchen wir lediglich für den Integranden von (10) den in dem abgeschlossenen Winkelbereich $|\chi| \leqq \pi/2$ gültigen asymptotischen Näherungswert seines Absolutbetrages aufzustellen. Da für das asymptotische Verhalten von Integranden nach Art der Gl. (10), wie wir schon wissen, allein die exponentiellen Bestandteile den Ausschlag geben, so darf für den vorliegenden Zweck das asymptotische Verhalten der ${}_3F_2$-Funktion ganz außer Betracht bleiben, da es sich dabei wegen der endlichen Gliederzahl um eine rationale Funktion handelt. Nach dem Bericht (2) besteht nun aber für den übrigen Bestandteil des Integranden der asymptotische Näherungsausdruck:

$$(10a)\ \tfrac{1}{2}\cdot(\xi'\eta')^{1/4}\cdot|s|^{\mu-\frac{1}{2}}\cdot\exp\left\{-2\pi\cdot s\cdot\sin\chi|+2\sqrt{|s|}\left[\sqrt{\xi'}\left|\sin\left(\tfrac{\chi}{2}-\tfrac{\pi}{4}\right)\right|+\sqrt{\eta'}\cdot\left|\sin\left(\tfrac{\chi}{2}+\tfrac{\pi}{4}\right)\right|\right]\right\}.$$

Sobald also beim Herumschwenken des Integrationsweges von (10) der obere oder untere Teil in die Richtung der positiven, reellen s-Achse zu liegen kommt, hört jegliche Konvergenz des Integrals auf. Bei der Gl. (10) ist also eine Verwandlung des Integrals in eine Reihe in der bisher besprochenen Weise nicht möglich.

1. 2. Ein Integral über den vorderen Parameter von vier M-Funktionen.

Wir gehen wieder von der Gl. (6) des vorigen Abschnitts aus, setzen darin der Einfachheit halber $\varkappa_1 = \varkappa_2 = (\mu+1)/2$ und denken sie uns nach Vertauschung von ξ' und η' noch ein zweites Mal angeschrieben. In der ersten Gleichung bezeichnen wir fortan ξ' und η' mit ξ_0' und η_0' und die Integrationsvariable wie bisher mit s. In der zweiten Gleichung werde zur Unterscheidung von der ersten nunmehr ξ' und η' mit ξ_1' und η_1' bezeichnet, die Integrationsvariable mit t und die Integrationsabzisse mit τ. Wir multiplizieren dann beide Gleichungen miteinander, dividieren die neu entstandene Gleichung durch $\sin(\varphi)$ und integrieren sie nach φ, und zwar in einem ersten Gleichungssatz zwischen den Grenzen $0 \ldots +\pi/2$ und in einem zweiten, völlig gleichlautenden Gleichungssatz von $+\pi/2 \ldots +\pi$. Schließlich sind nach Ausführung dieser Rechenoperationen beide Gleichungssätze zu ad-

dieren. Auf der rechten Seite führen die so behandelten Gleichungen zu dem Ausdruck:

$$(1)\quad \frac{1}{4}\cdot(\xi_0'\eta_0'\cdot\xi_1'\eta_1')^{1/2}\cdot\int_0^{\pi}\exp\left\{i\cdot\frac{\cos\varphi}{2}\cdot(\xi_0'-\eta_0'-(\xi_1'-\eta_1'))\right\}$$
$$\cdot J_\mu\left(2\sqrt{\xi_0'\eta_0'}\cdot\frac{\sin\varphi}{2}\right)\cdot J_\mu\left(2\sqrt{\xi_1'\eta_1'}\cdot\frac{\sin\varphi}{2}\right)\cdot\sin^{\mu}\varphi\cdot d\varphi$$
$$=\frac{1}{2}\cdot(\xi_0'\eta_0'\cdot\xi_1'\eta_1')^{1/2}\cdot\int_0^{\pi}\cos\left\{\frac{\cos\varphi}{2}\cdot(\xi_0'-\eta_0'-(\xi_1'-\eta_1'))\right\}$$
$$\cdot J_\mu\left(2\sqrt{\xi_0'\eta_0'}\cdot\frac{\sin\varphi}{2}\right)\cdot J_\mu\left(2\sqrt{\xi_1'\eta_1'}\cdot\frac{\sin\varphi}{2}\right)\cdot\sin^{\mu}\varphi\cdot d\varphi$$
$$=\frac{(\xi_0'\eta_0'\cdot\xi_1'\eta_1')^{\frac{1+\mu}{2}}}{2^{\mu+3/2}\cdot\Gamma(\mu+\frac{1}{2})}\cdot\int_0^{\pi}\frac{J_{\mu+\frac{1}{2}}(\sqrt{A-B\cdot\cos\Phi})}{(\sqrt{A-B\cdot\cos\Phi})^{\mu+\frac{1}{2}}}\cdot\sin^{2\mu}\Phi\cdot d\Phi$$
$$=\frac{(\xi_0'\eta_0'\cdot\xi_1'\eta_1')^{\frac{1+\mu}{2}}}{2^{\mu+3/2}}\cdot\frac{\Gamma(\frac{1}{2}-\mu)}{2\pi i}$$
$$\cdot\int_0^{(1+)}\left\{\frac{J_{\mu+\frac{1}{2}}(\sqrt{A-B\cdot t})}{(\sqrt{A-B\cdot t})^{\mu+\frac{1}{2}}}+\frac{J_{\mu+\frac{1}{2}}(\sqrt{A+B\cdot t})}{(\sqrt{A+B\cdot t})^{\mu+\frac{1}{2}}}\right\}\cdot(t^2-1)^{\mu+\frac{1}{2}}\cdot dt$$

mit

$$A=\begin{cases}\frac{1}{4}\cdot(\xi_0'-\eta_0'-(\xi_1'-\eta_1'))^2+\xi_0'\eta_0'+\xi_1'\eta_1'\\ \left(\frac{\xi_0'-\eta_0'}{2}-\frac{\xi_1'-\eta_1'}{2}\right)^2+(\sqrt{\xi_0'\eta_0'}-\sqrt{\xi_1'\eta_1'})^2+2\cdot(\xi_0'\eta_0'\cdot\xi_1'\eta_1')^{1/2}\end{cases}$$
$$B=2\cdot(\xi_0'\eta_0'\cdot\xi_1'\eta_1')^{1/2}<A\quad\text{für}\quad\xi_0',\eta_0'\neq\xi_1'\eta_1'.$$

Dabei geht die dritte Form aus der ersten durch die Anwendung der bekannten Formel (1') hervor.

$$(1')\qquad\int_0^{\pi}\frac{J_\nu(\sqrt{a^2+b^2-2ab\cdot\cos\Phi})}{(a^2+b^2-2ab\cdot\cos\Phi)^{\nu/2}}\cdot\sin^{2\nu}\Phi\cdot d\Phi$$
$$=2^\nu\cdot\Gamma(\tfrac{1}{2})\,\Gamma(\nu+\tfrac{1}{2})\cdot\frac{J_\nu(a)}{a^\nu}\cdot\frac{J_\nu(b)}{b^\nu}.$$

Auf der linken Gleichungsseite entstehen durch die angegebenen Rechenvorschriften zunächst die folgenden beiden dreifachen Integrale:

$$\left(\frac{1}{2\pi i}\right)^2\cdot\int_0^{+\pi/2}\int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty}\int_{\tau-i\infty}^{\tau+i\infty}\Gamma\left(-s+\frac{1+\mu}{2}\right)\cdot\Gamma\left(+s+\frac{1+\mu}{2}\right)\cdot\Gamma\left(-t+\frac{1+\mu}{2}\right)$$
$$\cdot\Gamma\left(+t+\frac{1+\mu}{2}\right)\cdot\frac{(\operatorname{tg}\varphi/2)^{2s+2t}}{\sin\varphi}\cdot\frac{\mathbf{M}_{\varkappa-\frac{1+\mu}{2}+s,\,\frac{\mu}{2}}(-i\xi_0')\cdot\mathbf{M}_{\varkappa-\frac{1+\mu}{2}+s,\,\frac{\mu}{2}}(+i\eta_0')}{\Gamma(1+\mu)\cdot\Gamma(1+\mu)}$$
$$\cdot\frac{\mathbf{M}_{\varkappa-\frac{1+\mu}{2}+t,\,\frac{\mu}{2}}(+i\xi_1')\cdot\mathbf{M}_{\varkappa-\frac{1+\mu}{2}+t,\,\frac{\mu}{2}}(-i\eta_1')}{\Gamma(1+\mu)\cdot\Gamma(1+\mu)}\cdot dt\cdot ds\cdot d\varphi,$$

+ einem genau ebenso aufgebauten dreifachen Integral, in dem die Integrationsgrenzen für φ $+\pi/2$ und $+\pi$ sind.

Da nun die beiden Integrale über s und t für reelle Werte von φ absolut und gleichmäßig konvergieren, so ist es erlaubt, die Reihenfolge der Integrationen zu vertauschen und die nach φ zuerst auszuführen. Es ist nun

$$\int \left(\operatorname{tg}\frac{\varphi}{2}\right)^{2s+2t} \cdot \frac{\mathrm{d}\varphi}{\sin\varphi} = \int (\operatorname{tg} x)^{2s+2t-1} \cdot \mathrm{d}(\operatorname{tg} x)$$

$$= \int z^{2s+2t-1} \cdot \mathrm{d}z = \frac{\left(\operatorname{tg}\frac{\varphi}{2}\right)^{2s+2t}}{2(s+t)} .$$

Demnach ist also

$$(1\,\mathrm{a}) \quad \int_0^{\pi/2} \left(\operatorname{tg}\frac{\varphi}{2}\right)^{2s+2t} \cdot \frac{\mathrm{d}\varphi}{\sin\varphi} = +\frac{1}{2(s+t)} \qquad \text{falls } \Re(s+t) = \sigma+\tau > 0$$

$$(1\,\mathrm{b}) \quad \int_{+\pi/2}^{+\pi} \left(\operatorname{tg}\frac{\varphi}{2}\right)^{2s+2t} \cdot \frac{\mathrm{d}\varphi}{\sin\varphi} = -\frac{1}{2(s+t)} \qquad \text{falls } \Re(s+t) = \sigma+\tau < 0.$$

In den nach der Ausführung der Integration über φ verbleibenden beiden Doppelintegralen sind also die beiden Integrationsabszissen σ und τ innerhalb der Bedingung $|\sigma, \tau| < (1 + \Re(\mu))/2$ nicht mehr frei und unabhängig voneinander wählbar, sondern sie unterliegen in ihrer Größe einer Kopplung, die für die beiden Doppelintegrale verschieden aussieht. Wir machen uns zunächst die Bedeutung dieser Kopplung klar. Da es offenbar gleichgültig ist, welche von den beiden Integrationsabszissen als die unabhängig wählbare betrachtet wird, so nehmen wir hierfür die Abszisse σ. Dann ist im ersten, oben angeschriebenen Doppelintegral nach (1 a) $-\sigma < \tau < (1 + \Re(\mu))/2$, im zweiten, nicht angeschriebenen Doppelintegral gem. (1 b) $-(1+\Re(\mu))/2 < \tau < -\sigma$. Deutet man diese beiden Ungleichungen in der t-Ebene geometrisch und beachtet, daß in dieser Ebene der Integrand abgesehen von den beiden Polketten, die von den Γ-Funktionen herrühren, in jedem Falle auch noch einen einfachen Pol im Punkte $t = -s$ mit der Abszisse $-\sigma$ hat, so besagen offenbar die obigen beiden Ungleichungen für τ, daß im ersten Doppelintegral der in der t-Ebene liegende Integrationsweg rechts von diesem einzelnen Pol liegt, während er im zweiten Doppelintegral links davon liegt. Um also die beiden Doppelintegrale, deren Integranden sowieso übereinstimmen, auch hinsichtlich ihrer Integrationswege in Einklang zu bringen, ist mithin lediglich erforderlich, in dem zweiten Doppelintegral den Integrationsweg in der t-Ebene nach rechts zu verschieben, bis er mit dem Integrationsweg in der t-Ebene beim ersten Doppelintegral zusammenfällt. Dabei wird dann aber der einfache Pol $t = -s$ überschritten, dessen Residuum zu dem

Wert des Doppelintegrals den Ausdruck

$$\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{+\sigma-i\infty}^{+\sigma+i\infty}\left\{\Gamma\left(-s+\frac{1+\mu}{2}\right)\Gamma\left(+s+\frac{1+\mu}{2}\right)\right\}^2 \cdot\frac{\mathbf{M}_{\varkappa-\frac{\mu+1}{2}+s,\,\frac{\mu}{2}}(-i\,\xi_0')\cdot\mathbf{M}_{\varkappa-\frac{\mu+1}{2}+s,\,\frac{\mu}{2}}(+i\,\eta_0')}{\Gamma(1+\mu)\cdot\Gamma(1+\mu)} \cdot\frac{\mathbf{M}_{\varkappa-\frac{\mu+1}{2}-s,\,\frac{\mu}{2}}(+i\,\xi_1')\cdot\mathbf{M}_{\varkappa-\frac{\mu+1}{2}-s,\,\frac{\mu}{2}}(-i\,\eta_1')}{\Gamma(1+\mu)\cdot\Gamma(1+\mu)}\cdot\mathrm{d}\,s$$

beisteuert. Die außerdem noch auf der linken Gleichungsseite auftretenden beiden Doppelintegrale, die nunmehr sowohl in ihren Integranden wie in ihrer Wegführung übereinstimmen, heben sich aber wegen des entgegengesetzten Vorzeichens in den Gl. (1 a, b) gegenseitig auf. Damit haben wir aber im ganzen das folgende Resultat erzielt: Es ist

$$\text{(2)}\qquad \frac{1}{2}\cdot(\xi_0'\,\eta_0'\cdot\xi_1'\,\eta_1')^{1/2}\cdot\int\limits_0^{+\pi}\exp\left\{+i\,\frac{\cos\varphi}{2}\cdot(\xi_0'-\eta_0'-(\xi_1'-\eta_1'))\right\} \cdot\mathrm{J}_\mu\left(\sqrt{\xi_0'\,\eta_0'}\cdot\sin\varphi\right)\cdot\mathrm{J}_\mu\left(\sqrt{\xi_1'\,\eta_1'}\cdot\sin\varphi\right)\cdot\sin\varphi\cdot\mathrm{d}\,\varphi$$

$$=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{-\sigma-i\infty}^{-\sigma+i\infty}\left\{\Gamma\left(-s+\frac{\mu+1}{2}\right)\Gamma\left(+s+\frac{\mu+1}{2}\right)\right\}^2 \cdot\frac{\mathbf{M}_{\varkappa-\frac{1+\mu}{2}+s,\,\frac{\mu}{2}}(-i\,\xi_0')}{\Gamma(1+\mu)}\cdot\frac{\mathbf{M}_{\varkappa-\frac{1+\mu}{2}+s,\,\frac{\mu}{2}}(+i\,\eta_0')}{\Gamma(1+\mu)} \cdot\frac{\mathbf{M}_{\varkappa-\frac{1+\mu}{2}-s,\,\frac{\mu}{2}}(+i\,\xi_1')}{\Gamma(1+\mu)}\cdot\frac{\mathbf{M}_{\varkappa-\frac{1+\mu}{2}-s,\,\frac{\mu}{2}}(-i\,\eta_1')}{\Gamma(1+\mu)}$$

$$\left(\Re(\mu)>-1;\ |\sigma|<\frac{1+\Re(\mu)}{2}\right).$$

Statt des auf der linken Seite von (2) stehenden Ausdrucks kann natürlich auch irgend eine andere der in (1) angegebenen Formen stehen.

Untersucht man auf die gleiche Weise wie im vorigen Abschnitt das Verhalten des Integranden von (2) auf dem unendlich fernen Halbkreis der rechten z-Halbebene, so findet man für den Absolutbetrag des Integranden in dem Winkelbereich $|\chi|\leqq\pi/2$ für reelle Werte von μ den asymptotischen Näherungswert:

$$\frac{(\xi_0'\,\eta_0'\,\xi_1'\,\eta_1')^{1/4}}{4\cdot|s|}\cdot\exp\left\{-2\pi\cdot|s|\cdot|\sin\chi|+2\cdot\sqrt{|s|}\cdot\left[\left|\sin\left(\frac{\chi}{2}-\frac{\pi'}{4}\right)\right|\cdot(\sqrt{\xi_0'}+\sqrt{\eta_1'})+\left|\sin\left(\frac{\chi}{2}+\frac{\pi}{4}\right)\right|\cdot(\sqrt{\xi_1'}+\sqrt{\eta_0'})\right]\right\}.$$

Das Integral (2) konvergiert also auf dem dafür vorgesehenen Integrationsweg wegen $|\chi| = \pi/2$ in der Tat absolut und gleichmäßig. Es ist aber offenbar nicht möglich, den Integrationsweg von (2) nach rechts an die positiv reelle Achse der z-Ebene heranzuführen, da die Konvergenz des Integrals für $\chi = 0$ aufhört. Damit entfällt aber auch die Möglichkeit, das Integral (2) auf dem geschilderten Wege in eine unendliche Reihe aufzulösen. Solange man also in (2) an der ausschließlichen Verwendung der M-Funktion festhält, ist die Darstellung der rechten Gleichungsseite in Form eines Integrals die einzig mögliche.

Ein bemerkenswerter Sonderfall von (2) entsteht durch Nullsetzen von ξ_1' und η_1', nachdem man die Gl. (2) vorher durch

$$(+i\,\xi_1')^{\frac{1+\mu}{2}} \cdot (-i\,\eta_1')^{\frac{1+\mu}{2}} = (\xi_1'\,\eta_1')^{\frac{1+\mu}{2}}$$

dividiert hat. Dann werden nämlich die beiden letzten M-Funktionen auf der rechten Seite dieser Gleichung der Einheit gleich. Auf der linken Seite der Gleichung erhält man aber nach dem Grenzübergang

$$\frac{(\xi_0'\,\eta_0')^{1/2}}{2^{\mu+1}\cdot\Gamma(1+\mu)} \cdot \int_0^{+\pi} e^{i\cdot\frac{\cos\varphi}{2}(\xi_0'-\eta_0')} \cdot J_\mu\left(\sqrt{\xi_0'\,\eta_0'}\cdot\sin\varphi\right)\cdot\sin^{\mu+1}\varphi\cdot d\varphi$$

$$= \frac{(\xi_0'\,\eta_0')^{3/2}}{2^{\mu+1}\cdot\Gamma(1+\mu)} \cdot \left(\frac{4\pi}{\xi_0'+\eta_0'}\right)^{1/2} \cdot \left(\frac{2\sqrt{\xi_0'\,\eta_0'}}{\xi_0'+\eta_0'}\right)^{\mu} \cdot J_{\mu+\frac{1}{2}}\left(\frac{\xi_0'+\eta_0'}{2}\right),$$

wobei die Auswertung des Integrals mit Hilfe einer bekannten Formel aus der Theorie der Zylinderfunktionen gelingt. Im ganzen entsteht auf diese Weise die Gl. (3). Sie ist ein Sonderfall der Gl. 1. 1 (10) mit $r = 0$.

$$(3)\quad \frac{1}{2\pi i}\int_{-\sigma-i\infty}^{-\sigma+i\infty} \left\{\Gamma\left(-s+\frac{\mu+1}{2}\right)\Gamma\left(+s+\frac{\mu+1}{2}\right)\right\}^2 \cdot \frac{M_{\varkappa-\frac{\mu+1}{2}+s,\,\frac{\mu}{2}}(-i\,\xi_0')}{\Gamma(1+\mu)} \cdot \frac{M_{\varkappa-\frac{\mu+1}{2}+s,\,\frac{\mu}{2}}(+i\,\eta_0')}{\Gamma(1+\mu)}\cdot ds$$

$$= \pi^{1/2}\cdot\Gamma(1+\mu)\cdot\frac{(\xi_0'\,\eta_0')^{\frac{1+\mu}{2}}}{(\xi_0'+\eta_0')^{\frac{1}{2}+\mu}}\cdot J_{\frac{1}{2}+\mu}\left(\frac{\xi_0'+\eta_0'}{2}\right) \qquad \left(|\sigma| < \frac{1+\Re(\mu)}{2}\right).$$

1. 3. Integrale über den vorderen Parameter bei Produkten aus M- und W-Funktionen oder von W-Funktionen allein.

Wir vervollständigen das bisher gewonnene Bild, indem wir uns auch Parameterintegrale herstellen, in denen unter dem Integralzeichen auch die Funktion $W_{\varkappa,\,\mu/2}$ vorkommt. Zu diesem Zweck gehen wir von

der Reihe 1(2) aus, und zwar wollen wir von den drei Darstellungen, die von dieser Reihe in der erwähnten Gleichung angeschrieben worden sind, zunächst der zweiten den Vorzug geben. Um den Anschluß an die bisherigen Ausführungen in diesem Kapitel zu wahren, ändern wir die frühere Bezeichnung ab und setzen $s = -i \cdot \xi'$, $t = -i \cdot \eta'$ mit $\xi', \eta' > 0$ und überdies $h = \mathfrak{Tg}^2 \frac{\varphi}{2}$. Die Reihe lautet dann

$$(1)\quad S(\alpha, \mu; \mathfrak{Tg}^2 \tfrac{\psi}{2}; -i\xi', -i\eta') = \sum_{\lambda=0}^{\infty} \frac{\Gamma(\mu+1+\lambda)\,\Gamma(\alpha+1+\lambda)}{\lambda!} \cdot \left(\mathfrak{Tg}\,\frac{\psi}{2}\right)^{2\lambda} \cdot \mathrm{W}_{-\lambda-\frac{\mu+1}{2},\frac{\mu}{2}}(-i\xi') \cdot \frac{\mathrm{M}_{\lambda+\frac{\mu+1}{2},\frac{\mu}{2}}(-i\eta')}{\Gamma(1+\mu)}.$$

Von früher her wissen wir, daß sie jedenfalls für ein $\left|\mathfrak{Tg}\,\frac{\psi}{2}\right| < 1$ absolut konvergiert.

Wir verwandeln diese Reihe wie im Abschnitt 13. 1. 1 in ein Integral mit der Integrationsvariablen s', die im wesentlichen die Stelle der bisherigen Summationsvariablen λ vertritt. Als Integrationsweg benutzen wir zunächst wieder eine Schleife, die im Punkte $\infty \cdot \arc_a(0)$ beginnt, dicht oberhalb der positiv reellen s'-Achse im mathematisch positiven Sinne um den Nullpunkt herumzieht und dicht unterhalb dieses Teils der s'-Achse wieder ins Unendliche zurückläuft. Die Singularitäten des Integranden innerhalb dieser Schleife müssen durch eine eindeutige Funktion erzeugt werden, die in den Punkten $s' = 0, 1, 2 \ldots$ lauter einfache Pole hat. Wir wählen dafür wiederum die Funktion $\Gamma(-s')$ und haben dann offenbar in dem Integral (2), wie die An-

$$(2)\quad S(\alpha, \mu; \mathfrak{Tg}^2 \tfrac{\psi}{2}; -i\xi', -i\eta') = \frac{-1}{2\pi i} \int_{\infty \cdot \arc_a(0)}^{(0+)} \Gamma(-s')\,\Gamma(\mu+1+s')\,\Gamma(\alpha+1+s') \cdot \left(\mathfrak{Tg}^2 \frac{\psi}{2} \cdot e^{-\pi i}\right)^{s'} \cdot \mathrm{W}_{-s'-\frac{\mu+1}{2},\frac{\mu}{2}}(-i\xi') \cdot \frac{\mathrm{M}_{s'+\frac{\mu+1}{2},\frac{\mu}{2}}(-i\eta')}{\Gamma(1+\mu)} \cdot \mathrm{d}s'$$

wendung des Residuensatzes sofort erkennen läßt, das gewünschte Äquivalent zu der Reihendarstellung (1) vor uns. Um zu erreichen, daß bei der Auflösung von (2) in eine Reihe im Pol $s' = \lambda$ nicht die Potenz $\left(-\mathfrak{Tg}^2 \frac{\psi}{2}\right)^{\lambda}$ erscheint, sondern die Potenz $\left(+\mathfrak{Tg}^2 \frac{\psi}{2}\right)^{\lambda}$, wie es die ursprüngliche Reihe verlangt, mußte im Integranden von (2) der Faktor $\exp(-\pi i s')$ eingeschaltet werden. Durch die Einschaltung des Faktors $\exp(+\pi i s')$ hätten wir dieses Ziel zwar ebenfalls erreichen können. Wie wir aber noch sehen werden, verbietet sich diese Maßnahme aus Gründen der mangelnden Konvergenz von (2) beim Öffnen des Integrationsweges.

Im Hinblick auf das spätere Gleichsetzen von α und μ und um eine mehr symmetrische Schreibweise von (2) zu erzielen, empfiehlt es sich, mittels der Gleichung $s' + (\mu+1)/2 = s$ in (2) die neue Integrationsvariable s einzuführen. Das ergibt nach einer einfachen Umformung

$$(3)\quad S\left(\alpha,\mu;\ \mathfrak{Tg}^2\frac{\psi}{2};\ -i\xi',-i\eta'\right)\cdot\left(\mathfrak{Tg}^2\frac{\psi}{2}\cdot e^{-\pi i}\right)^{\frac{\mu+1}{2}}$$
$$= -\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\infty\cdot\arg a(0)}^{(+(\mu+1)/2+)} \Gamma\left(-s+\frac{\mu+1}{2}\right)\Gamma\left(+s+\frac{\mu+1}{2}\right)\Gamma\left(+s+\frac{2\alpha-\mu+1}{2}\right)$$
$$\cdot\left(\mathfrak{Tg}^2\frac{\psi}{2}\ e^{-\pi i}\right)^{s}\cdot W_{-s,\frac{\mu}{2}}(-i\xi')\cdot\frac{M_{s,\frac{\mu}{2}}(-i\eta')}{\Gamma(1+\mu)}\cdot ds.$$

Aus den Formeln des Berichts [2] und der Beziehung

$$\left|\Gamma\left(s+\frac{2\alpha-\mu+1}{2}\right)\right| \sim (2\pi)^{1/2}$$
$$\cdot\exp\left\{|s|\cdot\cos\chi\cdot\ln\frac{|s|}{e}+\left(\alpha-\frac{\mu}{2}\right)\cdot\ln|s|-|s|\cdot\chi\cdot\sin\chi\right\}$$

errechnet sich dann für den Absolutbetrag des Integranden von (3) für ein im Winkelraum $|\chi| \lessgtr \pi/2$ gegen ∞ strebendes s der asymptotische Näherungswert:

$$(3\,a)\quad \pi\cdot(\xi'\eta')^{1/4}\cdot|s|^{\alpha-\frac{1}{2}}\cdot\exp\Big\{+2\cdot|s|\cdot\Big[\cos\chi\cdot\ln\left|\mathfrak{Tg}\frac{\psi}{2}\right|$$
$$-\sin\chi\cdot\arg\left(\mathfrak{Tg}\frac{\psi}{2}\right)-\frac{\pi}{2}\cdot(|\sin\chi|-\sin\chi)\Big]-2\cdot\sqrt{|s|}\cdot\Big[\sqrt{\xi'}\cdot\cos\left(\frac{\chi}{2}-\frac{\pi}{4}\right)$$
$$-\sqrt{\eta'}\left|\sin\left(\frac{\chi}{2}-\frac{\pi}{4}\right)\right|\Big]\Big\}\qquad(\mu,\ \alpha\ \text{reell}).$$

In Übereinstimmung mit den früheren Konvergenzuntersuchungen an der Reihe (1) im Abschnitt 12. 4. 2. konvergiert also das Schleifenintegral (3), für das $\chi = 0$ zu setzen ist, ohne Einschränkung hinsichtlich ξ' und η', solange $\left|\mathfrak{Tg}\frac{\psi}{2}\right| < 1$ ist. Für ein $\left|\mathfrak{Tg}\frac{\psi}{2}\right| = 1$ muß aber $\xi' > \eta'$ sein. Immer darf aber hierbei $\mathfrak{Tg}\frac{\psi}{2}$ auch komplexwertig sein. Wird jedoch der Integrationsweg geöffnet, so kommt es im Winkelbereich $0 < \chi \lessgtr \pi/2$ für zunehmende Werte von $|\chi|$ und für ein $\arg\left(\mathfrak{Tg}\frac{\psi}{2}\right) < 0$, selbst wenn $\left(\mathfrak{Tg}\frac{\psi}{2}\right) < 1$ ist, einmal zu einem Umschlag des Vorzeichens in der eckigen Klammer des Exponenten von negativen zu positiven Werten. Für $\chi = \pm\pi/2$ selbst lautet der Exponent in der Exponentialfunktion von (3 a) im besonderen

für $\chi = -\frac{\pi}{2}$	$\chi = +\frac{\pi}{2}$
$-2\cdot|s|\cdot\left(\pi-\arg\left(\mathfrak{Tg}\frac{\psi}{2}\right)\right)+2\sqrt{|s|\,\eta'}$	$-2\cdot|s|\cdot\arg\left(\mathfrak{Tg}\frac{\psi}{2}\right)-2\sqrt{|s|\,\xi'}$.

Für einen Integrationsweg von (2) parallel zur imaginären Achse der s-Ebene müssen wir also in Rücksicht auf die Konvergenz des Integrals notwendig das Erfülltsein der Ungleichung $0 \leqq \arg\left(\mathfrak{Tg}\frac{\psi}{2}\right) < +\pi$ fordern. Dagegen unterliegen ξ' und η' in ihrer Größe für dieses Integral keiner Beschränkung. Diese Feststellungen bleiben auch noch gültig, wenn μ und α komplexe Zahlen sind. Soll jedoch der zur imaginären Achse parallele Integrationsweg in der s-Ebene geradlinig und ohne Schleifenbildung verlaufen können, so muß außerdem $\Re(-(2\alpha-\mu+1)/2, -(\mu+1)/2) < -\sigma < \Re((1+\mu)/2)$ sein.

Hätte man zwecks Wiedergabe von $(-)^\lambda$ in (2) in dem Integranden statt $\exp(-\pi i s)$ den Faktor $\exp(+\pi i s')$ aufgenommen, so würde das zur Folge haben, daß in (3 a) in der ersten eckigen Klammer des Exponenten der Ausdruck $-\pi/2(|\sin\chi| + \sin\chi)$ stände. Der Exponent würde also jetzt lauten

$$\text{für } \chi = -\pi/2 \qquad 2\cdot|s|\cdot\arg\left(\mathfrak{Tg}\frac{\psi}{2}\right) + 2\sqrt{|s|\,\eta'}$$

$$\text{für } \chi = +\pi/2 \qquad -2\cdot|s|\cdot\left[\pi + \arg\left(\mathfrak{Tg}\frac{\psi}{2}\right)\right] - 2\sqrt{|s|\,\xi'}$$

und damit wäre der wichtige Fall rein reeller Werte von $\mathfrak{Tg}\frac{\psi}{2}$ aus dem Gültigkeitsbereich von (4) ausgeschlossen.

Wird demgemäß unter der Annahme, daß die eben aufgestellten Voraussetzungen erfüllt sind, der Integrationsweg in (3) bis zum Parallelverlauf mit der imaginären Achse der s-Ebene geöffnet und zugleich die Gl. 12. 4. 2(2) berücksichtigt, so haben wir jetzt die folgende vollständige Relation:

$$(4)\quad \frac{1}{2\pi i}\int_{-\sigma-\infty i}^{-\sigma+\infty i} \Gamma\left(-s+\frac{1+\mu}{2}\right)\Gamma\left(+s+\frac{1+\mu}{2}\right)\Gamma\left(s+\frac{2\alpha-\mu+1}{2}\right)$$

$$\cdot\left(\mathfrak{Tg}^2\frac{\psi}{2}\cdot e^{-\pi i}\right)^s \cdot W_{-s,\frac{\mu}{2}}(-i\xi')\cdot\frac{M_{s,\frac{\mu}{2}}(-i\eta')}{\Gamma(1+\mu)}\cdot ds \qquad (\Re(\mu) > -1)$$

$$= S\left(\alpha,\mu;\ \mathfrak{Tg}^2\frac{\psi}{2};\ -i\xi', -i\eta'\right)\cdot\left(\mathfrak{Tg}^2\frac{\psi}{2}\cdot e^{-\pi}\right)^{\frac{1+\mu}{2}}$$

$$= \left(\xi'\eta'\cdot e^{-2\pi i}\cdot\mathfrak{Tg}^2\frac{\psi}{2}\right)^{\frac{1+\mu}{2}}\cdot e^{+\frac{i}{2}(\xi'+\eta')}\cdot\frac{\Gamma(\alpha+1)}{\Gamma(\mu+1)}$$

$$\cdot\int_0^{\infty\cdot i}\exp\left\{it\left(\xi'+\eta'\cdot\frac{\mathfrak{Sin}^2\frac{\psi}{2}}{t+\mathfrak{Cof}^2\frac{\psi}{2}}\right)\right\}\cdot t^\mu\cdot(1+t)^\alpha$$

$$\cdot\left(\frac{\mathfrak{Sin}^2\frac{\psi}{2}}{t+\mathfrak{Cof}^2\frac{\psi}{2}}\right)^{1+\alpha} \times {}_1F_1\left(\mu-\alpha;\,\mu+1;\,-i\,\eta'\cdot t\cdot\frac{\mathfrak{Sin}^2\frac{\psi}{2}}{t+\mathfrak{Cof}^2\frac{\psi}{2}}\right)\cdot \mathrm{d}\,t$$

$$\left(0 \gtreqless \arg\left(\mathfrak{Tg}\,\frac{\psi}{2}\right) < +\pi,\ \Re\left(-\frac{2\alpha-\mu+1}{2}, -\frac{\mu+1}{2}\right) < -\sigma < \Re\left(\frac{1+\mu}{2}\right)\right).$$

Von den Sonderfällen, die die Formel (4) in sich schließt, interessiert im folgenden vornehmlich der Grenzfall $\alpha = \mu$ und $\mathfrak{Tg}\,\frac{\psi}{2} = 1$ infolge eines $\psi \to \infty$. Das Integral auf der rechten Seite von (4) geht dann nach einer bekannten Formel aus der Theorie der Zylinderfunktionen über in

$$\int_0^{\infty\cdot i} \mathrm{e}^{+i\,t(\xi'+\eta')}\cdot[t\cdot(1+t)]^{\mu}\cdot \mathrm{d}\,t = 2^{-2\mu-1}\cdot\int_1^{\infty\cdot i}\mathrm{e}^{i\,v\cdot\frac{\xi'+\eta'}{2}}\cdot(v^2-1)^{\mu}\cdot dv$$

$$\left(t=\frac{v-1}{2}\right)$$

$$= \frac{\pi^{1/2}}{2}\cdot\left(\frac{4}{\xi'+\eta'}\right)^{\mu+\frac{1}{2}}\cdot \mathrm{e}^{+\pi i(\mu+1)}\cdot\Gamma(\mu+1)\cdot \mathrm{H}^{(1)}_{\mu+\frac{1}{2}}\left(\frac{\xi'+\eta'}{2}\right).$$

Damit haben wir jetzt statt (4) die wesentlich einfachere Formel (5a).

$$\text{(5a)}\quad \frac{1}{2\pi i}\int_{-\sigma-\infty\,i}^{-\sigma+\infty\,i}\Gamma\left(-s+\frac{\mu+1}{2}\right)\Gamma\left(s+\frac{\mu+1}{2}\right)\Gamma\left(s+\frac{\mu+1}{2}\right)\cdot \mathrm{e}^{-\pi i s}$$

$$\mathrm{W}_{-s,\frac{\mu}{2}}(-i\xi')\cdot\frac{\mathrm{M}_{s,\frac{\mu}{2}}(-i\,\eta')}{\Gamma(1+\mu)}\cdot \mathrm{d}\,s = \frac{1}{2}\cdot\pi^{1/2}\cdot\Gamma(1+\mu)$$

$$\cdot\frac{(\xi'\,\eta')^{\frac{1+\mu}{2}}}{(\xi'+\eta')^{\frac{1}{2}+\mu}}\cdot \mathrm{H}^{(1)}_{\mu+\frac{1}{2}}\left(\frac{\xi'+\eta'}{2}\right)$$

$$\left(|\sigma| < \frac{1+\Re(\mu)}{2};\quad \Re(\mu) > -1;\quad \xi',\eta' > 0\right).$$

Wegen der entsprechenden Formel für $\mathrm{H}^{(2)}_{\mu+1/2}$ vergleiche man die spätere Gl. (7a, b). Wegen der Schreibweise der Gl. (4) mit zwei W-Funktionen im Integranden wird auf den Übergang von Gl. (5a) zu (5b) verwiesen.

Das Integral (5a) läßt sich noch weiter umgestalten, indem man darin die Funktion $\mathrm{M}_{s,\,\mu/2}$ mit Hilfe der Gl. (2.9) von [2] durch die Summe zweier W-Funktionen ersetzt. Selbstverständlich hat man dabei in der genannten Gleichung das obere Vorzeichen zu wählen. Es wird dann gleich dem Ausdruck:

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{-\sigma-i\infty}^{-\sigma+i\infty}\Gamma^2\left(+s+\frac{1+\mu}{2}\right)\cdot W_{-s,\frac{\mu}{2}}(-i\xi')\cdot W_{-s,\frac{\mu}{2}}(+i\eta')\cdot ds$$

$$+e^{-\pi i\frac{1+\mu}{2}}\cdot\frac{1}{2\pi i}\int_{-\sigma-\infty i}^{-\sigma+\infty i}\Gamma\left(-s+\frac{\mu+1}{2}\right)\Gamma\left(+s+\frac{\mu+1}{2}\right)$$

$$\cdot W_{-s,\frac{\mu}{2}}(-i\xi')\cdot W_{s,\frac{\mu}{2}}(-i\eta')\cdot ds.$$

An dem ersten dieser beiden Integrale fällt sofort auf, daß hierin der Integrand rechts vom Integrationswege überhaupt keine Singularitäten mehr aufweist. Sollte sich nun zeigen, daß es erlaubt ist, ohne die Konvergenz des Integrals zu gefährden, den Integrationsweg in diesem Integral beliebig weit nach rechts zu verschieben, so würde das bedeuten, daß es identisch verschwindet. Eine solche Rechtsverschiebung des Integrationsweges ist nun aber in der Tat statthaft, denn es wird z. B. bei reellen Werten von μ auf Grund nun schon häufiger zitierter Formeln der Absolutbetrag des Integranden asymptotisch gleich

$$\tau\cdot(\xi'\eta')^{1/4}\cdot|s|^{\mu+\frac{1}{2}}\cdot\begin{cases}\exp\left[-2\sqrt{|s|\,\xi'}\right] & \chi=+\frac{\pi}{2}\\ \exp\left[-2\sqrt{|s|\,\eta'}\right] & \chi=-\frac{\pi}{2}\end{cases}\quad\text{für}\quad\text{und}\ \Re(s)>-\sigma.$$

Was das zweite Integral anbetrifft, so gilt für den Absolutbetrag seines Integranden in dem abgeschlossenen Winkelbereich $|\chi|\leqq\pi/2$ für ein $|s|\to\infty$ die asymptotische Darstellung:

$$(5')\quad \pi(\xi'\cdot\eta')^{1/4}\cdot|s|^{\mu-\frac{1}{2}}\cdot\exp\left[-2\sqrt{|s|}\right.$$

$$\left.\cdot\left[\sqrt{\xi'}\cdot\cos\left(\frac{\chi}{2}-\frac{\pi}{4}\right)+\begin{matrix}(-)\sqrt{\eta'}\cdot\sin\frac{\pi}{4}\\ \sqrt{\eta'}\cdot\operatorname{sgn}\chi\cdot\sin\left(\frac{\chi}{2}-\frac{\pi}{4}\right)\end{matrix}\right]\right]\begin{matrix}\chi\lessgtr\delta\approx 0\\ \delta\lessgtr|\chi|\lessgtr\frac{\pi}{2}.\end{matrix}$$

Es ist also der Exponent der hierin vorkommenden Exponentialfunktion für

$\chi=0$	$\chi=+\pi/2$	$\chi=-\pi/2$
$-2\sqrt{\lvert s\rvert}\left[\sqrt{\xi'}-\sqrt{\eta'}\right]$	$-2\sqrt{\lvert s\rvert\,\xi'}$	$-2\sqrt{\lvert s\rvert\,\eta'}$.

Das Integral selbst konvergiert also für beliebige Werte von $\xi',\eta'>0$, und es darf durch Herumlegen seines Integrationsweges an die reelle Achse in eine Reihe entwickelt werden für alle $\xi'>\eta'$. In der Gl. (5b) haben wir damit eine der Gl. (5a) völlig gleichwertige zweite Darstellung für die Funktion $H^{(1)}_{\mu+1/2}$ gefunden.

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{-\sigma-i\infty}^{-\sigma+i\infty}\Gamma\left(-s+\frac{\mu+1}{2}\right)\Gamma\left(+s+\frac{\mu+1}{2}\right)$$

(5 b)
$$\cdot W_{-s,\frac{\mu}{2}}(-i\xi')\cdot W_{+s,\frac{\mu}{2}}(-i\eta')\,.\,ds$$

$$= \frac{1}{2}\cdot\pi^{1/2}\cdot\Gamma(1+\mu)\cdot\frac{(e^{+\pi i}\cdot\xi'\eta')^{\frac{1+\mu}{2}}}{(\xi'+\eta')^{\mu+\frac{1}{2}}}\cdot H^{(1)}_{\mu+\frac{1}{2}}\left(\frac{\xi'+\eta'}{2}\right)$$

$$\left(|\sigma|<\frac{1+\Re(\mu)}{2},\quad \Re(\mu)>-1,\quad \xi',\,\eta'>0\right).$$

Die soeben vorgenommene Umgestaltung von (5 a) in (5 b) läßt sich offenbar auch bereits an der Gl. (4) durchführen. Die dadurch neu zustande kommende Form der Gl. (4) braucht wohl aber nicht besonders angeschrieben zu werden. Man kann zu ihr unmittelbar gelangen, indem man nicht, wie es hier geschah, von der zweiten Darstellungsform der Gl. 1. (2) ausgeht, sondern von der ersten, oder anders ausgedrückt, indem man in der dritten Darstellungsform der eben genannten Gleichung das LAGUERRE-Polynom nicht als $M_{s,\mu/2}$-Funktion, sondern als $W_{s,\mu/2}$-Funktion analytisch fortsetzt.

Um diese Formeln zu verallgemeinern, knüpfen wir an die Ausführungen im Abschnitt 1. 2. an und verfügen darin durchweg über $\varkappa$ mit der Festsetzung $\varkappa = (1+\mu)/2$. In der Gl. 1. 2 (2), die wir uns zunächst vornehmen wollen, ersetzen wir dann die M-Funktion mit dem Argument $-i\,.\,\xi'$ gemäß der Gl. (2. 4 a) des Berichts durch die Summe zweier W-Funktionen, so daß nach der Auflösung des einen Integrals in zwei das erste die Funktion $W_{-s,\mu/2}(+i\xi')$, das zweite die Funktion $W_{s,\mu/2}(-i\,.\,\xi')$ enthält. In dem zweiten Integral gehen wir dann von $+s$ zu $-s$ über. Da nun aber

$$M_{-s,\frac{\mu}{2}}(+i\eta') \equiv M_{-s,\frac{\mu}{2}}(-i\eta'\cdot e^{+\pi i}) = e^{+\frac{\pi i}{2}(1+\mu)}\cdot M_{s,\frac{\mu}{2}}(-i\eta')$$

ist, so bekommt man in Rücksicht auf die Gl. 1. 1 (9), nachdem man den Faktor $\exp(+\pi i r/2)$ herausgezogen und die beiden Integrale wieder zusammengefaßt hat, die Beziehung:

(6)
$$\frac{1}{2\pi i}\int_{-\sigma-\infty i}^{-\sigma+\infty i}\left\{\Gamma\left(-s+\frac{\mu+1}{2}\right)\Gamma\left(+s+\frac{\mu+1}{2}\right)\right\}^2$$

$$\cdot\,{}_3F_2\left(-r,\,r+2\mu+1,\,s+\frac{\mu+1}{2};\;1+\mu,\,1+\mu;\;1\right)$$

$$\cdot\left[e^{+\frac{\pi i}{2}(2s-r)}\,\frac{W_{-s,\frac{\mu}{2}}(+i\xi')}{\Gamma\left(\frac{1+\mu}{2}-s\right)}\cdot\frac{M_{s,\frac{\mu}{2}}(+i\eta')}{\Gamma(1+\mu)}\right.$$

$$\left.+\,e^{-\frac{\pi i}{2}(2s-r)}\cdot\frac{W_{-s,\frac{\mu}{2}}(-i\xi')}{\Gamma\left(\frac{1+\mu}{2}-s\right)}\cdot\frac{M_{s,\frac{\mu}{2}}(-i\eta')}{\Gamma(1+\mu)}\right]\cdot ds$$

$$=\pi^{1/2}\cdot\frac{r!\,\Gamma(2\mu+1)\,\Gamma(\mu+1)}{\Gamma(2\mu+r+1)}\cdot\frac{(\xi'\eta')^{\frac{1+\mu}{2}}}{(\xi'+\eta')^{\mu+\frac{1}{2}}}\cdot C_r^{\mu+\frac{1}{2}}\left(\frac{\xi'-\eta'}{\xi'+\eta'}\right)\cdot J_{\mu+r+\frac{1}{2}}\left(\frac{\xi'+\eta'}{2}\right)$$

$$\left(|\sigma|<\frac{1+\Re(\mu)}{2},\quad r=0,1,2,\ldots\right).$$

Wir untersuchen zunächst bei reellen Werten von μ das asymptotische Verhalten des Integranden von (1) für $s\to\infty$ in dem abgeschlossenen Winkelbereich $|\chi|\leqq\pi/2$, und zwar etwa für den zweiten Bestandteil in der eckigen Klammer. Nehmen wir dabei Bezug auf die Gl. 1. 1 (1 a), (8. 5 a, b) des Berichts und auf die leicht herleitbare asymptotische Näherung von

$$\text{(6 a)}\quad\frac{1}{\Gamma\left(\frac{1+\mu}{2}-s\right)}=\frac{\cos\pi\left(s-\frac{\mu}{2}\right)}{\pi}\cdot\Gamma\left(s+\frac{1-\mu}{2}\right)\sim(2\pi)^{-\frac{1}{2}}\cdot|s|^{-\frac{\mu}{2}}$$

$$\cdot\exp\left\{|s|\cdot\cos\chi\cdot\ln\frac{|\sigma|}{e}+|s|\cdot|\sin\chi|\cdot[\pi-|\chi|]\right\}\left(|\chi|\leqq\frac{\pi}{2}\right),$$

die nach einer schon eingangs gemachten Bemerkung mit einer unwesentlichen Einschränkung auch für $\chi=0$ in Anspruch genommen werden darf, so findet man für den Absolutbetrag dieses Integranden den Ausdruck:

$$\text{(6 b)}\quad(\xi'\cdot\eta')^{1/4}\cdot|s|^{\mu-\frac{1}{2}}\cdot\exp\left\{+\pi\cdot|s|\cdot(\sin\chi-|\sin\chi|)\right.$$

$$\left.+\,2\sqrt{|s|}\left[\sqrt{\eta'}\cdot\left|\sin\left(\frac{\chi}{2}-\frac{\pi}{4}\right)\right|-\sqrt{\xi'}\cdot\cos\left(\frac{\chi}{2}-\frac{\pi}{4}\right)\right]\right\}.$$

Es ist also z. B. für

$$\chi=+\pi/2\qquad\chi=0\qquad\chi=-\pi/2$$

der Exponent $=-2\sqrt{|s|\xi'},\ -2^{1/2}\sqrt{|s|}\,[\sqrt{\xi'}-\sqrt{\eta'}],\ -2\pi\cdot|s|+2\sqrt{|s|\cdot\eta'}$.

Da sich für den ersten Bestandteil des Integranden in (6 b) nur die Vorzeichen von $\sin\chi$ und von $\pi/4$ ändern, so ist daraus zu schließen, daß der Integrand von (1) auf dem unendlich fernen Teil des zur imaginären Achse der s-Ebene parallelen Integrationsweges für alle von Null verschiedenen Werte von ξ' und η' exponentiell verschwindet,

auf den unendlich fernen Teilen eines zur positiv reellen Achse der s-Ebene parallelen Weges jedoch nur dann, wenn $\xi' > \eta'$ ist. Nur unter dieser Voraussetzung ist dann auch die Entwicklung des Integrals (1) in eine Reihe möglich.

Bevor wir jedoch diese Entwicklung tatsächlich angeben, geben wir noch einen anderen Hinweis. Gibt man in (6) der Integrationsabszisse σ im besonderen den Wert 0, zieht sodann das Integral entsprechend dem Aufbau seines Integranden in zwei einzelne Integrale auseinander und setzt in dem ersten $s = +it$, in dem zweiten $s = -it$, so wird man sofort gewahr, daß diese beiden Integrale bei reellen Werten von μ konjugiert komplexe Werte haben. Nun läßt sich aber auch die rechte Seite der Gl. (6) unter der angegebenen Bedingung über μ in zwei konjugiert komplexe Ausdrücke zerlegen, denn es haben bekanntlich bei reellen Werten von μ und x in der Relation

$$2 \cdot \mathrm{J}_\mu(x) = \mathrm{H}_\mu^{(1)}(x) + \mathrm{H}_\mu^{(2)}(x)$$

die Hankelschen Funktionen ebenfalls konjugiert komplexe Werte. Diese Feststellung legt die Vermutung nahe, daß sich die konjugiert komplexen Bestandteile der beiden Gleichungsseiten einander entsprechen. Diese Vermutung trifft nun in der Tat zu, denn die bereits oben aufgestellte Gl. (6) bildet ja einen dieser beiden Bestandteile der Gl. (6) für $r = 0$, und nachdem auf diesem Wege die gegenseitig zuzuordnenden Glieder für $r = 0$ einmal bekannt sind, sind sie es auch für ein $r > 0$. Die Gl. (6) geht damit in die übersichtlichere Gl. (7 a) über, in der links wie rechts jeweils die gleichangeordneten Vorzeichen zusammengehören,

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{2\pi i} \int_{-\sigma-\infty i}^{-\sigma+\infty i} \Gamma\left(-s+\frac{\mu+1}{2}\right) \Gamma^2\left(+s+\frac{\mu+1}{2}\right) \\
&\quad \cdot {}_3\mathrm{F}_2\left(-r,\, r+2\mu+1,\, s+\frac{\mu+1}{2};\; 1+\mu,\, 1+\mu;\; 1\right) \\
&\quad \cdot e^{\mp \pi i s} \cdot \mathrm{W}_{-s,\frac{\mu}{2}}(\mp i\xi') \cdot \frac{\mathrm{M}_{s,\frac{\mu}{2}}(\mp i\eta')}{\Gamma(1+\mu)} \cdot \mathrm{d}s \qquad (7\,\mathrm{a}) \\
&= \pi^{1/2} \cdot (\mp i)^r \cdot \frac{r!\,\Gamma(2\mu+1)\,\Gamma(\mu+1)}{2 \cdot \Gamma(2\mu+r+1)} \cdot \frac{(\xi'\eta')^{\frac{1+\mu}{2}}}{(\xi'+\eta')^{\mu+\frac{1}{2}}} \\
&\quad \cdot \mathrm{C}_r^{\mu+\frac{1}{2}}\left(\frac{\xi'-\eta'}{\xi'+\eta'}\right) \cdot \mathrm{H}^{(1)}_{(2)\,\mu+r+\frac{1}{2}}\left(\frac{\xi'+\eta'}{2}\right)
\end{aligned}$$

$$\left(|\sigma| < \frac{1 \mp \Re(\mu)}{2}, \quad \Re(\mu) > -1, \quad \xi', \eta' > 0\right).$$

Es versteht sich von selbst, daß man nun in der Gl. (7 a) wie früher in der Gl. (5 a) noch daran gehen kann, auch die M-Funktionen mit dem Argument $\mp i\eta'$ aus dem Integral zu entfernen, indem man sich dabei wieder der Gl. 1. 22 (3 a) bedient. Da die in (7 a) gegenüber (5 a) zusätzlich auftretende ${}_3F_2$-Funktion wegen ihres in s rationalen Charakters an den Konvergenzbetrachtungen im Anschluß an die Gl. (5 a) nichts ändert, so erübrigt es sich hier, diese Betrachtungen noch einmal anzustellen, und die darnach entstehende Gl. (7 b) gilt dann unter denselben Bedingungen wie die Gl. (5 b)

$$\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{-\sigma-\infty i}^{-\sigma+\infty i} \Gamma\left(-s+\frac{\mu+1}{2}\right)\Gamma\left(+s+\frac{\mu+1}{2}\right)$$

$$\cdot\, {}_3F_2\left(-r,\, r+2\mu+1,\, s+\frac{1+\mu}{2};\, 1+\mu,\, 1+\mu;\, 1\right)$$

(7 b)
$$\cdot\, W_{-s,\frac{\mu}{2}}(\mp i\xi')\cdot W_{s,\frac{\mu}{2}}(\mp i\eta')\cdot ds$$

$$= \pi^{1/2}\cdot(\mp i)^r\cdot\frac{r!\,\Gamma(2\mu+1)\,\Gamma(\mu+1)}{2\cdot\Gamma(2\mu+r+1)}\cdot\frac{(e^{\pm\pi i}\cdot\xi'\eta')^{\frac{1+\mu}{2}}}{(\xi'+\eta')^{\mu+\frac{1}{2}}}$$

$$\cdot\, C_r^{\mu+\frac{1}{2}}\left(\frac{\xi'-\eta'}{\xi'+\eta'}\right)\cdot H^{(1)}_{(2)\,\mu+r+\frac{1}{2}}\left(\frac{\xi'+\eta'}{2}\right)$$

$$\left(|\sigma|<\frac{1+\Re(\mu)}{2},\quad \Re(\mu)>-1,\quad \xi',\eta'>0\right).$$

Der Übergang zur Reihe läßt sich in (7 a, b) in so einfacher Weise vollziehen, daß es unterbleiben kann, die Reihe explizite anzuschreiben. Wir weisen lediglich noch einmal daraufhin, daß man dabei wieder die zwiefache Möglichkeit hat, den Integrationsweg entweder nach rechts von oben und unten her an die positiv reelle Achse der s-Ebene heranzuführen oder nach links an die negativ reelle s-Achse. Will man auf die zuerst genannte Art verfahren, so ist dazu erforderlich, daß $\xi'>\eta'$ ist. Bei der zweiten Art der Wegführung muß $\eta'>\xi'$ sein, denn anstatt den Weg nach links herumzulegen, kann man auch zunächst in (7 b) s durch $-s$ ersetzen und dann wieder den Weg auf die rechte Halbachse mit ihren Polen zusammenziehen. Dabei haben offenbar ξ' und η' lediglich ihre Rollen vertauscht. Außerdem kann man hier wieder von der Gl. 1. 2 (9) Gebrauch machen.

Wir gestalten in derselben Weise wie die Gl. 1. 2 (10) die Gl. 1. 2 (2) um und setzen zu diesem Zweck in dieser Gleichung zunächst einmal $\varkappa=(1+\mu)/2$. Dann lautet sie in Rücksicht auf die Gl. 1. 2 (1)

(8 a)
$$\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{-\sigma-i\infty}^{-\sigma+i\infty}\left\{\Gamma\left(-s+\frac{1+\mu}{2}\right)\Gamma\left(+s+\frac{1+\mu}{2}\right)\right\}^2$$

$$\cdot\left[\frac{\mathrm{M}_{+s,\frac{\mu}{2}}(\mp i\xi_0')}{\Gamma(1+\mu)}\cdot\frac{\mathrm{M}_{\pm s,\frac{\mu}{2}}(\pm i\eta_0')}{\Gamma(1+\mu)}\right]\cdot\left[\frac{\mathrm{M}_{\pm s,\frac{\mu}{2}}(\mp i\xi_1')}{\Gamma(1+\mu)}\cdot\frac{\mathrm{M}_{+s,\frac{\mu}{2}}(\pm i\eta_0')}{\Gamma(1+\mu)}\right]\cdot\mathrm{d}s$$

$$=\frac{(\xi_0'\eta_0'\cdot\xi_1'\eta_1')^{\frac{1+\mu}{2}}}{2^{\mu+\frac{1}{2}}\cdot\Gamma(\frac{1}{2}+\mu)}\cdot\int_0^{+\pi}\frac{\mathrm{J}_{\mu+\frac{1}{2}}\left(\sqrt{A-B\cdot\cos\Phi}\right)}{\left(\sqrt{A-B\cdot\cos\Phi}\right)^{\mu+\frac{1}{2}}}\cdot\sin^{2\mu}\Phi\cdot d\Phi\quad\begin{pmatrix}\Re(\mu)>-1\\ |\sigma|<\frac{1+\Re(\mu)}{2}\end{pmatrix}$$

$$A=\left(\frac{\xi_0'-\eta_0'}{2}^{*}-\frac{\xi_1'-\eta_1'}{2}\right)^2+\xi_0'\eta_0'-\xi_1'\eta_1'\qquad B=2\cdot(\xi_0'\xi_1'\cdot\eta_0'\eta_1')^{1/2}.$$

Dabei gelten in jedem der in eckige Klammern eingeschlossenen Produkte aus je zwei M-Funktionen unabhängig voneinander entweder die oberen oder die unteren Vorzeichen von Parameter und Argument. Diese Tatsache ist eine unmittelbare Folge der Gl. (2. 4a, b) des Berichts. Wir nehmen für das Folgende eine Gl. (8a) an, in der alle vorderen Parameter das positive Vorzeichen haben. Dann ersetzen wir die beiden M-Funktionen mit den Argumenten $-i\xi_0'$ und $+i\eta_0'$ gemäß der Gl. (2.9) des Berichts durch die Summe von je zwei W-Funktionen. Hat die M-Funktion das Argument $-i\cdot\xi_0'$, so wählen wir in dieser Gleichung das obere Vorzeichen, im anderen Falle das untere. Die linke Seite von (8a) nimmt darnach die Form an:

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{-\sigma-i\infty}^{-\sigma+i\infty}\left\{\Gamma\left(-s+\frac{1+\mu}{2}\right)\Gamma\left(+s+\frac{1+\mu}{2}\right)\right\}^2\cdot\frac{\mathrm{M}_{+s,\frac{\mu}{2}}(-i\xi_1')}{\Gamma(1+\mu)}\cdot\frac{\mathrm{M}_{+s,\frac{\mu}{2}}(+i\eta_1')}{\Gamma(1+\mu)}$$

$$\times\left[\frac{\mathrm{W}_{-s,\frac{\mu}{2}}(+i\xi_0')}{\Gamma\left(\frac{1+\mu}{2}-s\right)}\cdot\frac{\mathrm{W}_{-s,\frac{\mu}{2}}(-i\eta_0')}{\Gamma\left(\frac{1+\mu}{2}-s\right)}+\frac{\mathrm{W}_{+s,\frac{\mu}{2}}(-i\xi_0')\cdot\mathrm{W}_{+s,\frac{\mu}{2}}(+i\eta_0')}{\Gamma\left(\frac{1+\mu}{2}+s\right)\cdot\Gamma\left(\frac{1+\mu}{2}+s\right)}\right.$$

$$+\mathrm{e}^{+\frac{\pi i}{2}(1+\mu)}\cdot\frac{\mathrm{W}_{-s,\frac{\mu}{2}}(+i\xi_0')\cdot\mathrm{W}_{+s,\frac{\mu}{2}}(+i\eta_0')}{\Gamma\left(\frac{1+\mu}{2}-s\right)\cdot\Gamma\left(\frac{1+\mu}{2}+s\right)}$$

$$\left.+\mathrm{e}^{-\frac{\pi i}{2}(1+\mu)}\cdot\frac{\mathrm{W}_{+s,\frac{\mu}{2}}(-i\xi_0')\cdot\mathrm{W}_{-s,\frac{\mu}{2}}(-i\eta_0')}{\Gamma\left(\frac{1+\mu}{2}+s\right)\cdot\Gamma\left(\frac{1+\mu}{2}-s\right)}\right]\cdot\mathrm{d}s.$$

Von den vier nach der Auflösung der eckigen Klammer hieraus entstehenden Integralen betrachten wir zunächst die beiden ersten. Ersetzt man in der zweiten von ihnen s durch $-s$ und beachtet bei den beiden M-Funktionen die im Anschluß an Gl. (8a) gemachte Bemerkung, so unterscheiden sich die beiden Integrale nur dadurch, daß die Argumente der vier parabolischen Funktionen in ihnen durchweg das entgegengesetzte Vorzeichen tragen. Im übrigen zeigen sie aber beide

die Eigenschaft, daß ihr Integrand rechts vom Integrationswege frei von Singularitäten ist. Das bringt uns sogleich wieder auf die Vermutung, daß diese Integrale verschwindende Werte haben. Der Nachweis für die Richtigkeit dieser Vermutung läßt sich ganz ebenso führen wie im Anschluß an die Gl. (5 a), so daß wir diesen Beweis hier übergehen können.

Was nun die übrigen beiden Integrale anbetrifft, so wollen wir sie, bevor wir ihre Konvergenzeigenschaften untersuchen, auf eine möglichst zweckmäßige und einprägsame Form bringen. Da in ihnen immer drei parabolische Funktionen Argumente gleichen Vorzeichens haben, während die vierte das entgegengesetzte Vorzeichen aufweist, so erscheint es als das Beste, auch bei dieser vierten Funktion das Vorzeichen des Argumentes den übrigen anzugleichen. Machen wir zu diesem Zweck bei der jeweils in Frage kommenden M-Funktion von der Relation (2. 4 a, b) des Berichtes Gebrauch, so erreichen wir damit zugleich, daß die Exponentialfaktoren $\exp(\pm \pi i\,(1+\mu)/2)$ herausfallen. Demnach können wir dann jetzt die Gl. (8 a) auch in der Gestalt der Gl. (8 b) schreiben:

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{-s-i\infty}^{-s+i\infty} \Gamma\left(-s+\frac{1+\mu}{2}\right)\Gamma\left(+s+\frac{1+\mu}{2}\right)$$

$$\left\{ W_{-s,\frac{\mu}{2}}(+i\xi_0')\cdot W_{+s,\frac{\mu}{2}}(+i\eta_0')\cdot \frac{\mathrm{M}_{-s,\frac{\mu}{2}}(+i\xi_1')\cdot \mathrm{M}_{+s,\frac{\mu}{2}}(+i\eta_1')}{\Gamma(1+\mu)\,\Gamma(1+\mu)} \right.$$

$$\text{(8 b)}\qquad \left. + W_{+s,\frac{\mu}{2}}(-i\xi_0')\cdot W_{-s,\frac{\mu}{2}}(-i\eta_0')\cdot \frac{\mathrm{M}_{+s,\frac{\mu}{2}}(-i\xi_1')\cdot \mathrm{M}_{-s,\frac{\mu}{2}}(-i\eta_1')}{\Gamma(1+\mu)\cdot\Gamma(1+\mu)} \right\}\cdot \mathrm{d}s$$

$$= \frac{(\xi_0'\eta_0'\cdot\xi_1'\eta_1')^{\frac{1+\mu}{2}}}{2^{\mu+\frac{1}{2}}\cdot\Gamma(\mu+\frac{1}{2})}\cdot\int_0^{+\pi}\frac{J_{\mu+\frac{1}{2}}\left(\sqrt{A-B\cdot\cos\Phi}\right)}{\left(\sqrt{A-B\cdot\cos\Phi}\right)^{\mu+\frac{1}{2}}}\cdot\sin^{2\mu}\Phi\cdot d\Phi,$$

$$A=\left(\frac{\xi_0'-\eta_0'}{2}-\frac{\xi_1'-\eta_1'}{2}\right)^2+\xi_0'\eta_0'-\xi_1'\eta_1' \qquad B=2\cdot(\xi_0'\eta_0'\cdot\xi_1'\eta_1')^{1/4}$$

$$\left(\Re(\mu)>-1,\quad |s|<\frac{1+\Re(\mu)}{2};\quad \xi_0'>\xi_1'>0;\quad \eta_0'>\eta_1'>0\right).$$

Ehe wir die Zusammensetzung des Integranden von (8 b) eingehender besprechen, erledigen wir zunächst die Frage nach der Konvergenz der darin eingehenden Integrale. Zieht man zur Klärung dieser Frage dazu die verschiedenen erforderlichen Formeln heran, so ergibt sich für den Absolutbetrag der beiden Integranden von (8 b) in den Halbebenen $|\chi|\lessgtr\pi/2$ für das erste Integral der asymptotische Näherungsausdruck (8′) und beim zweiten Integral der Ausdruck (8″):

$$\frac{1}{4}\cdot|s|^{-1}\cdot(\xi_0'\eta_0'\cdot\xi_1'\eta_1')^{1/4}\cdot\exp\left\{-2\cdot\sqrt{|s|}\cdot\left[\sqrt{\xi_0'}\cdot\cos\left(\frac{\chi}{2}+\frac{\pi}{4}\right)\right.\right.$$

$$-\sqrt{\xi_1'}\cdot\left|\sin\left(\frac{\chi}{2}-\frac{\pi}{4}\right)\right|-\sqrt{\eta_1'}\cdot\left|\sin\left(\frac{\chi}{2}+\frac{\pi}{4}\right)\right| \tag{8'}$$

$$\left.\left.+\begin{pmatrix}(-)\sqrt{\eta_0'}\cdot\sin\frac{\pi}{4} & \chi\approx 0\\ (+)\sqrt{\eta_0'}\cdot\sin\left(\frac{\chi}{2}+\frac{\pi}{4}\right)\cdot\operatorname{sgn}\chi & |\chi|\leqq\frac{\pi}{2}\end{pmatrix}\right]\right\},$$

$$\frac{1}{4}\cdot|s|^{-1}\cdot(\xi_0'\eta_0'\cdot\xi_1'\eta_1')^{1/4}\cdot\exp\left\{-2\cdot\sqrt{|s|}\cdot\left[\sqrt{\eta_0'}\cdot\cos\left(\frac{\chi}{2}-\frac{\pi}{4}\right)\right.\right.$$

$$-\sqrt{\xi_1'}\cdot\left|\sin\left(\frac{\chi}{2}-\frac{\pi}{4}\right)\right|-\sqrt{\eta_1'}\cdot\left|\sin\left(\frac{\chi}{2}+\frac{\pi}{4}\right)\right| \tag{8''}$$

$$\left.\left.+\begin{pmatrix}(-)\sqrt{\xi_0'}\cdot\sin\frac{\pi}{4} & \chi\approx 0\\ (+)\sqrt{\xi_0'}\cdot\sin\left(\frac{\chi}{2}-\frac{\pi}{4}\right)\cdot\operatorname{sgn}\chi & |\chi|\leqq\frac{\pi}{2}\end{pmatrix}\right]\right\}.$$

Im besonderen verhält sich also in beiden Integralen der Exponent

$$\begin{array}{ll}\text{für } \chi=+\pi/2 & \\ & \text{wie} \quad -2\sqrt{|s|}\cdot\left[\sqrt{\eta_0'}-\sqrt{\eta_1'}\right]\\ \text{für } \chi=-\pi/2 & \\ & \text{wie} \quad -2\sqrt{|s|}\cdot\left[\sqrt{\xi_0'}-\sqrt{\xi_1'}\right].\end{array}$$

Das Integral (8 b) konvergiert also in seinen beiden Bestandteilen absolut und gleichmäßig, sobald $\eta_0'>\eta_1'$ und $\xi_0'>\xi_1'$ ist. Es haben also von den Argumenten der vier parabolischen Funktionen in (8 b) diejenigen das Übergewicht, die zu den W-Funktionen gehören. Ist etwa in einem anderen Falle $\eta_0'>\eta_1'$, aber $\xi_0'<\xi_1'$, so erhält man die zugehörige, (8 b) entsprechende Integraldarstellung, indem man in (8 a) jeweils die Funktionen $\mathrm{M}_{\mp s,\,\mu/2}(\pm i\eta_0')$ und $\mathrm{M}_{\mp s,\,\mu/2}(\mp i\xi_1')$ durch die Summe zweier W-Funktionen ersetzt. Im übrigen kann man genau so verfahren, wie es oben geschildert wurde.

Löst man die linke Seite von (8 b) in zwei einzelne Integrale auf und ersetzt in beiden Integralen s durch $+it$ mit $\sigma=0$, so hat man es wiederum mit zwei konjugiert komplexen Integralen zu tun. Die rechte Seite von (8 b) läßt sich aber gleichfalls in zwei solche Summanden zerlegen. Wie dann die Zuordnung dieser beiden konjugiert komplexen Komponenten auf den beiden Gleichungsseiten zu erfolgen hat und daß sie überhaupt in dieser Weise vorgenommen werden darf, lehrt und bestätigt die Gl. (9), in der links wie rechts jeweils die oberen

oder die unteren Vorzeichen an Parameter und Argument zusammengehören. Im übrigen können natürlich in der ersten Zeile von Gl. (9) an Stelle der angeschriebenen Vorzeichen von s auch durchweg die entgegengesetzten stehen, da sich ja an dem Wert des Integrals nichts ändert, wenn man die Integrationsvariable s durch $-s$ ersetzt. Die vierte Zeile von Gl. (9) geht aus der zweiten durch die Anwendung der Gl. (10) und der schon früher angegebenen Formel 1.2(1′) hervor.

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{-s-i\infty}^{-s+i\infty}\Gamma\left(-s+\frac{1+\mu}{2}\right)\Gamma\left(+s+\frac{1+\mu}{2}\right)\cdot \mathrm{W}_{\pm s,\frac{\mu}{2}}(\mp i\xi_0')$$

$$\cdot\,\mathrm{W}_{\mp s,\frac{\mu}{2}}(\mp i\eta_0')\,\frac{\mathrm{M}_{\pm s,\frac{\mu}{2}}(\mp i\xi_1')}{\Gamma(1+\mu)}\cdot\frac{\mathrm{M}_{\mp s,\frac{\mu}{2}}(\mp i\eta_1')}{\Gamma(1+\mu)}\cdot \mathrm{d}s$$

$$=\frac{(\xi_0'\eta_0'\cdot\xi_1'\eta_1')^{\frac{1+\mu}{2}}}{2^{\mu+1/2}}\cdot\int_0^{+\pi}\frac{\mathrm{H}^{(1)}_{\mu+\frac{1}{2}}\left(\sqrt{A-B\cdot\cos\Phi}\right)}{\left(\sqrt{A-B\cdot\cos\Phi}\right)^{\mu+\frac{1}{2}}}\cdot\sin^{2\mu}\Phi\cdot\mathrm{d}\Phi$$

$$(\xi_0'>\xi_1',\ \eta_0'>\eta_1')$$

$$(9)\qquad =\frac{(\xi_0'\eta_0'\cdot\xi_1'\eta_1')^{\frac{1+\mu}{2}}}{2^{\mu+1/2}}\cdot\frac{\Gamma(\frac{1}{2}-\mu)}{2\pi i}$$

$$\int_0^{(1+)}\left\{\frac{\mathrm{H}^{(1)}_{\mu+\frac{1}{2}}\left(\sqrt{A-B\cdot t}\right)}{\left(\sqrt{A-Bt}\right)^{\mu+\frac{1}{2}}}+\frac{\mathrm{H}^{(1)}_{\mu+\frac{1}{2}}\left(\sqrt{A+Bt}\right)}{\left(\sqrt{A+Bt}\right)^{\mu+\frac{1}{2}}}\right\}\cdot(t^2-1)^{\mu-\frac{1}{2}}\cdot\mathrm{d}t$$

$$=\pm\frac{1}{2}\cdot(\xi_0'\eta_0'\cdot\xi_1'\eta_1')^{1/2}\cdot\int_0^{\infty}\exp\left\{-\left|\frac{\xi_0'-\eta_0'}{2}-\frac{\xi_1'-\eta_1'}{2}\right|\cdot\sqrt{t^2-1}\right\}$$

$$\cdot\,\mathrm{J}_\mu\left(\sqrt{\xi_0'\eta_0'}\cdot t\right)\cdot\mathrm{J}_\mu\left(\sqrt{\xi_1'\eta_1'}\cdot t\right)\cdot\frac{t\cdot\mathrm{d}t}{i\sqrt{t^2-1}},$$

$$(9\,\mathrm{a})\qquad A=\begin{cases}\left(\frac{\xi_0'-\eta_0'}{2}-\frac{\xi_1'-\eta_1'}{2}\right)^2+\left(\sqrt{\xi_0'\eta_0'}-\sqrt{\xi_1'\eta_1'}\right)^2+2\cdot(\xi_0'\eta_0'\cdot\xi_1'\eta_1')^{1/2}\\ \left(\frac{\xi_0'-\eta_0'}{2}-\frac{\xi_1'-\eta_1'}{2}\right)^2+\xi_0'\eta_0'+\xi_1'\eta_1',\end{cases}$$

$$(9\,\mathrm{b})\qquad B=2\,(\xi_0'\eta_0'\cdot\xi_1'\eta_1')^{1/2},$$

$$(10)\qquad \frac{\mathrm{H}^{(1)}_{\mu+\frac{1}{2}}\left(\sqrt{a^2+b^2}\right)}{\sqrt{a^2+b^2}^{\,\mu+1/2}}=\pm\frac{(2/\pi)^{1/2}}{b^\mu}\cdot\int_0^{\infty}\mathrm{J}_\mu(bt)\cdot\frac{\mathrm{e}^{-|a|\sqrt{t^2-1}}}{i\sqrt{t^2-1}}\cdot t^{\mu+1}\cdot\mathrm{d}t$$

$(\Re(\mu)>-1,\ a, b$ reell, $\arg_a(t-1)=\mp\pi$, $\arg(t-1)=0$ für $t\to\infty)$.

Läßt man in (9) $\xi_1', \eta_1' \to 0$ gehen, so gelangt man wieder zu der Gl. (5 b) zurück, denn es ist

$$\int_0^\pi \sin^{2\mu} \Phi \cdot d\Phi = \frac{1}{2} \cdot \pi^{1/2} \cdot \frac{\Gamma(\frac{1}{2}+\mu)}{\Gamma(1+\mu)}.$$

Stehen in (9) die Größen ξ_0', ξ_1' usw. in einem anderen Größenverhältnis zueinander, als es die erste Gleichungszeile von (9) angibt, so ändert sich lediglich in dem oben besprochenen Sinne die Zusammensetzung des Integranden in der ersten Zeile, nicht aber die Angaben der übrigen drei Gleichungszeilen.

Was die Entwickelbarkeit von (9) in eine unendliche Reihe anbetrifft, so ist darüber alles wesentliche aus den Gl. (8′) und (8″) zu ersehen, indem man darin $\chi = 0$ setzt. Demnach kann die linke Seite der Gl. 9 durch Herumlegen des Integrationsweges nach rechts in eine unendliche Reihe entwickelt werden, falls

$$\begin{matrix} \sqrt{\eta_0'} > \sqrt{\xi_0'} + \sqrt{\xi_1'} + \sqrt{\eta_1'} \\ \sqrt{\xi_0'} > \sqrt{\eta_0'} + \sqrt{\xi_1'} + \sqrt{\eta_1'} \end{matrix} \quad \text{bei Wahl des} \begin{matrix} \text{oberen} \\ \text{unteren} \end{matrix} \text{Vorzeichens}$$

von Gl. (9) ist. Es steht demnach stets dasjenige der vier Argumente auf der linken Seite dieser beiden Ungleichungen, das zu der Funktion $W_{-s,\mu/2}$ gehört. Was es zur Folge hat, wenn man in (9) den Integrationsweg nach links herumlegt, übersieht man wieder am besten, indem man in dem Integral s durch $-s$ ersetzt und dann wie bisher verfährt. Die Möglichkeit einer Reihenentwicklung ist nach dieser Umgestaltung auf Grund der eben aufgestellten Regel gegeben, wenn

$$\text{bei Wahl des nunmehr} \begin{matrix} \text{oberen} \\ \text{unteren} \end{matrix} \text{Vorzeichens} \begin{matrix} \sqrt{\xi_0'} > \sqrt{\eta_0'} + \sqrt{\xi_1'} + \sqrt{\eta_1'} \\ \sqrt{\eta_0'} > \sqrt{\xi_0'} + \sqrt{\xi_1'} + \sqrt{\eta_1'} \end{matrix}$$

ist. Auf die explizite Wiedergabe dieser Reihen soll hier verzichtet werden.

(Eingegangen am 8. 12. 1948.)

Schrifttumsverzeichnis.

A. Erdelyi.
Math. Zeitschrift 42 (1937), 641—670.

H. Buchholz.
ZAMM 23 (1943), 47—58 und 100—118.

G. N. Watson.
Theory of Besselfunctions, Cambridge 1922.

Zur Theorie der einfach transitiven Permutationsgruppen. II.

Von

Helmut Wielandt in Mainz.

Das von SCHUR entdeckte Verfahren [1]) zur Untersuchung von Permutationsgruppen, welche eine reguläre Untergruppe $\mathfrak{H}$ des gleichen Grades enthalten, ist bisher nur im Fall kommutativer Gruppen $\mathfrak{H}$ angewandt worden, obwohl der Ansatz nicht auf diese beschränkt ist. Der Grund liegt darin, daß im Nichtkommutativen gewisse zusätzliche, bisher bei allen behandelten Beispielen angewendete Schlußweisen versagen. Um die Tragweite des ohne Zweifel noch entwicklungsfähigen Verfahrens zu prüfen und neue, allgemeiner anwendbare Schlußweisen zu entwickeln, wurde der einfachste nichtkommutative Typ, die Diedergruppe $\mathfrak{H}$ der Ordnung $n = 2z$ (definiert durch $Z^z = E$, $A^2 = E$, $AZAZ = E$) gewählt, also die allgemeinste durch zwei Elemente der Ordnung 2 erzeugbare endliche Gruppe. Die Untersuchung ließ sich in einer Weise durchführen, die weitere Klassen von auflösbaren Gruppen $\mathfrak{H}$ durchaus angreifbar erscheinen läßt, und ergab den nach den bisherigen Ergebnissen der Methode erwarteten Satz:

Satz 1. *Eine primitive Permutationsgruppe des Grades $n \geq 4$, welche eine reguläre Diedergruppe der Ordnung n enthält, ist zweifach transitiv.*

Der Beweis kann übersichtlich in der Sprache der Ringtheorie geführt werden (ohne daß deren feinere Hilfsmittel benötigt würden). Dies beruht auf der folgenden Tatsache, die als der Kern des Verfahrens von SCHUR anzusehen ist [2]): Ist $\mathfrak{G}$ eine primitive, aber nicht zweifach transitive Permutationsgruppe des Grades n mit einer regulären Untergruppe $\mathfrak{H}$ des Grades n, so gibt es im Gruppenring von $\mathfrak{H}$ einen Teilring T mit den folgenden Eigenschaften: (a) T besitzt eine lineare Basis $\mathfrak{B}_\varrho = \sum c_H^{(\varrho)} H$ $(\varrho = 1, 2, \ldots, r)$, in der neben $\mathfrak{B}_\varrho$ auch stets

[1]) I. SCHUR, Zur Theorie der einfach transitiven Permutationsgruppen. Sitzungsberichte Preuss. Akad. Wiss., Berlin 1933, phys.-math. Kl., S. 598—623. Eine elementare Darstellung gibt W. A. MANNING, On transitive groups that contain certain transitive subgroups. Bulletin Amer. math. Soc. **45** (1939), S. 783—791.

[2]) SCHUR, § 2—3. Dort ist allerdings die Beziehung $\mathfrak{r}_\varrho^* \in \mathsf{T}$ nicht hervorgehoben. Diese ergibt sich z. B. daraus, daß die Transponierte V' jeder Matrix V, die mit allen Matrizen einer gegebenen Permutationsgruppe $\mathfrak{G}$ vertauschbar ist, die gleiche Eigenschaft hat, da $\mathfrak{G}$ neben G auch stets $G' = G^{-1}$ enthält.

$\mathfrak{B}_\varrho^* = \Sigma c_H^{(\varrho)} H^{-1}$ auftritt, $c_H^{(\varrho)}$ nur die Werte 0 und 1 annimmt und $\sum_\varrho c_H^{(\varrho)} = 1$ ist für jedes $H \in \mathfrak{H}$; (b) $\mathfrak{H}$ und E sind die einzigen Untergruppen von $\mathfrak{H}$, deren Elementensumme in T liegt; (c) es ist $r > 2$. Hiernach genügt es zum Beweis von Satz 1, zu zeigen, daß im Gruppenring der Dieder-Gruppe kein Teilring T mit den Eigenschaften (a)—(c) vorhanden ist. Im Hinblick auf weitere Anwendungen erscheint es zweckmäßig, zunächst bei beliebigem $\mathfrak{H}$ die Ringe T mit der Eigenschaft (a) zu untersuchen (*S-Ringe*[4]). Wie die Zusammenstellung in Abschnitt 1 zeigt, läßt sich über sie überraschend viel aussagen.

1. S-Ringe.

$\mathfrak{H}$ sei eine abstrakte endliche Gruppe. Wir bezeichnen Teilmengen (*Komplexe*) von $\mathfrak{H}$, insbesondere Untergruppen, mit großen Frakturbuchstaben (z. B. $\mathfrak{U} \subseteq \mathfrak{H}$), Elemente von $\mathfrak{H}$ mit großen lateinischen (z. B. das Einheitselement mit E). Kleine lateinische Buchstaben bezeichnen ganze rationale Zahlen. H ist der *Gruppenring* der formalen Linearverbindungen $\alpha = \Sigma a_H H$, wobei H die verschiedenen Elemente von $\mathfrak{H}$ durchläuft ($H \in \mathfrak{H}$). Seine Elemente (*Größen*) werden im allgemeinen mit kleinen griechischen Buchstaben bezeichnet; nur die *einfachen Elemente* von H, bei denen alle Koeffizienten 0 oder 1 sind, aber nicht alle 0, wollen wir auch durch den gleichen Frakturbuchstaben bezeichnen, wie den Komplex der in ihnen wirklich auftretenden Elemente von $\mathfrak{H}$ (z. B. $\Sigma H = \mathfrak{H}$). Die Summe $\mathfrak{A}_c$ derjenigen $H \in \mathfrak{H}$, die in α mit einem festen Koeffizienten $a_H = c$ auftreten, nennen wir den *zu c gehörigen einfachen Bestandteil* von α; es ist $\alpha = \Sigma c \mathfrak{A}_c$. Ferner bezeichnen wir ständig, wenn $\alpha = \Sigma a_H H$ ist, $\Sigma a_H H^{-1} = \alpha^*$[3]; es ist $\alpha^{**} = \alpha$, $(a\alpha + b\beta)^* = a\alpha^* + b\beta^*$, $(\alpha\beta)^* = \beta^*\alpha^*$, $\alpha\alpha^* = 0$ nur für $\alpha = 0$.

Ein *S-Ring über* $\mathfrak{H}$ ist nach unserer Definition eine Teilmenge des Gruppenrings H, welche (die Elementensumme von) $\mathfrak{H}$, ferner zu jedem ihrer Elemente α auch α^* und die einfachen Bestandteile von α, schließlich zu je zweien ihrer Elemente α und β auch $\alpha\beta$ und $\alpha - \beta$ enthält. Dies folgt aus (*a*): Ein *S*-Ring ist ein Teilring von H, der eine (dann eindeutig bestimmte) Basis aus einfachen, elementefremden Größen $\mathfrak{B}_1, \ldots, \mathfrak{B}_r$ mit der Summe $\mathfrak{H}$ besitzt, unter denen neben jedem $\mathfrak{B}_\varrho$ auch $\mathfrak{B}_\varrho^*$ vorkommt. (Die *einfachen Basiselemente* $\mathfrak{B}_\varrho$ ent-

[3]) Bei Zulassung komplexer Koeffizienten a_H wäre $\alpha^* = \Sigma \bar{a}_H H^{-1}$ zu setzen.

[4]) Dieser Begriff deckt sich im wesentlichen, aber nicht ganz, mit dem des Stammrings, wie ihn Schur (§ 1) eingeführt hat. Ein Stammring ist ein Ring von Matrizen, der die Einheitsmatrix enthält und eine lineare Basis $U_1, \ldots, U_r$ mit der Eigenschaft besitzt, daß jedes der n^2 Matrixfelder bei genau einer Matrix U_ϱ mit 1, bei allen anderen mit 0 besetzt ist. Abgesehen von der abstrakteren Formulierung verlangen wir an Stelle der Einheitsmatrix zu jeder Matrix die Transponierte.

sprechen den von Schur eingeführten primären Komplexen.) Ein S-Ring heiße *primitiv*, wenn er genau zwei verschiedene Untergruppen von $\mathfrak{H}$ enthält (d. h. die Elementensummen solcher Untergruppen; die Grenzfälle $E, \mathfrak{H}$ sind dabei zugelassen). Wir stellen einige elementare Eigenschaften von S-Ringen T zusammen[5]).

(1.1) *Ist* $\alpha = \sum a_H H \in \mathsf{T}$, $f(x)$ *eine eindeutige ganzwertige Funktion, so ist auch die Größe* $f[\alpha] = \sum f(a_H) H \in \mathsf{T}$.

Denn für $\alpha = \sum c \mathfrak{A}_c$ ist $f[\alpha] = \sum f(c) \mathfrak{A}_c \in \mathsf{T}$. — Insbesondere liegt die Summe der in α wirklich auftretenden Elemente von $\mathfrak{H}$ in T.

(1.2) *Ist* $\mathfrak{A} \in \mathsf{T}$, $\mathfrak{B} \in \mathsf{T}$, *so ist auch der Durchschnitt* $\mathfrak{A} \cap \mathfrak{B} \in \mathsf{T}$.

Denn für die (schon durch die Bezeichnung als einfach vorausgesetzten) Größen $\mathfrak{A} = \sum a_\varrho \mathfrak{B}_\varrho$, $\mathfrak{B} = \sum b_\varrho \mathfrak{B}_\varrho$ ist jedes $a_\varrho, b_\varrho = 0, 1$. Daher können wir schreiben $\mathfrak{A} \cap \mathfrak{B} = \sum a_\varrho b_\varrho \mathfrak{B}_\varrho \in \mathsf{T}$. Sind $\mathfrak{A}, \mathfrak{B}$ elementefremd, so ist $\mathfrak{A} \cap \mathfrak{B} = 0$.

(1.3) *Ist* $\alpha \in \mathsf{T}$, *so ist auch die von den in* α *wirklich auftretenden Elementen von* $\mathfrak{H}$ *erzeugte Untergruppe* $\mathfrak{A} \in \mathsf{T}$.

Denn zunächst liegt die Summe σ der in α mit einem von 0 verschiedenen Koeffizienten auftretenden Elemente in T, daher wegen der Ringeigenschaft auch $\tau = \sigma + \sigma^2 + \cdots + \sigma^m$, daher auch die Summe der in τ wirklich auftretenden Elemente. Diese stimmt für genügend großes m mit $\mathfrak{A}$ überein.

(1.4) *Es sei* $\mathfrak{A}' = \sum H' \in \mathsf{T}$, $\mathfrak{A}'' = \sum H'' \in \mathsf{T}$, c *eine Zahl,* $\mathfrak{C}$ *die Summe derjenigen* $H \in \mathfrak{H}$, *für welche es genau* c *Paare* H', H'' *mit* $H' H = H''$ *gibt. Dann ist* $\mathfrak{C} \in \mathsf{T}$.

(Das Gleiche gilt für $H H' = H''$.) Denn wegen $H = H'^{-1} H''$ ist $\mathfrak{C}$ der einfache Bestandteil von $\mathfrak{A}'^* \mathfrak{A}''$ zum Koeffizienten c.

(1.5) *Es sei* $\alpha \in \mathsf{T}$, $\mathfrak{C}$ *die Summe der* $H \in \mathfrak{H}$ *mit* $\alpha H = \alpha$. *Dann ist* $\mathfrak{C}$ *eine Gruppe,* $\mathfrak{C} \in \mathsf{T}$.

(Das Gleiche gilt für $H\alpha = \alpha$.) Die Gruppeneigenschaft ist klar. Ist $\mathfrak{A}_\varkappa$ ein einfacher Bestandteil von α, $\mathfrak{C}_\varkappa$ die Summe der Lösungen von $\mathfrak{A}_\varkappa H = \mathfrak{A}_\varkappa$, so ist $\mathfrak{C} = \mathfrak{C}_1 \cap \mathfrak{C}_2 \cap \ldots \in \mathsf{T}$.

(1.6) *Ist* $\mathfrak{E}$ *dasjenige einfache Basiselement von* T, *in welchem* E *auftritt, so ist* $\mathfrak{E}$ *eine Untergruppe von* $\mathfrak{H}$ *und für jedes* $\alpha \in \mathsf{T}$ *gilt* $\mathfrak{E}\alpha = \alpha\mathfrak{E} = e\alpha$ (e = *Ordnung von* $\mathfrak{E}$).

Beweis. $\mathfrak{B}_\varrho$ sei ein einfaches Basiselement von T. Die Summe $\mathfrak{C}_\varrho$ der Lösungen von $H\mathfrak{B}_\varrho = \mathfrak{B}_\varrho$ liegt in T und enthält den Summanden E, daher auch den Summanden $\mathfrak{E}$. Also ist $\mathfrak{E}\mathfrak{B}_\varrho = e\mathfrak{B}_\varrho$, folglich $\mathfrak{E}\alpha = e\alpha$ für alle $\alpha \in \mathsf{T}$. Ebenso $\alpha\mathfrak{E} = e\alpha$. Die Gruppeneigenschaft folgt aus

---

[5]) (1.1)—(1.3) sowie (1.7) rühren von Schur (§ 1—3) her. (1.8) ist in Teil I dieser Arbeit, Math. Zeitschr. **40** (1935), S. 582—587, für diejenigen S-Ringe bewiesen worden, die durch Einbettung von $\mathfrak{H}$ in eine Permutationsgruppe $\mathfrak{G}$ entstehen; auf die Allgemeingültigkeit hat mich Herr R. Kochendörffer aufmerksam gemacht. — Zusätzlich mag erwähnt werden, daß jeder S-Ring T halbeinfach ist: Aus $\alpha \mathsf{T} \alpha = 0$ folgt $\alpha\, \alpha^* (\alpha \alpha^*)^* = 0$, $\alpha \alpha^* = 0$, $\alpha = 0$.

$\mathfrak{E}\mathfrak{E} = e\mathfrak{E}$. — Man kann den Satz auch so aussprechen, daß jedes einfache Basiselement von T aus vollen zweiseitigen Nebengruppen von $\mathfrak{H}$ nach $\mathfrak{E}$ besteht. — Aus (1.2) und (1.3) in Verbindung mit der Moduleigenschaft folgt, daß die in einem S-Ring enthaltenen Untergruppen von $\mathfrak{H}$ einen Verband bilden. Die kleinste unter ihnen ist $\mathfrak{E}$, die größte $\mathfrak{H}$. Primitiv sind diejenigen S-Ringe, die außer $\mathfrak{E}$ und $\mathfrak{H}$ keine Untergruppe von $\mathfrak{H}$ enthalten.

(1.7) *Ist* T *primitiv,* $\alpha \in \mathsf{T}$, $\alpha \neq c\mathfrak{E}$, *so erzeugen die in* α *auftretenden Elemente von* $\mathfrak{H}$ *die ganze Gruppe* $\mathfrak{H}$.

Beweis. T enthält die von den in α auftretenden Elementen erzeugte Untergruppe $\mathfrak{A}$. Ist $\mathfrak{A} \neq \mathfrak{H}$, so ist wegen der Primitivität $\mathfrak{A} = \mathfrak{E}$, also enthält α nur Elemente aus $\mathfrak{E}$. Dann ist aber $\alpha = c\mathfrak{E}$, da $\mathfrak{E}$ ein einfaches Basiselement von T ist.

(1.8) *Ist* T *primitiv,* $\alpha \in \mathsf{T}$, $\alpha \neq c\mathfrak{H}$, *so folgt aus* $\alpha H = \alpha$ *oder* $H\alpha = \alpha$: $H \in \mathfrak{E}$.

Denn die H mit $\alpha H = \alpha$ bilden eine Gruppe $\mathfrak{C} \in \mathsf{T}$ mit $\mathfrak{C} \neq \mathfrak{H}$. — Über jeder Gruppe $\mathfrak{H}$, deren Ordnung $n > 1$ ist, gibt es mindestens einen S-Ring, welcher primitiv ist und E enthält, nämlich den Ring T_0 der Größen $\alpha = xE + y(\mathfrak{H} - E)$. Gibt es keinen weiteren, so ist nach dem erwähnten Satz von Schur gewiß jede primitive Permutationsgruppe $\mathfrak{G}$ des Grades n, welche eine zu $\mathfrak{H}$ isomorphe reguläre Untergruppe enthält, zweifach transitiv. (Ob die Bedingung auch notwendig ist, ist nicht bekannt.) Satz 1 ist daher in dem folgenden enthalten:

Satz 2. T *sei ein* E *enthaltender primitiver* S*-Ring über der Diedergruppe* $\mathfrak{H}$ *der Ordnung* $n \geqq 4$. *Dann ist* $\mathsf{T} = \mathsf{T}_0$.

Dem Beweis dieses Satzes ist der Rest der Arbeit gewidmet.

2. Rechenregeln in T.

Der zyklische, von dem Element Z erzeugte Normalteiler der Ordnung $z = n/2$ der Diedergruppe $\mathfrak{H}$ werde mit $\mathfrak{Z}$ bezeichnet. Ist A ein nicht in $\mathfrak{Z}$ gelegenes Element von $\mathfrak{H}$, so ist $A^2 = E$, $AZA = Z^{-1}$, $\mathfrak{H} = \mathfrak{Z} + \mathfrak{Z}A$. Jede Größe $\tau \in \mathsf{T}$ läßt sich eindeutig in einen *zyklischen Teil* τ' und einen *Restteil* τ'' zerlegen: $\tau = \tau' + \tau''$, wobei τ' und $\tau''A$ im Gruppenring von $\mathfrak{Z}$ liegen. Für das Rechnen mit diesen Bestandteilen gilt offenbar, wenn $\sigma, \tau \in \mathsf{T}$:

$$(2.1)\qquad \begin{aligned} (a\sigma + b\tau)' &= a\sigma' + b\tau', \quad & (a\sigma + b\tau)'' &= a\sigma'' + b\tau'', \\ (\sigma\tau)' &= \sigma'\tau' + \sigma''\tau'', & (\sigma\tau)'' &= \sigma'\tau'' + \sigma''\tau'. \end{aligned}$$

Wir haben vorausgesetzt, daß T primitiv und $E \in \mathsf{T}$ ist. Daraus folgt nach (1.7) wegen $\mathfrak{E} = E$:

$$(2.2)\qquad \textit{Ist } \tau'' = 0, \textit{ so ist } \tau = cE.$$

Hieraus folgern wir:

$$(2.3)\qquad \textit{Ist } \tau' = 0, \textit{ so ist } \tau = 0.$$

Andernfalls dürften wir τ als einfach annehmen. Nach (2.1) ist $(\tau^2)'' = 0$, daher nach (2.2) $\tau^2 = cE$, also enthält τ, als einfache Größe, nur *ein* Element von $\mathfrak{H}$. Dieses erzeugt eine Untergruppe der Ordnung 2 von $\mathfrak{H}$, entgegen (1.7). — Da der Restteil τ'' nur Elemente der Ordnung 2 enthalten kann, ist $\tau'' = \tau^{*''}$, $(\tau - \tau^*)'' = 0$. Daher gilt $\tau - \tau^* = cE$, worin aber offenbar $c = 0$ ist:

(2.4) *Es ist* $\tau = \tau^*$.

Hieraus folgt $\tau' A = A\tau'$. Da auch $\tau'(\sigma'' A) = (\sigma'' A)\tau'$ ist, ergibt sich:

(2.5) *Es ist* $\tau'\sigma'' = \sigma''\tau'$.

Vergleichen wir dies mit (2.1), so haben wir für $\sigma = \tau$:

(2.6) *Es ist* $(\tau^2)'' = 2\tau'\tau''$.

Trotz der Nichtkommutativität von $\mathfrak{H}$ ist T kommutativ:

(2.7) *Es ist* $\sigma\tau = \tau\sigma$.

Denn nach (2.4) ist $\sigma\tau = (\sigma\tau)^* = \tau^*\sigma^* = \tau\sigma$.

3. Konjugierte und rationale Größen in T.

In diesem Abschnitt sei m eine zu n teilerfremde ganze Zahl. Wäre $\mathfrak{H}$ kommutativ, so könnten wir nach Schur (§ 4) schließen, daß T neben jeder Größe $\tau = \Sigma a_H H$ auch $\Sigma a_H H^m$ enthält. Der Beweis beruht auf der Entwickelung von τ^m nach dem Polynomialsatz und fällt mit der Kommutativität von $\mathfrak{H}$. Doch läßt sich für die Diedergruppe eine verwandte Schlußweise entwickeln. Die folgende Tatsache erlaubt es, *konjugierte Größen* $\tau^{(m)}$ einzuführen:

(3.1) *Hat ein Element* $\tau \in \mathsf{T}$ *den zyklischen Teil* $\tau' = \Sigma a_\nu Z^\nu$, *so enthält* T *genau eine Größe* $\tau^{(m)}$, *für welche* $\tau^{(m)'} = \Sigma a_\nu Z^{\nu m}$ *gilt.*

(Es ist zu beachten, daß über die Restteile von τ und $\tau^{(m)}$ nichts ausgesagt wird.) Zum Beweis wählen wir eine Primzahl $p > 2\max|a_\nu|$ aus der Restklasse $p \equiv m \bmod n$, was nach dem bekannten Satz von Dirichlet stets möglich ist, und berechnen $\tau^p \bmod p$ nach der Binomialformel; dabei bedeutet Kongruenz zweier Größen aus H Kongruenz entsprechender Koeffizienten. Es wird

$$\tau^p = (\tau' + \tau'')^p \equiv \tau'^p + \tau''^p \equiv \Sigma a_\nu Z^{\nu m} + \tau''^p.$$

Da p ungerade ist (wie m), enthält τ''^p nur Elemente aus $\mathfrak{Z}A$, also folgt

(3.2) $$\tau^{p'} \equiv \Sigma a_\nu Z^{\nu m} \bmod p.$$

Erklären wir die Funktion $f(x)$ als den absolut kleinsten Rest von $x \bmod p$ und setzen wir $f[\tau^p] = \tau^{(m)}$, so liegt $\tau^{(m)}$ nach (1.1) in T und hat wegen (3.2) und der Größenbedingung für p den angegebenen zyklischen Teil. Es ist

(3.3) $$\tau^{(m)} \equiv \tau^p \bmod p.$$

Daß es in T keine weitere Größe mit demselben zyklischen Teil gibt, folgt aus (2.3). Insbesondere ist $\tau^{(m)}$ von der speziellen Wahl von p unabhängig und es ist $\tau^{(-1)} = \tau^*$.

(3.4) *Die Abbildung* $\tau \to \tau^{(m)}$ *ist ein Isomorphismus des Ringes* T.

Beweis. Die Gleichung $(a\sigma + b\tau)^{(m)} = a\sigma^{(m)} + b\tau^{(m)}$ folgt daraus, daß beide Seiten denselben zyklischen Teil besitzen. Zum Beweis der Gleichung $(\sigma\tau)^{(m)} = \sigma^{(m)}\tau^{(m)}$ wählen wir die Primzahl $p \equiv m \bmod n$ größer als die maximale Differenz aller in dieser Gleichung vorkommenden Koeffizienten. Nach (3.3) wird $\bmod p$ $(\sigma\tau)^{(m)} \equiv (\sigma\tau)^p = \sigma^p\tau^p \equiv \sigma^{(m)}\tau^{(m)}$, woraus wegen der Größenbedingung für p die behauptete Gleichung folgt.

(3.5) *Bilden* $\mathfrak{B}_1, \ldots, \mathfrak{B}_r$ *die einfache Basis von* T, *so stimmen sie bis auf die Reihenfolge mit* $\mathfrak{B}_1^{(m)}, \ldots, \mathfrak{B}_r^{(m)}$ *überein.* $\mathfrak{B}_\varrho$ *und* $\mathfrak{B}_\varrho^{(m)}$ *enthalten gleich viel Elemente von* $\mathfrak{H}$.

Beweis. Im zyklischen Teil von $\mathfrak{B}_\varrho^{(m)}$ treten nach Definition nur die Koeffizienten 0 und 1 auf; nach (1.1) und (2.3) gilt dasselbe für den Restteil, daher ist $\mathfrak{B}_\varrho^{(m)}$ einfach. Nach (3.4) ist weiter $\Sigma\mathfrak{B}_\varrho^{(m)} = \mathfrak{H}^{(m)} = \mathfrak{H}$, also sind die $\mathfrak{B}_\varrho^{(m)}$ bis auf die Reihenfolge mit den $\mathfrak{B}_\varrho$ identisch. Besteht $\mathfrak{B}_\varrho$ aus n_ϱ Elementen, so erhalten wir unter Berücksichtigung von $\mathfrak{B}_\varrho = \mathfrak{B}_\varrho^*$:

$$\mathfrak{B}_\varrho^2 = n_\varrho E + \Sigma c_\lambda \mathfrak{B}_\lambda, \qquad \mathfrak{B}_\varrho^{(m)2} = n_\varrho E + \Sigma c_\lambda \mathfrak{B}_\lambda^{(m)},$$

wobei E in Σ nicht auftritt. Hiernach besteht auch $\mathfrak{B}_\varrho^{(m)}$ aus n_ϱ Elementen.

(3.6) *Sind* l *und* m *zu* n *teilerfremd, so ist* $\tau^{(l)(m)} = \tau^{(lm)}$. *Ist* $l \equiv m \bmod n$, *so ist* $\tau^{(l)} = \tau^{(m)}$.

Die Übereinstimmung der zyklischen Teile ist trivial, die der Restteile folgt aus (2.3). — Hiernach können wir T in Klassen konjugierter Elemente einteilen; die τ enthaltende Klasse besteht aus den endlich vielen verschiedenen unter den Konjugierten $\tau^{(m)}$, worin m alle zu n teilerfremden ganzen Zahlen durchläuft. Besteht die Klasse von τ nur aus τ allein, so heiße τ eine *rationale Größe* von T. Eine rationale Größe τ stimmt also mit allen ihren Konjugierten überein; dies bedeutet, daß bei der Darstellung von τ durch die einfache Basis $\mathfrak{B}_1, \ldots, \mathfrak{B}_r$ konjugierte Basisgrößen denselben Koeffizienten besitzen. Bezeichnen wir die Summe der voneinander verschiedenen Konjugierten zu $\mathfrak{B}_\varrho$ mit $\mathfrak{A}_\varrho$ und sind $\mathfrak{A}_1 = E, \mathfrak{A}_2, \ldots, \mathfrak{A}_s$ die verschiedenen unter den $\mathfrak{A}_\varrho$, so sind diese einfach, ihre Summe ist $\mathfrak{H}$ und $\tau = \Sigma c_\sigma \mathfrak{A}_\sigma$ durchläuft genau die Gesamtheit P der rationalen Größen von T, wenn man den c_σ alle ganzzahligen Werte erteilt.

(3.7) P *ist ein* E *enthaltender primitiver S-Ring über* $\mathfrak{H}$.

Denn P ist nach (3.4) ein Ring, besitzt die einfache Basis $\mathfrak{A}_1 = E, \ldots, \mathfrak{A}_s$ und enthält zu jedem Element τ auch $\tau^* = \tau$. Da $\mathsf{P} \subseteq \mathsf{T}$ ist und T keine von E und $\mathfrak{H}$ verschiedene Untergruppe von $\mathfrak{H}$ enthält, ist P ebenfalls primitiv.

(3.8) *Ist* $\mathsf{P} = \mathsf{T}_0$, *so ist* $\mathsf{T} = \mathsf{T}_0$.

(T_0 besteht nach Definition aus den Größen $xE + y(\mathfrak{H} - E)$.)

Beweis. Ist $\mathsf{P} = \mathsf{T}_0$, so ist $\mathfrak{A}_2 = \mathfrak{H} - E$. Enthält nun der zyklische Teil von $\mathfrak{B}_2 a$, der Restteil von $\mathfrak{B}_2 b$ Elemente und ist die Anzahl der verschiedenen Konjugierten von $\mathfrak{B}_2$ gleich k, so folgt aus (3.5): $ka = z - 1$, $kb = z$, daher $k \mid 1$, $k = 1$, $\mathfrak{B}_2 = \mathfrak{A}_2 = \mathfrak{H} - E$.

Wie (3.8) zeigt, können wir beim Beweis von Satz 2 weiterhin ohne Beschränkung der Allgemeinheit die zusätzliche Voraussetzung machen, daß $\mathsf{T} = \mathsf{P}$ ist, d. h. nur aus rationalen Größen besteht:

(3.9) *Der zyklische Teil* τ' *eines Elements* $\tau \in \mathsf{T}$ *enthält neben dem Glied* aZ^r *stets auch die Glieder* aZ^{rm}, *wobei* m *die zu* n *teilerfremden Exponenten durchläuft.*

4. Abschluß des Beweises von Satz 2.

Wir versuchen, ähnlich wie in Teil I dieser Arbeit zum Ziel zu kommen, indem wir zeigen, daß eine gewisse einfache Basisgröße von T im wesentlichen aus vollen Nebengruppen nach einer passenden Untergruppe von $\mathfrak{H}$ besteht und daraufhin $= \mathfrak{H} - E$ sein muß. Die Durchführung ist etwas verwickelt, namentlich im Falle eines geraden z. Im folgenden bedeute $\mathfrak{U} \neq E$ eine Untergruppe von $\mathfrak{Z}$, u ihre Ordnung ($1 < u \leqq z$). $\mathfrak{U}$ ist Normalteiler von $\mathfrak{H}$. Wir nennen eine Größe α des Gruppenrings H teilbar durch $\mathfrak{U}$, in Zeichen $\mathfrak{U} \mid \alpha$, wenn sie aus vollen Nebengruppen nach $\mathfrak{U}$ besteht; genauer: wenn $\alpha = \mathfrak{U}\beta$ ist mit $\beta \in \mathsf{H}$; es ist dann auch $\alpha = \beta\mathfrak{U}$.

(4.1) *Ist* $\tau \in \mathsf{T}$, $\mathfrak{U} \mid \tau''$, *so ist* $\tau \in \mathsf{T}_0$, d. h. $\tau = aE + b\mathfrak{H}$.

Beim Beweis dürfen wir offenbar u als Primzahl annehmen, außerdem können wir uns auf einfache τ beschränken (diejenigen Gruppenelemente, die in τ'' mit einem festen Koeffizienten auftreten, bilden volle Nebengruppen nach $\mathfrak{U}$). Wir berechnen $\tau^u \bmod u$. Es ist $\mathfrak{U}^2 = u\mathfrak{U} \equiv 0$, also $\tau^u \equiv \tau'^u + \tau''^u \equiv \tau'^u$. Erklären wir die Funktion $f(x)$ als den absolut kleinsten Rest von $x \bmod u$ und setzen wir $f[\tau^u] = \sigma$, so ist $\sigma \in \mathsf{T}$, $\sigma'' = 0$. Nach (2.2) folgt $\sigma = cE$, also $\tau'^u \equiv cE$. Ist daher $\tau' = \Sigma^\nu Z^\nu$ und ist Y ein beliebiges Element $\neq E$ aus $\mathfrak{Z}$, so besitzt die Gleichung $X^u = Y$, wenn überhaupt, eine durch u teilbare Anzahl von Lösungen $X = Z^\nu$ unter den Gliedern von τ'. Da andererseits in $\mathfrak{Z}$ im Ganzen nur u Lösungen existieren und diese eine Nebengruppe nach $\mathfrak{U}$ bilden, hat τ' die Gestalt $\tau' = \alpha + \beta\mathfrak{U}$, wobei α die Summe der Lösungen der Gleichung $X^u = E$ unter den Gliedern von τ' ist; sollte unter diesen ein Element der Ordnung u auftreten, so kommen nach (3.9) alle $u - 1$ Elemente der Ordnung u, die in $\mathfrak{Z}$ vorhanden sind, gleichzeitig vor. Hieraus folgt, daß entweder τ' oder $\tau' - E$ oder $\tau' + E$ durch $\mathfrak{U}$ teilbar ist. Da nach Voraussetzung auch τ'' durch $\mathfrak{U}$ teilbar ist, ist entweder τ oder $\tau - E$ oder $\tau + E$ durch $\mathfrak{U}$ teilbar. Diese Größe ist dann nach (1.8) von der Gestalt $d\mathfrak{H}$. Damit ist (4.1) bewiesen.

(4.2) *Es sei* $\mathfrak{U}|\tau'$ *für eine einfache Größe* $\tau \neq \mathfrak{H}$ *aus* T. *Dann ist* $u = 2$.

Beweis. τ' enthalte c, τ'' d Elemente aus $\mathfrak{H}$. Nach (2.6) ist $\tau^{2''} = 2\tau'\tau''$. Daher ist $\mathfrak{U}|\tau^{2''}$, also nach (4.1) $\tau^2 = aE + b\mathfrak{H}$, d. h.

$$\tau'^2 + \tau''^2 = aE + b\mathfrak{Z} \tag{4.3}$$

und $2\tau'\tau'' = b\mathfrak{Z}A$. Ein Vergleich der Elementezahlen ergibt

$$c^2 + d^2 = a + bz, \quad 2cd = bz,$$

daher

$$a = (c-d)^2, \quad b = 2cd/z. \tag{4.4}$$

Nun vergleichen wir für ein Element $U \neq E$ aus $\mathfrak{U}$ die Koeffizienten in (4.3). Rechts ist er b. Wegen $\mathfrak{U}|\tau'$ ist $U\tau' = \tau'$, also kommt U in $\tau'^2 = \tau'\tau'^*$ so oft vor, als τ' Elemente enthält, d. h. mit dem Koeffizienten c; in τ''^2 ist der Koeffizient von U jedenfalls nicht negativ. Daher ist $b \geqq c$, somit nach (4.4) $d \geqq z/2$. Wendet man die gleiche Betrachtung auf $\mathfrak{H} - \tau$ anstatt τ an, so ergibt sich $z - d \geqq z/2$. So erhalten wir

$$d = z/2, \quad b = c \tag{4.5}$$

(die zweite Hälfte nach (4.4)). Hiermit folgt weiter aus (4.3), daß U in τ''^2 überhaupt nicht auftritt. Dies besagt, daß kein Element von $\mathfrak{H}$ gleichzeitig in τ'' und in $U\tau''$ auftritt. Da jede dieser beiden Größen die Summe von $d = z/2$ Elementen aus $\mathfrak{Z}A$ ist, ergibt sich

$$\tau'' + U\tau'' = \mathfrak{Z}A. \tag{4.6}$$

Hieraus folgt $u = 2$. Denn gäbe es in $\mathfrak{U}$ ein von E und U verschiedenes Element VU, so hätten wir entsprechend zu (4.6) die Gleichungen $\tau'' + VU\tau'' = \mathfrak{Z}A$, $\tau'' + V\tau'' = \mathfrak{Z}A$, also $VU\tau'' = V\tau''$, $U\tau'' = \tau''$, entgegen (4.6). Damit ist der Beweis von (4.2) beendet. — Für ungerade z kann nie $u = 2$ sein. Die folgende Betrachtung bezieht sich nur auf gerade z.

(4.7) *Es sei* $\mathfrak{U}_1$ *die Untergruppe der Ordnung* 2 *von* $\mathfrak{Z}$, $\tau \neq \mathfrak{H}$ *eine einfache Größe aus* T, $\mathfrak{U}_1|\tau'$. *Dann gilt für die Anzahl* c *der in* τ' *auftretenden Elemente* $c > z/3$, *und es ist* $z \neq 2^k$ $(k = 1, 2, \ldots)$.

Beweis. Da die Voraussetzungen von (4.2) erfüllt sind, können wir die Koeffizienten von E in (4.3) vergleichen: $c + d = a + b$. Berücksichtigen wir $b = c$, so folgt

$$a = d,$$

also nach (4.4) und (4.5)

$$d = (c-d)^2, \quad z = 2(c-d)^2. \tag{4.8}$$

Hieraus ergibt sich

$$c = d + (c-d) = z/2 \pm \sqrt{z/2} \geqq z/2 - \sqrt{z/2}$$

und daher $c > z/3$ für $z \geqq 19$. Von den Werten $z < 19$ bleiben nur $2, 8, 18$ zu untersuchen, da z nach (4.8) das Doppelte einer Quadratzahl sein muß.

Im Fall $z = 18$ ist $d = 9$, $c = 9 \pm 3$, so daß es genügt, die Möglichkeit $c = 6$ zu widerlegen (für $c = 12$ geht man von τ zu $\mathfrak{H} - \tau$ über). Die sechs in τ' auftretenden Elemente von $\mathfrak{Z}$ können nicht alle der Gleichung $X^6 = E$ genügen, da sonst τ' die Untergruppe der Ordnung 6 von $\mathfrak{Z}$ wäre, was nach (4.2) unmöglich ist. In τ' tritt also ein Element der Ordnung 9 oder 18 auf; dann treten aber nach (3.9) alle sechs in $\mathfrak{Z}$ vorhandenen Elemente dieser selben Ordnung auf, d. h. τ' besteht entweder aus den sechs Elementen der Ordnung 9 oder aus den sechs Elementen der Ordnung 18 von $\mathfrak{Z}$. Aber keine dieser beiden Gesamtheiten gestattet die Multiplikation mit dem Element U der Ordnung 2, was wir vorausgesetzt hatten. Also kann der Fall $z = 18$ unter den Voraussetzungen von (4.7) nicht auftreten.

Wir haben noch zu zeigen, daß auch $z = 2^k$ nicht auftreten kann. In diesem Fall wäre nach (4.8) z eine ungerade, d eine gerade Potenz von 2:

$$d = 2^{2l}, \quad c = 2^{2l} \pm 2^l. \tag{4.9}$$

Wir dürfen annehmen, daß E in τ nicht auftritt (sonst gehen wir zu $\mathfrak{H} - \tau$ über). Nach (3.9) ist dann τ' die Summe verschiedener σ_q ($q = 1, 2, \ldots$), wobei σ_q die Summe der Elemente der Ordnung 2^q in $\mathfrak{Z}$ bezeichnet. Da σ_q genau 2^{q-1} Elemente enthält, zerfällt c in eine Reihe voneinander verschiedener Summanden der Form 2^{q-1}. Summanden $< 2^l$ können hierbei nicht auftreten, da $2^l | c$ ist. Daher ist stets $q > l$. Alle diese σ_q aber sind durch die Untergruppe $\mathfrak{U}_l$ der Ordnung 2^l von $\mathfrak{Z}$ teilbar; daher ist $\mathfrak{U}_l | \tau'$. Wendet man (4.2) auf $\mathfrak{U}_l$ an, so folgt: Ordnung $\mathfrak{U}_l \leqq 2$, d. h. $l \leqq 1$. Der Fall $l = 0$ ist unmöglich, da dann $z = 2$, $c = 0$ sein müßte, im Widerspruch zu (2.3). Aber auch $l = 1$, d. h. $z = 8$, ist unmöglich; denn hier ist nach (4.9) $d = 4$, $2 | c$, also auch $a = 4$, $2 | b$. Nach (4.3) folgt $2 | (\tau'^2 + \tau''^2)$. Da wegen $\mathfrak{U}_1 | \tau'$ auch $2 | \tau'^2$ ist, haben wir $2 | \tau''^2$. Andererseits darf, wie unter (4.5) gezeigt wurde, das Element U der Ordnung 2 aus $\mathfrak{Z}$ in τ''^2 überhaupt nicht auftreten. Schreibt man also $\tau'' = \Sigma^\nu Z^\nu A$, so müssen die vier voneinander verschiedenen Exponenten ν so beschaffen sein, daß unter ihren 16 mod 8 zu betrachtenden Differenzen jede eine gerade Anzahl von Malen und die Differenz 4 mod 8 überhaupt nicht auftritt. Man prüft leicht nach, daß diese beiden Bedingungen unverträglich sind (man kann dabei $\nu_1 = 0$ und $\nu_2 = 2$ annehmen). Damit ist (4.7) bewiesen. Wir führen nun den Beweis von Satz 2 zu Ende, zunächst für den Fall, daß z eine Potenz von 2 ist.

(4.10) *Ist* $z = 2^k$, *so ist* $\mathsf{T} = \mathsf{T}_0$.

Beweis. Andernfalls gäbe es eine einfache Größe $\tau \in \mathsf{T}$, die weder E noch das Element U der Ordnung 2 aus $\mathfrak{Z}$ enthält. Wegen der Rationalität bestünde τ' aus gewissen der im vorigen Beweis eingeführten Summen σ_q ($q \geqq 2$) und wäre daher wie diese durch die Gruppe $E + U = \mathfrak{U}_1$ teilbar, entgegen (4.7).

(4.11) *Besitzt z einen ungeraden Primteiler, so ist* $\mathfrak{T} = \mathfrak{T}_0$.

Beweis. Wir wählen eine einfache Basisgröße τ von $\mathfrak{T}$ derart aus, daß die in ihrem zyklischen Teil τ' auftretenden Elemente eine von E verschiedene Gruppe $\{V\}$ möglichst kleiner Ordnung v erzeugen. Diese Ordnung ist keine Potenz von 2; denn sonst wäre einerseits $v \leqq z/3$ (wegen $v|z$), andererseits wäre entweder τ' oder $\tau' + E$ durch $\mathfrak{U}_1$ teilbar (nach (3.9)), also wäre nach (4.7) $v > z/3$.

Sei nun p ein ungerader Primteiler von v. Verstehen wir unter $f(x)$ den absolut kleinsten Rest von $x \bmod p$ und setzen wir $f[\tau^p] = \sigma$, so treten in der zu τ'^p kongruenten Größe σ' nur Elemente aus der echten Untergruppe $\{V^p\}$ von $\{V\}$ auf. Wegen der Minimaleigenschaft von $\{V\}$ ist $\sigma' = aE$, also $\tau'^p \equiv aE \bmod p$. Hieraus folgt wie beim Beweis von (4.1), daß entweder τ' oder $\tau' - E$ oder $\tau' + E$ durch die Untergruppe der Ordnung p von $\mathfrak{Z}$ teilbar ist. Die zweite Möglichkeit scheidet aus, weil E in τ nicht auftritt. Daher ist nach (4.2), weil $p > 2$ ist, entweder τ oder $\tau + E$ gleich $\mathfrak{H}$. Für eine einfache Basisgröße kommt nur der zweite Fall in Betracht. Es ist also $\tau = \mathfrak{H} - E$, $\mathfrak{T} = \mathfrak{T}_0$.

(Eingegangen am 18. Mai 1949.)

Bemerkungen zu einer Arbeit von Herrn J. Heinhold.

Von

Rudolf Steuerwald in München.

§ 1.

Einleitung.

Diese Notiz bezieht sich auf die Abhandlung: J. Heinhold, Verallgemeinerung und Verschärfung eines Minkowskischen Satzes, Math. Zeitschr. 1939, Bd. 44, Heft 5, S. 659—688 (zitiert: „H."). Aus dieser werden nachstehende Vereinbarungen, Definitionen und Ergebnisse hier benützt.

Alle vorkommenden Zahlen sind reell. „Ganze" Zahlen bedeuten ganze rationale Zahlen. Kongruenzen ohne Angabe eines Moduls sind stets solche nach dem Modul 1.

Unter Zugrundelegung einer binären quadratischen Form $f(x, y) = a x^2 + 2 b x y + c y^2$ bedeute $\varphi = \varphi(a, b, c)$ die untere Grenze aller C^2 mit der folgenden Eigenschaft: Zu zwei beliebigen Zahlen μ, ν gibt es immer kongruente Zahlen $x \equiv \mu$, $y \equiv \nu$, so daß $|f(x, y)| \leqq C^2$. Wird die untere Grenze φ von den C^2 angenommen, so soll sie mit φ_1 bezeichnet werden. In diesem Falle gibt es zu beliebigen μ, ν stets $x \equiv \mu$, $y \equiv \nu$, so daß $|f(x, y)| \leqq \varphi_1$. Paare μ, ν, für die hierbei das Gleichheitszeichen notwendig ist, werden mit μ_1, ν_1 bezeichnet. Solche sind im Falle $\varphi = \varphi_1$ stets vorhanden.

Für semidefinite (H. § 1) und definite (H. § 2) Formen läßt sich φ bestimmen. Für jede indefinite Form (H. § 3) läßt sich wenigstens eine obere Schranke $s(a, b, c) \geqq \varphi(a, b, c)$ angeben, und dazu ein oder mehrere Zahlenpaare x, y — diese sollen hier mit x_1, y_1 bezeichnet werden —, welche folgendes leisten: erstens ist $|f(x_1, y_1)| = s$, und zweitens befinden sich, wenn $s = \varphi_1$ ist, die zu f gehörigen Paare μ_1, ν_1 unter den Paaren $\mu \equiv x_1$, $\nu \equiv y_1$. Demnach ist dann und nur dann $s > \varphi$, wenn es zu jedem der Funktion f zugeordneten Paar x_1, y_1 ein Paar $x \equiv x_1$, $y \equiv y_1$ gibt, für welches $|f(x, y)| < s$ ist. Wo ein solches Paar x, y existiert, soll es künftig mit x_2, y_2 bezeichnet werden.

Hier interessieren nur die auf zwei spezielle Formen bezüglichen Ergebnisse von H. § 3 E, S. 680 ff., die daher nachstehend zusammengefaßt werden. Dabei wird aus Symmetriegründen in der Bezeichnungs-

weise etwas von H. abgewichen.[1]) Aber hier wie dort bedeuten p und q ganze Zahlen.

I. $f_I(x, y) = x^2 - Dy^2$ (D natürliche Zahl)

D	s	x_1	y_1
q^2+p $1 \leqq p \leqq q$	$\frac{2q+1-p}{4}$	$\frac{q+1}{2}$	$\frac{1}{2}$
q^2-p $0 \leqq p \leqq q-1$	$\frac{2q-1-p}{4}$	$\frac{q-1}{2}$ dazu $\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$ 0 für $p=0,\ q=1$

II. $f_{II}(x, y) = \left(x + \frac{y}{2}\right)^2 - D\left(\frac{y}{2}\right)^2$ ($D = 4k+1$, k natürliche Zahl)

D	s	x_1	y_1
$(2q-1)^2+4p$ $1 \leqq p \leqq q$	$\frac{2q-p}{4}$	$\frac{q}{2}$ dazu $\frac{q-1}{2}$ ferner $\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$ $\frac{1}{2}$ für $p=q$ 0 für $p=q=1$
$(2q+1)^2-4p$ $0 \leqq p \leqq q-1$	$\frac{2q-p}{4}$	$\frac{q-1}{2}$	$\frac{1}{2}$

In beiden Fällen kommt jede zulässige Zahl D genau einmal vor. In den auf diese beiden Formen bezüglichen Tabellen (H. S. 683/684) finden sich Werte von D, für welche nicht entschieden wird, ob $s = \varphi_1$ oder $s > \varphi$ ist. Diese Frage soll hier nach einer kurzen Vorbereitung (§ 2) für f_I und gewisse D, darunter alle in der Tabelle unerledigten (§ 3), sodann für f_{II} und alle D (§ 4) beantwortet werden.

§ 2.

Ein Hilfssatz.

In dem folgenden Satz und seinem Beweis sind entweder überall die oberen oder überall die unteren Vorzeichen zu nehmen.

---

[1]) Vgl. H. S. 681, (17) bis (20). Um von den dortigen zu unseren Bezeichnungen zu gelangen, setze man

in (17) $p = p'$, $q = q'$ in (18) $2q+1-p = p'$, $q+1 = q'$
in (19) $p = p'$, $q+1 = q'$ in (20) $2q+2-p = p'$, $q+1 = q'$

und lasse dann die Akzente wieder weg.

Satz 1. *Sind p, q, r, u, v, w ganze Zahlen, welche den Bedingungen*

$$p \geqq 1, \quad r \geqq \frac{3}{2} \mp \frac{1}{2}, \quad q = p\,r,$$
$$v \neq 0, \quad (u, v) = 1, \quad |w| < 2q \pm 1 - p,$$
$$u^2 - D\,v^2 = w \quad \text{mit} \quad D = q^2 \pm p$$

genügen, so ist $w = \mp p$ oder $w = 1$.

Beweis. Es sei u, v, w ein Zahlentripel, das bei festem p und r den Voraussetzungen genügt. Dann gilt

$$(1) \qquad (q-1)^2 v^2 < (D - |w|)\, v^2 \leqq u^2 \leqq (D + |w|)\, v^2 < (q+1)^2 v^2,$$

also $u \neq 0$. Man darf daher o. B. d. A. $u > 0$, $v > 0$ voraussetzen. Unter allen positiven Paaren u, v, welche bei festem p, r, w die Voraussetzungen erfüllen, sei u_0, v_0 das kleinste. Wegen (1) darf man schreiben

$$u_0 = q\,v_0 + t_0 \quad (|t_0| < v_0).$$

Ist $t_0 = 0$, so folgt $u_0 = q$, $v_0 = 1$, $w = \mp p$.

Ist $t_0 \neq 0$, so setzen wir

$$|v_0 \mp r\,t_0| = u_1, \quad |t_0| = v_1,$$

und verifizieren

$$p\,u_1^2 - (p\,r^2 \pm 1)\, v_1^2 = \mp w, \quad (u_1, v_1) = 1.$$

Ähnlich wie in (1) schließt man hieraus

$$u_1 = r\,v_1 + t_1 \quad (|t_1| < v_1).$$

Ist $t_1 = 0$, so folgt $u_1 = r$, $v_1 = 1$, $w = 1$.

Ist $t_1 \neq 0$, so setzen wir

$$|v_1 \mp q\,t_1| = u_2, \quad |t_1| = v_2$$

und verifizieren

$$u_2^2 - D\,v_2^2 = w, \quad (u_2, v_2) = 1.$$

Dabei ist $0 < v_2 < v_1 < v_0$ und damit auch $0 < u_2 < u_0$. Dies widerspricht aber der über u_0, v_0 gemachten Minimumsannahme.

Außer diesem Hilfssatz wird gelegentlich nur noch einiges aus O. Perron, Die Lehre von den Kettenbrüchen, 2. Aufl. Teubner 1929 (zitiert „P.“) herangezogen.

§ 3.

Die Form $f_I(x, y) = x^2 - D\,y^2$ (D natürliche Zahl).

Tabelle 1 (H. S. 683) ist folgendermaßen zu ergänzen bzw. (für $D = 23$) zu berichtigen. Wie bei H. stehen dabei die Paare x_1, y_1 in runden, x_2, y_2 in eckigen Klammern.

D	s	$(x_1; y_1)$	$[x_2; y_2]$
23	$\frac{7}{4} > \varphi$	$\left(2; \frac{1}{2}\right)$	$\left[12; \frac{5}{2}\right]$
34	$\frac{9}{4} = \varphi_1$	$\left(\frac{5}{2}; \frac{1}{2}\right)$	
43	$\frac{7}{4} > \varphi$	$\left(3; \frac{1}{2}\right)$	$\left[200; \frac{61}{2}\right]$
55	$\frac{9}{4} = \varphi_1$	$\left(4; \frac{1}{2}\right)$	
82	$\frac{9}{2} = \varphi_1$	$\left(5; \frac{1}{2}\right)$	
94	$\frac{13}{4} > \varphi$	$\left(\frac{9}{2}; \frac{1}{2}\right)$	$\left[\frac{29}{2}; \frac{3}{2}\right]$

Die Paare x_2, y_2 wurden durch Entwicklung von $\sqrt{D}$ in einen regelmäßigen Kettenbruch gewonnen (Vgl. P. S. 102, Gl. (4)).

Bei $D = 55$ schließt man so: Zu zeigen ist, daß die Ungleichung

$$\left|(X+4)^2 - 55\left(Y+\frac{1}{2}\right)^2\right| < \frac{9}{4}$$

nicht in ganzen Zahlen X, Y lösbar ist. Mittels

$$2X + 8 = u, \quad 2Y + 1 = v$$

geht diese Behauptung über in die folgende: Die Gleichung

$$u^2 - 55\,v^2 = w \tag{2}$$

hat keine ganzzahligen Lösungen u, v, w, für welche gleichzeitig

$$u \equiv 0 \pmod 2, \quad v \equiv 1 \pmod 2, \quad |w| < 9 \tag{3}$$

ist. Nun sind die aus (2) und (3) fließenden Forderungen

$$|w| < 9, \quad w \equiv u^2 \pmod{55}, \quad w \equiv 1 \pmod 4$$

nur für $w = 1$ und $w = 5$ gleichzeitig erfüllt. Aber die Gleichungen $u^2 - 55\,v^2 = 1$ und $u^2 - 55\,v^2 = 5$ haben nur solche Lösungen, bei denen u ungerade und v gerade ist, da alle Näherungsbrüche des regelmäßigen Kettenbruches für $\sqrt{55}$ ungerade Zähler haben (vgl. P. S. 102/103).

$D = 34$ und $D = 82$ aber werden miterfaßt von allgemeineren Regeln, die jetzt bewiesen werden sollen. Sie lauten:

A. Für folgende Werte von D ist $s(1, 0, -D) = \varphi_1(1, 0, -D)$:

1) $D = q^2$ $\quad (q \geqq 1)$

2) $D = q^2 + p$ $\quad (p \geqq 1, \quad r \geqq 1, \quad q = pr)$

3) $D = q^2 - p$ $\quad (p \geqq 1, \quad r \geqq 2, \quad q = pr)$.

B. Für folgende Werte von D ist $s(1, 0, -D) > \varphi(1, 0, -D)$:

$$\left.\begin{array}{ll} 1) & D = q^2 + p \\ 2) & D = q^2 - p \end{array}\right\} \quad (p = 4m+2, \quad q = 2n+1, \quad 0 \leqq m \leqq \sqrt{n} - 1).$$

Dabei bedeuten p, q, r, m, n ganze Zahlen.

Beweis. A 1) ist schon durch H. erledigt (vgl. (21), S. 682, wo für $D = 1$ noch $\mu_1 \equiv \frac{1}{2}$, $\nu_1 \equiv 0$ anzufügen wäre).

A 2) und A 3) lassen sich gemeinsam behandeln (obere Vorzeichen 2), untere 3)). Zu zeigen ist: die Ungleichung

$$\left|\left(X + \frac{q \pm 1}{2}\right)^2 - (q^2 \pm p)\left(Y + \frac{1}{2}\right)^2\right| < \frac{2q \pm 1 - p}{4}$$

ist nicht in ganzen Zahlen X, Y lösbar. Setzt man

$$2X + q \pm 1 = u, \quad 2Y + 1 = v,$$

so geht diese Behauptung in folgende gleichwertige über: Die Gleichung

$$u^2 - (q^2 \pm p) v^2 = w \tag{4}$$

hat keine ganzzahligen Lösungen u, v, w, welche den Nebenbedingungen

$$u \equiv q \pm 1 \pmod 2, \quad v \equiv 1 \pmod 2, \quad |w| < 2q \pm 1 - p \tag{5}$$

genügen.

Gäbe es ein solches Tripel, so müßte zunächst wegen (5) $v \neq 0$ sein. Wäre $(u, v) = d$, so würden auch die Zahlen

$$u' = \frac{u}{d}, \quad v' = \frac{v}{d}, \quad w' = \frac{w}{d^2} \qquad (u', v') = 1$$

allen Anforderungen genügen, da $d \equiv v \equiv 1 \pmod 2$ ist. Nach Satz 1 kämen daher für w' nur die Werte $\mp p$ und 1 in Frage. Aber einerseits folgt aus (4) und (5)

$$w' \equiv w \equiv 2q \pm 1 - p \not\equiv \mp p \pmod 2,$$

anderseits hat die Gleichung (4) mit $w = 1$ die „Fundamentallösung" $u_0 = 2qr \pm 1$, $v_0 = 2r$, so daß auch in allen ihren anderen Lösungspaaren u, v die Zahl v gerade wird (vgl. P. S. 99, zweites Beispiel mit $b_0 = q$ und $m = p$; S. 100, viertes Beispiel mit $b_0 = q - 1$, $b_1 = 1$, $b_2 = 2r - 2$ und $m = p + 2r - 3$). Damit ist A vollständig bewiesen.

Auch die beiden Fälle B lassen sich zusammen erledigen (obere Vorzeichen 1), untere 2)). Es genügt, zu

$$x_1 = \frac{q \pm 1}{2}, \quad y_1 = \frac{1}{2}$$

ein kongruentes Paar x_2, y_2 anzugeben. Ein solches ist

$$x_2 = \frac{2q^2 \pm p}{4}, \quad y_2 = \frac{q}{2}.$$

Man errechnet nämlich

$$4\,|f_I(x_s, y_s)| = \frac{p^2}{4} = 4(m+1)^2 - 4(m+1) + 1 \leqq 4n - 4m - 3 < 4n - 4m \pm 1$$
$$= 2q \pm 1 - p = 4s.$$

Wie angekündigt, fällt

$$D = 34 = 6^2 - 2 \text{ unter A 3),}$$
$$\text{und } D = 82 = 9^2 + 1 \text{ unter A 2).}$$

§ 4.

Die Form $f_{II}(x, y) = \left(x + \frac{y}{2}\right)^2 - D\left(\frac{y}{2}\right)^2$ ($D = 4k + 1$, k natürliche Zahl).

Hier ist es zweckmäßig, drei Fälle zu unterscheiden:

a) $D = (2q - 1)^2 + 4p \qquad (1 \leqq p \leqq q - 1)$
b) $D = 4q^2 + 1 \qquad (q \geqq 1)$
c) $D = (2q + 1)^2 - 4p \qquad (0 \leqq p \leqq q - 1).$

Dann reduziert sich die Tabelle 2 (H. S. 684), wenn man von der Klassenzahl absieht, auf drei Zeilen, nämlich

Fall	s	$(x_1; y_1)$	$[x_2; y_2]$
a)	$\frac{2q-p}{4} > \varphi$	$\left(\frac{q}{2}; \frac{1}{2}\right)$	$\left[\frac{q}{2}; -\frac{1}{2}\right]$
b)	$\frac{q}{4} = \varphi_1$	$\left(\frac{q}{2}; \frac{1}{2}\right)$ und $\left(\frac{q-1}{2}; \frac{1}{2}\right)$ dazu $\left(\frac{1}{2}; 0\right)$ für $q = 1$	
c)	$\frac{2q-p}{4} > \varphi$	$\left(\frac{q-1}{2}; \frac{1}{2}\right)$	$\left[\frac{q+1}{2}; -\frac{1}{2}\right]$

In der Tat ist in den Fällen a) und c)

$$4\,|f_{II}(x_s, y_s)| = p < 2q - p = 4s.$$

Von Fall b) ist $q = 1$ ($D = 5$) schon bei H. (S. 685) erledigt. Für $q > 1$ ist zu zeigen: Keine der Ungleichungen

$$\left|\left(X + \frac{z_j}{2} + \frac{1}{2}\left(Y + \frac{1}{2}\right)\right)^2 - \frac{4q^2+1}{4}\left(Y + \frac{1}{2}\right)^2\right| < \frac{q}{4} \quad (j = 1, 2),$$

wo $z_1 = q$, $z_2 = q - 1$ zu setzen ist, hat ein ganzzahliges Lösungspaar X, Y. Indem man beide Seiten mit 16 multipliziert, überzeugt man sich, daß folgende Behauptung die beiden vorhergehenden umfaßt.

Die Gleichung

$$u^2 - Dv^2 = w \qquad (D = 4q^2 + 1) \tag{6}$$

mit den Nebenbedingungen

$$u \equiv v \equiv 1 \pmod 2, \quad |w| < 4q \tag{7}$$

ist in ganzen Zahlen u, v, w unlösbar.

Gäbe es nun ein Lösungstripel u, v, w, so könnte man wie in § 3 auch ein Lösungstripel u', v', w' mit $(u', v') = 1$ und $w' \equiv w \equiv 0 \pmod 4$ finden, während doch nach Satz 1 (wo q durch $2q$, p durch 1 zu ersetzen ist), $w' = \pm 1$ sein müßte. Widerspruch! Also ist im Falle b) wirklich $s = \frac{q}{4} = \varphi_1$.

Daraus folgt aber mittels der bei H. S. 686/687 angestellten Überlegungen der

Satz 2. *Ist q eine natürliche Zahl > 3 und $D = 4q^2 + 1$ quadratfrei, so existiert in dem quadratischen Zahlkörper $\Re(\sqrt{D})$ kein Euklidischer Algorithmus.*

(Eingegangen am 25. Juni 1949.)

Über die Flächen, deren Asymptotenlinien beider Scharen linearen Komplexen angehören*).

Herrn Geh. Reg.-Rat Prof. Dr. G. Faber zum 70. Geburtstage (5. IV. 1947) gewidmet.

Von

Karl Strubecker in Karlsruhe.

Einleitung.

Die Flächen Φ, deren Asymptotenlinien beider Scharen linearen Komplexen angehören, haben eine längere Forschungsgeschichte hinter sich, die im Jahre 1882 mit dem Namen von Sophus Lie[1]) und der Entdeckung der nach Lie benannten, mit jedem Flächenpunkte projektiv verbundenen Quadrik beginnt. Lie stellt, gestützt auf die Existenz dieser Quadrik der Schmiegtangenten, fest, daß die Gewinde (= linearen Komplexe), in denen die Asymptotenlinien der beiden (verschiedenen) Scharen einer Fläche Φ liegen sollen, notwendig involutorischen Gewindebündeln angehören müssen, und erwähnt, daß diese involutorische Lage der Gewinde für die Flächen auch hinreichend ist.[2]) Aber erst ein Schüler von Lie, nämlich A. Peter, gab zwölf Jahre später in seiner Leipziger Dissertation[3]) strenge Beweise dieser Lieschen Sätze und erstmalig auch eine genaue Klassifikation der Flächen Φ. Entsprechend den drei verschiedenen Arten involutorischer Gewindebündel stieß Peter auf drei Klassen von Flächen Φ, die wir in Hinkunft durch Φ_{I}, Φ_{II}, Φ_{III} bezeichnen wollen. A. Peter gibt (nach bequemen projektiven Normierungen) die zum Teile schon bei Lie auftretenden Monge-Ampereschen Differentialgleichungen zweiter Ordnung dieser Flächenklassen an, und zeigt, wie mit Hilfe Liescher Methoden die Integration dieser Gleichungen durch algebraische Operationen und eine Quadratur geleistet werden kann.

Mit wesentlich weniger Aufwand an Rechnung gelangt 1911 E. Kraval[4]) durch Benutzung der Lelieuvreschen Formeln zu einer äquivalenten Dreiteilung.

*) Anmerkung der Schriftleitung. Über die Ergebnisse dieser Arbeit hat der Verfasser schon auf der Mathematiker-Tagung in Tübingen am 26. September 1946 vorgetragen (vgl. S. 136—139 des Berichtes über diese Tagung, Tübingen 1946). Aus äußeren Gründen wurde die Arbeit erst jetzt der Schriftleitung zur Veröffentlichung übergeben.

Ch. T. Sullivan[5]), ein Schüler von E. J. Wilczinski, versuchte als erster eine Konstruktion der Flächen Φ anzugeben, die wir freilich heute als rein theoretisch und reichlich kompliziert bezeichnen müssen.

Einen wesentlichen Fortschritt bringt gegenüber allen aufgezählten Arbeiten erst eine Untersuchung von A. Terracini[6]) aus dem Jahre 1919/20. Terracini zeigt, daß die Flächen Φ_{I} der ersten Klasse als die zweiten Mäntel der Brennflächen einer W-Kongruenz aufgefaßt werden können, deren erster Mantel eine reguläre Quadrik ist. Ähnliches gilt dann auch für die beiden Grenzfälle Φ_{II} und Φ_{III} der Flächen Φ_{I}. Aus dieser Auffassung fließt erstens eine geometrisch wenigstens übersehbare Konstruktion der Flächen Φ und zweitens (wieder nach bequemen komplex-projektiven Normierungen) auch eine explizite und sogar integralfreie analytische Darstellung aller Flächen Φ.

Daß die geometrischen Verhältnisse aber noch wesentlich einfacher liegen, erkannten, allerdings nur für die Flächen Φ_{I}, G. Fubini und A. Terracini[7]) im Jahre 1927, indem sie zeigten, daß diese Flächen Φ_{I} projektiv identisch sind mit den Flächen verschwindender Absolutkrümmung des elliptischen Raumes, deren Entdeckung 1896 L. Bianchi[8]) geglückt war. Für die Flächen Φ_{II} und Φ_{III} gelang es aber nicht, zu einer ähnlichen einfachen Definition vorzudringen. Mit einer solchen wäre zugleich auch eine sehr einfache geometrische Erzeugungsweise gefunden; denn man weiß, daß die Bianchischen Flächen und damit auch die Flächen Φ_{I} im elliptischen Raume mit Hilfe seiner Cliffordschen Schiebungen als Schiebflächen ihrer Asymptotenlinien erzeugt werden können[8]).

Die Lücke, die damit zur Vollendung der Theorie der Flächen Φ, deren Asymptotenlinien zur Gänze in linearen Komplexen liegen, geblieben ist, kann man tatsächlich erst auf Grund der geometrischen Entwicklung der letzten Jahre sachgemäß schließen. Es bedarf dazu nämlich zweier Grenzfälle der Differentialgeometrie des elliptischen Raumes: erstens der Differentialgeometrie des quasielliptischen Raumes, deren Entwicklung man W. Blaschke[9]) verdankt, und zweitens der Differentialgeometrie des isotropen Raumes, der ich selber einige Arbeiten[10]) gewidmet habe.

Die vorliegende Note soll nun zeigen, wie es heute unter wesentlicher Heranziehung der Geometrien des elliptischen, quasielliptischen und isotropen Raumes möglich ist, die Theorie der Flächen Φ, deren Asymptotenlinien beider Scharen linearen Komplexen angehören, in einer vollkommen einheitlichen Weise zu entwickeln, insbesondere zu einer einheitlichen geometrischen Konstruktion und zu einer einheitlichen expliziten (integrallosen) analytischen Darstellung dieser Flächen vorzudringen. Die einfachen Ergebnisse, zu denen wir dabei gelangen werden, habe ich schon im Jahre 1941 in einer vorläufigen Mitteilung[11]) zusammengefaßt.

Unsere Überlegungen werden rein geometrischer Art sein. Wir stützen sie analytisch hauptsächlich dort, wo es manchem Leser angenehm sein wird, „infinitesimalen" geometrischen Überlegungen den Nachdruck analytischer Bestätigung und Gewißheit zu verleihen. Es wird sich dabei immer nur darum handeln, einzusehen, daß gewisse Bedingungen auch dann noch erfüllt sind, wenn die auftretenden Reihenentwicklungen bis zu den Gliedern 1. Ordnung vorwärtsgetrieben werden.

Inhaltsverzeichnis.

I. Allgemeine projektive Eigenschaften der Flächen Φ 403—412
1. Die längs der Asymptotenlinien berührenden Netzflächen N aus Schmiegtangenten. — 2. Projektive Äquivalenz der Asymptotenlinien jeder Schar. Erzeugung der Flächen Φ durch windschiefe Schiebungen ihrer Asymptotenlinien aneinander. — 3. Die Mannigfaltigkeit der Schiebungsachsen (Leitgeraden der berührenden Netzflächen N) kann drei Klassen angehören; dementsprechend existieren auch drei Klassen von Flächen Φ.

II. Gemeinsame metrische Eigenschaften der Flächen Φ_{I}, Φ_{II} und Φ_{III} im elliptischen, quasielliptischen und isotropen Raume ..... 412—424
4. Heranziehung der Metrik des elliptischen, quasielliptischen und isotropen Raumes. — 5. Die Flächen Φ_{I}, Φ_{II} und Φ_{III} als Flächen der festen Relativkrümmung $K = -1$ des elliptischen, quasielliptischen und isotropen Raumes. Ihre Erzeugung als Cliffordsche Schiebflächen dieser Räume.

III. Analytische Darstellung der Flächen Φ_{I}, Φ_{II}, Φ_{III} .... 424—434
6. Eine weitere einfache Konstruktion der Flächen Φ. — 7. Allgemeine analytische Darstellung der Flächen Φ_{I}, Φ_{II}, Φ_{III}. — 8. Sonderfälle. — 9. Realitätsfragen.

I. Allgemeine projektive Eigenschaften der Flächen Φ.

1. Die längs der Asymptotenlinien berührenden Netzflächen aus Schmiegtangenten. Wenn eine Fläche Φ, deren Asymptotenlinien beider Scharen in linearen Komplexen liegen, bei ihrer Vektordarstellung

$$\Phi \ldots \mathfrak{x} = \mathfrak{x}(u, v) \tag{1}$$

auf Asymptotenparameter u, v bezogen ist, so ist

$$[\mathfrak{x}_u, \mathfrak{x}_v, \mathfrak{x}_{uu}] = 0, \qquad [\mathfrak{x}_u, \mathfrak{x}_v, \mathfrak{x}_{vv}] = 0. \tag{2}$$

Es bestehen also lineare Beziehungen der Form

$$\mathfrak{x}_{uu} = a\,\mathfrak{x}_u + b\,\mathfrak{x}_v, \qquad \mathfrak{x}_{vv} = c\,\mathfrak{x}_u + d\,\mathfrak{x}_v. \tag{3}$$

Geometrisch ausgedrückt besagt dies einfach, daß für die Asymptotenlinien die Schmiegebene der Kurve mit der Tangentenebene der Fläche zusammenfällt. Dabei ist natürlich vorausgesetzt, daß diese Asymptotenlinien nicht geradlinig sind. Es hindert aber nichts, in diesem Falle die Tangentenebene als Schmiegebene der Geraden zu erklären und dem Satze wieder seine volle Gültigkeit zu sichern.

Betrachten wir dann eine feste Asymptotenlinie z. B. die u-Linie $v = \text{const.}$, für welche also die erste der Gleichungen (3) gilt. Sie soll Gewindekurve sein, d. h. mit ihren Tangenten $\mathfrak{x}_u$ einem linearen Komplexe G angehören (der mit v veränderlich ist). Ihr Tangentenvektor $\mathfrak{x}_u$ und ihr Momentvektor $[\mathfrak{x}, \mathfrak{x}_u]$ bezüglich des Nullpunkts O müssen dann einer linearen Relation der Form

$$\mathfrak{a}(v) \,.\, \mathfrak{x}_u + \mathfrak{b}(v) \,.\, [\mathfrak{x}, \mathfrak{x}_u] = 0 \tag{4}$$

genügen, die bei festem v identisch in u gilt. Denn wenn ganz allgemein $\mathfrak{y}$ der Richtungsvektor und $\mathfrak{z}$ der Momentvektor (bezüglich des Nullpunktes) eines allgemeinen Strahles des Gewindes G ist, so kann die Plückersche Liniengleichung des Komplexes G vektoriell in der Gestalt

$$G \ldots \mathfrak{a}(v) \,.\, \mathfrak{y} + \mathfrak{b}(v) \,.\, \mathfrak{z} = 0 \tag{5}$$

geschrieben werden.

Bei einer Gewindekurve stimmt nun die Schmiegebene auch mit der Nullebene des Berührpunktes bezüglich des Nullsystems überein, das mit dem Gewinde verbunden ist. Da für unsere Asymptotenlinien aber auch die Tangentenebene mit der Schmiegebene identisch ist, liegen bei den Flächen Φ in jedem Kreuzungspunkte zweier Asymptotenlinien alle Flächentangenten in den beiden Gewinden, denen diese Asymptotenlinien angehören. Insbesondere liegt also jede Schmiegtangente der Fläche Φ auch in dem Gewinde, welchem die sie kreuzende Asymptotenlinie angehört. Z. B. liegt im Flächenpunkte $\mathfrak{x}$ die Tangente $\mathfrak{x}_u$ in dem Gewinde G (5), welchem die Asymptotenlinie v angehört.

Um das auch rechnerisch zu bestätigen, müßten wir zeigen, daß bei festem v

$$\mathfrak{a}(v) \,.\, \mathfrak{x}_v + \mathfrak{b}(v) \,.\, [\mathfrak{x}, \mathfrak{x}_v] = 0 \tag{6}$$

ist. Zum Beweise differenzieren wir die in u identische Gleichung (4) nach u und erhalten

$$\mathfrak{a}(v) \,.\, \mathfrak{x}_{uu} + \mathfrak{b}(v) \,.\, [\mathfrak{x}, \mathfrak{x}_{uu}] = 0.$$

Das besagt, wenn man $\mathfrak{x}_{uu}$ mittels (3) durch $\mathfrak{x}_u$ und $\mathfrak{x}_v$ ausdrückt, daß

$$a(\mathfrak{a} \,.\, \mathfrak{x}_u + \mathfrak{b} \,.\, [\mathfrak{x}, \mathfrak{x}_u]) + b(\mathfrak{a} \,.\, \mathfrak{x}_v + \mathfrak{b} \,.\, [\mathfrak{x}, \mathfrak{x}_v]) = 0$$

ist. Hierin verschwindet nun die erste Klammer nach (4). Da (außer bei Regelflächen) $b \neq 0$ ist, folgt tatsächlich (6), w. z. b. w.

Wir zeigen nun, *daß die Asymptotenrichtung* $\mathfrak{x}_v$ *nicht nur in dem Gewinde* G *der Asymptotenlinie* v *enthalten ist, sondern daß sie auch noch in dem Gewinde* $\hat{G}$ *liegt, welches die „benachbarte" Asymptotenlinie des Parameters* $v + dv$ *enthält.*

Das ist geometrisch klar auf Grund des Satzes, daß die Tangentenebene einer Fläche sich, beim Fortschreiten des Berührpunktes $\mathfrak{x}$ in einer Asymptotenrichtung $\mathfrak{x}_v$, ebenfalls um dieselbe Asymptotenrichtung dreht. Diese Asymptotenrichtung liegt also auch in der Schmiegebene der zu v benachbarten Asymptotenlinie $v + dv$, d. h. sie ist auch Gewindestrahl des Nachbargewindes $\hat{G}$ von G.

Um diese Behauptung auch analytisch zu bestätigen, denken wir uns in der Gleichung (5) des Gewindes G den Parameter v durch $v + dv$ ersetzt und erhalten so, wenn wir bis zu Gliedern 1. Ordnung entwickeln, die Gleichung des zu G benacharten Gewindes $\hat{G}$ in der Form

$$\hat{G} \ldots (\mathfrak{a} + \mathfrak{a}_v\, dv) \,.\, \mathfrak{y} + (\mathfrak{b} + \mathfrak{b}_v\, dv) \,.\, \mathfrak{z} = 0$$

oder besser in der Form

$$\hat{G} \ldots \underbrace{(\mathfrak{a} \,.\, \mathfrak{y} + \mathfrak{b} \,.\, \mathfrak{z})}_{G} + \underbrace{(\mathfrak{a}_v \,.\, \mathfrak{y} + \mathfrak{b}_v \,.\, \mathfrak{z})}_{G_v}\, dv = 0, \tag{7}$$

wofür wir kürzer

$$\hat{G} = G + G_v\, dv = 0 \tag{8}$$

schreiben wollen. Dabei sind $\mathfrak{y}$ und $\mathfrak{z}$ wieder Richtungs- und Momentvektor der Strahlen von $\hat{G}$.

Dies ist also die Gleichung des Gewindes $\hat{G}$, in dem die benachbarte Asymptotenlinie $v + dv$ enthalten ist. Wie soeben muß natürlich dieses benachbarte Gewinde $\hat{G}$ auch die Asymptotenrichtung

$$\hat{\mathfrak{y}} = \mathfrak{x}_v + \mathfrak{x}_{vv}\, dv$$

enthalten, welche die Asymptotenlinie $v + dv$ im Nachbarpunkte $\hat{\mathfrak{x}} = \mathfrak{x} + \mathfrak{x}_v\, dv$ kreuzt, und deren Momentvektor bis auf Glieder 1. Ordnung

$$\hat{\mathfrak{z}} = [\hat{\mathfrak{x}}, \hat{\mathfrak{x}}_v] = [\mathfrak{x} + \mathfrak{x}_v\, dv,\ \mathfrak{x}_v + \mathfrak{x}_{vv}\, dv] = [\mathfrak{x}, \mathfrak{x}_v] + [\mathfrak{x}, \mathfrak{x}_{vv}]\, dv$$

ist. Die Gleichung (7) ist also sicherlich durch die Gerade mit dem Richtungsvektor $\hat{\mathfrak{y}}$ und dem Momentvektor $\hat{\mathfrak{z}}$ erfüllt, d. h. es muß, wieder bis zu den Gliedern 1. Ordnung, gelten:

$$(\mathfrak{a} \,.\, \mathfrak{x}_v + \mathfrak{b} \,.\, [\mathfrak{x}, \mathfrak{x}_v]) + (\mathfrak{a} \,.\, \mathfrak{x}_{vv} + \mathfrak{b} \,.\, [\mathfrak{x}, \mathfrak{x}_{vv}])\, dv + (\mathfrak{a}_v \,.\, \mathfrak{x}_v + \mathfrak{b}_v \,.\, [\mathfrak{x}, \mathfrak{x}_v])\, dv = 0.$$

Hierin verschwindet aber nach (3) die zweite runde Klammer, weil sie in der Form

$$c\,(\mathfrak{a} \,.\, \mathfrak{x}_u + \mathfrak{b} \,.\, [\mathfrak{x}, \mathfrak{x}_u]) + d\,(\mathfrak{a} \,.\, \mathfrak{x}_v + \mathfrak{b} \,.\, [\mathfrak{x}, \mathfrak{x}_v])$$

geschrieben werden kann und die Gleichungen (4) und (6) bestehen.

Es bleibt die Gleichung

$$(\mathfrak{a} \cdot \mathfrak{x}_v + \mathfrak{b} \cdot [\mathfrak{x}, \mathfrak{x}_v]) + (\mathfrak{a}_v \cdot \mathfrak{x}_v + \mathfrak{b}_v \cdot [\mathfrak{x}, \mathfrak{x}_v])\, dv = 0,$$

die tatsächlich aussagt, daß die Schmiegtangente $\mathfrak{x}_v$ des ursprünglichen Punktes $\mathfrak{x}$ auch noch dem Nachbargewinde $\hat{G}$ von G, d. h. dem Gewinde der benachbarten Asymptotenlinie $v + dv$ angehört.

Die Asymptotenrichtungen $\mathfrak{x}_v$, welche die feste Asymptotenlinie v queren, liegen also in den beiden benachbarten Gewinden G und $\hat{G} = G + G_v\, dv$ der benachbarten Asymptotenlinien v und $v + dv$; sie gehören daher auch dem Schnittnetze dieser beiden linearen Komplexe an und bilden daher insgesamt eine Netzfläche $N(v)$, welche, von querenden Asymptotenrichtungen gebildet, die Fläche Φ längs der Asymptotenlinie v berührt.

Wie die Schnittnetze können die Netzflächen sowohl getrennte als auch zusammenfallende Leitgeraden haben, d. h. sowohl hyperbolisch oder elliptisch als auch parabolisch sein.

Der bewiesene Satz gilt bei den Flächen Φ natürlich für beide Scharen von Asymptotenlinien. Zu diesen Flächen Φ gehören also insgesamt zwei Scharen von Netzflächen $N(u)$ und $N(v)$, die die Fläche Φ längs ihrer Asymptotenlinien u und v berühren und von den Asymptotenrichtungen der querenden Schar gebildet werden.

2. Projektive Äquivalenz der Asymptotenlinien jeder Schar. Erzeugung der Flächen Φ durch windschiefe Schiebung ihrer Asymptotenlinien aneinander. Auf der Netzfläche $N(v)$, welche die Fläche Φ längs ihrer Asymptotenlinie v berührt, ist diese Berührungslinie v sicherlich ebenfalls Asymptotenlinie; denn auch auf $N(v)$ gilt für v, daß ihre Schmiegebenen Tangentenebenen sind. *Wir behaupten, daß die benachbarte Asymptotenlinie $v + dv$ von Φ gleichfalls Asymptotenlinie der Netzfläche $N(v)$ ist.*

Die Asymptotenlinien einer Netzfläche $N(v)$ sind nämlich identisch mit den Gewindekurven jener Strahlgewinde, welche durch das Strahlnetz gelegt werden können, in dem $N(v)$ enthalten ist. Diese Gewinde bilden ein Büschel, das in unserem Falle durch die Gewinde G und $\hat{G}$ aufgespannt wird. Die Kurve v liegt aber als Gewindekurve in G, ebenso liegt $v + dv$ als Gewindekurve in $\hat{G}$. *Also sind tatsächlich sowohl die Kurve v als auch die Kurve $v + dv$ Asymptotenlinien der berührenden Netzfläche $N(v)$.*

Natürlich kann man auch diese Tatsache leicht auf analytischem Wege bestätigen. Die längs der Asymptotenlinie v berührende Netzfläche $N(v)$ aus Asymptotenrichtungen $\mathfrak{x}_v$ hat die Darstellung

$$N(v) \ldots \mathfrak{X} = \mathfrak{x}(u, v) + w \cdot \mathfrak{x}_v(u, v), \tag{9}$$

wobei $v = \text{const.}$ ist, während u und w laufende Parameter sind. Unsere Behauptung geht nun dahin, daß in dem vorliegenden Falle die Kurven $w = 0$ und $w = dv$ Asymptotenlinien auf $N(v)$ sind.

Man findet nun aus (9) leicht, wenn man die Formeln (3) beachtet,

$$\begin{aligned}
\mathfrak{X}_u &= \mathfrak{x}_u + w \cdot \mathfrak{x}_{uv} \\
\mathfrak{X}_w &= \mathfrak{x}_v \\
\mathfrak{X}_{uu} &= \mathfrak{x}_{uu} + w \cdot \mathfrak{x}_{uuv} = (a\,\mathfrak{x}_u + b\,\mathfrak{x}_v) + w \cdot (a\,\mathfrak{x}_{uv} + b\,\mathfrak{x}_{vv}) \\
&= (a + b\,c\,w)\,\mathfrak{x}_u + (b + b\,d\,w)\,\mathfrak{x}_v + a\,w\,\mathfrak{x}_{uv} \\
\mathfrak{X}_{uw} &= \mathfrak{x}_{uv} \\
\mathfrak{X}_{ww} &= 0
\end{aligned}$$

und daraus die Außenprodukte

$$\begin{aligned}
L' &= [\mathfrak{X}_u, \mathfrak{X}_w, \mathfrak{X}_{uu}] = -\,b\,c\,w^2\,[\mathfrak{x}_u, \mathfrak{x}_v, \mathfrak{x}_{uv}] \\
M' &= [\mathfrak{X}_u, \mathfrak{X}_v, \mathfrak{X}_{uw}] = [\mathfrak{x}_u, \mathfrak{x}_v, \mathfrak{x}_{uv}] \\
N' &= [\mathfrak{X}_u, \mathfrak{X}_w, \mathfrak{X}_{ww}] = 0.
\end{aligned}$$

Da für Φ sicherlich $[\mathfrak{x}_u, \mathfrak{x}_v, \mathfrak{x}_{uv}] \neq 0$ ist, lautet die Differentialgleichung der Asymptotenlinien auf der Netzfläche $N(v)$

$$d\,u\,(b\,c\,w^2\,d\,u - 2\,d\,w) = 0. \tag{10}$$

Durch ihre Integration findet man 1) die Schar der geradlinigen Erzeugenden $u = \text{const.}$ der Netzfläche $N(v)$ und 2) für die Schar der krummlinigen Asymptotenlinien von $N(v)$ die Beziehung

$$b\,c\,u + \frac{2}{w} = \frac{2}{k} = \text{konst.},$$

welche man bequemer auch in der Form

$$w = \frac{k}{1 - \frac{b\,c}{2} \cdot k\,u} \tag{11}$$

schreiben kann. Dabei ist k eine Integrationskonstante.

Man liest nun aus (11) unmittelbar ab, daß erstens $k = 0$ auf $w = 0$ führt, d. h. daß die Berührungskurve v von Φ und $N(v)$ eine Asymptotenlinie der Netzfläche ist, und daß $k = d\,v$ auf

$$\begin{aligned}
w = \frac{d\,v}{1 - \frac{b\,c}{2}\,u\,d\,v} &= d\,v \cdot \left(1 + \frac{b\,c}{2}\,u\,d\,v + \cdots\right) \\
&= d\,v + \text{Glieder höherer Ordnung}
\end{aligned}$$

führt, d. h. daß auch die benachbarte Kurve $v + d\,v$ von Φ Asymptotenlinie der Netzfläche $N(v)$ ist.

Benachbarte Asymptotenlinien v und $v + d\,v$ der Fläche Φ sind also auf der Netzfläche $N(v)$, welche Φ längs v berührt und von den Asymptotenrichtungen der querenden Schar gebildet wird, ebenfalls Asymptotenlinien.

Jede Netzfläche gestattet nun eine eingliedrige Gruppe von windschiefen Kollineationen (windschiefen „Schiebungen") in sich, bei denen ihre Punkte auf den Erzeugenden der Fläche, d. h. auf Netzstrahlen in projektiver Weise verschoben werden, wobei die

Punkte der beiden (verschiedenen oder zusammenfallenden) Leitgeraden des Netzes festbleiben. Bei diesen windschiefen Schiebungen werden die Asymptotenlinien der Netzfläche untereinander vertauscht; sie sind daher einander projektiv äquivalent, d. h. durch windschiefe Schiebungen kongruent.

Weil sie Asymptotenlinien auf der berührenden Netzfläche $N(v)$ sind, gilt dies auch für benachbarte Asymptotenlinien v und $v + dv$ unserer Flächen Φ. *Je zwei benachbarte Asymptotenlinien der Flächen Φ sind zueinander projektiv verwandt und entstehen auseinander durch eine windschiefe Schiebung, wobei sich solche Punkte der Asymptotenlinien entsprechen, welche auf derselben Schmiegtangente der querenden Schar liegen. Als Doppelgeraden dieser windschiefen Schiebungen fungieren dabei die Leitgeraden der Netzflächen $N(v)$, welche von diesen querenden Asymptotenrichtungen gebildet werden.*

Durch integrale Zusammensetzung dieser infinitesimalen Schiebungen ergibt sich, daß alle Asymptotenlinien der einen Schar auf den Flächen Φ aus einer dieser Asymptotenlinien, z. B. aus der Linie v_0, durch einen kontinuierlichen Prozeß windschiefer Schiebungen entstehen, wobei diese Asymptotenlinien in jedem Augenblick in Richtung der sie querenden Asymptotenrichtungen verschoben werden. Dasselbe gilt für die andere Schar. Irgend zwei Asymptotenlinien derselben Schar sind also zueinander projektiv äquivalent, wobei sich solche Punkte auf ihnen entsprechen, die auf derselben Asymptotenlinie der anderen (querenden) Schar liegen.

Die Flächen Φ, deren beide Scharen von Asymptotenlinien linearen Komplexen angehören, können also, ausgehend von zwei festen, einander kreuzenden Asymptotenlinien u_0 und v_0 durch kontinuierliche windschiefe Schiebungen der einen Asymptotenlinie längs der anderen (oder umgekehrt) erzeugt werden. Die Achsen dieser windschiefen Schiebungen sind dabei in jedem Augenblicke mit den Leitgeraden jener berührenden Netzflächen $N(u)$ bzw. $N(v)$ identisch, die von den querenden Asymptotenrichtungen, d. h. von den augenblicklichen Schiebungsrichtungen gebildet werden. Die Schiebungen der beiden Prozesse sind miteinander vertauschbar, weil sie dieselbe Fläche Φ erzeugen und gleichberechtigt sind.

3. Die Mannigfaltigkeit der Schiebungsachsen [Leitgeraden der berührenden Netzflächen N] kann drei Klassen angehören; dementsprechend existieren auch drei Klassen von Flächen Φ. Aus der Vertauschbarkeit der windschiefen Schiebungsprozesse, welche natürlich auch im Kleinen für die infinitesimalen Schiebungen bestehen muß, durch die die Asymptotenlinie u in $u + du$ und v in $v + dv$ übergeführt wird, kann man sehr leicht folgern, daß *die Achsen dieser windschiefen Schiebungen, d. h. die Leitgeraden der Netzflächen $N(u)$ und $N(v)$, welche der Fläche Φ längs der Asymptotenlinien u*

und v umschrieben sind, sich paarweise schneiden, d.h. ein windschiefes Vierseit bilden (oder jenen Grenzfall dieser Figur, bei welchem ein oder beide Gegenseitenpaare zusammengerückt sind).

Es gilt nämlich ganz allgemein der Satz, daß *bei zwei vertauschbaren windschiefen Kollineationen, deren Achsen nicht identisch sind, die Achsen der einen von ihnen stets Bahngeraden der andern sind (und umgekehrt).* Es ist dabei gleichgültig, ob diese Achsenpaare aus zwei verschiedenen oder zusammenfallenden Geraden bestehen. Beide Achsenpaare zusammen bilden in jedem Falle ein windschiefes Vierseit oder einen der genannten Grenzfälle davon.

Sollen nämlich die windschiefen Kollineationen A und B vertauschbar, d. h. $A\,B = B\,A$ sein, so ist $B = A^{-1}\,B\,A$ und $A = B^{-1}\,A\,B$. B muß also bei Transformation durch A ungeändert bleiben und A bei Transformation durch B. Es müssen also auch die Achsen von B, wenn man sie der Kollineation A unterwirft, ungeändert bleiben, d. h. entweder Achsen von A oder Bahngeraden von A sein. Da die erste Möglichkeit in unserem Falle ausscheidet, bleibt nur die zweite Möglichkeit. Aus demselben Grunde sind auch die Achsen von A Bahngeraden von B, womit der Satz bewiesen ist. Es folgt aus ihm, daß die Achsen zweier vertauschbarer windschiefer Kollineationen sich ebenfalls schneiden und daher entweder ein windschiefes Vierseit bilden oder jene Figur, die daraus entsteht, wenn ein oder beide Gegenseitenpaare zusammenrücken.

Um von diesen Verhältnissen eine ganz klare Vorstellung zu gewinnen, wollen wir diese verschiedenen Möglichkeiten auch kurz analytisch durch einfache *Normaltypen* realisieren. Die *windschiefe Kollineation A mit getrennten Achsen* $[0_0 0_1]$ und $[0_2 0_3]$ lautet

$$(12\,a)\qquad \begin{aligned} x_0' &= x_0 \\ x_1' &= \quad x_1 \\ x_2' &= \qquad a x_2 \\ x_3' &= \qquad\quad a x_3 . \end{aligned}$$

Rücken wir die Achsen in geeigneter Weise in die Gerade $[0_2 0_3]$ zusammen, so ergibt sich die *parabolische windschiefe Kollineation A* der Darstellung

$$(13\,a)\qquad \begin{aligned} x_0' &= x_0 \\ x_1' &= \quad x_1 \\ x_2' &= x_0 \quad + a x_2 \\ x_3' &= \quad x_1 \qquad + a x_3 . \end{aligned}$$

Mit diesen windschiefen Schiebungen A sind die folgenden Normaltypen von Schiebungen B vertauschbar. Zunächst die Schiebung B mit den *getrennten Achsen* $[0_0 0_2]$ und $[0_1 0_3]$:

$$(12\,b)\qquad \begin{aligned} x_0' &= x_0 \\ x_1' &= \quad b x_1 \\ x_2' &= \qquad x_2 \\ x_3' &= \qquad\quad b x_3 , \end{aligned}$$

dann aber auch die *parabolische Schiebung* B, deren Achsen in der Geraden $[0_2 0_3]$ zusammengerückt sind, und deren Darstellung lautet:

$$(13\,b)\qquad \begin{aligned} x_0' &= x_0 \\ x_1' &= b x_0 + x_1 \\ x_2' &= x_2 \\ x_3' &= b x_2 + x_3 . \end{aligned}$$

Man prüft tatsächlich leicht nach, daß allemal $A B = B A$ ist.

Die Achsen der vertauschbaren windschiefen Kollineationen A und B bilden dabei, wenn man die Kollineation (12a) und (12b) als A und B wählt, das windschiefe Vierseit der Geraden $[0_0 0_1]$, $[0_1 0_3]$, $[0_3 0_2]$, $[0_2 0_0]$; wählt man dagegen als A und B die Schiebungen (12a) und (13b), so entartet dieses Vierseit, indem seine Kante $[0_0 0_1]$ in die Gegenkante $[0_2 0_3]$ rückt; (ähnliches geschieht, wenn man (13a) und (12b) zusammenstellt). Wählt man schließlich als A und B die beiden parabolischen Schiebungen (13a) und (13b), so degeneriert das Vierseit weiter, indem jetzt auch noch die Kante $[0_0 0_2]$ in die Gegenkante $[0_1 0_3]$ rückt.

Natürlich können die oben gewählten windschiefen Kollineationen mit getrennten Achsen auch hochimaginäre windschiefe Achsen haben, d. h. es können an Stelle der gewählten hyperbolischen auch elliptische Schiebungen treten. Das wird später tatsächlich bei unseren Normaltypen der Fall sein.

Betrachten wir jetzt die Gewinde $G(u)$ und $G(v)$, welche zu zwei beliebigen, sich im Punkte $\mathfrak{x}$ der Fläche Φ kreuzenden, Asymptotenlinien u und v gehören. Es ist leicht zu sehen, daß diese Gewinde in Involution liegen, d. h. daß jedes von ihnen durch das Nullsystem des andern in sich übergeht.

Beide Gewinde enthalten nämlich das Büschel der Flächentangenten des Punktes $\mathfrak{x}$, das bei ihren Nullsystemen festbleibt, und die Leitgeraden der längs u und v berührenden Netzflächen $N(u)$ bzw. $N(v)$ sind für $G(u)$ bzw. $G(v)$ nullpolare Geraden. Da sie einander paarweise schneiden, sind die Leitgeraden von $N(u)$ nämlich Gewindestrahlen von $G(v)$ und daher gegen das Nullsystem von $G(v)$ invariant. Da sie zusammen mit dem Tangentenbüschel des Flächenpunktes $\mathfrak{x}$ das Gewinde $G(u)$ eindeutig bestimmen, ist also $G(u)$ gegen das Nullsystem von $G(v)$ unempfindlich (und umgekehrt), d. h. diese Gewinde liegen tatsächlich involutorisch. Dieser Nachweis gilt auch für den Grenzfall der parabolischen Netze, weil auch diese zusammen mit dem Tangentenbüschel im Flächenpunkte $\mathfrak{x}$ die Gewinde eindeutig bestimmen.

Da jedes Gewinde $G(u)$ mit jedem Gewinde $G(v)$ in Involution liegt, haben wir damit den Satz von Lie[1]) gewonnen, der besagt:

Wenn auf einer Fläche Φ die Asymptotenlinien beider Scharen linearen Komplexen angehören, so sind diese Komplexe notwendig zwei involutorischen Gewindebündeln entnommen.

Natürlich können diese involutorischen Gewindebündel zum Teil oder beide auch aus bloßen Gewindebüscheln bestehen; das wird der Fall sein, wenn die Fläche Φ selber eine Netzfläche ist oder wenn sie eine reguläre Quadrik ist. Ihre Asymptotenlinien bestehen dann im ersten Falle aus den Erzeugenden der Netzfläche (die sicherlich

in linearen Komplexen liegen) und, wie wir schon benützten, aus jenen Flächenkurven, welche den Gewinden des Büschels angehören, das durch das Netz der Flächenerzeugenden gelegt werden kann. Im zweiten Falle sind die Asymptotenlinien natürlich mit den Erzeugenden der beiden Scharen der Quadrik identisch.

Wenn wir von diesen beiden Sonderfällen absehen, bestimmen irgend zwei Gewinde eines jeden der beiden involutorischen Bündel, z. B. auch die benachbarten Gewinde G und $\bar{G}$, welche benachbarte Asymptotenlinien der Fläche Φ enthielten, ein im Bündel enthaltenes Büschel von Gewinden. Je nach der Mannigfaltigkeit, welche die Leitgeraden der Schnittnetze dieser Büschel, (d. h. die Trägergeraden der sogenannten singulären Gewinde ihrer Büschel) bilden, zerfallen die involutorischen Gewindebündel in drei verschiedene Klassen:

Die Achsen der singulären Gewinde, d. h. die Leitgeraden der Netze, in denen sich irgend zwei Gewinde der involutorischen Gewindebündel schneiden, bilden nämlich entweder

I. *die beiden ergänzenden Regelscharen einer regulären Quadrik Q, oder*

II. *zwei einander ergänzende Paare verschränkter Strahlbüschel, oder*

III. *ein doppelt-überdecktes und doppelt-gezähltes Strahlbüschel.*

Weil die Leitgeraden der Netzflächen $N(u)$ und $N(v)$, die man den Flächen Φ längs ihrer Asymptotenlinien u und v in Richtung der querenden Schmiegtangenten umschreiben kann, ebenfalls als Achsen singulärer Gewinde der beiden involutorischen Gewindebündel aufgefaßt werden können, in denen die Asymptotenlinien der Fläche Φ enthalten sind, folgt der Satz:

Die Flächen Φ, deren Asymptotenlinien beider Scharen linearen Komplexen angehören, zerfallen je nach der Art dieser notwendig involutorischen Komplexbündel in drei Klassen: die Leitgeraden der Strahlnetze, in denen die längs der Asymptotenlinien der Flächen Φ möglichen Asymptotenrichtungen der querenden Schar liegen, bilden nämlich entweder

I. *die beiden ergänzenden Regelscharen einer regulären Quadrik Q oder*

II. *zwei einander ergänzende Paare verschränkter Strahlbüchel oder*

III. *ein doppelt-überdecktes und doppelt-gezähltes Strahlbüschel.*

Wir bezeichnen die Flächen Φ dieser drei Klassen fortan mit Φ_{I}, Φ_{II}, Φ_{III}. Man kann die Flächen Φ_{II} und Φ_{III} als Grenzfälle der Flächen Φ_{I} auffassen, weil 1) zwei verschränkte Strahlbüschel (d. s. solche, die einen Strahl gemeinsam haben, deren Scheitel und Ebenen aber verschieden sind) eine liniengeometrische Grenzfigur einer Regelschar auf einer regulären Quadrik sind, wobei sich die ergänzende Regelschar der Quadrik auf das ergänzende verschränkte Strahlbüschel-

paar überträgt (d. h. jenes, das dieselben Ebenen aber vertauschte Scheitel hat) und weil 2) durch Vereinigung dieser Scheitel und Ebenen als weitere Grenzfigur daraus auch noch das doppelt-überdeckte Strahlbüschel (in zweimaliger Zählung) entsteht.

Wir erreichen durch diese Einteilung der Flächen Φ in drei Klassen auch eine Übersicht über die windschiefen Schiebungen, durch welche wir die Flächen Φ aus ihren Asymptotenlinien erzeugen konnten. Die Achsen dieser windschiefen Schiebungen sind nämlich identisch mit den Leitgeraden der Strahlnetze, in denen die längs der Asymptotenlinien von Φ querenden Asymptotenrichtungen enthalten sind, und bilden daher in ihrer Gesamtheit wieder eine der Figuren, die wir unter den Punkten I, II *und* III *aufgezählt haben.*

Es ist klar, daß im Falle III nur parabolische Schiebungen, im Falle II (je nach den Realitätsverhältnissen der verschränkten Strahlbüschel) nur hyperbolische bzw. nur elliptische Schiebungen und parabolische Schiebungen nur als Ausnahmefall, wenn die Schnittgerade der verschränkten Strahlbüschel Achse ist, im Falle I endlich bei nullteiliger Quadrik Q nur elliptische, bei einteilig-ringförmiger Quadrik Q aber elliptische, hyperbolische und parabolische Schiebungen auftreten werden.

II. Gemeinsame metrische Eigenschaften der Flächen Φ_{I}, Φ_{II} und Φ_{III} im elliptischen, quasielliptischen und isotropen Raum.

4. Heranziehung der Metrik und Kinematik des elliptischen, quasielliptischen und isotropen Raumes. Da die Frage nach den Flächen Φ, deren Asymptotenlinien linearen Komplexen angehören, eine solche der projektiven Differentialgeometrie ist, liegt es nahe, die Figuren der Liniengeometrie, auf welche wir bei der Unterscheidung der Flächen Φ in drei Klassen gestoßen sind, durch geeignete (reelle oder komplexe) projektive Umformungen in gewisse einfache Normfiguren zu verwandeln. Es steht uns in diesem Sinne frei, und bedeutet für die Flächen Φ keinen Verlust an Allgemeinheit, wohl aber vielleicht eine (unwesentliche) Verschiebung ihrer Realitätsverhältnisse, die drei oben beschriebenen liniengeometrischen Figuren (Achsenmannigfaltigkeiten der singulären Gewinde von involutorischen Gewindebündeln) der Reihe nach aufzufassen als

I. die beiden Regelscharen der nullteiligen Kugel Q

$$Q \ldots x_0^2 + x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 0, \tag{14}$$

die dann an die Stelle der regulären Quadrik Q tritt, oder als

II. die beiden ergänzenden Paare verschränkter Strahlbüschel, deren (konjugiert-komplexe) Ebenen das Ebenenpaar

$$x_0^2 + x_1^2 = 0 \tag{15}$$

und deren (konjugiert-komplexe) Scheitel das Punktepaar

$$u_3^2 + u_3^2 = 0 \tag{15'}$$

bilden, oder als

III. das doppelt-überdeckte und doppelt-gezählte Strahlbüschel der Ebene

$$x_0^2 = 0, \tag{16}$$

dessen Scheitel der Punkt

$$u_3^2 = 0 \tag{16'}$$

ist.

Zeichnet man im Falle III in dem Strahlbüschel noch zwei feste Geraden, zweckmäßigerweise das (konjugiert-komplexe) Geradenpaar

$$x_0 = 0, \quad x_1^2 + x_2^2 = 0 \tag{16''}$$

aus, so *kann man die erhaltenen Figuren als absolute Gebilde einer projektiven Metrik wählen, die dann der Reihe nach identisch ist mit der Metrik*

I. *eines elliptischen Raumes,*

II. *eines quasielliptischen Raumes,*

III. *eines isotropen Raumes.*

Jede dieser Metriken ist in sich dual, weil ihr absolutes Gebilde in sich dual ist.

Über die so entstehenden nichteuklidischen Strecken- und Winkelmessungen genügen uns die folgenden Bemerkungen:

I. Man kann im elliptischen Raum die homogenen Koordinaten der Punkte $x = (x_0, x_1, x_2, x_3)$, welche der absoluten Fläche Q nicht angehören, durch die Forderung

$$x_0^2 + x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 1 \tag{17}$$

normieren und ähnlich die homogenen Koordinaten der Ebenen $u = (u_0, u_1, u_2, u_3)$, welche die absolute Fläche Q nicht berühren, durch die Forderung

$$u_0^2 + u_1^2 + u_2^2 + u_3^2 = 1. \tag{17'}$$

Das Bogenelement des elliptischen Raumes ist dann durch die Formel

$$ds^2 = dx_0^2 + dx_1^2 + dx_2^2 + dx_3^2 \tag{18}$$

gegeben und (dual) im elliptischen Ebenenraum der Kontingenzwinkel durch die Formel

$$d\sigma^2 = du_0^2 + du_1^2 + du_2^2 + du_3^2. \tag{18'}$$

II. Man kann in entsprechender Art im quasielliptischen Raum die homogenen Koordinaten der Punkte, welche dem absoluten Ebenen-

paare nicht angehören, durch die Forderung

$$x_0^2 + x_1^2 = 1 \tag{19}$$

normieren und ähnlich die homogenen Koordinaten der Ebenen, welche nicht dem absoluten Punktepaare angehören, durch die Forderung

$$u_2^2 + u_3^2 = 1. \tag{19'}$$

Das Bogenelement des quasielliptischen Raumes ist dann durch die Formel

$$ds^2 = dx_0^2 + dx_1^2 \tag{20}$$

gegeben und (dual) im quasielliptischen Ebenenraum der Kontingenzwinkel durch die Formel

$$d\sigma^2 = du_2^2 + du_3^2. \tag{20'}$$

III. Man kann endlich im isotropen Raume die homogenen Koordinaten der Punkte, welche der absoluten Ebene (Fernebene $x_0 = 0$) nicht angehören, durch die Forderung

$$x_0 = 1 \tag{21}$$

normieren und (dual) die homogenen Koordinaten der Ebenen, welche nicht den absoluten Punkt (Fernpunkt $u_3 = 0$) enthalten, durch die Forderung

$$u_3 = 1. \tag{21'}$$

D. h. man kann die Punkte des isotropen Raumes durch die inhomogenen Koordinaten

$$1 : x : y : z = x_0 : x_1 : x_2 : x_3$$

beschreiben und (dual) seine Ebenen durch die inhomogenen Koordinaten

$$w : u : v : 1 = u_0 : u_1 : u_2 : u_3$$

(so daß die Gleichung einer Ebene die normierte Gestalt

$$-z = u.x + v.y + w$$

erhält). Dann nimmt das Bogenelement des isotropen Raumes die Gestalt

$$ds^2 = dx^2 + dy^2 \tag{22}$$

an und der Kontingenzwinkel lautet dual dazu

$$d\sigma^2 = du^2 + dv^2. \tag{22'}$$

Die Kinematik des elliptischen, quasielliptischen und isotropen Raumes ist beherrscht von der Existenz zweier vertauschbarer dreigliedriger Gruppen von windschiefen Kollineationen, deren Achsen dem absoluten Gebilde dieser Räume angehören. Nach dem Vorbilde der elliptischen Raumgeometrie, wo diese beiden Gruppen windschiefer Schiebungen zuerst (1873) von W. K. Clifford entdeckt worden sind, bezeichnen wir diese besonderen Bewegungen der drei Räume als

CLIFFORDsche Schiebungen. Als Bewegungen können sie deswegen gedeutet werden, weil sie jede Raumfigur in eine elliptisch-quasielliptisch- oder isotropkongruente überführen, und Schiebungen heißen sie deswegen, weil sie (d. h. ihre eingliedrigen stetigen Untergruppen) geradlinige Bahnen haben.

Wichtig ist für uns die Möglichkeit, diese CLIFFORDschen Schiebungen in jedem der drei Räume in einfachster Weise durch je ein System von höheren komplexen Zahlen beschreiben zu können, nämlich durch das System der HAMILTONschen Quaternionen im elliptischen Falle, und zwei Grenzfälle davon im quasielliptischen und im isotropen Falle.

Wir geben die entsprechenden Formeln kurz wieder und beginnen

I. mit den CLIFFORDschen Schiebungen des elliptischen Raumes. Bezeichnen $a, b, x \ldots$ HAMILTONsche Quaternionen, also höhere komplexe Zahlen mit vier Einheiten

$$x = x_0 e_0 + x_1 e_1 + x_2 e_2 + x_3 e_3, \tag{23}$$

welche der Produkttafel

	$\cdot e_0$	$\cdot e_1$	$\cdot e_2$	$\cdot e_3$
$e_0 \cdot$	e_0	e_1	e_2	e_3
$e_1 \cdot$	e_1	$-e_0$	e_3	$-e_2$
$e_2 \cdot$	e_2	$-e_3$	$-e_0$	e_1
$e_3 \cdot$	e_3	e_2	$-e_1$	$-e_0$

(24)

genügen, so kann man durch die Gleichungen

$$x' = a \cdot x \tag{25_l}$$

die CLIFFORDschen Linksschiebungen S_l

$$x' = x \cdot b \tag{25_r}$$

die CLIFFORDschen Rechtsschiebungen S_r

des elliptischen Raumes beschreiben. Diese Schiebungen lassen jeweils die Erzeugenden einer Schar der Maßfläche Q einzeln fest (indem sie die Punkte von Q auf ihnen verschieben), während von der anderen Schar nur zwei Erzeugende punktweise festbleiben, die dann als die Achsen dieser windschiefen Schiebungen fungieren. Jede der beiden Schiebungsgruppen ist dreigliedrig und vertauscht die Punkte und Ebenen des Raumes (soweit sie nicht der Maßfläche Q angehören) in einfach-transitiver Weise. Miteinander in beliebiger Reihenfolge zusammengesetzt liefern die beiden Schiebungsgruppen S_l^3 und S_r^3 die sechsgliedrige Gruppe der *Bewegungen des elliptischen Raumes*, deren Darstellung durch Quaternionen also

$$x' = a x b \tag{26}$$

ist.

II. Die CLIFFORDschen Schiebungen des quasielliptischen Raumes können in genau derselben Weise durch einen *Grenzfall*

der Hamiltonschen Quaternionen, den zuerst Study[12]) für die Darstellung der ebenen Bewegungen benützt hat, dargestellt werden. Läßt man nämlich die vier Einheiten der Produkttafel

(27)

	$\cdot e_0$	$\cdot e_1$	$\cdot e_2$	$\cdot e_3$
$e_0 \cdot$	e_0	e_1	e_2	e_3
$e_1 \cdot$	e_1	$-e_0$	e_3	$-e_2$
$e_2 \cdot$	e_2	$-e_3$	0	0
$e_3 \cdot$	e_3	e_2	0	0

gehorchen, so stellen die Formeln (25) wieder die *quasielliptischen Links- und Rechtsschiebungen* dar, welche je eine dreigliedrige Gruppe bilden und, in kommutativer Weise zusammengesetzt, die sechsgliedrige *Bewegungsgruppe* (26) *des quasielliptischen Raumes* ergeben. Jede der beiden Cliffordschen Schiebungsgruppen vertauscht wieder die Punkte und Ebenen des Raumes (soweit sie nicht mit dem absoluten Ebenenpaar (19) bzw. dem absoluten Punktepaar (19′) inzidieren) in einfach-transitiver Weise. Jede quasielliptische Clifford-Schiebung läßt von den beiden Paaren verschränkter Strahlbüscheln, welche das absolute Gebilde des quasielliptischen Raumes aufbauen, das eine Paar elementweise fest, indem bei ihr die Punkte der absoluten Ebenen die Strahlen dieser Büschel durchwandern, während in dem anderen (ergänzenden) Paar verschränkter Strahlbüschel genau zwei Strahlen (in jedem Büschel ein Strahl) punktweise festbleiben. Dieses Strahlenpaar bildet dann wieder das Achsenpaar der quasielliptischen Cliffordschen Schiebung. Alle diese quasielliptischen Schiebungen sind (ebenso wie übrigens auch im elliptischen Raume), von elliptischer Art (konjugiert-komplexe Achsen). Nur als *Sonderfall* können auch *parabolische Schiebungen* auftreten, nämlich dann, wenn die Schiebungsrichtungen die Schnittgerade der absoluten Ebenen (19) oder, was dasselbe ist, die Verbindungsgerade der absoluten Punkte (19′) treffen.

III. Die Cliffordschen Schiebungen des isotropen Raumes können gleichfalls durch ein System höherer komplexer Zahlen, das ein *Grenzfall der Hamiltonschen und Studyschen Quaternionen* ist, und das ich[13]) bei verschiedenen Gelegenheiten benutzt habe, beschrieben werden. Läßt man nämlich jetzt die vier Einheiten des Systems der Produkttafel

(28)

	$\cdot e_0$	$\cdot e_1$	$\cdot e_2$	$\cdot e_3$
$e_0 \cdot$	e_0	e_1	e_2	e_3
$e_1 \cdot$	e_1	0	e_3	0
$e_2 \cdot$	e_2	$-e_3$	0	0
$e_3 \cdot$	e_3	0	0	0

genügen, so liefern die Formeln (25) die *Links- und Rechtsschiebungen des isotropen Raumes*, welche ebenfalls je eine dreigliedrige, hinsichtlich der eigentlichen Punkte und der nicht z-parallelen Ebenen (d. s. jene, die mit den isotropen absoluten Elementen (16) nicht inzidieren) einfach-transitive Gruppe bilden. In jeder dieser Gruppen kommen jetzt die z-parallelen („vollisotropen") Schiebungen vor; das kommutative Produkt der beiden CLIFFORDschen Schiebungsgruppen ist daher nur eine fünfgliedrige Gruppe von besonderen Bewegungen des isotropen Raumes, deren Darstellung wieder (26) liefert. Ich habe diese Bewegungen als *isotrope Grenzbewegungen* bezeichnet. *Alle isotropen CLIFFORDschen Schiebungen sind parabolischer Art.* Sie lassen das doppeltüberdeckte Strahlbüschel (16) der absoluten Geraden des isotropen Raumes elementweise fest, indem sie die Punkte der absoluten Ebene auf seinen Strahlen verschieben; jedoch bleibt eine dieser Geraden sogar punktweise fest, nämlich jene, die als Achse dieser parabolischen CLIFFORDschen Schiebungen fungiert.

Man bezeichnet ganz allgemein in allen drei Räumen die Bahngeraden einer Linksschiebung (25_l) *als im CLIFFORDschen Sinn linksparallel, während die Bahngeraden einer Rechtsschiebung* (25_r) *als CLIFFORDsche Rechtsparallelen bezeichnet werden.*

CLIFFORDsche Parallelen schneiden im elliptischen Raume die Maßfläche Q (14) nach zwei (konjugiert-komplexen) Erzeugenden derselben Schar, im quasielliptischen Raume treffen sie zwei (konjugiert-komplexe) Strahlen des einen Paares verschränkter Strahlbüschel, das im absoluten Gebilde (15) vorhanden ist, im isotropen Raume schneiden sie einen und denselben Strahl des absoluten Strahlbüschels (16). Diese Eigenschaft ist im elliptischen und quasielliptischen Raume für die Feststellung des CLIFFORDschen Parallelismus auch hinreichend. *Alle Bahngeraden einer CLIFFORDschen Links- oder Rechtsschiebung und damit auch alle zu einer festen Geraden g links- oder rechtsparallelen Geraden bilden also je ein Strahlnetz, das wir als das Linksnetz bzw. Rechtsnetz der Geraden bezeichnen.* Diese Links- und Rechtsnetze sind im elliptischen Raume stets elliptisch, ebenso im quasielliptischen Raume, solange nicht der parabolische Ausnahmefall vorliegt; sie sind dagegen im isotropen Raume stets parabolisch. Unter den Strahlen dieser Linksnetze bzw. Rechtsnetze kommen stets (als Schiebungsbahnen seiner Punkte) die Erzeugenden der einen bzw. anderen Schar des absoluten Gebildes vor. Man kann diese Erzeugenden daher als Linksschar bzw. Rechtsschar unterscheiden. Nur im isotropen Raume decken sich beide Scharen in dem einzigen absoluten Strahlbüschel; zur Unterscheidung dieser Strahlbüschel wird man dann noch die Links- bzw. Rechtsnetze heranziehen müssen, als deren Elemente (Leitgeraden) ihre Erzeugenden gerade auftreten.

Es ist leicht, die Liniengleichung dieser Links- und Rechtsnetze zu berechnen. Um zum Beispiel das Linksnetz zu finden,

welches die Verbindungsgerade der Punkte x und x' enthält, wird man bemerken, daß es genau eine Linksschiebung $x' = a \,.\, x$ gibt, welche den Punkt x in x' überführt. Sie ist durch die Quaternion

$$a = x' \,.\, x^{-1} \tag{29}$$

eindeutig bestimmt. Genau so erhält man für die Rechtsschiebung $x' = x \,.\, b$, die x nach x' bringt, die Quaternion

$$b = x^{-1} \,.\, x', \tag{30}$$

wobei x^{-1} stets die zu x reziproke Quaternion bedeutet, die bei den Normierungen (17), (19) und (21) durch die Gleichung

$$x^{-1} = x_0 e_0 - x_1 e_1 - x_2 e_2 - x_3 e_3 \tag{31}$$

definiert ist. Im zweiten Falle bilden die Verbindungsgeraden der Punkte x und x' ein Rechtsnetz. Führt man die Berechnung der Quaternionen a und b in den drei Räumen auf Grund der Produkttafeln (24), (27) und (28) aus, so erkennt man, daß die Vektoranteile dieser Quaternionen, d. h. die Ausdrücke $a_1 e_1 + a_2 e_2 + a_3 e_3$ bzw. $b_1 e_1 + b_2 e_2 + b_3 e_3$ nur von den Linienkoordinaten $p_{ik} = x_i x_k' - x_k x_i'$ der Bahngeraden abhängen. *Man erhält so im elliptischen, quasielliptischen und isotropen Raume die durch die Quaternionen a und b bestimmten Links- bzw. Rechtsnetze durch die folgenden Gleichungen dargestellt:*

(32)

	Linksnetze:	Rechtsnetze:
I.	$\begin{Vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ p_{01}+p_{23} & p_{02}+p_{31} & p_{03}+p_{12} \end{Vmatrix} = 0$	$\begin{Vmatrix} b_1 & b_2 & b_3 \\ p_{01}-p_{23} & p_{02}-p_{31} & p_{03}-p_{12} \end{Vmatrix} = 0$
II.	$\begin{Vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ p_{01} & p_{02}+p_{31} & p_{03}+p_{12} \end{Vmatrix} = 0$	$\begin{Vmatrix} b_1 & b_2 & b_3 \\ p_{01} & p_{02}-p_{31} & p_{03}-p_{12} \end{Vmatrix} = 0$
III.	$\begin{Vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ p_{01} & p_{02} & p_{03}+p_{12} \end{Vmatrix} = 0$	$\begin{Vmatrix} b_1 & b_2 & b_3 \\ p_{01} & p_{02} & p_{03}-p_{12} \end{Vmatrix} = 0.$

Wie die erhaltenen Formeln zeigen, *lassen sich diese Netze auch als Schnitte der linearen Komplexe (Gewinde) zweier zueinander involutorischer Gewindebündel auffassen, nämlich die Linksnetze als Schnitte von je zweien der „Linksgewinde" und die Rechtsnetze als Schnitte von je zweien der „Rechtsgewinde", deren Gleichungen im elliptischen, quasielliptischen und isotropen Raume lauten:*

(33)

	Linksgewinde: G_l	Rechtsgewinde: G_r
I.	$u_1(p_{01}+p_{23}) + u_2(p_{02}+p_{31}) + u_3(p_{03}+p_{12}) = 0,$	$v_1(p_{01}-p_{23}) + v_2(p_{02}-p_{31}) + v_3(p_{03}-p_{12}) = 0,$
II.	$u_1 p_{01} + u_2(p_{02}+p_{31}) + u_3(p_{03}+p_{12}) = 0,$	$v_1 p_{01} + v_2(p_{02}-p_{31}) + v_3(p_{03}-p_{12}) = 0,$
III.	$u_1 p_{01} + u_2 p_{02} + u_3(p_{03}+p_{12}) = 0,$	$v_1 p_{01} + v_2 p_{02} + v_3(p_{03}-p_{12}) = 0.$

Gerade diese beiden Gewindebündel sind es, welche als Örter der Achsen ihrer singulären Gewinde (oder als Schnitte ihrer Gewinde zu dreien) die Erzeugendenscharen der Maßfläche Q (14) des elliptischen Raumes, bzw. die verschränkten Strahlbüschel des quasielliptischen Maßgebildes (15) und schließlich das doppelüberdeckte Strahlbüschel (16) und damit das absolute Gebilde des isotropen Raumes tragen.

Aus der Vertauschbarkeit der beiden Arten Cliffordscher Schiebungen folgt, daß *in allen drei Räumen ein Linksnetz alle Rechtsschiebungen, ein Rechtsnetz aber alle Linksschiebungen gestattet. Daraus folgt weiter, daß ein Linksgewinde ebenfalls alle Rechtsschiebungen, ein Rechtsgewinde aber alle Linksschiebungen gestattet. Unterwirft man also ein beliebiges Strahlbüschel allen möglichen Linksschiebungen, so durchläuft es ein Rechtsgewinde; umgekehrt entsteht durch Rechtsschiebung eines Strahlbüschels ein Linksgewinde.*

Die Bedeutung der linearen Komplexe der involutorischen Bündel (33) für unsere Flächen Φ erhellt daraus, daß gerade diese Komplexe G_l und G_r es sind, in denen in unseren drei lediglich projektiv-normierten Fällen die beiden Scharen von Asymptotenlinien dieser Flächen Φ_{I}, Φ_{II}, Φ_{III} enthalten sind. Die Bedeutung der Cliffordschen Schiebungen aber liegt darin, daß sie gerade jene windschiefen Schiebungen sind, durch die man diese Flächen Φ aus ihren Asymptotenlinien gewinnen kann. Diesen Dingen wollen wir uns nach unserer Einschaltung über die Metrik und Kinematik des elliptischen, quasielliptischen und isotropen Raumes nun wieder zuwenden.

5. Die Flächen Φ_{I}, Φ_{II}, Φ_{III} als Flächen der festen Relativkrümmung $K = -1$ des elliptischen, quasielliptischen und isotropen Raumes. Ihre Erzeugung als Cliffordsche Schiebflächen dieser Räume. Wir wissen aus den Ergebnissen der **Nr. 3**, daß die linearen Komplexe, denen die Asymptotenlinien der Flächen Φ angehören, zwei involutorische Gewindebündel bilden. Je nach der Art des Durchschnittes dieser Bündel, der I. aus zwei ergänzenden Regelscharen, II. aus zwei ergänzenden Paaren verschränkter Strahlbüschel oder III. aus einem doppeltüberdeckten Strahlbüschel bestehen kann, zerfallen die Flächen Φ in drei verschiedene Klassen Φ_{I}, Φ_{II}, Φ_{III}. Wählt man diese Durchschnittsfiguren als Maßgebilde einer nichteuklidischen Metrik, so ergibt sich nach projektiven Normierungen ein elliptischer, quasielliptischer oder isotroper Raum, in dem die Flächen Φ_{I}, Φ_{II}, Φ_{III} der Reihe nach eingebettet sind und es steht uns jetzt zur weiteren gemeinsamen Untersuchung dieser Flächen die Differentialgeometrie dieser Räume zur Verfügung, die von L. Bianchi[14]), W. Blaschke[9]) und dem Verfasser[10]) entwickelt worden sind.

Wir wissen ferner aus **Nr. 3**, daß die Flächen Φ durch kontinuierliche windschiefe Schiebung zweier kreuzender Asymptotenlinien längs einander erzeugbar sind, wobei die Achsen dieser Schiebungen (als Leitgeraden der Schnittnetze je zweier benachbarter Komplexe der

involutorischen Gewindebündel von oben) gerade jene Regelscharen, verschränkten Strahlbüschel und doppelten Strahlbüschel bildeten, die wir soeben zu Maßgebilden der drei nichteuklidischen Räume gemacht hatten. Diese windschiefen Schiebungen sind also in der Kinematik dieser Räume mit Cliffordschen Schiebungen der einen bzw. anderen Art identisch, und es gilt daher der Satz:

Die Flächen Φ_{I}, Φ_{II}, Φ_{III} *können in dem elliptischen, quasielliptischen und isotropen Raume, dem sie angehören, erzeugt werden, indem man auf ihnen ein kreuzendes Paar von Asymptotenlinien* c_r *und* c_l *herausgreift und* c_r *rechtsseitig längs* c_l *oder umgekehrt* c_l *linksseitig längs* c_r *im Cliffordschen Sinne verschiebt.*

Die Bezeichnung der Asymptotenlinien ist dabei so gewählt, daß c_r *in einem Rechtsgewinde und* c_l *in einem Linksgewinde liegt.*

Gingen wir bisher immer von einer vorgegebenen Fläche Φ aus, die wir dann aus ihren damit gleichfalls gegebenen Asymptotenlinien als Cliffordsche Schiebfläche erzeugen konnten, so erhebt sich umgekehrt die Frage, ob man ausgehend von beliebigen Gewindekurven c_r, c_l eines Rechts- und Linksgewindes der drei Räume durch Cliffordsche Rechtsschiebung von c_r längs c_l bzw. durch Linksschiebung von c_l längs c_r stets eine unserer Flächen Φ erhalten kann. Die Antwort darauf wird tatsächlich bejahend sein, wenn c_r und c_l in ihrem Schnittpunkte dieselbe Schmiegebene aufweisen; das muß ja stets bei kreuzenden Asymptotenlinien der Fall sein. Man kann dafür auch sagen, daß dem Schnittpunkte durch das an c_r bzw. c_l beteiligte Rechts- bzw. Linksgewinde dieselbe Nullebene zugewiesen werden muß.

Um zu diesem allgemeinen Satz vorzudringen, beweisen wir zuerst den folgenden, in allen drei Räumen gemeinsam gültigen Satz:

Im elliptischen, quasielliptischen und isotropen Raume haben die Kurven der Rechtsgewinde und nur sie die feste Torsion $\tau = +1$, *ebenso die Kurven der Linksgewinde und nur sie die feste Torsion* $\tau = -1$.

Der Beweis dieses wichtigen Satzes kann ohne Rechnung wie folgt geführt werden. *Die Rechts- und Linksgewinde* (33) enthalten zunächst die eine Erzeugendenschar der Maßgebilde (14), (15) und (16) des elliptischen, quasielliptischen und isotropen Raumes. *Ihr Nullsystem führt daher diese Maßgebilde in sich über und verwandelt jede metrische Größe ohne Wertänderung in die dazu duale metrische Größe.* Aus dem *Bogenelemente* ds der einen Kurve wird so der *Kontingenzwinkel* $d\sigma$ der Schmiegebenen der dazu in den Nullsystemen der Gewinde (33) dualen Kurve und umgekehrt.

Auf die Kurven c_r und c_l der Rechts- und Linksgewinde (33) angewandt, die durch ihre eigenen Nullsysteme unter Vertauschung von Punkten und Schmiegebenen in sich selber verwandelt werden, besagt

dies aber, daß für die Torsion dieser Kurven

$$\tau = \frac{d\sigma}{ds} = \frac{ds}{d\sigma} = \frac{1}{\tau}$$

ist, *d. h. die Torsion der Kurven der Rechts- und Linksgewinde* (33) *hat in allen drei Räumen die konstanten Werte* $\tau = \pm 1$. Wir werden sogleich auch die Umkehrung beweisen und dabei sehen, daß genauer die Torsion bei Rechtsgewinden den Wert $\tau = +1$ und bei Linksgewinden den Wert $\tau = -1$ hat.

Nehmen wir nun umgekehrt eine beliebige Kurve der festen Torsion

$$\tau = \frac{d\sigma}{ds} = 1$$

an. Bei ihr ist stets $d\sigma = ds$; wenn man ihre Kurvenpunkte in Richtung der Tangente t in die Nachbarpunkte verschiebt, so dreht sich die Schmiegebene der Kurve bekanntlich ebenfalls um die Tangente t und zwar sind im vorliegenden Falle die *Schieblängen* ds *gleich den Drehwinkeln* $d\sigma$ und beide zusammen bilden Rechtsschrauben. (Im Falle $\tau = -1$ entstünden bei sonst gleichen Verhältnissen Linksschrauben.) *Diese Schiebungen können nun direkt durch* Clifford*sche Linksschiebungen verwirklicht werden.* Denn verschiebt man ein Strahlbüschel linksseitig in den drei Räumen im Clifford*schen* Sinne längs einer seiner Geraden t, so daß der Scheitel auf t die Strecke ds durchwandert, dann dreht sich seine Ebene gleichfalls um t, wobei der Drehwinkel $d\sigma$ gleich der Schubstrecke ds ist und beide Bewegungen zusammen eine Rechtsschraube bilden. (Im Falle $\tau = -1$ gilt das Entsprechende für Clifford*sche* Rechtsschiebungen.)

Zusammenfassend entstehen also die Schmiegelemente einer Kurve c_r der festen Torsion $\tau = +1$ (bzw. einer Kurve c_l der festen Torsion $\tau = -1$) des elliptischen, quasielliptischen und des isotropen Raumes aus einem festen Schmiegelemente dieser Kurve, indem man dieses Schmiegelement längs der Kurve c_r (bzw. c_l) durch eine Clifford*sche* Linksschiebung (bzw. Rechtsschiebung) verpflanzt. Daraus folgt aber, daß das Schmiegelement ein bestimmtes Rechtsgewinde (bzw. Linksgewinde) nicht verläßt, d. h. daß die Kurve c_r der Torsion $\tau = +1$ tatsächlich in einem bestimmten Rechtsgewinde (entsprechend, bei $\tau = -1$, c_l in einem Linksgewinde) enthalten ist. *Es haben also auch umgekehrt nur die Kurven dieser Rechts- bzw. Linksgewinde* (33) *die feste Torsion* $\tau = +1$ *bzw.* -1. Der vorgenannte Satz ist damit in vollem Umfange nachgewiesen. Seine eigentliche Wurzel ist die Tatsache, daß ein Rechtsgewinde jede Linksschiebung und ein Linksgewinde jede Rechtsschiebung gestattet.

Weil die Asymptotenlinien der Flächen Φ_{I}, Φ_{II} und Φ_{III} *in allen drei Räumen den Rechts- und Linksgewinden* (33) *angehören, haben sie sicherlich in der einen Schar* c_r *die feste Torsion* $\tau = +1$ *und in der anderen Schar* c_l *die feste Torsion* $\tau = -1$.

Nach dem auch im elliptischen, quasielliptischen und isotropen Raume gültigen Satze von Beltrami *und* Enneper *folgt daraus, daß die Flächen* Φ_{I}, Φ_{II} *und* Φ_{III} *in diesen Räumen die feste Relativkrümmung*

$$K = \frac{1}{R_1 R_2} = -\tau^2 = -1 \tag{34}$$

besitzen. R_1 *und* R_2 *bezeichnen dabei die beiden im Sinne der jeweiligen Metrik zu verstehenden Hauptkrümmungsradien der Flächenpunkte.*

Wesentlich ist nun, daß auch die Umkehrung dieser Sätze gilt. Hat nämlich eine Fläche des elliptischen, quasielliptischen oder isotropen Raumes die feste Relativkrümmung $K = -1$, so haben ihre Asymptotenlinien nach dem Satze von Beltrami-Enneper die festen Torsionen $\tau = \pm 1$ und sind daher Gewindekurven aus den involutorischen Rechts- und Linksgewinden (33), d. h. die Fläche ist notwendig eine unserer Flächen Φ, deren Asymptotenlinien beider Scharen in linearen Komplexen liegen.

Damit haben wir als erstes Hauptergebnis dieser Arbeit die folgende neue, sehr einfache und wichtige **nichteuklidische Deutung der Flächen Φ** gewonnen:

Die Flächen Φ, *deren Asymptotenlinien beider Scharen linearen Komplexen angehören, fallen (nach geeigneten komplexprojektiven Umformungen) mit jenen Flächen* Φ_{I}, Φ_{II}, *und* Φ_{III} *des elliptischen, quasielliptischen und isotropen Raumes zusammen, deren Relativkrümmung* $K = \frac{1}{R_1 R_2}$ *den festen Wert* $K = -1$ *hat. Ihre Asymptotenlinien* c_r *und* c_l *haben daher in diesen Räumen die konstanten Torsionen* $\tau = +1$ bzw. $\tau = -1$.

Im elliptischen Raume stimmen die Flächen Φ_{I} der festen Relativkrümmung $K = -1$ mit jenen Flächen überein, deren Absolutkrümmung $K_a = 1 + K = 0$ ist. Diese Flächen verschwindender Gaussscher Krümmung $K_a = 0$ des elliptischen Raumes tragen also euklidische Metrik. Man verdankt ihre Entdeckung und ihr genaueres Studium einer berühmten Abhandlung von L. Bianchi [8]) aus dem Jahre 1896. Daß diese Flächen mit $K_a = 0$ zu jenen gehören, deren Asymptotenlinien linearen Komplexen angehören, war Bianchi entgangen. Erst A. Terracini [7]) hat das (1917) erkannt.

Die entsprechenden Flächen Φ_{II} der festen Relativkrümmung $K = -1$ des quasielliptischen Raumes hat W. Blaschke [9]) entdeckt und ihre Bedeutung für die ebene Kinematik klargestellt (1938). Auf die Eigenschaft der Flächen Φ_{II}, Kurven aus linearen Komplexen als Asymptotenlinien zu haben, kommt dabei jedoch nicht die Rede.

Die Flächen Φ_{III} der festen Relativkrümmung $K = -1$ des isotropen Raumes habe ich selber [10,11]) im Rahmen der Untersuchungen zur Differentialgeometrie dieses Raumes eingehender studiert. Man

hat diese Flächen als Integralflächen der Differentialgleichung

$$K = rt - s^2 = -1 \tag{35}$$

schon bei vielen früheren Gelegenheiten behandelt, u. a. in der affinen Differentialgeometrie, wo sie als uneigentliche Affinsphären (Flächen mit parallelen Affinnormalen[15])) eine Rolle spielen. Daß ihre Asymptotenlinien linearen Komplexen angehören, ist verschiedentlich schon früher bemerkt worden.

Wir hatten oben bemerkt, daß jede vorgegebene Fläche Φ_{I} des elliptischen, Φ_{II} des quasielliptischen und Φ_{III} des isotropen Raumes der Relativkrümmung $K = -1$ aus ihren Asymptotenlinien der festen Torsion $\tau = +1$ bzw. $\tau = -1$ durch Cliffordsche Schiebung erzeugt werden kann. Wir sind jetzt in der Lage, auch die Umkehrung dieses Satzes zu beweisen. Wir wollen nämlich genauer das folgende zweite Hauptergebnis dieser Arbeit gewinnen, das eine **einheitliche Konstruktion der allgemeinsten Fläche Φ** enthält, *deren Asymptotenlinien beider Scharen in linearen Komplexen liegen:*

Es seien I. im elliptischen Raume, II. im quasielliptischen Raume, III. im isotropen Raume

c_r *eine beliebige Kurve der festen Torsion* $\tau = +1$ *und*

c_l *eine beliebige Kurve der festen Torsion* $\tau = -1$,

welche in ihrem Schnittpunkte P dieselbe Schmiegebene haben.

Verschiebt man dann (im Cliffordschen Sinne der betreffenden Raumkinematik) diese beiden Kurven aneinander und zwar entweder

c_r *rechtsseitig längs* c_l *oder*

c_l *linksseitig längs* c_r,

so entsteht, abgesehen von komplex-projektiven Umformungen, die allgemeinste Fläche Φ_{I}, Φ_{II}, Φ_{III} mit zwei (verschiedenen) Scharen von Asymptotenlinien, die linearen Komplexen angehören. Diese Asymptotenlinien fallen dabei mit den verschiedenen Lagen der Schiebkurven c_r und c_l zusammen; sie sind also im Sinne der Metrik der drei Räume scharweise untereinander kongruent und haben alle die Torsion $\tau = +1$ bzw. $\tau = -1$. Die Flächen selbst aber haben jeweils die feste Relativkrümmung $K = -1$.

In der Tat wird zunächst, wegen der Vertauschbarkeit der Rechts- und Linksschiebungen, auf beide Arten jedenfalls dieselbe Fläche erzeugt. Da ferner z. B. c_l einem bestimmten Linksgewinde (33) angehört, das alle Rechtsschiebungen gestattet, wird die gemeinsame Schmiegebene π der Kurven c_r und c_l im Kreuzungspunkte P bei der Rechtsschiebung von c_r längs c_l genau den Schmiegstreifen von c_l beschreiben; da ferner bei dieser Rechtsschiebung das anfängliche Schmiegelement (P, π) starr mit der Kurve c_r verbunden bleibt, sind die einzelnen Schmiegelemente von c_l und die Schmiegelemente der kreuzenden Lagen von c_r identisch, d. h. c_l *ist Asymptotenlinie der*

erzeugten Fläche. Dieselbe Überlegung gilt für c_r, das also ebenfalls Asymptotenlinie ist. Ist nun c_r' und c_l' irgend eine weitere Lage von c_r und c_l, so kann die Fläche wegen der Vertauschbarkeit der Rechts- und Linksschiebungen ebensogut durch die Schiebung der Kurven c_r und c_l' oder durch Schiebung der Kurven c_l und c_r' aneinander erzeugt werden. Da jedes dieser Paare im Kreuzungspunkte dieselbe Schmiegebene aufweist, und auch die Werte der Torsion dieselben wie vorher sind, kann man den obigen Schluß auf die neuen Paare von Schubkurven ausdehnen und erhält damit das Ergebnis, daß tatsächlich *alle Lagen c_r' von c_r und alle Lagen c_l' von c_l Asymptotenlinien der erzeugten Fläche sind.* Da diese Asymptotenlinien aber allesamt die Torsion $\tau = +1$ bzw. -1 besitzen, *hat die erzeugte Fläche die konstante Relativkrümmung $K = -1$ und ist damit tatsächlich eine Fläche der Klassen Φ_{I}, Φ_{II} bzw. Φ_{III}, deren Asymptotenlinien den involutorischen Bündeln* (33) *von linearen Komplexen angehören.*

III. Analytische Darstellung der Flächen Φ_{I}, Φ_{II}, Φ_{III}.

6. Eine weitere einfache Konstruktion der Flächen Φ. Man könnte die analytische Darstellung der Flächen Φ direkt aus der letzten Konstruktion dieser Flächen als Schiebflächen des elliptischen, quasielliptischen und isotropen Raumes gewinnen. Damit identisch, aber rechnerisch etwas bequemer, ist die folgende **neue Erzeugungsweise der Flächen Φ** (Fig. 1):

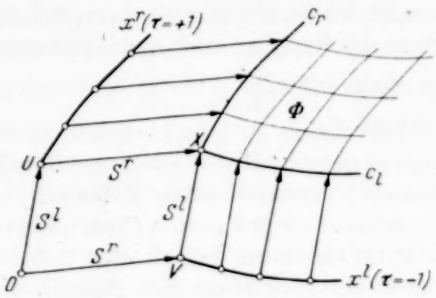


Fig. 1.

Es seien I. im elliptischen, II. im quasielliptischen und III. im isotropen Raume als Grundkurven gegeben eine Kurve x^r der festen Torsion $\tau = +1$, die also in einem bestimmten Rechtsgewinde G_r (33) *liegt, und eine Kurve x^l der Torsion $\tau = -1$ aus einem Linksgewinde G_l* (33). *Verbinden wir dann den Nullpunkt O mit einem beliebigen Punkte U von x^r und V von x^l und ergänzen wir das Streckenpaar OU, OV durch einen Punkt X derart zu einem* CLIFFORDschen Parallelogramm, *daß*

UX rechtsparallel zu OV und VX linksparallel zu OU

ist, so wird, wenn U auf x^r und V auf x^l läuft, X eine CLIFFORDsche Schiebfläche *beschreiben, deren Schiebkurven c_r und c_l zu x^r und x^l kongruent sind. Eine Fläche Φ der festen Relativkrümmung $K = -1$ entsteht dabei, wenn die involutorischen Gewinde G_r und G_l dem Nullpunkte O dieselbe Nullebene σ_0 zuweisen.*

Tatsächlich entsteht nämlich der Punkt X aus U nach unserer Konstruktion auch durch die Rechtsschiebung S^r, welche O nach V bringt, und ebenso entsteht X aus V auch durch die Linksschiebung S^l, welche O nach U bringt. Bei festem V beschreibt also X auf der erzeugten Fläche eine zu x^r durch Rechtsschiebung S^r kongruente Kurve c_r und bei festem U eine zu x^l durch Linksschiebung S^l kongruente Kurve c_l. Die erzeugte Fläche entsteht also auch durch Rechtsschiebung der Kurve c_r längs c_l oder durch Linksschiebung von c_l längs c_r und ist damit wirklich eine Cliffordsche Schiebfläche. Eine Fläche Φ der festen Relativkrümmung $K = -1$ ist sie aber erst dann, wenn die Kurven c_r und c_l in ihrem Kreuzungspunkte X dieselbe Schmiegebene besitzen. Das ist aber bei unserer Konstruktion immer dann der Fall, wenn die Gewinde G_r und G_l der involutorischen Bündel (33), in denen die Grundkurven x^r und x^l enthalten sind, dem Nullpunkte O dieselbe Nullebene σ_0 zuordnen. Tatsächlich geht diese Nullebene σ_0 von O durch die Linksschiebung S^l zunächst in die Nullebene σ^r von U bezüglich des Rechtsgewindes G_r, d. h. in die Schmiegebene von x^r über und diese wieder durch die Rechtsschiebung S^r in die Schmiegebene σ_r von c_r im Punkte X. Ebenso entsteht aus σ_0 durch die Rechtsschiebung S^r die Nullebene σ^l von V bezüglich des Linksgewindes G_l, d. h. die Schmiegebene von x^l, und daraus wieder entsteht durch die Linksschiebung S^l die Schmiegebene σ_l von c_l. Da aber die Schiebungen S^r und S^l vertauschbar sind, entsteht auf beiden Wegen aus σ_0 dieselbe Ebene $\sigma = \sigma_r = \sigma_l$, d. h. die Schubkurven c_r und c_l haben tatsächlich in ihrem Kreuzungspunkte X dieselbe Schmiegebene, wenn der Nullpunkt O in den Gewinden G_r und G_l dieselbe Nullebene σ_0 besitzt.

Wir haben so aus der neuen Erzeugungsart der Flächen Φ die alte hergeleitet. Aber auch das Umgekehrte ist leicht möglich; dazu müßte man nur eine der Bewegungen (26) unserer Räume, welche den Punkt X in den Nullpunkt O überführen, in Cliffordsche Schiebungen (25) zerspalten. Das ist stets möglich, ja man kann es sogar (auf ∞^1 Arten) so einrichten, daß dabei die gemeinsame Schmiegebene σ der Schubkurven c_r und c_l in eine vorgegebene Ebene σ_0 des Nullpunktes O übergeht. Damit ist dann gezeigt, daß man jede Fläche Φ durch unsere neue Konstruktion erhalten kann, wobei es noch erlaubt ist, die Gewinde G_r und G_l, in denen die Grundkurven x^r und x^l der neuen Erzeugung enthalten sein sollen, beliebig aus den involutorischen Bündeln (33) zu wählen (natürlich mit der Einschränkung, daß sie in O dieselbe Nullebene σ_0 haben). Von dieser letzten Freiheit werden wir sofort einfachen Gebrauch machen.

Wie die Formeln (33) zeigen, kommt im elliptischen Raume sowohl, als auch im quasielliptischen und isotropen Raume unter den ver-

zeichneten involutorischen Rechts- und Linksgewinden das Paar der Gewinde

$$(36) \qquad \boxed{G_r \ldots \; p_{03} - p_{12} = 0} \qquad \boxed{G_l \ldots \; p_{03} + p_{12} = 0}$$

vor. Beide Gewinde weisen dem Nullpunkte $O = (1,0,0,0)$ dieselbe Nullebene, nämlich die Ebene

$$(37) \qquad \sigma_0 \ldots \; x_3 = 0$$

zu. Man kann sie daher als Grundgewinde für die Konstruktion der allgemeinsten Flächen Φ_{I}, Φ_{II} und Φ_{III} nehmen, deren analytischer Darstellung wir uns nun zuwenden.

7. Allgemeine analytische Darstellung der Flächen Φ_{I}, Φ_{II}, Φ_{III}. Es seien

$$(38) \qquad x^r = x^r(u) \qquad x^l = x^l(v)$$

zwei beliebige durch die Parameter u und v beschriebene *Gewindekurven der involutorischen Gewinde* (36), *d. h. zwei Kurven der Torsionen* $\tau = +1$ *bzw.* -1. Wir denken uns in (38) ihre homogenen Koordinaten wieder zu Quaternionen der Typen (24), (27) und (28) zusammengefaßt. Dem Nullpunkte O ist dann die „Eins" dieser Quaternionensysteme, d. h. die Zahl e_0 zugeordnet. Dann ist $a = x^r(u)$ die Quaternion der Linksschiebung (25_l), welche den Nullpunkt O in die einzelnen Punkte U von x^r überführt, und ebenso $b = x^l(v)$ die Quaternion der Rechtsschiebung (25_r) welche O in die Punkte von x^l bringt. Wenn man beide Schiebungen nacheinander (in irgend einer Reihenfolge) auf den Nullpunkt O anwendet, so erhält man die Punkte

$$(39) \qquad x = x^r(u) \,.\, e_0 \,.\, x^l(v) = x^r(u) \,.\, x^l(v),$$

welche nach unserer neuen Konstruktion die Fläche Φ bilden.

Damit haben wir als drittes Hauptergebnis dieser Arbeit die folgende **einfache und einheitliche analytische Darstellung der Flächen Φ** gewonnen:

Die allgemeine Fläche Φ_{I}, Φ_{II}, Φ_{III} der festen Relativkrümmung $K = -1$ des elliptischen, quasielliptischen und isotropen Raumes, d. h. (abgesehen von komplexen projektiven Umformungen) die allgemeine Fläche Φ, deren Asymptotenlinien beider Scharen in linearen Komplexen liegen, kann in diesen Räumen mit Hilfe der Quaternionensysteme (24), (27) *und* (28) *durch das Quaternionenprodukt*

$$(40) \qquad \boxed{x = x^r(u) \,.\, x^l(v)}$$

dargestellt werden, worin $x^r(u)$ und $x^l(v)$ beliebige Gewindekurven aus den involutorischen Gewinden (36) *bedeuten.*

Sind ausführlicher

$$\begin{aligned} x^r(u) &= x_0^r(u) \,.\, e_0 + x_1^r(u) \,.\, e_1 + x_2^r(u) \,.\, e_2 + x_3^r(u) \,.\, e_3 \\ x^l(v) &= x_0^l(v) \,.\, e_0 + x_1^l(v) \,.\, e_1 + x_2^l(v) \,.\, e_2 + x_3^l(v) \,.\, e_3 \end{aligned} \tag{41}$$

die Quaternionen der in G_r und G_l beliebig gewählten Gewindekurven, so erhält man die koordinatenmäßige Darstellung der von ihnen in den drei Räumen durch unsere Konstruktion erzeugten Flächen Φ, wenn man das Produkt dieser Quaternionen mittels der Produkttafeln (24), (27) und (28) ausführlich berechnet. Man findet so die folgenden Formeln:

I. Allgemeine Darstellung der Flächen Φ_{I} im elliptischen Raume:

$$\left.\begin{aligned} x_0 &= x_0^r x_0^l - x_1^r x_1^l - x_2^r x_2^l - x_3^r x_3^l \\ x_1 &= x_0^r x_1^l + x_1^r x_0^l + x_2^r x_3^l - x_3^r x_2^l \\ x_2 &= x_0^r x_2^l + x_2^r x_0^l + x_3^r x_1^l - x_1^r x_3^l \\ x_3 &= x_0^r x_3^l + x_3^r x_0^l + x_1^r x_2^l - x_2^r x_1^l \end{aligned}\right\} \Phi_{\mathrm{I}}. \tag{42}$$

II. Allgemeine Darstellung der Flächen Φ_{II} im quasi-elliptischen Raume:

$$\left.\begin{aligned} x_0 &= x_0^r x_0^l - x_1^r x_1^l \\ x_1 &= x_0^r x_1^l + x_1^r x_0^l \\ x_2 &= x_0^r x_2^l + x_2^r x_0^l + x_3^r x_1^l - x_1^r x_3^l \\ x_3 &= x_0^r x_3^l + x_3^r x_0^l + x_1^r x_2^l - x_2^r x_1^l \end{aligned}\right\} \Phi_{\mathrm{II}}. \tag{43}$$

III. Allgemeine Darstellung der Flächen Φ_{III} im isotropen Raume:

$$\left.\begin{aligned} x_0 &= x_0^r x_0^l \\ x_1 &= x_0^r x_1^l + x_1^r x_0^l \\ x_2 &= x_0^r x_2^l + x_2^r x_0^l \\ x_3 &= x_0^r x_3^l + x_3^r x_0^l + x_1^r x_2^l - x_2^r x_1^l \end{aligned}\right\} \Phi_{\mathrm{III}}. \tag{44}$$

Man kann die allgemeinen Gewindekurven $x^r(u)$ und $x^l(v)$ der Gewinde G_r und G_l (36) auf viele Arten integrallos darstellen, z. B. indem man setzt

$$\begin{aligned} x_0^r &= 1 & x_0^l &= 1 \\ x_1^r &= -u & x_1^l &= v \\ x_2^r &= U'(u) & x_2^l &= -V'(v) \\ x_3^r &= 2\,U(u) - u \,.\, U'(u), & x_3^l &= -2\,V(v) + v \,.\, V'(v). \end{aligned} \tag{45}$$

Dieser Darstellung entziehen sich nur die Gewindestrahlen in den Ebenen $x_1 = c \,.\, x_0$.

Folglich kann man auch alle Flächen Φ, deren Asymptotenlinien beider Scharen linearen Komplexen angehören, ohne Integralzeichen darstellen. Bringt man sie durch unsere komplex-projektiven Umformungen auf die Normgestalt der Flächen Φ_{I}, Φ_{II} und Φ_{III}, so erhält man (durch Eintragen der Formeln (45) in die drei vorhergehenden) die folgenden **integrallosen Darstellungen der Flächen** Φ, *deren Asymptotenlinien beider Scharen linearen Komplexen angehören:*

I. Integrallose Darstellung der Flächen Φ_{I}:

$$\left.\begin{aligned} x_0 &= (1+uv)(1+U'V') + 2U(V - v\,.\,V') + 2V(U - u\,.\,U') \\ x_1 &= (v-u)(1+U'V') + 2(UV' - VU') \\ x_2 &= (1-uv)(U'-V') + 2(Uv - Vu) \\ x_3 &= 2(U-V) - (u+v)(U'-V') \end{aligned}\right\} \Phi_{\mathrm{I}}. \tag{46}$$

II. Integrallose Darstellung der Flächen Φ_{II}:

$$\left.\begin{aligned} x_0 &= 1 + uv \\ x_1 &= v - u \\ x_2 &= (1-uv)(U'-V') + 2(Uv - Vu) \\ x_3 &= 2(U-V) - (u+v)(U'-V') \end{aligned}\right\} \Phi_{\mathrm{II}}. \tag{47}$$

III. Integrallose Darstellung der Flächen Φ_{III}:

$$\left.\begin{aligned} x_0 &= 1 \\ x_1 &= v - u \\ x_2 &= U' - V' \\ x_3 &= 2(U-V) - (u+v)\ (U'-V') \end{aligned}\right\} \Phi_{\mathrm{III}}. \tag{48}$$

Diese Formeln stellen nur dann keine Fläche (sondern bloß eine Gerade) dar, wenn $x^r(u)$ und $x^l(v)$ selber Geraden sind und zwar solche, bei denen die durch den Nullpunkt gezogene Rechtsparallele von x^r und die Linksparallele von x^l identisch sind. Geraden entstehen bei unseren Parameterdarstellungen (45), wenn man $U(u)$ und $V(v)$ als quadratische Polynome wählt. In dem genannten Ausnahmefall sind gewisse Beziehungen zwischen deren Koeffizienten erfüllt, die man am einfachsten mit Hilfe der Gleichungen (32) gewinnen kann, auf deren Angabe wir aber verzichten wollen.

Wir haben mit diesen ganz einheitlichen integrallosen Darstellungen der Flächen Φ auch das letzte Hauptergebnis dieser Arbeit gewonnen.

8. Sonderfälle. Natürlich ist auch der Fall der Netzflächen in unseren geometrischen Konstruktionen und analytischen Formeln enthalten. Es genügt ja, als Schiebkurve c_r eine krumme Kurve der

Torsion $\tau = +1$ und als Schiebkurve c_l einen Schmiegstrahl dieser Kurve zu nehmen, um durch ihre CLIFFORDsche Schiebung aneinander eine Netzfläche zu erhalten, auf der die Lagen von c_r und des Schmiegstrahls c_l Asymptotenlinien sind, die allesamt linearen Komplexen angehören.

Von Interesse ist dabei der Fall, daß beide Schiebkurven c_r und c_l geradlinig sind. Dann erhält man als Erzeugnis eine CLIFFORDsche Fläche, d. h. eine Quadrik, auf der die Erzeugenden jeder Schar im CLIFFORDschen Sinne parallel sind, und welche daher das Maßgebilde des Raumes nach einem windschiefen Erzeugendenvierseit (oder einem Grenzfall davon) schneidet. Der letzte Fall tritt stets im isotropen Raume ein.

Natürlich kann man den Fall der Netzflächen sowohl wie den der CLIFFORDschen Flächen auch durch unsere modifizierte Konstruktion erzielen. Man muß dann nur eine der beiden Gewindekurven x^r oder x^l oder beide geradlinig wählen.

Von Bedeutung sind die beiden folgenden Anwendungen davon. Ersetzen wir auf einer unserer Flächen Φ, die durch Schiebung der beiden Asymptotenlinien c_r und c_l aneinander erzeugt sind, eine der erzeugenden Kurven durch ihre Tangente t_r oder t_l im Kreuzungspunkte P dieser Kurven, so entsteht eine Netzfläche $N(u)$ oder $N(v)$, die von den Asymptotenrichtungen der Fläche Φ längs einer Asymptotenlinie u bzw. v dieser Fläche gebildet wird. Diese Netzflächen $N(u)$ und $N(v)$ kennen wir aus **Nr. 1** und **Nr. 2**; sie bilden den Ausgangspunkt unseres Studiums der Flächen Φ. Man kann sie, wie wir jetzt erkennen, sowohl durch Schiebung einer Asymptotenrichtung längs einer Asymptotenlinie als auch durch Schiebung einer Asymptotenlinie längs einer Asymptotenrichtung erhalten. Die letzte Möglichkeit war seinerzeit der Ausgangspunkt für die Erzeugung unserer Flächen Φ durch windschiefe Schiebung der Asymptotenlinien aneinander.

Ersetzen wir schließlich in einem Flächenpunkte $P = (u, v)$ von Φ beide Asymptotenlinien durch die dort berührenden Asymptotenrichtungen, so entsteht durch deren Schiebung aneinander eine CLIFFORDsche Fläche, welche die Flächen Φ, $N(u)$ und $N(v)$ oskuliert, nämlich (wegen der stationären Berührung der Schmiegtangenten mit der Fläche) sowohl aus der Schar der längs u als auch aus den längs v berührenden Asymptotenrichtungen drei benachbarte Geraden als Erzeugende enthält. Diese CLIFFORDsche Fläche ist also mit der LIEschen Quadrik A des Flächenpunktes P identisch.

Will man (z. B. zum Zwecke ihrer analytischen Darstellung nach obigen Formeln) die berührenden Netzflächen aus Schmiegtangenten $N(u)$ und $N(v)$ oder die LIEsche Quadrik A auch nach der zweiten Art der Konstruktion ermitteln, so hat man einfach eine der Kurven x^r oder x^l (oder beide) durch ihre Tangenten t^r bzw. t^l zu ersetzen.

Wir sind damit im Nachhinein auf sehr einfache und anschauliche Art bei unseren Flächen Φ in den Besitz der Lieschen Quadrik gekommen, die bisher beim Studium dieser interessanten Flächenklasse seit Lie [1]) den Ausgangspunkt der Überlegungen bildete. Bei Lie stellen diese Flächen Φ, deren Asymptotenlinien allesamt linearen Komplexen angehören, eigentlich die erste Anwendung der nach ihm benannten Quadrik dar. Man benützte sie in der Theorie dieser Flächen bisher, um den Satz zu gewinnen, daß die Leitgeraden der Netzflächen $N(u)$ und $N(v)$, welche man den Flächen Φ längs ihren Asymptotenlinien u, v umschreiben kann, sich wechselseitig schneiden. Wir haben diesen Satz in **Nr. 3** aber viel elementarer gewinnen können, indem wir die Tatsache benutzten, daß bei zwei vertauschbaren windschiefen Kollineationen A und B die Achsen einer jeden dieser Kollineationen Bahngeraden der anderen sind.

Unsere allgemeinen Ergebnisse enthalten u. a. die vollständige Antwort auf die mehrfach aufgeworfene Frage nach den Flächen, deren sämtliche Asymptotenlinien kubische Raumkurven sind. Da nämlich kubische Raumkurven stets linearen Komplexen angehören, sind diese Flächen unter den Flächen Φ enthalten und können durch unsere Konstruktionen einfach dadurch erhalten werden, daß man als Kurven $x^r(u)$ und $x^l(v)$ kubische Gewindekurven der involutorischen Gewinde (36) wählt. Bei unseren komplex-projektiven Normierungen können die Flächen dann noch, je nachdem man im elliptischen, quasielliptischen oder isotropen Raume operiert, den Klassen Φ_{I}, Φ_{II} oder Φ_{III} angehören. In jedem Falle aber sind sie Cliffordsche Schiebflächen ihrer kubischen Asymptotenlinien.

Welchen Fortschritt diese einfache Lösung des Problems gegenüber den bisherigen bedeutet, erkennt man durch Vergleich z. B. mit den Ergebnissen einer Arbeit von E. P. Lane und M. L. MacQueen [16]). Nach diesen beiden Autoren hängt die allgemeine Fläche mit kubischen Asymptotenlinien von der Lösung einer (gewöhnlichen) Differentialgleichung 5. Ordnung ab, deren Integration begreifliche Schwierigkeiten bietet. Von einer allgemeinen geometrischen Lösung des Problems, wie sie jetzt möglich ist, konnte bisher überhaupt nicht die Rede sein.

9. Realitätsfragen. Es sei zum Schlusse ausdrücklich betont, daß unsere komplex-projektiven Normierungen natürlich gewisse Realitätsverschiebungen der Flächen Φ zur Folge haben können. Stellt man sich auf den Standpunkt der reellen projektiven Geometrie, so wird es daher zweckmäßig sein, unsere analytischen Formeln noch derart zu ergänzen, daß jede reelle Fläche Φ mit Asymptotenlinien, die linearen Komplexen angehören, unter den aufgestellten Normalflächen auch einen reellen Vertreter besitzt.

Die notwendigen Ergänzungen betreffen offenbar nur die beiden Möglichkeiten, daß die involutorischen Gewindebündel, denen die Asym-

ptotenlinien der Flächen Φ angehören, als gemeinsamen Durchschnitt I'. auch zwei ergänzende Regelscharen aus reellen Erzeugenden und II'. auch zwei ergänzende Paare verschränkter Strahlbüschel mit gleichfalls reellen Strahlen besitzen können.

Wir erhalten diese beiden neuen Fälle aus unseren Normaltypen I und II in Nr. 4, indem wir auf sie z. B. die *komplexe Kollineation*

(49) $$x_0' : x_1' : x_2' : x_3' = x_0 : i x_1 : i x_2 : x_3$$

ausüben. Dadurch geht

I'. die nullteilige Quadrik (14) in die *Quadrik*

(50) $$x_0^2 - x_1^2 - x_2^2 + x_3^2 = 0$$

über, *deren Erzeugenden reell sind*, und

II'. die beiden konjugiert-komplexen verschränkten Strahlbüschelpaare (15) werden in *verschränkte Paare reeller Strahlbüschel* verwandelt, deren Ebenen das reelle Ebenenpaar

(51) $$x_0^2 - x_1^2 = 0$$

und deren Scheitel das reelle Punktepaar

(51') $$-u_2^2 + u_3^2 = 0$$

bilden. Man könnte, worauf wir hier nicht näher eingehen wollen, natürlich auch auf diese Figuren (49) und (50) nicht-euklidische Metriken gründen, die dann indefinite Gegenstücke der elliptischen und quasielliptischen Metrik wären.

Die Cliffordschen Schiebungen in diesem indefiniten elliptischen und quasielliptischen Raume können dann wieder durch die Formeln (25) und ihre Bewegungen durch (26) dargestellt werden; dabei genügen die jetzt auftretenden Quaternionen, deren Einheiten ebenfalls durch die Formeln (49) verwandelt werden,

I'. im indefiniten elliptischen Raume der Produkttafel:

(52)

	$\cdot e_0$	$\cdot e_1$	$\cdot e_2$	$\cdot e_3$
$e_0 \cdot$	e_0	e_1	e_2	e_3
$e_1 \cdot$	e_1	e_0	$-e_3$	$-e_2$
$e_2 \cdot$	e_2	e_3	e_0	e_1
$e_3 \cdot$	e_3	e_2	$-e_1$	$-e_0$

II'. im indefiniten quasielliptischen Raume der Produkttafel:

(53)

	$\cdot e_0$	$\cdot e_1$	$\cdot e_2$	$\cdot e_3$
$e_0 \cdot$	e_0	e_1	e_2	e_3
$e_1 \cdot$	e_1	e_0	$-e_3$	$-e_2$
$e_2 \cdot$	e_2	e_3	0	0
$e_3 \cdot$	e_3	e_2	0	0

Bei den jetzt entstehenden CLIFFORDschen Links- bzw. Rechtsschiebungen (25) wandern die Punkte dieser Räume in den Fällen I′ und II′ in Linksnetzen und Rechtsnetzen, deren Gleichungen (Gegenstücke zu (32)) in der nachstehenden Form geschrieben werden können:

(54)

	Linksnetze:	Rechtsnetze:
I′.	$\begin{Vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ p_{01}+p_{23} & p_{02}+p_{31} & p_{03}-p_{12} \end{Vmatrix} = 0$	$\begin{Vmatrix} b_1 & b_2 & b_3 \\ p_{01}-p_{23} & p_{02}-p_{31} & p_{03}+p_{12} \end{Vmatrix} = 0$
II′.	$\begin{Vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ p_{01} & p_{02} & p_{03}-p_{12} \end{Vmatrix} = 0$	$\begin{Vmatrix} b_1 & b_2 & b \\ p_{01} & p_{02} & p_{03}+p_{12} \end{Vmatrix} = 0.$

Man liest aus diesen Gleichungen sofort die beiden *involutorischen Bündel linearer Komplexe* ab, als deren Singularitätengebilde (oder Durchschnitt) die Regelscharen und Strahlbüschel von (50) und (51) aufzufassen sind. Ähnlich wie bei den Formeln (33) ist die Liniengleichung dieser Gewinde wieder eine lineare Verbindung der in den zweiten Zeilen der Matrizen stehenden Kombinationen der Linienkoordinaten, nämlich für die

(55)

	Linksgewinde G_l':	Rechtsgewinde G_r':
I.	$u_1(p_{01}+p_{23})+u_2(p_{02}+p_{31})+u_3(p_{03}-p_{12})=0,$	$v_1(p_{01}-p_{23})+v_2(p_{02}-p_{31})+v_3(p_{03}+p_{12})=0,$
II.	$u_1p_{01}+u_2p_{02}+u_3(p_{03}-p_{12})=0.$	$v_1p_{01}+v_2p_{02}+v_3(p_{03}+p_{12})=0.$

Man entnimmt diesen Formeln, daß in diesen Gewindebündeln in beiden Fällen vorkommen das spezielle

(56)

Rechtsgewinde G_r'	Linksgewinde G_l'
$p_{03}+p_{12}=0$	$p_{03}-p_{12}=0,$

die zueinander involutorisch liegen und beide dem Nullpunkte O dieselbe Nullebene $x_3=0$ zuordnen. (Es sind das dieselben Gewinde wie in (36), nur mit vertauschten Rollen.)

Wir können die beiden involutorischen Gewinde (56) also wieder für die zweite Konstruktion der Flächen Φ verwenden, deren Asymptotenlinien den linearen Komplexen der involutorischen Bündel (55) angehören. Wir wollen diese Flächen, die sich von den Flächen Φ_{I} und Φ_{II} nur durch Realitätsverschiebungen unterscheiden mit Φ_{I}' und Φ_{II}' bezeichnen. Bedeutet dann wieder (38) die Darstellung einer beliebigen Kurve $x^r(u)$ bzw. $x^l(v)$ aus dem Rechtsgewinde G_r' bzw. Linksgewinde G_l' (56), so erhalten wir als Darstellung dieser Flächen Φ_{I}' bzw. Φ_{II}' wieder die Quaternionenformel (39):

(57)
$$\boxed{x = x^r(u) \,.\, x^l(v),}$$

wobei jetzt die Quaternionen (41) im Sinne der Produkttafeln (52) bzw. (53) zu verstehen sind. Führt man das Produkt aus, so erhält man leicht die folgende koordinatenmäßige Darstellung der Flächen Φ_{I}' und Φ_{II}':

I. Allgemeine Darstellung der Flächen Φ_{I}' im indefiniten elliptischen Raume:

$$\left.\begin{aligned} x_0 &= x_0^r x_0^l + x_1^r x_1^l + x_2^r x_2^l - x_3^r x_3^l \\ x_1 &= x_0^r x_1^l + x_1^r x_0^l + x_2^r x_3^l - x_3^r x_2^l \\ x_2 &= x_0^r x_2^l + x_2^r x_0^l + x_3^r x_1^l - x_1^r x_3^l \\ x_3 &= x_0^r x_3^l + x_3^r x_0^l + x_2^r x_1^l - x_1^r x_2^l \end{aligned}\right\} \Phi_{\mathrm{I}}'. \tag{58}$$

II'. Allgemeine Darstellung der Flächen Φ_{II}' im indefiniten quasielliptischen Raume:

$$\left.\begin{aligned} x_0 &= x_0^r x_0^l + x_1^r x_1^l \\ x_1 &= x_0^r x_1^l + x_1^r x_0^l \\ x_2 &= x_0^r x_2^l + x_2^r x_0^l + x_3^r x_1^l - x_1^r x_3^l \\ x_3 &= x_0^r x_3^l + x_3^r x_0^l + x_2^r x_1^l - x_1^r x_2^l \end{aligned}\right\} \Phi_{\mathrm{II}}' \tag{59}$$

Natürlich kann man auch für diese Flächen ohne weiteres integralfreie Darstellungen angeben. Zu dem Zwecke kann man z. B. von den folgenden integrallosen Darstellungen der Kurven $x^r(u)$ und $x^l(v)$ der Gewinde G_r' bzw. G_l' (56) ausgehen:

$$\begin{aligned} x_0^r &= 1 & x_0^l &= 1 \\ x_1^r &= u & x_1^l &= -v \\ x_2^r &= -U'(u) & x_2^l &= V'(v) \\ x_3^r &= -2U(u) + u \,.\, U'(u) & x_3^l &= 2V(v) - v \,.\, V'(v). \end{aligned} \tag{60}$$

Setzt man diese Koordinaten in die Formeln (58) und (59) ein, so erhält man als

I'. integrallose Darstellung der Flächen Φ_{I}':

$$\left.\begin{aligned} x_0 &= (1 - uv)(1 - U'V') + 2U(V - v \,.\, V') + 2V(U - u \,.\, U') \\ x_1 &= (u - v)(1 - U'V') + 2(UV' - U'V) \\ x_2 &= (1 + uv)(V' - U') + 2(Uv - Vu) \\ x_3 &= 2(V - U) + (u + v)(U' - V') \end{aligned}\right\} \Phi_{\mathrm{I}}'. \tag{61}$$

II'. integrallose Darstellung der Flächen Φ_{II}':

$$\left.\begin{aligned} x_0 &= 1 - uv \\ x_1 &= u - v \\ x_2 &= (1 + uv)(V' - U') + 2(Uv - Vu) \\ x_3 &= 2(V - U) + (u + v)(U' - V') \end{aligned}\right\} \Phi_{\mathrm{II}}'. \tag{62}$$

Jede reelle Fläche Φ, deren Asymptotenlinien beider Scharen linearen Komplexen angehören, findet jetzt unter den Flächen der Normalformen Φ_{I}, Φ_{I}', Φ_{II}, Φ_{II}' und Φ_{III} (die der Reihe nach dem gewöhnlichen und indefiniten elliptischen, dem gewöhnlichen und indefiniten quasielliptischen und dem isotropen Raume angehören), einen reellen Vertreter, der mit ihr auf reelle projektive Art verwandt ist. Alle diese Flächen können in den genannten Räumen durch Clifordsche *Schiebungen ihrer Asymptotenlinien $u = \mathrm{const.}$ und $v = \mathrm{const.}$ aneinander erzeugt werden*

Schrifttumsnachweis.

1) S. Lie, Untersuchungen über Differentialgleichungen I, Christ. Forh., Aar 1882, N. 21, Christiana 1883, = Ges. Abhandlungen III. Bd., S. 537—546.

2) Vgl. hierzu auch die Bemerkungen von F. Engel, ebenda S. 754 ff., wo sich auch ein Beweis des Lieschen Satzes findet.

3) A. Peter, Die Flächen, deren Haupttangentenkurven linearen Komplexen angehören. Inaug.-Diss. Leipzig 1895, 87 S.

4) E. Kéraval, Sur les surfaces dont lignes asymptotiques appartiennent par leurs tangentes à un complexe linéaire Bull. soc. math. France, **39** (1911), S. 134—155.

5) Ch. T. Sullivan, Properties of surfaces whose asymptotic curves belong to linear complexes, Transact. Amer. Math. Soc. **15** (1914), S. 167—196.

6) A. Terracini, Sulle superficie, le cui asintotiche dei due sistemi sono cubiche sghembe; Atti della soc. dei natural. e matem. di Modena (5) **5** (1919/20), S. 82—107.

7) G. Fubini-E. Čech, Geometria proiettiva differenziale I, II, Cap. V (Bologna 1927) und A. Terracini, Sulle superficie aventi un sistema, o entrambi, di asintotiche in complessi lineari, ebenda Appendice IV [a].

8) L. Bianchi, Sulle superficie a curvatura nulla in geometria ellittica, Annali di mat. (2) **24** (1896), S. 93—129.

9) W. Blaschke, Ebene Kinematik, § 15 (Leipzig-Berlin 1938).

10) K. Strubecker, Differentialgeometrie des isotropen Raumes: I. Theorie der Raumkurven, Sitz.-Ber. Akad. Wiss. Wien, Abt. II a **150** (1941), S. 1—53. — II. Die Flächen konstanter Relativkrümmung $K = rt - s^2$, Math. Zeitschrift **47** (1942), S. 743—777. — III. Flächentheorie, Ebenda **48** (1942), S. 369—427. — IV. Theorie der flächentreuen Abbildungen der Ebene. Ebenda **50** (1944), S. 1—92. — V. Zur Theorie der Eilinien, Ebenda **51** (1949), S. 525—573.

11) K. Strubecker, Über die Flächen, deren Asymptotenlinien beider Scharen linearen Komplexen angehören, Anzeiger Akad. Wiss. Wien, math.-naturw. Klasse, vom 23. Oktober 1941.

12) E. Study, Von den Bewegungen und Umlegungen, Math. Ann. **39** (1891), S. 441—566. — Vgl. W. Blaschke, Euklidische Kinematik und nichteuklidische Geometrie, Zeitschrift f. Math. u. Phys. **60** (1911), S. 61—91 und S. 203—204, und K. Strubecker, Direkte Herleitung der Darstellung der Bewegungen der Ebene durch Studysche Quaternionen, Monatshefte Math. Phys. **47** (1939), S. 213—216.

13) K. Strubecker, Über die Lieschen Abbildungen der Linienelemente der Ebene auf die Punkte des Raumes. (Ein Beitrag zur Kinematik der Minimalebene), Monatshefte Math. Phys. **42** (1935), S. 309—376. — Beiträge zur Geometrie des isotropen Raumes, Journal f. reine u. angew. Mathematik **178** (1938), S. 135—173.

14) Als zusammenfassende Darstellungen erwähnen wir:
L. Bianchi, Lezioni di geometria differenziale, 3. Aufl. Pisa 1923, t. 2, cap. 26. — J. L. Coolidge, The elements of non-Euclidean geometry, Oxford 1909. — W. Blaschke, Nicht-Euklidische Geometrie und Mechanik I, II, III, Leipzig-Berlin 1942.

15) W. Blaschke, Vorlesungen über Differentialgeometrie II, Affine Differentialgeometrie, bearbeitet von K. Reidemeister, Berlin 1923, S. 216. — Weitere Literaturangaben über diese Flächen sind in K. Strubecker, Zum Cauchyschen Problem der Differentialgleichung $rt - s^2 = K$, D. Math. **6** (1942), S. 507 zusammengestellt.

16) E. P. Lane and M. L. Mac-Queen, Surfaces whose asymtotic curves are twisted cubics, Amer. Journ. Math. **60** (1938), S. 337—344.

(Eingegangen am 13. Juli 1949.)

Über die meromorphen Lösungen der Differenzengleichung $F(z+1) = \frac{R_1(z)\,F(z)+R_2(z)}{F(z)+R_3(z)}$ mit rationalen $R_\nu(z)$.

Von

Hans Töpfer in Solingen.

Inhalt.

Seite

I. Übersicht 436

II. Allgemeines zur Lösung der Differenzengleichung $f(z+1) = H[z, f(z)]$ bezw. $g(z) = H[z, g(z+1)]$ 439

§ 1. Sonderfälle 439

§ 2. Der Allgemeinfall 441

III. Die Lösung der Differenzengleichung $F(z+1) = \frac{R_1(z)\,F(z)+R_2(z)}{F(z)+R_3(z)}$ ... 455

§ 1. Eine meromorphe Lösung der Differenzengleichung $f(z+1) = \frac{R(z)}{1+f(z)}$ mit rationalem $R(z)$ 455

§ 2. Reduktion der Differenzengleichung $F(z+1) = \frac{R_1(z)\,F(z)+R_2(z)}{F(z)+R_3(z)}$. 465

IV. Der Zusammenhang zwischen der Differenzengleichung $F(z+1) = \frac{R_1(z)\,F(z)+R_2(z)}{F(z)+R_3(z)}$ und homogenen Differenzengleichungen zweiter Ordnung 468

V. Literaturverzeichnis 471

I. Übersicht.

1. Gegeben sei die für alle endlichen komplexen Zahlen v und w meromorphe Funktion $H(v, w)$; gesucht werden die meromorphen Lösungen (oder wenigstens eine dieser Lösungen) der Differenzengleichung

$$(1) \qquad \begin{cases} f(z+1) = H[z, f(z)] \\ \text{bezw.} \qquad g(z) = H[z, g(z+1)]. \end{cases}$$

Dieses Problem ist in den Sonderfällen

$$\frac{\partial H}{\partial v} \equiv 0 \quad \text{bezw.} \quad \frac{\partial H}{\partial w} \equiv 0$$

unter II, § 1 behandelt, wo der erste Fall unter Anwendung der Abelschen, Schröderschen bzw. Böttcherschen Funktionalgleichung mittels des Prinzips der Vorzugslösung erledigt wird.

Größer sind die Schwierigkeiten im allgemeinen Fall: Falls die in z meromorphe und im allgemeinen von den natürlichen Zahlen n abhängende Funktion $\varkappa(z, n)$ bezw. $\lambda(z, n)$ gewissen Bedingungen genügt, so ist

$$(2)\quad \begin{cases} f(z) = \lim\limits_{n\to\infty} H\{z-1, H[z-2, H(z-3, \ldots, H(z-n, \varkappa(z,n)))]\} \\ \text{bezw. } g(z) = \lim\limits_{n\to\infty} H\{z, H[z+1, H(z+2, \ldots, H(z+n, \lambda(z,n)))]\} \end{cases}$$

eine meromorphe Lösung von (1). Unter II, §2 werden in Satz 1 hinreichende Bedingungen für $\varkappa(z, n)$ bezw. $\lambda(z, n)$ zur Konvergenz von (2) angegeben. Satz 1a gibt eine Verschärfung des Satzes 1, die auf die Differenzengleichung (3) zugeschnitten ist; dies wird benötigt, da Satz 1 selber für einige Fälle der Differenzengleichung (3) nicht ausreicht. Der wesentliche Beweisgedanke bei Satz 1 und 1a liegt darin, die Funktionenfolgen (2) unter den für $\varkappa(z, n)$ bezw. $\lambda(z, n)$ angesetzten Bedingungen als Normalfolgen[1]) darzutun.

Die Sätze 1 und 1a werden in dieser Arbeit nur bei der Behandlung der Differenzengleichung (3) angewandt. Ihr Anwendungsbereich ist natürlich damit längst nicht erschöpft. Darauf soll aber außer unter 9. nicht weiter eingegangen werden. Dort wird ein Beispiel angegeben, das von Stephens[2]) nach einer anderen Methode erledigt wurde; seine Ergebnisse unterliegen jedoch gewissen Einschränkungen, die hier nicht nötig sind. Darüber hinaus kann hier jenes Beispiel in wesentlich allgemeinerer Fassung gelöst werden.

2. Der engere Zweck der vorliegenden Arbeit ist die Behandlung der Differenzengleichung

$$(3)\quad F(z+1) = \frac{R_1(z)\,F(z) + R_2(z)}{F(z) + R_3(z)},$$

wobei die $R_\nu(z)$ rationale Funktionen von z sind. Bekanntlich[3]) wird eine meromorphe Lösung von (3) nur im trivialen Falle zugleich auch einer algebraischen Differentialgleichung genügen. Die hier gewonnenen Funktionen sind also von besonders interessantem Charakter.

Unter III, §1 wird die Lösung der Differenzengleichung

$$(4)\quad f(z+1) = \frac{R(z)}{1+f(z)}$$

für rationales $R(z)$ beschrieben. Diese Gleichung kann nach dem unter II angegebenen Verfahren behandelt werden. Es ergibt sich ein Näherungsverfahren (2), bei dem von Kettenbruchfolgen Gebrauch gemacht wird. Von der Methode ausgeschlossen bleibt allein der Fall

$$\lim_{z\to\infty} R(z) = -\frac{1}{4}.$$

[1]) siehe z. B. Montel [3].
[2]) siehe Stephens [5].
[3]) siehe Tietze [9], Stridsberg [6], Mason [1].

In einigen Sonderfällen konvergiert die Entwicklung zumindest in einer Halbebene, im allgemeinen jedoch in der vollen komplexen Zahlenebene gegen eine meromorphe Funktion $f(z)$. Die Ergebnisse sind in den Sätzen 2a ($R(z)$ regulär bei ∞) und 2b (Pol bei ∞) zusammengefaßt.

Unter III, § 2 wird der allgemeine Fall (3) auf den Fall (4) reduziert. Ich fand diese Reduktion auf einem wegen seines Umfanges hier nicht näher beschriebenen Wege, der von einer Verallgemeinerung der Schröderschen Funktionalgleichung (7) Gebrauch macht. Diese Verallgemeinerung bietet wahrscheinlich — das bedarf jedoch noch einer näheren Untersuchung — die Möglichkeit, beim Problem (1) eine ähnlich einfache Lösung anzugeben, wie (8) es für (6) ist. Die Richtigkeit der Reduktion sieht man, nachdem man sie einmal kennt, durch Nachrechnen ein. In den Sätzen 3a und 3b sind die Ergebnisse zusammengefaßt.

3. Unter IV wird das Ergebnis auf die homogene Differenzengleichung zweiter Ordnung

$$u(z+2) + p(z)\,u(z+1) + q(z)\,u(z) = 0 \tag{5}$$

mit rationalem $p(z)$ und $q(z)$ angewandt. Die Funktion

$$\frac{u(z+1)}{u(z)}$$

wird dann durch eine Folge von Kettenbrüchen angenähert. Damit wird ein Vergleich mit dem Thieleschen Kettenbruchverfahren[4]) nahegelegt. Im Falle einer normalen Differenzengleichung (5), bei welcher bekanntlich

$$\lim_{z\to\infty} p(z) = p \quad \text{und} \quad \lim_{z\to\infty} q(z) = q$$

mit endlichem p und q existieren, gibt die Thielesche Methode zusammen mit der hier geschilderten ein mitunter sich gegenseitig ergänzendes Verfahren zur Angabe einer meromorphen Funktion $u(z+1)\,u^{-1}(z)$. Während aber das Thielesche Verfahren beim Konvergenzbeweis spezieller Sätze über das Verhalten der Funktion $u(z+1)\,u^{-1}(z)$ bedarf, beruht das in dieser Arbeit gebrachte Verfahren im wesentlichen auf der allgemeinen Theorie der Normalfolgen. Daher werden weit über den Geltungsbereich des Thieleschen Kettenbruchs hinaus alle Differenzengleichungen (5), abgesehen von dem Ausnahmefall

$$\lim_{z\to\infty} \frac{q(z)}{p^2(z)} = \frac{1}{4},$$

erfaßt. Die Kettenbrüche (58) konvergieren außer in diesem Sonderfall allgemein in der vollen Zahlenebene, in Ausnahmefällen mindestens in einer Halbebene gegen eine meromorphe Lösung der Funktion $u(z+1)\,u^{-1}(z)$.

[4]) Thiele [7] und [8] sowie die Darstellung in Nörlund [4].

II. Allgemeines zur Lösung der Differenzengleichung $f(z+1) = H[z, f(z)]$ bezw. $g(z) = H[z, g(z+1)]$.

§ 1. Sonderfälle.

4. Der Fall

$$\frac{\partial H}{\partial w} \equiv 0$$

ist trivial; bei ihm gibt es nur eine Lösung

$$f(z) \equiv H(z-1) \quad \text{bezw.} \quad g(z) \equiv H(z).$$

Falls

$$\frac{\partial H}{\partial v} \equiv 0,$$

so ist die Gleichung

$$f(z+1) = H[f(z)] \quad \text{bezw.} \quad g(z) = H[g(z+1)] \tag{6}$$

zu lösen. Hier soll ein Weg angegeben werden, über den man zu einer „Vorzugslösung" dieser Differenzengleichung gelangen kann, die durch besondere geometrische Eigenschaften ausgezeichnet ist. Es ist dies ein Analogon zur Nörlundschen „Hauptlösung" [5]), die zunächst nicht auf geometrische, sondern auf analytische Grundsätze gestellt ist. Es wird also der Versuch unternommen, das alte Problem von der geometrischen Funktionentheorie her anzufassen. Die Grundlage hierzu gibt das *„Prinzip der Vorzugslösung"*:

Bei der Möglichkeit einer Auswahl verschiedener funktionentheoretischer Zusammenhänge wird (indem man eine Normierung mittels linearer Funktionen in Gegenstands- und Bildebene außer Belang stellt) derjenige als „Vorzugslösung" bezeichnet, bei dem gewisse, durch möglichst wenige Kreisstücke oder Kreise (Geradenstücke oder Geraden) berandete Gebiete (zum mindesten im Inneren) konform auf Gebiete ebenderselben Eigenschaft eineindeutig abgebildet werden.

Hat man einen Funktionszusammenhang nach dem Prinzip der Vorzugslösung gewonnen, so wird seine simultane Transformation vermittels einer meromorphen Funktion ebenfalls als „Vorzugslösung im weiteren Sinne" bezeichnet.

5. Unter Anwendung dieses Prinzips zeigt man geometrisch leicht, daß die Vorzugslösung für

$$H(w) = w + N$$

mit

$$f(z) = Nz \quad \text{bezw.} \quad g(z) = -Nz$$

und die Gesamtheit aller Lösungen mit

$$\begin{cases} f(z) = Nz + \pi(z) \\ \text{bezw. } g(z) = -Nz + \pi(z) \end{cases}$$

[5]) siehe z. B. Nörlund [4].

gegeben ist, wobei $\pi(z)$ — wie im Folgenden stets — jede Funktion aus der Menge aller meromorphen Funktionen mit der Periode 1 sein kann. $\pi(z) \equiv 0$ führt auf die Vorzugslösung.

Weiter zeigt man geometrisch unter Anwendung des Prinzips der Vorzugslösung, daß

$$H(w) = Mw$$

die nicht identisch verschwindenden Vorzugslösungen

$$f(z) = M^z \quad \text{bezw.} \quad g(z) = M^{-z}$$

und die Lösungsgesamtheit

$$\begin{cases} f(z) = \pi(z)\, M^z \\ \text{bezw. } g(z) = \pi(z)\, M^{-z} \end{cases}$$

besitzt.

Der Fall

$$H(w) = Mw + N \qquad (M \neq 1)$$

wird mit

$$\begin{cases} f(z) = \pi(z)\, M^z + \dfrac{N}{1-M} \\ \text{bezw. } g(z) = \pi(z)\, M^{-z} + \dfrac{N}{1-M} \end{cases}$$

gelöst, wobei $\pi(z) \equiv 1$ auf die Vorzugslösung und $\pi(z) \equiv 0$ auf die triviale konstante Lösung führt.

6. Nach diesen Vorbereitungen läßt sich der Fall (6) erledigen: Unmittelbar kann das Prinzip der Vorzugslösung keine Anwendung finden, da die Verhältnisse der Funktion $H(w)$ mehr oder weniger verwickelt sein mögen. Wenn man aber von der Abelschen, Schröderschen oder Böttcherschen Transformation Gebrauch macht, werden die a priori schwer übersehbaren Verhältnisse weitgehend vereinfacht.

Ist $H(w)$ so beschaffen, daß in einem Gebiet der w-Ebene eine analytische Abelsche oder Schrödersche oder Böttchersche Funktion $A(w)$ oder $S(w)$ oder $B(w)$ existiert und die Funktionalgleichung

$$(7) \qquad \begin{cases} A[H(w)] = A(w) + 1 \\ S[H(w)] = k\, S(w) \\ B[H(w)] = B(w)^l \end{cases}$$

(k und l konstant) erfüllt ist[6], so ergibt sich die Vorzugslösung in folgender Weise: Z. B. ist mit der Abelschen Funktion $A(w)$ eine Transformation gefunden, durch welche die gegebene Funktion $H(w)$ auf eine Translation zurückgeführt ist:

$$f(z+1) = H[f(z)]$$

[6]) Über die Existenz der Funktionen $A(w)$, $S(w)$, $B(w)$ und deren Eigenschaften siehe ausführliches Literaturverzeichnis bei Töpfer [10]; dortselbst auch Untersuchungen über die Struktur jener Funktionen im Großen und Begründung der Bezeichnung „Böttchersche Funktion".

oder

$$A[f(z+1)] = A[H(f(z))] = A[f(z)] + 1;$$

die Gesamtheit der Lösungen für $A[f(z)]$ ist nach oben:

$$A[f(z)] = z + \pi(z),$$

d. h.

$$f(z) = A_{-1}(z + \pi(z))$$

ist die gesuchte Gesamtheit der Lösungen von (6). Lösungen von (6) sind zusammengefaßt gegeben mit:

$$(8)\quad \begin{cases} f(z) = A_{-1}(z + \pi(z)) & \text{bezw.} \quad g(z) = A_{-1}(-z + \pi(z)) \\ f(z) = S_{-1}(k^{z+\pi(z)}) & \text{bezw.} \quad g(z) = S_{-1}(k^{-z+\pi(z)}) \\ f(z) = B_{-1}(l^{z\,\pi(z)}) & \text{bezw.} \quad g(z) = B_{-1}(l^{l-z\,\pi(z)}). \end{cases}$$

§ 2.

Der Allgemeinfall.

7. Der Ansatz (2) legt es nahe, zu verlangen, daß mit $n \to \infty$:

$$\begin{cases} \varkappa(z, n) \approx H[z - n - 1,\ \varkappa(z, n+1)] \\ \text{bezw. } \lambda(z, n) \approx H[z + n + 1,\ \lambda(z, n+1)]; \end{cases}$$

hierbei ist mit dem Zeichen $\approx$ der Begriff „ungefähr gleich“ gemeint. Entsprechend ergibt sich aus (1):

$$f(z+1) = \lim_{n\to\infty} H\{z, H[z-1, \ldots, H(z-n+1, \varkappa(z+1, n))]\}$$

$$= H\{z, \lim_{n\to\infty} H[z-1, \ldots, H(z-n+1, \varkappa(z+1, n))]\}$$

$$= H\{z, f(z)\} = H\{z, \lim_{n\to\infty} H[z-1, \ldots, H(z-n, \varkappa(z, n))]\}$$

oder für $n \to \infty$:

$$\begin{cases} \varkappa(z+1, n) \approx H[z-n, \varkappa(z, n)] \\ \text{bezw. } \lambda(z, n) \approx H[z+n+1, \lambda(z+1, n)]. \end{cases}$$

8. *Vorausbedingungen*: Den Sätzen 1 und 1a liegen folgende Vorausbedingungen zugrunde:

Das unter **7.** angegebene sei gewährleistet durch die Voraussetzung, daß in einem Gebiet $\mathfrak{G}$ der z-Ebene die Grenzwerte

$$(9)\quad \begin{cases} \lim_{n\to\infty} \dfrac{H[z-n-1, \varkappa(z, n+1)]}{\varkappa(z, n)} = 1 \\ \text{bezw. } \lim_{n\to\infty} \dfrac{H[z+n+1, \lambda(z, n+1)]}{\lambda(z, n)} = 1 \end{cases}$$

und

$$(10)\quad \begin{cases} \lim_{n\to\infty} \dfrac{H[z-n, \varkappa(z, n)]}{\varkappa(z+1, n)} = 1 \\ \text{bezw. } \lim_{n\to\infty} \dfrac{H[z+n+1, \lambda(z+1, n)]}{\lambda(z, n)} = 1 \end{cases}$$

gleichmäßig existieren. Sicher ist

$$(11)\quad \begin{cases} H\{z-n, H[z-n-1, \varkappa(z, n+1)]\} \\ \quad = H\left\{z-n, \varkappa(z, n)\, \frac{H[z-n-1, \varkappa(z, n+1)]}{\varkappa(z, n)}\right\} = H\{z-n, \varkappa(z, n)\,\xi\} \\ \text{bezw. } H\{z+n, H[z+n+1, \lambda(z, n+1)]\} \\ \quad = H\left\{z+n, \lambda(z, n)\, \frac{H[z+n+1, \lambda(z, n+1)]}{\lambda(z, n)}\right\} = H\{z+n, \lambda(z, n)\,\xi\}, \end{cases}$$

wobei wegen (9) der von z und n abhängende Wert ξ für große n nahe bei $\xi = 1$ liegt.

Jetzt wird für die unabhängige Variable ξ definiert:

$$(12)\quad \begin{cases} \varphi_n(z, \xi) = \dfrac{H[z-n, \varkappa(z, n)\,\xi]}{\varkappa(z, n-1)} \\ \text{bezw. } \psi_n(z, \xi) = \dfrac{H[z+n, \lambda(z, n)\,\xi]}{\lambda(z, n-1)} \end{cases}$$

und angenommen, daß diese Funktionen für $z \subset \mathfrak{G}$ und für ξ zum mindesten in einer Umgebung von $\xi = 1$ gleichmäßig in z und ξ gegen eine analytische Funktion konvergieren:

$$(13)\quad \begin{cases} \Phi(z, \xi) = \lim\limits_{n \to \infty} \varphi_n(z, \xi) \\ \text{bezw. } \Psi(z, \xi) = \lim\limits_{n \to \infty} \psi_n(z, \xi). \end{cases}$$

Nach (9) ist $\Phi(z, 1) = \Psi(z, 1) = 1$; also ist $\xi = 1$ ein Fixpunkt der Funktionen $\Phi(z, \xi)$ und $\Psi(z, \xi)$ in ξ mit dem Multiplikator

$$(14)\quad \begin{cases} M(z) = \dfrac{\partial \Phi}{\partial \xi}(z, 1) \\ \text{bezw. } N(z) = \dfrac{\partial \Psi}{\partial \xi}(z, 1). \end{cases}$$

Weiter werde vorausgesetzt, daß die $\varphi_n(z, \xi)$ bezw. $\psi_n(z, \xi)$ für alle $z \subset \mathfrak{G}$ bei hinreichend großem n in der Nähe von $\xi = 1$ Fixpunkte

$$\begin{cases} \xi = \varrho_n(z) \\ \text{bezw. } \xi = \sigma_n(z) \end{cases}$$

nach der Gleichung

$$(15)\quad \begin{cases} \varrho_n(z) = \dfrac{H[z-n, \varkappa(z, n)\,\varrho_n(z)]}{\varkappa(z, n-1)} \\ \text{bezw. } \sigma_n(z) = \dfrac{H[z+n, \lambda(z, n)\,\sigma_n(z)]}{\lambda(z, n-1)} \end{cases}$$

mit den Multiplikatoren

$$(16)\quad \begin{cases} \mu_n(z) = \dfrac{\varkappa(z, n)}{\varkappa(z, n-1)} \cdot \dfrac{\partial H}{\partial w}[z-n, \varkappa(z, n)\ \varrho_n(z)] \\ \text{bezw. } \nu_n(z) = \dfrac{\lambda(z, n)}{\lambda(z, n-1)} \cdot \dfrac{\partial H}{\partial w}[z+n, \lambda(z, n)\ \sigma_n(z)] \end{cases}$$

besitzen; dazu wird angenommen, daß in $\mathfrak{G}$ die Grenzwerte

$$(17)\qquad \begin{cases} \lim\limits_{n\to\infty} \varrho_n(z) = 1 \\ \text{bezw. } \lim\limits_{n\to\infty} \sigma_n(z) = 1 \end{cases}$$

und

$$(18)\qquad \begin{cases} \lim\limits_{n\to\infty} \mu_n(z) = M(z) \\ \text{bezw. } \lim\limits_{n\to\infty} \nu_n(z) = N(z) \end{cases}$$

gleichmäßig existieren.

9. Satz 1. *Wenn in einem Gebiet $\mathfrak{G}$ der z-Ebene die Voraussbedingungen* **8.** *zutreffen und überdies*

$$(19)\qquad \begin{cases} |M(z)| < 1 \\ \textit{bezw. } |N(z)| < 1 \end{cases}$$

ist, so konvergiert die Folge (2) *gleichmäßig gegen eine meromorphe Lösung $f(z)$ bezw. $g(z)$ von* (1). *Die gleiche Lösung ergibt sich, wenn statt der $\varkappa(z,n)$ bezw. $\lambda(z,n)$ andere Funktionen $\varkappa^*(z,n)$ bezw. $\lambda^*(z,n)$ eingesetzt werden, für welche der Grenzwert*

$$(20)\qquad \begin{cases} \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\varkappa^*(z,n)}{\varkappa(z,n)} = 1 \\ \textit{bezw. } \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\lambda^*(z,n)}{\lambda(z,n)} = 1 \end{cases}$$

in $\mathfrak{G}$ gleichmäßig konvergierend erzielt wird.

Der Beweis dieses Satzes wird nur für $f(z)$ durchgeführt, für $g(z)$ verläuft er analog. Unter **10. 11. 12.** wird gezeigt, daß die Menge der Näherungsfunktionen (2) bei jedem Punkt $z_0 \subset \mathfrak{G}$ (also auch in $\mathfrak{G}$) normal[7]) ist. Hierzu wird z in der ganz in $\mathfrak{G}$ gelegenen abgeschlossenen Umgebung Δ von z_0 betrachtet. Hernach wird unter **13.** bewiesen, daß diese Normalfolge nur eine Grenzfunktion, nämlich $f(z)$ besitzt, und nach dem unter **14.** erbrachten Nachweis, daß die Grenzfunktion wirklich die Gleichung (1) erfüllt, folgt unter **15.** der Beweis für den zweiten, die Funktion $\varkappa^*(z,n)$ betreffenden Teil des Satzes 1.

Satz 1 läßt sich nicht nur auf Differenzengleichungen (3), sondern auch auf zahlreiche andere Differenzengleichungen anwenden. Beispielsweise wird die Gleichung

$$f(z+1) = \frac{a f(z) + b}{z}$$

(a und b sind beliebige reelle oder komplexe Konstanten) durch den

[7]) siehe z. B. die zusammenfassende Darstellung Montel [3]. Der wichtigste hier benutzte Satz besagt, daß eine Folge meromorpher Funktionen in einem Gebiet normal ist, wenn sie dort mindestens drei Werte der Zahlenkugel ausläßt.

Ansatz

$$\varkappa(z, n) = \frac{b}{z-n-1}$$

mit $\Phi(z, \xi) \equiv 1$ gelöst. Es ergibt sich dann

$$f(z) \doteq b\left(\frac{1}{z-1} + \frac{a}{(z-1)(z-2)} + \cdots + \frac{a^{k-1}}{(z-1)(z-2)\cdots(z-k)} + \cdots\right).$$

Diese Reihe konvergiert (abgesehen von Polen) in der vollen Ebene, da $|M| \equiv 0$ [8]). — Sind $a(z)$ und $b(z)$ rationale Funktionen mit $a(\infty) = a \neq \infty$ und $b(\infty) = b \neq \infty$, so ist

$$f(z) = \frac{b(z-1)}{z-1} + \sum_{k=2}^{\infty} \frac{a(z-1)\ldots a(z-k+1)\, b(z-k)}{(z-1)\ldots(z-k)} \quad \left(K^* = \frac{b(z-n-1)}{z-n-1}\right)$$

eine meromorphe Lösung der Differenzengleichung

$$f(z+1) = \frac{1}{z} \cdot [a(z) f(z) + b(z)].$$

10. Zu Δ läßt sich ein hinreichend kleines positives δ finden, daß für $z \subset \Delta$

$$|M(z)| \leqq 1 - \delta.$$

Da $\xi = 1$ anziehender Fixpunkt von $\Phi(z, \xi)$ ist, gibt es ein maximales positives ε_0 (evtl. $\varepsilon_0 = \infty$), daß für $z \subset \Delta$ und $|\xi - 1| < \tau \varepsilon_0$ (zunächst wird nur $\tau = 1$ gebraucht; später ist der Beweis für positive $\tau \to \infty$ zu benutzen; $\varepsilon_0 \neq \infty$ ist abhängig von τ):

$$|\Phi(z, \xi) - 1| < \left(1 - \frac{\delta}{4}\right) |\xi - 1|.$$

Nun wird die kleinste natürliche, von τ abhängende Zahl n_1 so festgelegt, daß für alle $n \geqq n_1$ und $z \subset \Delta$

$$\text{bei } \varepsilon_0 \neq \infty : |\varrho_n(z) - 1| < \frac{\varepsilon_0}{4}$$

$$\text{oder bei } \varepsilon_0 = \infty : |\varrho_n(z) - 1| < \frac{1}{4\tau}$$

und

$$|\mu_n(z)| < 1 - \frac{\delta}{2}.$$

Zu jedem dieser $n \geqq n_1$ gibt es ein größtes positives ε_n (evtl. $\varepsilon_n = \infty$), daß für $z \subset \Delta$ und $|\xi - \varrho_n(z)| < \tau \varepsilon_n$:

$$|\varphi_n(z, \xi) - \varrho_n(z)| < \left(1 - \frac{\delta}{4}\right) |\xi - \varrho_n(z)|.$$

Die $\varepsilon_n \neq \infty$ hängen natürlich von τ ab; es ist

$$\liminf_{n \to \infty} \varepsilon_n = \varepsilon_0$$

[8]) Stephens [5] behandelt die allgemeinere Aufgabe, gewisse Systeme von Differenzengleichungen erster Ordnung zu lösen. Er findet bei obigem (allerdings auf positive Konstante a und b eingeschränktem) Beispiel die gleiche Reihe.

und deshalb gibt es eine kleinste natürliche, von τ abhängende Zahl $n_2 \geqq n_1$, daß für alle $n \geqq n_2$

$$\text{bei } \varepsilon_0 \neq \infty : \frac{\varepsilon_0}{2} < \varepsilon_n$$

$$\text{oder bei } \varepsilon_0 = \infty : \frac{1}{2\tau} < \varepsilon_n.$$

Dieserhalb und wegen

$$|\varrho_n(z) - 1| < \frac{\varepsilon_0}{4}$$

$$\text{bezw. } |\varrho_n(z) - 1| < \frac{1}{4\tau}$$

gibt es einen (von τ abhängenden) größten Kreis γ in der ξ-Ebene

$$|\xi - 1| < \varepsilon(\tau),$$

der nur aus Punkten ξ besteht, die sowohl in

$$|\xi - 1| < \varepsilon_0$$

als auch in allen

$$|\xi - \varrho_n(z)| < \varepsilon_n \qquad (n \geqq n_2)$$

liegen; bei $\varepsilon_0 = \infty$ wird

$$\varepsilon(\tau) = \frac{1}{4\tau}$$

angesetzt. Für jeden Punkt $\xi \subset \gamma$ gilt bei $n \geqq n_2$ (da $\varepsilon_n \leqq \tau\, \varepsilon_n$):

$$|\varphi_n(z, \xi) - \varrho_n(z)| < \left(1 - \frac{\delta}{4}\right) |\xi - \varrho_n(z)|.$$

Jetzt wird die kleinste natürliche, von τ abhängende Zahl $n_0 \geqq n_2$ so gewählt, daß für $z \subset \Delta$ und $n \geqq n_0$:

$$|\varrho_n(z) - 1| < \frac{\delta}{8}\, \varepsilon(\tau)$$

ist. Aus den beiden letzten Ungleichungen folgt, daß für $z \subset \Delta$, $|\xi - 1| < \varepsilon(\tau)$ und alle $n \geqq n_0$

$$|\varphi_n(z, \xi) - 1| \leqq |\varphi_n(z, \xi) - \varrho_n(z)| + |\varrho_n(z) - 1|$$

$$< \left(1 - \frac{\delta}{4}\right) |\xi - \varrho_n(z)| + \frac{\delta}{8}\, \varepsilon(\tau) \leqq \left(1 - \frac{\delta}{4}\right) \{|\xi - 1| + |1 - \varrho_n(z)|\} + \frac{\delta}{8}\, \varepsilon(\tau)$$

$$< \left(1 - \frac{\delta}{4}\right) \left\{ \varepsilon(\tau) + \frac{\delta}{8}\, \varepsilon(\tau) \right\} + \frac{\delta}{8}\, \varepsilon(\tau) = \varepsilon(\tau) - \frac{\delta^2}{32}\, \varepsilon(\tau) < \varepsilon(\tau).$$

Jeder Punkt ξ des Kreises γ geht also durch jedes $\varphi_n(z, \xi)$ ($z \subset \Delta$, $n \geqq n_0$) auf einen Punkt von γ über; mit anderen Worten: γ ist gegenüber diesen $\varphi_n(z, \xi)$ invariant.

11. Die unter **10.** niedergelegte Erörterung sollte zunächst nur für $\tau = 1$ durchgeführt werden. Wird aber ein positives τ aus dem Intervall $1 < \tau < \infty$ verwendet, so ergibt sich bei $\varepsilon_0 \neq \infty$ ein τ-mal

so kleines ε_0. $n_1(\tau)$ wird bei größer werdendem τ nicht kleiner und es ist $\lim_{\tau\to\infty} n_1(\tau) = \infty$ (wenn nicht $\varrho_n(z) \equiv 1$; in diesem Fall wird der Beweis viel einfacher!). Die ε_n sind τ-mal so klein. Weiter ergeben sich andere $n_2(\tau)$ mit $\lim_{\tau\to\infty} n_2(\tau) = \infty$, ein τ-mal so kleines $\varepsilon(\tau)$ und andere $n_0(\tau)$ mit

$$\lim_{\tau\to\infty} \varepsilon(\tau) = 0 \quad \text{und} \quad \lim_{\tau\to\infty} n_0(\tau) = \infty.$$

Die Funktion $n_0(\tau)$ bezw. ihre Umkehrung werden wir noch unter **13.** benutzen.

Unter **10.** und **11.** wurde gezeigt, daß es beliebig kleine Kreise $\gamma(\tau)$ um $\xi = 1$ gibt, die gegenüber allen Funktionen $\varphi_n(z, \xi)$ mit $n \geqq n_0(\tau)$ und $z \subset \Delta$ invariant sind.

12. Hier wird gezeigt, daß die Folge (2) in Δ normal ist. Es wird nur $\tau = 1$ benutzt: $n_0(1) = n_0$.

Die Funktion

$$H[z - n_0,\ \varkappa(z, n_0)\,\xi]$$

hat für (die unabhängigen Variablen) $z \subset \Delta$ und $\xi \subset \gamma$ einen bestimmten Wertevorrat γ'. Überdeckt die Menge γ' die ganze in zwei Stellen punktierte Zahlenkugel, so läßt sich Δ derart in endlich viele überlappende abgeschlossene Gebiete Δ_ν zerlegen, daß der Wertevorrat von

$$H[z - n_0,\ \varkappa(z, n_0)\,\xi] = \varkappa(z, n_0 - 1)\,\varphi_{n_0}(z, \xi)$$

in $z \subset \Delta_\nu$ und $\xi \subset \gamma$ mindestens drei Werte der Zahlenkugel ausläßt; bedeckt γ' nicht die volle zweifach punktierte Zahlenkugel, so ist $\Delta \equiv \Delta_1$. Der zu Δ_ν gehörende Wertevorrat wird mit Γ_ν bezeichnet; jedes Γ_ν läßt mindestens drei Punkte der Zahlenkugel frei.

Die Menge $z \subset \Delta_\nu$, $\xi \subset \gamma$ wird durch die Funktion

$$\begin{aligned} &H\{z - n_0,\ H[z - n_0 - 1,\ \varkappa(z, n_0 + 1)\,\xi]\} \\ &\quad = H\left\{z - n_0,\ \varkappa(z, n_0)\,\frac{H[z - n_0 - 1,\ \varkappa(z, n_0 + 1)\,\xi]}{\varkappa(z, n_0)}\right\} \\ &\quad = H\{z - n_0,\ \varkappa(z, n_0)\ \varphi_{n_0+1}(z, \xi)\} \end{aligned}$$

(da ja der Wert $\varphi_{n_0+1}(z, \xi)$ mit ξ wieder in γ liegt) auf Γ_ν oder einen Teil dessen abgebildet. Durch die Funktion

$$\begin{aligned} &H\{z - n_0,\ H[z - n_0 - 1,\ H(z - n_0 - 2,\ \varkappa(z, n_0 + 2)\,\xi)]\} \\ &\qquad = H\{z - n_0,\ H[z - n_0 - 1,\ \varkappa(z, n_0 + 1)\ \varphi_{n_0+2}(z, \xi)]\} \end{aligned}$$

wird $z \subset \Delta_\nu$, $\xi \subset \gamma$ auf

$$H\{z - n_0,\ H[z - n_0 - 1,\ \varkappa(z, n_0 + 1)\,\xi']\}$$

mit $\xi' \subset \gamma$ abgebildet. Falls mit ξ' so verfahren wird, wie vorhin mit ξ, so folgt, daß auch durch

$$H\{z-n_0,\ H[z-n_0-1,\ H(z-n_0-2,\ \varkappa(z, n_0+2)\,\xi)]\}$$

die Menge $z \subset \Delta_\nu$, $\xi \subset \gamma$ auf Γ_ν (oder einen Teil davon) abgebildet wird. usw.

Die Menge aller Funktionen

$$\chi_m(z,\xi) = H\{z-n_0,\ H[z-n_0-1,\ldots, H(z-n_0-m,\ \varkappa(z, n_0+m)\,\xi)]\}$$

$(m = 0, 1, 2, \ldots)$ ist also, da Γ_ν mindestens drei Werte ausläßt, in $z \subset \Delta_\nu$, $\xi \subset \gamma$ und somit auch in $z \subset \Delta$, $\xi \subset \gamma$ d. h. bei z_0 normal. Insbesondere ist die Menge der

$$H\{z-n_0,\ H[z-n_0-1,\ldots, H(z-n_0-m,\ \varkappa(z, n_0+m))]\} \quad (m = 0, 1, 2, \ldots)$$

(als Funktionen von z; $\xi = 1$!) in Δ normal und konvergiert dort gleichmäßig gegen eine oder (a priori) mehrere meromorphe Grenzfunktionen.

13. Jetzt soll gezeigt werden, daß nur eine einzige Grenzfunktion existiert: Angenommen, es gäbe zwei Folgen natürlicher Zahlen

$$m_1',\ m_2',\ m_3', \ldots$$
$$m_1'',\ m_2'',\ m_3'', \ldots$$

mit

$$0 < m_1' < m_1'' < m_2' < m_2'' \ldots$$

daß

$$\lim_{\alpha\to\infty} \chi_{m_\alpha'}(z, 1) = \chi_{\mathrm{I}}(z, 1) \quad \text{und} \quad \lim_{\alpha\to\infty} \chi_{m_\alpha''}(z, 1) = \chi_{\mathrm{II}}(z, 1)$$

für $z \subset \Delta$ gleichmäßig konvergiert. Nun wird z festgehalten; die m_α' und m_α'' können von vornherein so stark ausgesiebt sein, daß zugleich (wegen der Normalität auch bezüglich ξ)

$$\lim_{\alpha\to\infty} \chi_{m_\alpha'}(z, \xi) = \chi_{\mathrm{I}}(z, \xi) \quad \text{und} \quad \lim_{\alpha\to\infty} \chi_{m_\alpha''}(z, \xi) = \chi_{\mathrm{II}}(z, \xi)$$

gleichmäßig für das feste z und alle $\xi \subset \gamma$ erreicht wird. Offenbar ist

$$\chi_{m_\alpha''}(z, 1) = H\{z-n_0,\ H[z-n_0-1,\ldots, H(z_0-n-m_\alpha',\ \varkappa(z, n_0+m_\alpha')\,\xi_{m_\alpha'})]\}$$

mit

$$\xi_{m_\alpha'} = \frac{1}{\varkappa(z, n_0+m_\alpha')}$$
$$H\{z-n_0-m_\alpha'-1,\ H[z-n_0-m_\alpha'-2,\ldots, H(z-n_0-m_\alpha'',\ \varkappa(z, n_0+m_\alpha''))]\}$$

d. h. es ist

$$\chi_{m_\alpha''}(z, 1) = \chi_{m_\alpha'}(z, \xi_{m_\alpha'}).$$

Jetzt wird in der unter **11.** angegebenen Funktion $n = n_0(\tau)$ für n die größte natürliche Zahl $< n_0 + m_\alpha'$ eingesetzt, zu welcher eine positive Zahl τ gehört, und mit diesem τ die unter **10.** angestellte Untersuchung durchgeführt, so ergibt sich für

$$|\xi - 1| < \varepsilon(\tau)$$

die Ungleichung

$$|\varphi_\nu(z, \xi) - 1| < \varepsilon(\tau) \qquad (\nu \geqq n_0 + m_\alpha').$$

Wegen $\lim_{\tau \to \infty} \varepsilon(\tau) = 0$ folgt hieraus

$$\lim_{a \to \infty} \xi_{m_a'} = 1$$

und danach

$$\chi_{II}(z, 1) = \lim_{a \to \infty} \chi_{m_a''}(z, 1) = \lim_{a \to \infty} \chi_{m_a'}(z, \xi_{m_a'}) = \lim_{a \to \infty} \chi_{m_a'}(z, 1) = \chi_I(z, 1),$$

womit die beiden Grenzfunktionen als identisch erwiesen sind.

Es war definiert

$$\begin{aligned} f(z) &= \lim_{m \to \infty} H\{z-1, H[z-2, \ldots, H(z-n_0-m, \varkappa(z, n_0+m))]\} \\ &= \lim_{m \to \infty} H\{z-1, H[z-2, \ldots, H(z-n_0+1, \chi_m(z, 1))]\} \\ &= H\{z-1, H[z-2, \ldots, H(z-n_0+1, \lim_{m \to \infty} \chi_m(z, 1))]\} \\ &= H\{z-1, H[z-2, \ldots, H(z-n_0+1, \chi(z, 1))]\}, \end{aligned}$$

$f(z)$ ist also eine in $\mathcal{A}$ meromorphe Funktion.

14. Nun wird der Nachweis erbracht, daß die gefundene Funktion tatsächlich der Differenzengleichung (1) genügt. Hierzu wird bewiesen, daß (zunächst für festes z)

$$f(z) = H\{z-1, f(z-1)\},$$

also

$$\begin{aligned} &\lim_{m \to \infty} H\{z-1, H[z-2, \ldots, H(z-n_0-m, \varkappa(z, n_0+m))]\} \\ &= H\{z-1, \lim_{m \to \infty} H[z-2, \ldots, H(z-n_0-m-1, \varkappa(z-1, n_0+m))]\} \end{aligned}$$

ist. Wegen (10) ist

$$\lim_{m \to \infty} \chi_m(z, 1) = \lim_{m \to \infty} \chi_m\left(z, \frac{H[z-n_0-m-1, \varkappa(z-1, n_0+m)]}{\varkappa(z, n_0+m)}\right)$$

und deshalb

$$\begin{aligned} &\lim_{m \to \infty} H\{z-1, H[z-2, \ldots, H(z-n_0+1, \chi_m(z, 1))]\} \\ &= H\left\{z-1, \lim_{m \to \infty} H\left[z-2, \ldots, H\left(z-n_0+1, \chi_m\left(z, \frac{H[z-n_0-m-1, \varkappa(z-1, n_0+m)]}{\varkappa(z, n_0+m)}\right)\right)\right]\right\}, \end{aligned}$$

was gezeigt werden sollte.

15. Der Beweis für den letzten Teil des Satzes: Werden meromorphe Funktionen $\varkappa^*(z, n)$ statt $\varkappa(z, n)$ mit gleichmäßiger Konvergenz für

$$\lim_{n \to \infty} \frac{\varkappa^*(z, n)}{\varkappa(z, n)} = 1$$

eingesetzt, so ist (zunächst für festes z)

$$\begin{aligned} &\lim_{m \to \infty} H\{z-n_0, H[z-n_0-1, \ldots, H(z-n_0-m, \varkappa^*(z, n_0+m))]\} \\ &= \lim_{m \to \infty} \chi_m\left(z, \frac{\varkappa^*(z, n_0+m)}{\varkappa(z, n_0+m)}\right) = \lim_{m \to \infty} \chi_m(z, 1); \end{aligned}$$

d. h. die Grenzfunktionen sind identisch.

16. Satz 1 kann für den Fall

$$\begin{cases} |M(z)| \equiv 1 \\ \text{bezw. } |N(z)| \equiv 1 \end{cases}$$

unter Hinzunahme spezieller Voraussetzungen verschärft werden. Diese Voraussetzungen reichen hin, die unter III, § 1 behandelten Fälle zu erfassen. Die Methode läßt gewiss Verschärfungen zu, auf die jetzt aber nicht eingegangen werde.

Zusätzliche Bedingungen: $\varkappa(z, n)$ bezw. $\lambda(z, n)$ sind meromorphe Funktionen in z und meromorph oder algebraisch in n. Weiter kommen die Bedingungen a—g hinzu:

a) Die

$$\begin{cases} \varphi_n(z, \xi) \\ \text{bezw. } \psi_n(z, \xi) \end{cases}$$

konvergieren in $\mathfrak{G}$ gleichmäßig gegen die von z unabhängige Funktion

$$\begin{cases} \Phi(\xi) \\ \text{bezw. } \Psi(\xi) \end{cases}$$

und sind in $\mathfrak{G}$ für $n \geqq n_1$ ebenso wie $\Phi(\xi)$ bezw. $\Psi(\xi)$ Möbiustransformationen in ξ mit je zwei Fixpunkten

$$\begin{cases} \varrho_n^{(1)}(z) \text{ und } \varrho_n^{(2)}(z) \\ \text{bezw. } \sigma_n^{(1)}(z) \text{ und } \sigma_n^{(2)}(z) \end{cases}$$

mit

$$\lim_{n \to \infty} \varrho_n^{(1)}(z) = \lim_{n \to \infty} \sigma_n^{(1)}(z) = 1$$

und

$$\begin{cases} \lim\limits_{n \to \infty} \varrho_n^{(2)}(z) = \varrho \\ \text{bezw. } \lim\limits_{n \to \infty} \sigma_n^{(2)}(z) = \sigma. \end{cases}$$

b) Weiter ist

$$\begin{cases} |M| = 1 \\ \text{bezw. } |N| = 1, \end{cases}$$

und für $n \geqq n_1$ gilt, falls $z \subset \mathfrak{G}'$ ($\mathfrak{G}'$ ein beliebiger abgeschlossener Teilbereich von $\mathfrak{G}$)

$$\begin{cases} |\mu_n^{(1)}(z)| < 1 \\ \text{bezw. } |\nu_n^{(1)}(z)| < 1. \end{cases}$$

Die zusätzlichen Bedingungen **c—g** werden in der (die Ausdrucksweise wesentlich vereinfachenden) ξ^*-Ebene angegeben. Es ist

$$\begin{cases} \xi^* = \dfrac{\xi - 1}{\xi - \varrho} \\ \text{bezw. } \xi^* = \dfrac{\xi - 1}{\xi - \sigma} \end{cases}$$

und die Bilder der Punkte oder Punktmengen aus der ξ-Ebene werden durch einen angehängten Stern gekennzeichnet. Da $\varkappa(z, n)$ bezw. $\lambda(z, n)$ meromorphe oder algebraische Funktionen sind, ist letztlich auch [siehe (15)]

$$\begin{cases} \varrho_n^{(\nu)}(z) \\ \text{bezw. } \sigma_n^{(\nu)}(z) \end{cases} \qquad (\nu = 1, 2)$$

eine Funktion in z und n, durch welche die positive reelle n-Achse auf mindestens eine Kurve

$$\begin{cases} \mathfrak{C}^{(1)}(z) \text{ und } \mathfrak{C}^{(2)}(z) \\ \text{bezw. } \mathfrak{D}^{(1)}(z) \text{ und } \mathfrak{D}^{(2)}(z) \end{cases}$$

abgebildet wird. Folgende nur für den Fall der Werte $\varrho_n^{(\nu)}(z)$ etc. angeschriebenen Bedingungen sollen erfüllt sein.

c) Zu vorgegebenem $L > 0$ gibt es ein $n_{\text{II}}(L)$, daß für $n \geqq n_{\text{II}}(L)$ und $z \subset \mathfrak{G}'$ die Länge der Kurve $\mathfrak{C}^{(1)*}(z)$ zwischen $\varrho_n^{(1)*}(z)$ und $\xi^* = 0$ kleiner als L ist.

d) Zu einer beliebigen positiven Zahl K gibt es ein $n_{\text{III}}(K)$, daß für alle $n \geqq n_{\text{III}}(K)$ und $z \subset \mathfrak{G}'$ gilt

$$|\varrho_n^{(2)*}(z) - \varrho_n^{(1)*}(z)| > K.$$

e) Es gibt ein n_{IV}, daß für $n \geqq n_{\text{IV}}$ und $z \subset \mathfrak{G}'$

$$\arg \{\varrho_n^{(2)*}(z) - \varrho_n^{(1)*}(z)\}$$

um weniger als $\frac{\pi}{4}$ vom existent angenommenen Häufungswert

$$\lim_{n \to \infty} \arg \{\varrho_n^{(2)*}(z) - \varrho_n^{(1)*}(z)\} = \beta(z)$$

abweicht und

f) daß

$$|\varrho_n^{(2)*}(z) - \varrho_n^{(1)*}(z)| > |\varrho_{n-1}^{(2)*}(z) - \varrho_{n-1}^{(1)*}(z)|$$

und weiter

g)

$$\arg \{\varrho_n^{(2)*}(z) - \varrho_n^{(1)*}(z)\}$$

monoton gegen $\beta(z)$ strebt.

Satz 1a. *Wenn in einem Gebiet $\mathfrak{G}$ der z-Ebene*

$$(21) \qquad \begin{cases} |M(z)| = 1 \\ \textit{bezw. } |N(z)| = 1 \end{cases}$$

und über die unter **8.** *angegebenen Vorausbedingungen hinaus die obigen zusätzlichen Bedingungen a—g erfüllt sind, so konvergiert die Folge* (2) *gleichmäßig gegen eine meromorphe Lösung $f(z)$ bezw. $g(z)$ von* (1). *Die gleiche Lösung ergibt sich, wenn statt $\varkappa(z, n)$ bezw. $\lambda(z, n)$ andere Funktionen $\varkappa^*(z, n)$ bezw. $\lambda^*(z, n)$ eingesetzt werden, für die* (20) *in $\mathfrak{G}$ gleichmäßig konvergiert.*

Der Beweis dieses Satzes geht analog zu dem Beweis des Satzes 1. Die Erschwerung liegt darin, daß nicht (wie unter **10.**) ohne weiteres invariante Gebiete nachgewiesen werden können. Unter **17.** wird gezeigt, daß es ein Gebiet um $\xi = 1$ gibt, welches durch die aufeinanderfolgenden Abbildungen nicht sehr weit von $\xi = 1$ forttransformiert wird. Dabei läßt sich analog zu **11.** eine Zusammenziehung des Verfahrens auf $\xi = 1$ angeben. Die Abschnitte **12.**—**15.** lassen sich (unter **18.**) fast wörtlich übernehmen.

17. Es wird zunächst nur in der ξ^*-Ebene untersucht, wo die beiden Fixpunkte von $\Phi^*(\xi^*)$ in $\xi^* = 0$ bezw. $\xi^* = \infty$ liegen. Die Punkte $\varrho_n^{(1)*}(z)$ liegen natürlich monoton auf $\mathfrak{C}^{(1)*}(z)$.

Es wird eine positive Zahl $\tau > 1$ zunächst festgelegt; später wird analog zu **11.** $\tau \to \infty$ zugelassen. Nach Bedingung **c.)** gibt es dann ein

$$n_{II}\left(\frac{1}{16\,\tau}\right),$$

daß für $z \subset \mathfrak{G}'$ und $n \geqq n_{II}\left(\frac{1}{16\,\tau}\right)$ die Länge der Kurve $\mathfrak{C}^{(1)*}(z)$ zwischen $\varrho_n^{(1)*}(z)$ und $\xi^* = 0$ kleiner als $\frac{1}{16\,\tau}$ ist. Insbesondere gilt für die Summe der Sehnen

$$\sum_{n=n_{II}\left(\frac{1}{16\,\tau}\right)}^{\infty} |\varrho_{n+1}^{(1)*}(z) - \varrho_n^{(1)*}(z)| < \frac{1}{16\,\tau}\,. \tag{22}$$

Da für $n \geqq n_I$ und $z \subset \mathfrak{G}'$

$$|\mu_n^{(1)*}(z)| < 1$$

gilt, ist jeder den Punkt $\varrho_n^{(1)*}(z)$ umschließende und alle durch $\varrho_n^{(1)*}(z)$ sowie $\varrho_n^{(2)*}(z)$ verlaufenden Kreise orthogonal schneidende Kreis invariant gegenüber der linearen Abbildung $\varphi_n^*(z, \xi^*)$ (in dem Sinne, als er durch diese Abbildung auf einen Teil seiner selbst abgebildet wird). Der Mittelpunkt dieses Kreises mit dem Radius r hat den Wert

$$\varrho_n^{(1)*}(z) + \varepsilon\left\{r, |\varrho_n^{(2)*}(z) - \varrho_n^{(1)*}(z)|\right\} \frac{\varrho_n^{(1)*}(z) - \varrho_n^{(2)*}(z)}{|\varrho_n^{(1)*}(z) - \varrho_n^{(2)*}(z)|}\,,$$

wobei

$$\varepsilon\left\{r, |\varrho_n^{(2)*}(z) - \varrho_n^{(1)*}(z)|\right\} = \tfrac{1}{2}\,|\varrho_n^{(2)*}(z) - \varrho_n^{(1)*}(z)|\left[\sqrt{1 + \left|\frac{2\,r}{\varrho_n^{(2)*}(z) - \varrho_n^{(1)*}(z)}\right|^2} - 1\right] > 0.$$

Je größer $|\varrho_n^{(2)*}(z) - \varrho_n^{(1)*}(z)|$ ist, um so kleiner ist bei festgelegtem Radius r der Wert der „Exzentrizität" ε. Wird

$$r_0 = \frac{1}{2\,\tau}$$

gesetzt, so gibt es wegen Bedingung **d)** einen genügend großen Index $n_V(\tau)$, daß für alle $n \geqq n_V(\tau)$ und $z \subset \mathfrak{G}'$ die $r \leqq r_0$ zugehörende Exzentrizität kleiner ist als $\frac{1}{16\,\tau}$.

Nun wird gesetzt

$$n_0 = \text{Max.}\left\{n_{\text{I}}, n_{\text{II}}\left(\frac{1}{16\tau}\right), n_{\text{IV}}, n_{\text{V}}(\tau)\right\}.$$

Für jedes $z \subset \mathfrak{G}'$ läßt sich dann folgendes konstruieren: Der invariante Kreis bezüglich $\varphi^*_{n_0}(z,\xi^*)$ mit dem Radius $r_0 = \frac{1}{2\tau}$ besitzt den Mittelpunkt

$$M_0(z) = \varrho^{(1)*}_{n_0}(z) + \varepsilon\left\{\frac{1}{2\tau}\,,\ |\varrho^{(2)*}_{n_0}(z) - \varrho^{(1)*}_{n_0}(z)|\right\}\frac{\varrho^{(1)*}_{n}(z) - \varrho^{(2)*}_{n_0}(z)}{|\varrho^{(1)*}_{n}(z) - \varrho^{(2)*}_{n_0}(z)|}$$

$$= \varrho^{(1)*}_{n_0}(z) + \varepsilon_0(z)\frac{\varrho^{(1)*}_{n_0}(z) - \varrho^{(2)*}_{n_0}(z)}{|\varrho^{(1)*}_{n_0}(z) - \varrho^{(2)*}_{n_0}(z)|}.$$

Da wegen (22) für $\nu = 0, 1, 2, \ldots$

$$|\varrho^{(1)*}_{n_0+\nu}(z)| < \frac{1}{16\tau}$$

und

$$\varepsilon_0(z) < \frac{1}{16\tau}$$

ist, gilt

$$|M_0(z)| < \frac{1}{8\tau}.$$

$\varrho^{(1)*}_{n_0+1}(z)$ liegt somit innerhalb dieses invarianten Kreises und es gibt einen, diesen Kreis von innen her berührenden Kreis aus der Schar derjenigen Kreise, welche der linearen Abbildung $\varphi^*_{n_0+1}(z,\xi^*)$ gegenüber invariant sind. Der Radius $r_1(z)$ dieses Kreises ist kleiner als $r_0 = \frac{1}{2\tau}$ und seine Exzentrizität $\varepsilon_1(z)$ ist dieserhalb und nach Bedingung **f)**

$$|\varrho^{(2)*}_{n_0+1}(z) - \varrho^{(1)*}_{n_0+1}(z)| > |\varrho^{(2)*}_{n_0}(z) - \varrho^{(1)*}_{n_0}(z)|$$

kleiner als $\varepsilon_0(z)$. Sein Mittelpunkt ist

$$M_1(z) = \varrho^{(1)*}_{n_0+1}(z) + \varepsilon_1(z)\frac{\varrho^{(1)*}_{n_0+1}(z) - \varrho^{(2)*}_{n_0+1}(z)}{|\varrho^{(1)*}_{n_0+1}(z) - \varrho^{(2)*}_{n_0+1}(z)|}.$$

mit

$$|M_1(z)| < \frac{1}{8\tau}.$$

Falls nun

$$r_1(z) > \frac{3}{16\tau},$$

liegt $\varrho^{(1)*}_{n_0+2}(z)$ innerhalb des Kreises um $M_1(z)$ mit dem Radius $r_1(z)$ und es läßt sich ein diesen Kreis von innen berührender Kreis finden, der gegenüber $\varphi^*_{n_0+2}(z,\xi^*)$ invariant ist. Sein Radius $r_2(z)$ ist kleiner als $r_1(z)$ und seine Exzentrizität $\varepsilon_2(z)$ ist wegen **f)** kleiner als $\varepsilon_1(z)$. Weiter ist

$$M_2(z) = \varrho^{(1)*}_{n_0+2}(z) + \varepsilon_2(z)\frac{\varrho^{(1)*}_{n_0+2}(z) - \varrho^{(2)*}_{n_0+2}(z)}{|\varrho^{(1)*}_{n_0+2}(z) - \varrho^{(2)*}_{n_0+2}(z)|}$$

mit

$$|M_2(z)| < \frac{1}{8\tau}.$$

Falls

$$r_2(z) > \frac{3}{16\tau},\ r_3(z) > \frac{3}{16\tau}, \ldots,$$

läßt sich dieses Verfahren ad infinitum fortsetzen und es wird sein:

$$\left.\begin{aligned} \varepsilon_\nu(z) &> \varepsilon_{\nu+1}(z) \\ |M_\nu(z)| &< \frac{1}{8\tau} \\ r_\nu(z) &> r_{\nu+1}(z) \end{aligned}\right\} \qquad (\nu = 0, 1, 2, \ldots).$$

Zum Nachweis der Durchführbarkeit dieses Konstruktionsverfahrens ist noch zu zeigen, daß für $N = 1, 2, \ldots$

$$r_N(z) > \frac{3}{16\tau}.$$

Offenbar ist

$$r_1(z) = \frac{1}{2\tau} - |M_1(z) - M_0(z)|$$

und

$$r_2(z) = r_1(z) - |M_2(z) - M_1(z)|,\ r_3(z) = r_2(z) - |M_3(z) - M_2(z)|, \ldots$$

für jede natürliche Zahl N also

$$r_N(z) = \frac{1}{2\tau} - |M_1(z) - M_0(z)| - |M_2(z) - M_1(z)| - \ldots - |M_N(z) - M_{N-1}(z)|. \tag{23}$$

Nun ist aber

$$|M_\nu(z) - M_{\nu-1}(z)| = \left| \varrho^{(1)*}_{n_0+\nu}(z) - \varepsilon_\nu(z) \frac{\varrho^{(2)*}_{n_0+\nu}(z) - \varrho^{(1)*}_{n_0+\nu}(z)}{|\varrho^{(2)*}_{n_0+\nu}(z) - \varrho^{(1)*}_{n_0+\nu}(z)|} - \varrho^{(1)*}_{n_0+\nu-1}(z) + \varepsilon_{\nu-1}(z) \frac{\varrho^{(2)*}_{n_0+\nu-1}(z) - \varrho^{(1)*}_{n_0+\nu-1}(z)}{|\varrho^{(2)*}_{n_0+\nu-1}(z) - \varrho^{(1)*}_{n_0+\nu-1}(z)|} \right| \leqq |\varrho^{(1)*}_{n_0+\nu}(z) - \varrho^{(1)*}_{n_0+\nu-1}(z)| + \left| \varepsilon_{\nu-1}(z) \frac{\varrho^{(2)*}_{n_0+\nu-1}(z) - \varrho^{(1)*}_{n_0+\nu-1}(z)}{|\varrho^{(2)*}_{n_0+\nu-1}(z) - \varrho^{(1)*}_{n_0+\nu-1}(z)|} - \varepsilon_\nu(z) \frac{\varrho^{(2)*}_{n_0+\nu}(z) - \varrho^{(1)*}_{n_0+\nu}(z)}{|\varrho^{(2)*}_{n_0+\nu}(z) - \varrho^{(1)*}_{n_0+\nu}(z)|} \right|.$$

Um zu einer Abschätzung des zweiten Terms zu kommen, werde Fig. 1 benutzt. Auf dem Strahl mit der Richtung $\beta(z)$ (siehe Bedingung **e)**) werden von Null aus die monoton kleiner werdenden $\varepsilon_\nu(z)$ angetragen. Von diesen Punkten gelangt man durch Drehungen zu den Werten

$$A_\nu(z) = \varepsilon_\nu(z) \frac{\varrho^{(2)*}_{n_0+\nu}(z) - \varrho^{(1)*}_{n_0+\nu}(z)}{|\varrho^{(2)*}_{n_0+\nu}(z) - \varrho^{(1)*}_{n_0+\nu}(z)|}.$$

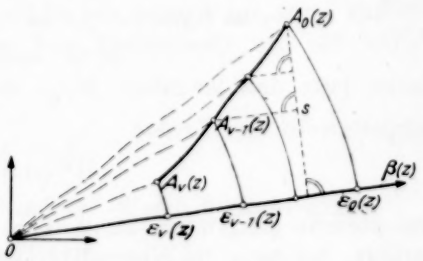


Fig. 1.

Nach Bedingung **g)** ist hierbei die Drehung bei $A_{\nu-1}(z)$ größer als bei $A_\nu(z)$; der zweite Term stellt geometrisch also die Strecke in Fig. 1 dar, die $A_{\nu-1}(z)$ mit $A_\nu(z)$

verbindet. Dann wird aus (23)

$$r_N(z) \geqq \frac{1}{2\tau} - \left[\sum_{\nu=1}^{N} |\varrho^{(1)*}_{n_0+\nu}(z) - \varrho^{(1)*}_{n_0+\nu-1}(z)| + \text{Polygon}_N\right],$$

wobei mit Polygon_N die Länge des entsprechenden Polygons $A_0(z) \cdots A_N(z)$ in Fig. 1 bezeichnet wird. Dieses läßt sich aber leicht geometrisch abschätzen: Nach Bedingung e) wird in Fig. 1 der Punkt $\varepsilon_0(z)$ um weniger als $\frac{\pi}{4}$ gedreht; die Strecke s ist folglich kleiner als $\varepsilon_0(z)$, was seinerseits aber kleiner als $\frac{1}{16\tau}$ gewählt war. Es folgt nun leicht, daß das ganze Polygon $A_0(z) \cdots A_\nu(z) \cdots 0$ eine Länge kleiner als $3\varepsilon_0(z) < \frac{1}{4\tau}$ besitzt. Die Summe auf der rechten Seite ist mit (22) abgeschätzt. Insgesamt ergibt sich also für jedes natürliche N

$$r_N(z) > \frac{1}{2\tau} - \frac{1}{16\tau} - \frac{1}{4\tau} = \frac{3}{16\tau}.$$

Womit bewiesen ist, daß die Konstruktion möglich ist.

Zugleich ist damit aber auch gezeigt, daß es um $\xi^* = 0$ eine Umgebung (z. B.)

$$\mathfrak{U}^*(\tau) : |\xi^*| < \frac{1}{16\tau}$$

gibt, die völlig im Innern jedes der konstruierten jeweils invarianten Kreise liegt. $\mathfrak{U}^*(\tau)$ wird durch

$$\varphi_{n_0+N}(z, \xi^*)$$

(N beliebige natürliche Zahl) auf ein Gebiet abgebildet, welches ganz im Kreis um M_N verbleibt; dieses wiederum geht, da der bezüglich $\varphi^*_{n_0+N-1}(z, \xi^*)$ invariante Kreis um $M_{N-1}(z)$ es völlig umschließt, auf ein Gebiet über, welches ganz im Kreis um $M_{N-1}(z)$ liegt. Die aufeinanderfolgende Abbildung von $\mathfrak{U}^*(\tau)$ durch

$$\varphi^*_{n_0+\nu}(z, \xi^*) \qquad (\nu = N, N-1, \ldots, 0)$$

erbringt also, ganz gleich, wie N gewählt wird, zuletzt ein Bildgebiet, welches ganz im Kreise um $M_0(z)$ liegt.

Die für die Gesamtheit der in $\mathfrak{G}'$ liegenden z sich ergebenden Kreise (um das jeweilige $M_0(z)$ mit dem Radius $\frac{1}{2\tau}$) befinden sich beispielsweise im Kreise

$$\mathfrak{U}^{*\prime}(\tau) : |\xi^*| < \frac{1}{\tau}.$$

Das gleiche gilt, wenn $z \subset \Delta$, d. h. z in der Umgebung des Punktes variiert, bei dem die Normalität nachgewiesen werden soll (siehe 9.). Offenbar ist

$$\lim_{\tau \to \infty} \mathfrak{U}^*(\tau) = \lim_{\tau \to \infty} \mathfrak{U}^{*\prime}(\tau) = 0$$

und die von τ abhängende Zahl $n_0(\tau)$ erfüllt

$$\lim_{\tau \to \infty} n_0(\tau) = \infty.$$

Bei der Rückübertragung der Verhältnisse in die ξ-Ebene ergibt sich letztlich: Für $z \subset \Delta$ gibt es beliebig kleine Kreise $\gamma(\tau)$ um $\xi = 1$, die für $n \geqq n_0(\tau)$ durch successive Abbildung vermöge

$$\varphi_{n+N}(z, \xi),\ \varphi_{n+N-1}(z, \xi), \ldots,\ \varphi_n(z, \xi)$$

(N beliebige natürliche Zahl) auf das Innere eines den Punkt $\xi = 1$ enthaltenden Gebietes $\tilde{\gamma}(\tau)$ abgebildet werden. Dabei ist

$$\lim_{\tau \to \infty} \gamma(\tau) = 1, \quad \lim_{\tau \to \infty} \tilde{\gamma}(\tau) = 1, \quad \lim_{\tau \to \infty} n_0(\tau) = \infty$$

und der Durchmesser von $\gamma(\tau)$ verhält sich bei $\tau \to \infty$ zu dem von $\tilde{\gamma}(\tau)$ wie mindestens 1 : 16.

18. Mit diesem Ergebnis läßt sich der unter **12.** angegebene Beweis für die Normalität der Folge (2) mit einem beliebigen festen τ ohne weiteres übertragen. Auch die Untersuchungen **13.**—**15.** sind anwendbar.

19. Ob die Anwendung des in Satz 1 bezw. 1 a gegebenen Verfahrens auf den Fall

$$\frac{\partial H}{\partial v} \equiv 0$$

einen Existenzbeweis für die Abelsche Funktion in dem Falle ermöglicht, daß anziehende oder abstoßende, gegebenenfalls auch rational indifferente Fixpunkte nicht vorhanden sind, sei hier nicht weiter untersucht. Vielmehr will ich mich auf die Behandlung von Differenzengleichungen der Art (3) beschränken.

III. Die Lösung der Differenzengleichung $F(z+1) = \frac{R_1(z) F(z) + R_2(z)}{F(z) + R_3(z)}$.

§ 1.

Eine meromorphe Lösung der Differenzengleichung $f(z+1) = \frac{R(z)}{1+f(z)}$ mit rationalem $R(z)$.

20. Zuerst wird der Fall, daß

$$\lim_{z \to \infty} R(z) = \delta$$

einen endlichen Wert annimmt, behandelt. Wenn δ nicht grade

$$\delta \leqq -\tfrac{1}{4}$$

erfüllt, so sind die Verhältnisse einfach. Es wird gesetzt:

$$\varkappa(z, n) = \varkappa = -\tfrac{1}{2} + \sqrt{\delta + \tfrac{1}{4}},$$

wobei die Wurzel so gewählt ist, daß

$$\Re\{\varkappa\} > -\tfrac{1}{2}.$$

Dann führt nach Satz 1 der Grenzwert

$$\lim_{n\to\infty} \cfrac{R(z-1)}{1+\cfrac{R(z-2)}{1+\ddots\cfrac{R(z-n+1)}{1+\cfrac{R(z-n)}{1+\varkappa}}}}$$

auf eine meromorphe Funktion $f(z)$, da (9) mit

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{\varkappa}\cdot\frac{R(z-n-1)}{1+\varkappa} = \frac{\delta}{\varkappa(1+\varkappa)} = 1$$

und (10) mit

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{\varkappa}\cdot\frac{R(z-n)}{1+\varkappa} = 1$$

gleichmäßig konvergiert. Aus (12) ergibt sich ebenfalls gleichmäßig konvergierend:

$$\varphi_n(z,\xi) = \frac{1}{\varkappa}\cdot\frac{R(z-n)}{1+\varkappa\xi} \xrightarrow[n\to\infty]{} \Phi(\xi) = \frac{\delta}{\varkappa(1+\varkappa\xi)}$$

mit dem Fixpunkt $\xi = 1$, dessen Multiplikator

$$M = -\frac{\delta\varkappa}{\varkappa(1+\varkappa)^2} = -\frac{\varkappa}{1+\varkappa}$$

wegen $\Re\{\varkappa\} > -\frac{1}{2}$ der Bedingung $|M| < 1$ genügt. Daß die Formeln (17) und (18) der Vorausbedingungen gleichmäßig konvergierend zutreffen, ist leicht einzusehen. Alles in allem sind die Voraussetzungen des Satzes 1 erfüllt; also trifft auch seine Folgerung zu.

21. Etwas schwieriger sind die Untersuchungen im Fall $\delta < -\frac{1}{4}$: Hier führt der Ansatz für $\varkappa$ auf zwei Werte mit $\Im\{\varkappa\} = -\frac{1}{2}$, was aber $|M| = 1$ mit sich bringt. Es sind also die Voraussetzungen von Satz 1a zu verifizieren:

Eine der beiden Lösungen für $\varkappa$ wird zunächst herausgegriffen, nämlich die mit

$$\Im\left\{\sqrt{\delta+\tfrac{1}{4}}\right\} > 0 \quad \text{also} \quad \Im\{\varkappa\} > 0.$$

Die Vorausbedingungen sind offenbar erfüllt. Nun zu den zusätzlichen Bedingungen **16**! Offenbar sind

$$\varphi_n^{(1)}(z) = \frac{1}{\varkappa}\left(-\frac{1}{2}+\sqrt{R(z-n)+\frac{1}{4}}\right)$$

$$\varphi_n^{(2)}(z) = \frac{1}{\varkappa}\left(-\frac{1}{2}-\sqrt{R(z-n)+\frac{1}{4}}\right)$$

mit

$$\Im\left\{\sqrt{R(z-n)+\tfrac{1}{4}}\right\} > 0$$

die Fixpunkte der Möbiustransformationen $\varphi_n(z, \xi)$. Die Multiplikatoren errechnen sich mit

$$\mu_n^{(1)}(z) = -\frac{R'(z-n)}{(\frac{1}{2} + \sqrt{R(z-n) + \frac{1}{4}})^2}.$$

Bei der getroffenen Auswahl der Wurzel ist, wie die Diskussion der Funktion

$$t' = -\frac{t}{(\frac{1}{2} \pm \sqrt{t + \frac{1}{4}})^2} \quad \text{oder} \quad t = -\frac{t'}{(1+t')^2}$$

lehrt (bei welcher $t \leqq -\frac{1}{4}$ auf $|t'| = 1$ übergeht), der Multiplikator

$$|\mu_n^{(1)}(z)| < 1, \text{ wenn } \Im\{R(z-n)\} > 0.$$

Geht man von der Lösung für $\varkappa$ mit

$$\Im\{\sqrt{\delta + \tfrac{1}{4}}\} < 0, \text{ also } \Im\{\varkappa\} < 0$$

aus, so wird in $\varrho_n^{(1)}(z)$ die Wurzel mit negativem Imaginärteil benötigt, ebenso in $\mu_n^{(1)}(z)$. Dann ergibt sich

$$|\mu_n^{(1)}(z)| < 1, \text{ wenn } \Im\{R(z-n)\} < 0.$$

Es ist, da $R(z)$ rational vorausgesetzt wurde:

$$R(z-n) = \delta + \frac{\delta_1}{(z-n)^{p_1}} + \cdots \qquad (\delta_1 \neq 0 < p_1).$$

Falls nun p_1 gerade und $\Im\{\delta_1\} > 0$, so führt die Auswahl $\Im\{\varkappa\} > 0$ und bei $\Im\{\delta_1\} < 0$ führt $\Im\{\varkappa\} < 0$ zu $|\mu_n^{(1)}(z)| < 1$. Ist dagegen p_1 ungerade und $\Im\{\delta_1\} > 0$, so muß $\Im\{\varkappa\} < 0$ und bei $\Im\{\delta_1\} < 0$ muß $\Im\{\varkappa\} > 0$ gewählt werden. Zusammengefaßt: $\varkappa$ muß so festgesetzt werden, daß:

$$(-1)^{p_1} \Im\{\delta_1\} \Im\{\varkappa\} > 0;$$

hierbei ist $|\mu_n^{(1)}(z)| < 1$ für alle z der komplexen Zahlenebene gewährleistet. Ist aber δ_1 reell, so ist bei Festsetzung eines $\varkappa$ der Wert $|\mu_n^{(1)}(z)| < 1$ nur für die obere oder untere Halbebene: Bei $\varkappa$ mit:

$$(-1)^{p_1} \delta_1 \Im\{z\} \Im\{\varkappa\} > 0$$

ist

$$|\mu_n^{(1)}(z)| < 1$$

gewährleistet.

Abschließend werde hier noch nachgewiesen, daß die Bedingungen von Satz 1a erfüllt werden: Die Bedingungen **a)** und **b)** treffen gewiß zu, wenn man die oben angegebenen Forderungen bzgl. der Wahl von $\varkappa$ erfüllt. Weiter ist:

$$\varrho_n^{(1)*}(z) = \frac{\sqrt{R(z-n) + \frac{1}{4}} - \sqrt{\delta + \frac{1}{4}}}{\sqrt{R(z-n) + \frac{1}{4}} + \sqrt{\delta + \frac{1}{4}}}$$

$$\varrho_n^{(2)*}(z) = \frac{\sqrt{R(z-n) + \frac{1}{4}} + \sqrt{\delta + \frac{1}{4}}}{\sqrt{R(z-n) + \frac{1}{4}} - \sqrt{\delta + \frac{1}{4}}}$$

und

$$\varrho_n^{(2)*}(z) - \varrho_n^{(1)*}(z) = \frac{4}{R(z-n)-\delta} \sqrt{R(z-n)+\frac{1}{4}} \sqrt{\delta+\frac{1}{4}}$$
$$= \frac{4\delta+1}{\delta_1}(z-n)^{p_1}(1+\cdots),$$

woraus die Gültigkeit der Bedingungen **c)** bis **g)** zu ersehen ist.

22. Auch der Fall

$$g(z) = \frac{R(z)}{1+g(z+1)}$$

kann leicht behandelt werden und zwar wird

$$\lambda = \varkappa = -\tfrac{1}{2} + \sqrt{\delta+\tfrac{1}{4}}$$

mit

$$\Re\{\varkappa\} > -\tfrac{1}{2}$$

gesetzt. Der Grenzwert

$$\lim_{n\to\infty} \cfrac{R(z)}{1+\cfrac{R(z+1)}{1+\ddots \cfrac{R(z+n-1)}{1+\cfrac{R(z+n)}{1+\varkappa}}}}$$

führt dann auf eine Lösung $g(z)$ der Differenzengleichung, da die entsprechenden Überlegungen zu **20.** gelten. Im Falle $\delta < -\frac{1}{4}$ ist wegen

$$R(z+n) = \delta + \frac{\delta_1}{(z+n)^{p_1}} + \cdots$$

etwas abzuändern: Hier spielt p_1 keine Rolle. $\varkappa$ muß so gewählt werden, daß

$$\Im\{\delta_1\}\,\Im\{\varkappa\} > 0$$

und falls δ_1 reell ist, muß entsprechend

$$\delta_1\,\Im\{z\}\,\Im\{\varkappa\} < 0$$

genommen werden; d. h. auch hier konvergiert die Entwicklung für jedes der beiden $\varkappa$ mindestens in einer durch die reelle Achse begrenzten Halbebene.

23. Zusammenfassend kann also folgender Satz formuliert werden:

Satz 2a. *Hat die nichtkonstante rationale Funktion $R(z)$ bei $z=\infty$ die Entwicklung*

$$R(z) = \delta + \frac{\delta_1}{z^{p_1}} + \cdots \qquad (\delta \neq -\tfrac{1}{4},\ \delta_1 \neq 0 < p_1) \tag{24}$$

und wird gesetzt

$$\varkappa = -\tfrac{1}{2} \pm \sqrt{\delta+\tfrac{1}{4}}, \tag{25}$$

so ist

$$(26)\quad \begin{cases} \text{a) } f(z) = \lim\limits_{n\to\infty} \cfrac{R(z-1)}{1+\cfrac{R(z-2)}{1+\ddots\cfrac{R(z-n+1)}{1+\cfrac{R(z-n)}{1+\varkappa}}}} \\ \textit{bezw. } \text{b) } g(z) = \lim\limits_{n\to\infty} \cfrac{R(z)}{1+\cfrac{R(z+1)}{1+\ddots\cfrac{R(z+n-1)}{1+\cfrac{R(z+n)}{1+\varkappa}}}} \end{cases}$$

die Darstellung einer meromorphen Lösung der Differenzengleichung

$$(27)\quad \begin{cases} \text{a) } f(z+1) = \dfrac{R(z)}{1+f(z)} \\ \textit{bezw. } \text{b) } g(z) = \dfrac{R(z)}{1+g(z+1)}, \end{cases}$$

die in der ganzen Ebene konvergiert, wenn erstens bei dem Fall, daß δ *nicht* $\delta \leqq -\frac{1}{4}$ *erfüllt,* $\varkappa$ *so ausgewählt wird, daß*

$$(28)\qquad \Re\{\varkappa\} > -\tfrac{1}{2}$$

erfüllt ist, zweitens bei dem Fall, daß $\delta < -\frac{1}{4}$ *und* $\Im\{\delta_1\} \neq 0$, $\varkappa$ *so ausgewählt wird, daß*

$$(29)\quad \begin{cases} \text{a) } (-1)^{p_1}\Im\{\delta_1\}\Im\{\varkappa\} > 0 \\ \textit{bezw. } \text{b) } \Im\{\delta_1\}\Im\{\varkappa\} > 0 \end{cases}$$

erfüllt ist. Falls $\delta < -\frac{1}{4}$ *und* δ_1 *reell ist, konvergiert* (26) *mindestens in einer oberen oder unteren z-Halbebene, wenn* $\varkappa$ *entsprechend der Ungleichung*

$$(30)\quad \begin{cases} \text{a) } (-1)^{p_1}\delta_1\Im\{z\}\Im\{\varkappa\} > 0 \\ \textit{bezw. } \text{b) } \delta_1\Im\{z\}\Im\{\varkappa\} < 0 \end{cases}$$

festgelegt wird. Ist $R(z)$ *eine Konstante:* $R(z) \equiv \delta$, *so ist mit* (26) *bei beliebiger Wahl von* $\varkappa$ *aus* (25) *eine Lösung von* (27) *gewonnen.*

24. Bei der praktischen Anwendung der Formel (26) ist es zweckmäßig, von folgendem (nur für den Fall a) angegebenen) Verfahren Gebrauch zu machen: Es wird gesetzt

$$f_n^*(z) = \frac{A_n^*(z)}{B_n^*(z)} = \cfrac{R(z-1)}{1+\cfrac{R(z-2)}{1+\ddots\cfrac{R(z-n+1)}{1+R(z-n)}}}$$

wobei

$$(31)\quad \begin{cases} A_0^*(z) \equiv 0,\ A_1^*(z) = R(z-1), & A_n^*(z) = A_{n-1}^*(z) + R(z-n)\,A_{n-2}^*(z) \\ B_0^*(z) \equiv 1,\ B_1^*(z) \equiv 1, & B_n^*(z) = B_{n-1}^*(z) + R(z-n)\,B_{n-2}^*(z) \end{cases}$$

($n \geqq 2$). Hieraus gewinnt man danach die gesuchten Näherungsbrüche, indem man in

$$f_n(z) = \frac{A_n(z)}{B_n(z)} = \cfrac{R(z-1)}{1+\cfrac{R(z-2)}{1+\ddots\cfrac{R(z-n+1)}{1+\cfrac{R(z-n)}{1+\varkappa}}}}$$

mit

$$(32)\quad \begin{cases} A_n(z) = A_n^*(z) + \varkappa\, A_{n-1}^*(z) \\ B_n(z) = B_n^*(z) + \varkappa\, B_{n-1}^*(z) \end{cases} \quad (n \geqq 1)$$

einsetzt.

In vielen Fällen konvergiert schon die Folge der $f_n^*(z)$ gegen die Lösung $f(z)$, wie die bekannte[9]) Thielesche Kettenbruchentwicklung lehrt; in gewissen Fällen aber konvergiert die Thielesche Entwicklung $f_n^*(z)$ nicht, die Folge der $f_n(z)$ aber wohl gegen eine Lösung $f(z)$ der Differenzengleichung (27). Triviales Beispiel hierzu: $R(z) \equiv -1$.

Interessant ist die Frage, ob im Falle $\delta < -\frac{1}{4}$, $\Im\{\delta_1\} = 0$ die Entwicklung (26) bei gewissen Funktionen auch über den in Satz 2a benannten Mindestkonvergenzbereich hinaus konvergiert. Beispielsweise werde eine Entwicklung zahlenmäßig angegeben: Die Funktion

$$R(z) = -1{,}25 + z^{-1}$$

werde in den beiden Punkten

$$z = -10 + i \quad \text{und} \quad z = -10 - i$$

mit $\varkappa = -0{,}5 - i$ nach (31) bezw. (32) ausgewertet. Es ergibt sich etwa:

$$f_1(-10+i) = -0{,}538 - 1{,}074\,i \qquad f_1(-10-i) = -0{,}542 - 1{,}068\,i$$
$$f_2(-10+i) = -0{,}438 - 1{,}011\,i \qquad f_2(-10-i) = -0{,}466 - 1{,}056\,i$$
$$f_3(-10+i) = -0{,}514 - 1{,}016\,i \qquad f_3(-10-i) = -0{,}509 - 1{,}008\,i$$
$$f_4(-10+i) = -0{,}505 - 1{,}082\,i \qquad f_4(-10-i) = -0{,}521 - 1{,}060\,i.$$

Nach Satz 2 müssen die $f_\nu(z)$ mindestens in $\Re\{z\} > 0$ also für $z = -10+i$ konvergieren ($p_1 = 1$, $\delta_1 = 1$, $\Im\{\varkappa\} < 0$). Die geometrische Deutung obiger Näherungswerte schließt bei allen Vorbehalten nicht völlig aus, daß die $f_\nu(-10-i)$ in der gleichen Weise wie die $f_\nu(-10+i)$ konvergieren.

25. Es folgt nun die Behandlung des Falles

$$R(z) = a\,\frac{(z-\beta_1)(z-\beta_2)\ldots(z-\beta_\mu)}{(z-\gamma_1)(z-\gamma_2)\ldots(z-\gamma_\nu)} \qquad (a \neq 0)$$

[9]) siehe beispielsweise Nörlund [4].

mit $\mu > \nu \geqq 0$, bei welchem kein β_λ mit einem $\gamma_{\lambda'}$ identisch ist. Hier wird gesetzt

$$\varkappa(z, n) = \sqrt{a(-n)^{\mu-\nu}} = \varkappa_n,$$

wobei die Argumente aller $\varkappa_n$ untereinander gleich sind. Gewiß ist

$$R(z-n) = a(-n)^{\mu-\nu}\left[1 + \frac{1}{n}\{\sum\beta_\lambda - \sum\gamma_\lambda + z(\nu-\mu)\} + \frac{1}{n^2}(\cdots)\right]$$

und hiermit wird (9)

$$\lim_{n\to\infty} \frac{R(z-n-1)}{\sqrt{a(-n)^{\mu-\nu}}\,[1+\sqrt{a(-n-1)^{\mu-\nu}}]} = \lim_{n\to\infty} \frac{1+\frac{1}{n}(\cdots)}{\frac{1}{\sqrt{a(-n)^{\mu-\nu}}} + \sqrt{\left(\frac{-n-1}{-n}\right)^{\mu-\nu}}} = 1$$

und analog auch (10) gleichmäßig konvergierend erreicht. Weiter ist

$$\varphi_n(z, \xi) = \frac{R(z-n)}{\varkappa_{n-1}(1+\varkappa_n\xi)};$$

aus

$$\varphi_n(z, \xi) = \frac{a(-n)^{\mu-\nu}\left[1 + \frac{1}{n}\{\sum\beta_\lambda - \sum\gamma_\lambda + z(\nu-\mu)\} + \frac{1}{n^2}(\cdots)\right]}{\sqrt{a(-n+1)^{\mu-\nu}} + a\xi\sqrt{(n^2-n)^{\mu-\nu}}}$$

folgt

$$\Phi(\xi) = \frac{1}{\xi}.$$

Dann wird

$$\varrho_n^{(1)}(z) = -\frac{1}{2\varkappa_n} + \sqrt{\frac{R(z-n)}{\varkappa_n\varkappa_{n-1}} + \frac{1}{4\varkappa_n^2}} \qquad (\arg\sqrt{\ } \approx 0)$$

und

$$\varrho_n^{(2)}(z) = -\frac{1}{2\varkappa_n} - \sqrt{\frac{R(z-n)}{\varkappa_n\varkappa_{n-1}} + \frac{1}{4\varkappa_n^2}} \qquad (\arg\sqrt{\ } \approx 0)$$

mit

$$\mu_n^{(1)}(z) = -\frac{\varkappa_n R(z-n)}{\varkappa_{n-1}(1+\varkappa_n\varrho_n^{(1)}(z))^2}.$$

(Mit $\arg\sqrt{\ } \approx 0$ sei derjenige Wurzelwert charakterisiert, dessen Argument dem Wert Null am nächsten kommt.) Weiter ist

$$\varrho_n^{(1)*}(z) = \frac{-1-\frac{1}{2\varkappa_n} + \sqrt{\frac{R(z-n)}{\varkappa_n\varkappa_{n-1}} + \frac{1}{4\varkappa_n^2}}}{1-\frac{1}{2\varkappa_n} + \sqrt{\frac{R(z-n)}{\varkappa_n\varkappa_{n-1}} + \frac{1}{4\varkappa_n^2}}} \qquad (\arg\sqrt{\ } \approx 0)$$

$$\varrho_n^{(2)*}(z) = \frac{-1-\frac{1}{2\varkappa_n} - \sqrt{\frac{R(z-n)}{\varkappa_n\varkappa_{n-1}} + \frac{1}{4\varkappa_n^2}}}{1-\frac{1}{2\varkappa_n} - \sqrt{\frac{R(z-n)}{\varkappa_n\varkappa_{n-1}} + \frac{1}{4\varkappa_n^2}}} \qquad (\arg\sqrt{\ } \approx 0)$$

$$\varrho_n^{(2)*}(z) - \varrho_n^{(1)*}(z) = \frac{4\sqrt{\frac{R(z-n)}{\varkappa_n\varkappa_{n-1}} + \frac{1}{4\varkappa_n^2}}}{\frac{R(z-n)}{\varkappa_n\varkappa_{n-1}} + \frac{1}{\varkappa_n} - 1} \qquad (\arg\sqrt{\ } \approx 0).$$

Die Voraussetzungen **8.** treffen gewiß zu; dabei ist $M = -1$. Es wird also Satz 1a anzuwenden sein. Hierzu muß nachgewiesen werden, daß die zusätzlichen Bedingungen **16.** erfüllt sind. Die oben zusammengestellten Formeln sollen dem dienen: Es zeigt sich schnell, daß den zusätzlichen Bedingungen **a)** und **c)** bis **g)** genüge getan wird. Besondere Beachtung verdient Bedingung **b)**. Hier ist die Funktion $\mu_n^{(1)}(z)$ näher zu untersuchen:

$$\mu_n^{(1)}(z) = \frac{-1}{\frac{\varkappa_{n-1}}{\varkappa_n R(z-n)}\left(\frac{1}{2} + \varkappa_n \sqrt{\frac{R(z-n)}{\varkappa_n \varkappa_{n-1}} + \frac{1}{4\varkappa_n^2}}\right)^2} \qquad (\arg\sqrt{\ } \approx 0)$$

$$= \frac{-1}{1 + \frac{\varkappa_{n-1}}{2\varkappa_n R(z-n)} + \frac{\varkappa_{n-1}}{R(z-n)}\sqrt{\frac{R(z-n)}{\varkappa_n \varkappa_{n-1}} + \frac{1}{4\varkappa_n^2}}} \qquad (\arg\sqrt{\ } \approx 0),$$

oder

$$\mu_n^{(1)}(z) = \frac{-1}{1 + \frac{\varkappa_{n-1}}{2\varkappa_n R(z-n)} + \sqrt{\frac{\varkappa_{n-1}}{\varkappa_n R(z-n)} + \frac{\varkappa_{n-1}^2}{4\varkappa_n^2 R^2(z-n)}}} \qquad (\arg\sqrt{\ } \approx -\arg\varkappa_n)$$

bezw.

$$\mu_n^{(1)}(z) = \frac{-1}{1 + t + \sqrt{t^2 + 2t}} \qquad (\arg\sqrt{\ } \approx -\arg\varkappa_n)$$

mit

$$t = \frac{\varkappa_{n-1}}{2\varkappa_n R(z-n)}.$$

Die Funktion

$$t' = \frac{-1}{1 + t + \sqrt{t^2 + 2t}} \quad \text{bezw.} \quad t = -1 - \frac{1}{2}\left(t' + \frac{1}{t'}\right)$$

bildet die doppelt durchlaufene Strecke $-2 \leqq t \leqq 0$ auf $|t'| = 1$ ab, wobei $t = 0 \to -1$ und $-2 \to +1$. Offenbar ist $|t'| < 1$, wenn (für $|t| < 1$):

$$\Re\left\{\sqrt{t^2 + 2t}\right\} > 0$$

gewählt wird. Dies bedeutet aber, da $\arg\sqrt{\ } \approx -\arg\varkappa_n$, daß $|\mu_n^{(1)}(z)| < 1$ wird, wenn

$$\Re\{\varkappa_n\} > 0$$

gewählt ist. In diesem Falle gibt es zu jedem abgeschlossenen Gebiet $\mathfrak{G}'$ der z-Ebene einen Index, von dem an alle $|\mu_n^{(1)}(z)| < 1$.

Im Falle, daß $a(-n)^{\mu-\nu}$ negativ ist, sind genauere Unterscheidungen nötig: Es muß dann in $\mathfrak{G}'$

$$-\pi < \arg t < +\pi$$

bleiben, und da $\arg\varkappa_{n-1} = \arg\varkappa_n$, muß sein

$$-\pi < \arg R(z-n) < +\pi$$

oder — aus der Formel für $R(z-n)$ folgend — in $\mathfrak{G}'$ muß für hin-

reichend große n sein:

$$\Im\{\sum\beta_\lambda - \sum\gamma_\lambda + z(\nu-\mu)\} < 0$$

oder

$$(\mu-\nu)\Im\{z\} > \Im\{\sum\beta_\lambda - \sum\gamma_\lambda\}$$

bezw. anderenfalls

$$(\mu-\nu)\Im\{z\} < \Im\{\sum\beta_\lambda - \sum\gamma_\lambda\}.$$

Bei

$$(\mu-\nu)\Im\{z\} > \Im\{\sum\beta_\lambda - \sum\gamma_\lambda\}$$

liegt

$$t = \frac{\varkappa_{n-1}}{2\varkappa_n R(z-n)}$$

im dritten Quadranten des Einheitskreises und ebenfalls der Wert $t^2 + 2t$. $\sqrt{t^2+2t}$ befindet sich dann entweder im zweiten oder vierten Quadranten. Da aber

$$\arg\sqrt{\ } \approx -\arg\varkappa_n \quad \text{und} \quad \arg\varkappa_n = \pm\frac{\pi}{2}$$

ist, muß zur Erfüllung von

$$\Re\{\sqrt{t^2+2t}\} > 0$$

das Argument $\arg\varkappa_n = +\frac{\pi}{2}$, also $\Im\{\varkappa_n\} > 0$ gewählt werden, wenn $|\mu_n^{(1)}(z)| < 1$ sein soll. Analog muß bei

$$(\mu-\nu)\Im\{z\} < \Im\{\sum\beta_\lambda - \sum\gamma_\lambda\}$$

$\varkappa_n = \sqrt{a(-n)^{\mu-\nu}}$ so gewählt werden, daß $\Im\{\varkappa_n\} < 0$ ist.

26. Die Besprechung der Lösung von

$$g(z) = \frac{R(z)}{1+g(z+1)}$$

geht aus von

$$\lambda(z,n) = \sqrt{a\,n^{\mu-\nu}} = \lambda_n,$$

wobei die Argumente aller λ_n untereinander gleich seien. Auch hier sind die Vorausbedingungen **8.** erfüllt, wobei sich

$$\Psi(\xi) = \frac{1}{\xi} \quad \text{und} \quad N = -1$$

ergibt. Da demnach wieder Satz 1a verwendet werden muß, sind auch die zusätzlichen Bedingungen heranzuziehen. **a)** und **c)** bis **g)** treffen ohne weiteres zu; es fehlt nur noch der Nachweis, daß **b)** durch geeignete Wahl der λ_n erfüllt wird. Analog zu vorhin ist hier

$$v_n^{(1)}(z) = \frac{-1}{1+\frac{\lambda_{n-1}}{2\lambda_n R(z+n)} + \sqrt{\frac{\lambda_{n-1}}{\lambda_n R(z+n)} + \frac{\lambda_{n-1}^2}{4\lambda_n^2 R^2(z+n)}}}$$

$$(\arg\sqrt{\ } \approx -\arg\lambda_n)$$

und $|v_n^{(1)}(z)| < 1$, wenn $\Re\{\sqrt{\ }\} > 0$ ist; dies ist der Fall bei

$$\Re\{\lambda_n\} > 0.$$

Wenn $a n^{\mu-\nu}$ negativ ist, wird ebenso wie unter **25.** eine genauere Unterscheidung nötig, bei welcher von der Formel

$$R(z+n) = a n^{\mu-\nu}\left[1 - \frac{1}{n}\left\{\sum \beta_\lambda - \sum \gamma_\lambda + z(\nu-\mu)\right\} + \frac{1}{n^2}(\cdots)\right]$$

Gebrauch gemacht wird.

Falls

$$(\mu-\nu)\,\Im\{z\} > \Im\left\{\sum \beta_\lambda - \sum \gamma_\lambda\right\}, \text{ ist } \Im\{\lambda_n\} < 0$$

und falls

$$(\mu-\nu)\,\Im\{z\} < \Im\left\{\sum \beta_\lambda - \sum \gamma_\lambda\right\}, \text{ ist } \Im\{\lambda_n\} > 0$$

zu wählen.

27. Das unter **25.** und **26.** bewiesene läßt sich in folgendem Satz zusammenfassen:

Satz 2b. *Besitzt die rationale Funktion $R(z)$ bei $z = \infty$ einen Pol, so läßt sie sich darstellen durch*

$$R(z) = a\,\frac{(z-\beta_1)(z-\beta_2)\cdots(z-\beta_\mu)}{(z-\gamma_1)(z-\gamma_2)\cdots(z-\gamma_\nu)} \qquad (a \neq 0 \leqq \nu < \mu). \tag{33}$$

Wird gesetzt:

$$\begin{cases} \text{a)} & \varkappa_n = \sqrt{a(-n)^{\mu-\nu}} \\ \textit{bezw.}\ \text{b)} & \lambda_n = \sqrt{a n^{\mu-\nu}}, \end{cases} \tag{34}$$

so ist

$$\begin{cases} \text{a)} & f(z) = \lim\limits_{n\to\infty} \cfrac{R(z-1)}{1+\cfrac{R(z-2)}{1+\ddots\cfrac{R(z-n+1)}{1+\cfrac{R(z-n)}{1+\varkappa_n}}}} \\ \textit{bezw.}\ \text{b)} & g(z) = \lim\limits_{n\to\infty} \cfrac{R(z)}{1+\cfrac{R(z+1)}{1+\ddots\cfrac{R(z+n-1)}{1+\cfrac{R(z+n)}{1+\lambda_n}}}} \end{cases} \tag{35}$$

die Darstellung einer meromorphen Lösung der Differenzengleichung

$$\begin{cases} \text{a)} & f(z+1) = \dfrac{R(z)}{1+f(z)} \\ \textit{bezw.}\ \text{b)} & g(z) = \dfrac{R(z)}{1+g(z+1)}, \end{cases} \tag{36}$$

die in der ganzen Ebene konvergiert, wenn die

$$\begin{cases} \text{a)}\ \varkappa_n \textit{ bei nichtnegativem } a(-n)^{\mu-\nu} \textit{ und die} \\ \text{b)}\ \lambda_n \textit{ bei nichtnegativem } a n^{\mu-\nu} \end{cases}$$

so ausgewählt werden, daß

$$\begin{cases} \text{a)} & \Re\{\varkappa_n\} > 0 \\ \textit{bezw.}\ \text{b)} & \Re\{\lambda_n\} > 0. \end{cases} \tag{37}$$

Bei negativem $a(-n)^{\mu-\nu}$ bezw. $an^{\mu-\nu}$ konvergiert (35) *mindestens in einer Halbebene, nämlich:*

$$(38)\quad \begin{cases} \text{in } \Im\{z\} > \dfrac{\Im\{\sum \beta_\lambda - \sum \gamma_\lambda\}}{\mu-\nu} \text{ falls a) } \Im\{\varkappa_n\} > 0 \text{ bezw. b) } \Im\{\lambda_n\} < 0 \\ \text{in } \Im\{z\} < \dfrac{\Im\{\sum \beta_\lambda - \sum \gamma_\lambda\}}{\mu-\nu} \text{ falls a) } \Im\{\varkappa_n\} < 0 \text{ bezw. b) } \Im\{\lambda_n\} > 0. \end{cases}$$

Interessant ist, daß im Falle (38) bei rationalen Funktionen, welche die reelle Achse invariant lassen, diese Achse auch wieder (wie im Satz 2 a) die Grenze des Mindestkonvergenzbereiches der Kettenbruchentwicklung darstellt.

§ 2.

Reduktion der Differenzengleichung $F(z+1) = \dfrac{R_1(z)\,F(z) + R_2(z)}{F(z) + R_3(z)}$.

28. Die Funktionen $R_\nu(z)$ $(\nu = 1, 2, 3)$ seien rational. Der Fall

$$(39)\qquad F(z+1) = R_1(z)\,F(z) + R_2(z)$$

interessiert hier nicht weiter. Die Differenzengleichung

$$(40)\qquad F(z+1) = \frac{R_1(z)\,F(z) + R_2(z)}{F(z) - R_1(z-1)}$$

läßt sich lösen, indem man aus der (mit der Γ-Funktion leicht angebbaren) Hilfsfunktion $\varphi(x)$, welche durch

$$(41)\qquad \varphi(x+1) = [R_1(2x)\,R_1(2x-1) + R_2(2x)]\,\varphi(x)$$

bestimmt wird, $F(z)$ nach

$$F(z) = \frac{\varphi\left(\frac{z+1}{2}\right)}{\varphi\left(\frac{z}{2}\right)} + R_1(z-1)$$

ermittelt. Dies führt bei der Spezialisierung $R_1(z) \equiv 0$ auf die bekannte Lösung [10]).

29. Es wird gesetzt:

$$(42)\qquad R(z) = \frac{R_2(z) - R_1(z)\,R_3(z)}{[R_1(z-1) + R_3(z)]\,[R_1(z) + R_3(z+1)]},$$

was bei der Ausschließung des Falles (40) zu einer rationalen Funktion $R(z)$ führt. Unter der „Reduzierten" zu (3) wird nun

$$f(z+1) = \frac{R(z)}{1 + f(z)}$$

verstanden. Wie in den Sätzen 2 a und 2 b angegeben, existiert außer

[10]) siehe Nörlund [4], S. 115. A. Mayer [2].

im Falle $\lim_{z\to\infty} R(z) = -\frac{1}{4}$ mindestens eine Lösung $f_0(z)$ der reduzierten Gleichung. Dann ist

$$F_0(z) = f_0(z)\,[R_1(z-1)+R_3(z)] + R_1(z-1)$$

eine Lösung von (3). Dies läßt sich leicht nachrechnen:

$$F_0(z+1) = f_0(z+1)\,[R_1(z)+R_3(z+1)] + R_1(z)$$

$$= \frac{R_2(z)-R_1(z)\,R_3(z)}{[R_1(z-1)+R_3(z)]\,[R_1(z)+R_3(z+1)]} \cdot \frac{R_1(z)+R_3(z+1)}{1+\dfrac{F_0(z)-R_1(z-1)}{R_1(z-1)+R_3(z)}} + R_1(z)$$

$$= \frac{R_2(z)-R_1(z)\,R_3(z)}{F_0(z)+R_3(z)} + R_1(z) = \frac{R_1(z)\,F_0(z)+R_2(z)}{F_0(z)+R_3(z)}.$$

30. Umgekehrt muß, wenn $F(z)$ eine Lösung von (3) ist, $f(z)$ eine Lösung der Reduzierten sein. Jede Lösung $f(z)$ der Reduzierten führt mit

$$f(z) = f_0(z)\left(1+\frac{1}{h(z)}\right)$$

auf die Gleichung

$$h(z+1) = -\frac{1+f_0(z)}{f_0(z)}\,h(z) - 1. \tag{43}$$

$f_0(z)$ wird hierin erzielt, wenn für $h(z)$ die triviale Lösung $h(z)\equiv\infty$ eingesetzt wird.

Da in die allgemeine Lösung von $h(z)$:

$$h(z) = h_0(z) + k_0(z)\,\pi(z),$$

wo bei $k_0(z)$ eine herausgegriffene Lösung der Gleichung

$$k(z+1) = -\frac{1+f_0(z)}{f_0(z)}\,k(z) \tag{44}$$

ist) die periodische Funktion $\pi(z)$ eingeht, läßt sich die Gesamtheit der Lösungen von (3) so angeben, daß $\pi(z)$ alle möglichen periodischen Funktionen mit der Periode 1 durchläuft.

31. Dies wird zusammengefaßt in

Satz 3a. *Die Gesamtheit aller meromorphen Lösungen der Differenzengleichung*

$$F(z+1) = \frac{R_1(z)\,F(z)+R_2(z)}{F(z)+R_3(z)} \tag{45}$$

mit rationalen $R_\nu(z)$ ist durch

$$F(z) = f_0(z)\left[1+\frac{1}{h_0(z)+k_0(z)\,\pi(z)}\right][R_1(z-1)+R_3(z)] + R_1(z-1) \tag{46}$$

gegeben, wobei $f_0(z)$ die Kettenbruchentwicklung der Lösung von

$$f_0(z+1) = \frac{R(z)}{1+f_0(z)} \quad (R(z)\ \textit{siehe}\ (42),\ R(\infty) \neq -\tfrac{1}{4})$$

entsprechend Satz 2a oder 2b ist. $h_0(z)$ *bezw.* $k_0(z)$ *ist je eine meromorphe Lösung von* (43) *bezw.* (44), $\pi(z)$ *durchläuft die Gesamtheit aller meromorphen Funktionen mit der Periode 1 (evtl.* $\pi(z) \equiv \infty$*). Im Falle* $R(z) \equiv \infty$ *ist*

$$F(z) = \varphi\left(\frac{z+1}{2}\right)\varphi^{-1}\left(\frac{z}{2}\right) + R_1(z-1), \tag{47}$$

wobei $\varphi(x)$ *die Gesamtheit aller meromorphen Lösungen von* (41) *ist.*

Die Analogie zu Satz 3a werde der besseren Übersicht wegen getrennt formuliert:

Satz 3b. *Die Gesamtheit aller meromorphen Lösungen der Differenzengleichung*

$$G(z) = \frac{R_1(z)\,G(z+1) + R_2(z)}{G(z+1) + R_3(z)} \tag{48}$$

mit rationalen $R_\nu(z)$ *ist durch*

$$G(z) = g_0(z)\left[1 + \frac{1}{m_\varrho(z) + n_0(z)\,\pi(z)}\right][R_1(z) + R_3(z-1)] + R_1(z) \tag{49}$$

gegeben, wobei $g_0(z)$ *die Kettenbruchentwicklung der Lösung von*

$$g_0(z) = \frac{R(z)}{1 + g_0(z+1)} \quad \textit{mit}$$

$$R(z) = \frac{R_2(z) - R_1(z)\,R_3(z)}{[R_1(z+1) + R_3(z)]\,[R_1(z) + R_3(z-1)]} \quad (R(\infty) \neq -1) \tag{50}$$

entsprechend Satz 2a oder 2b ist. $m_0(z)$ *bezw.* $n_0(z)$ *ist je eine meromorphe Lösung von*

$$m(z) = -\frac{1 + g_0(z+1)}{g_0(z+1)}\,m(z+1) - 1 \tag{51}$$

bezw.

$$n(z) = -\frac{1 + g_0(z+1)}{g_0(z+1)}\,n(z+1). \tag{52}$$

Bei $R(z) \equiv \infty$ *ergibt sich die Lösung* (47). [$R_1(z+1) \to R_1(z)$!].

32. Formel (45) kann auch mit

$$F(z) = \frac{-R_3(z)\,F(z+1) + R_2(z)}{F(z) - R_1(z)}$$

angegeben und nach Satz 3b gelöst werden, wobei $R(z)$ in (50) mit (42) identisch ist. Interessant ist nun, daß die Kettenbruchentwicklung der Reduzierten nach Satz 2b in der vollen Ebene konvergiert, wenn

$$(53)\quad \begin{cases} \text{bei } a > 0: & \text{die Entwicklung nach Satz 3b} \\ \text{bei } a < 0,\ \mu - \nu \text{ ungerade}: & \text{die Entwicklung nach Satz 3a} \end{cases}$$

benutzt wird. Bei

$$a < 0,\ \mu - \nu \text{ gerade}$$

allerdings bleibt dieser Ausweg versperrt.

IV. Der Zusammenhang zwischen der Differenzengleichung $F(z+1) = \frac{R_1(z)F(z)+R_2(z)}{F(z)+R_3(z)}$ und homogenen Differenzengleichungen zweiter Ordnung.

33. Die Funktion $u(z)$ sei durch die Gleichung

$$u(z+2) + p(z)u(z+1) + q(z)u(z) = 0 \tag{54}$$

gegeben, in welcher $p(z)$ und $q(z)$ beliebige rationale Funktionen sind. Wenn $F(z)$ durch

$$F(z) = \frac{u(z+1)}{u(z)} \tag{55}$$

definiert ist, muß sein:

$$\left\{\begin{array}{l} F(z+1) = \dfrac{-p(z)F(z) - q(z)}{F(z)} \\ \text{bezw.} \qquad F(z) = \dfrac{-q(z)}{F(z+1)+p(z)}, \end{array}\right. \tag{56}$$

wie auch umgekehrt jede Lösung von (56) vermöge (55) auf eine Lösung von (54) führt. Die Reduzierte zu (56) ist

$$\left\{\begin{array}{l} f(z+1) = -\dfrac{q(z)}{p(z)p(z-1)} \cdot \dfrac{1}{1+f(z)} \\ \text{bezw.} \quad g(z) = -\dfrac{q(z)}{p(z)p(z-1)} \cdot \dfrac{1}{1+g(z+1)}. \end{array}\right.$$

Die Kettenbruchentwicklung (26) bezw. (35) dieser Funktion konvergiert stets außer bei $p(z) \equiv 0$ oder bei

$$\lim_{z\to\infty} \frac{q(z)}{p(z)^2} = \frac{1}{4} \tag{57}$$

entweder in der vollen oder mindestens einer halben Ebene gegen eine meromorphe Funktion. Sie lautet

$$\left\{\begin{array}{l} \dfrac{u(z+1)}{u(z)} = -p(z-1) \\ \qquad + \lim\limits_{n\to\infty} \cfrac{-q(z-1)}{p(z-2) - \cfrac{q(z-2)}{p(z-3) - \ddots \cfrac{}{p(z-n) - \cfrac{q(z-n)}{p(z-n-1)(1+\varkappa_n)}}}} \\ \text{bezw.} \ \dfrac{u(z+1)}{u(z)} \\ \qquad = \lim\limits_{n\to\infty} \cfrac{-q(z)}{p(z) - \cfrac{q(z+1)}{p(z+1) - \ddots \cfrac{}{p(z+n-1) - \cfrac{q(z+n)}{p(z+n)(1+\lambda_n)}}}} \end{array}\right. \tag{58}$$

wobei

$$(59)\quad \begin{cases} \text{für } -\dfrac{q(z)}{p(z)p(z-1)} = \delta + \dfrac{\delta_1}{z^{p_1}} + \cdots : \varkappa_n = \lambda_n = -\frac{1}{2} \pm \sqrt{\delta + \frac{1}{4}} \\ \text{bezw. für } -\dfrac{q(z)}{p(z)p(z-1)} \\ \quad = a\dfrac{(z-\beta_1)(z-\beta_2)\ldots(z-\beta_\mu)}{(z-\gamma_1)(z-\gamma_2)\ldots(z-\gamma_\nu)}\ (\mu > \nu): \begin{cases} \varkappa_n = \pm\sqrt{a(-n)^{\mu-\nu}} \\ \lambda_n = \pm\sqrt{a\,n^{\mu-\nu}}, \end{cases} \end{cases}$$

und die Auswahl der Wurzeln nach den in Satz 2a bezw. 2b angegebenen Bedingungen getroffen ist und dann auf die dementsprechenden Konvergenzbereiche führt. Insbesondere kann der unter **32.** herausgestellte Fall, daß außer bei $a<0$ und gerades $\mu-\nu$ stets eine in der vollen Ebene gegen eine meromorphe Funktion konvergierende Kettenbruchentwicklung existiert, auch hier angemerkt werden.

34. Wird die Gleichung mit konstanten Koeffizienten betrachtet:

$$u(z+2) + p\,u(z+1) + q\,u(z) = 0,$$

so ergibt sich aus (58) mit $\varkappa = -\frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{1}{4} - \frac{q}{p^2}}$.

$$\frac{u(z+1)}{u(z)} = -p + \lim_{n\to\infty} \cfrac{q}{p - \cfrac{q}{p - \cfrac{q}{p - \cfrac{q}{p\left(\frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{1}{4} - \frac{q}{p^2}}\right)}}}} = -\frac{p}{2} \mp \sqrt{\frac{p^2}{4} - q}$$

bezw.

$$\frac{u(z+1)}{u(z)} = \lim_{n\to\infty} \cfrac{-q}{p - \cfrac{q}{p - \cfrac{q}{p - \cfrac{q}{p\left(\frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{1}{4} - \frac{q}{p^2}}\right)}}}} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\frac{p^2}{4} - q},$$

also gerade die beiden Wurzeln der charakteristischen Gleichung

$$x^2 + p\,x + q = 0,$$

je nachdem welches $\varkappa$ gewählt wird. Hier sind die umfangreichen Konvergenzuntersuchungen, die ja die Einengung bei der Wurzel von $\varkappa$ mit sich brachten, überflüssig; beide Wurzeln sind zugelassen.

Das Thielesche Kettenbruchverfahren gibt für

$$\frac{1}{4} - \frac{q}{p^2} < 0$$

keinen sinnvollen trivialen Wert (Divergenz des Kettenbruchs!), während beim hier angewandten Verfahren auch dieser Fall miterfaßt ist.

35. Stärker noch als im Beispiel **34.** zeigt sich der Vorzug der als verallgemeinerte Kettenbrüche aufzufassenden Entwicklungen (58), wenn $p(z)$ und $q(z)$ beliebige rationale Funktionen mit endlichem Grenzwert

$$\lim_{z\to\infty} p(z) = p \qquad \lim_{z\to\infty} q(z) = q$$

sind: Ist $p^2 - 4q$ nichtnegativ, so konvergieren die Entwicklungen (58) in der vollen Ebene. In diesem Falle konvergieren auch die Thieleschen Kettenbrüche in der vollen Ebene — wenn auch nicht so schnell. Es zeigt sich nebenher, daß bei nichtnegativem $p^2 - 4q$ in (58): $\varkappa_n = 0$ gesetzt werden kann, ohne daß die Konvergenzeigenschaft beeinträchtigt wird.

Ist aber $p^2 - 4q$ negativ, so konvergieren die Entwicklungen (58) bei $\Im\{\delta_1\} \neq 0$ in der vollen Ebene und bei $\Im\{\delta_1\} = 0$ zum mindesten in einer Halbebene. In diesem Falle konvergieren die Thieleschen Kettenbruchentwicklungen nur unter gewissen weiteren Zusatzbedingungen für $p(z)$ und $q(z)$ — dann allerdings in der vollen Ebene.

Ist $p^2 - 4q = 0$, so haben sich die Entwicklungen (58) nach den in dieser Arbeit angewandten Methoden noch nicht als konvergent erweisen lassen, während die Thielesche Entwicklung dann mitunter konvergiert.

Abschließend kann festgestellt werden, daß sich beide Verfahren bei $\lim_{z\to\infty} p(z) = p$ und $\lim_{z\to\infty} q(z) = q$ untereinander ergänzen.

36. Wenn im Falle normaler Differenzengleichungen beide Verfahren mit gewissen Vor- und Nachteilen einander gegenüberstehen, so besitzen die Entwicklungen (58) beim Übergang zu nichtnormalen Differenzengleichungen dem Thieleschen Kettenbruchverfahren, das abgesehen von gewissen Ausnahmefällen nicht als konvergent zu erweisen ist, gegenüber den Vorzug, stets zu konvergenten Lösungen zu führen, deren Konvergenzbereich im allgemeinen die volle Zahlenebene, in gewissen Sonderfällen aber zum mindesten eine Halbebene umfaßt.

37. Zuletzt sei noch festgestellt, daß jede Lösung $u(z)$ von

$$u(z+2) + [R_1(z) + R_3(z+1)]\, u(z+1) + [R_1(z)\, R_3(z) - R_2(z)]\, u(z) = 0$$

mit

$$F(z) = -\frac{u(z+1)}{u(z)} - R_3(z)$$

zu einer Lösung von

$$F(z+1) = \frac{R_1(z)\, F(z) + R_2(z)}{F(z) + R_3(z)}$$

führt, wie man auch umgekehrt von einer Lösung $F(z)$ der letzten Differenzengleichung mit einer Lösung der Gleichung

$$u(z+1) = -[F(z) + R_3(z)]\, u(z)$$

zu einer Lösung $u(z)$ der ersten Differenzengleichung gelangt.

Literaturverzeichnis.

T. E. Mason.

[1] Charakter of the Solutions of certain Functional Equations. Amer. J. Math. **36** (1914).

A. Mayer.

[2] Konvexe Lösung der Funktionalgleichung $\frac{1}{f(x+1)} = x \cdot f(x)$. Acta math. **70** (1938).

P. Montel.

[3] Leçons sur les familles normales de fonctions analytiques et leur applications. Paris (1927).

N. E. Nörlund.

[4] Vorlesungen über Differenzenrechnung. Berlin (1924).

C. F. Stephens.

[5] Nonlinear difference equations analytic in a parameter. Trans. Amer. math. Soc. **64** (1948).

E. Strömberg.

[6] Contributions à l'étude des fonctions algébrico-transzendantes qui satisfont à certaines équations fonctionelles algébriques. Arkiv för Matematik, Astronomi och Fysik **6** (1910), Nr. 15 und 18.

T. N. Thiele.

[7] Différences réciproques. Overs. danske Vidsk. Selsk. Forhandl. Kopenhagen (1906).

[8] Interpolationsrechnung. Leipzig (1909).

H. Tietze.

[9] Über Funktionalgleichungen, deren Lösungen keiner algebraischen Differentialrechnung genügen können. Monatsh. Math. Phys. **16** (1905).

H. Töpfer.

[10] Komplexe Iterationsindizes ganzer und rationaler Funktionen. Math. Ann. **121** (1949).

(Eingegangen am 17. Juni 1949.)

Mehrfach ausgeartete Desarguessche Konfigurationen.

Von

Karl Kommerell in Tübingen.

In der letzten Zeit wurden mehrfach, besonders eingehend 1938 von K. MAIER[1]), die DESARGUESschen Konfigurationen behandelt. Bekanntlich gibt es in einer DESARGUESschen Konfiguration 10 Paare von perspektiven Dreiecken mit 10 Zentren und 10 Achsen. Jede Achse ist die Polare zu dem zugehörigen Zentrum in einem mit der Konfiguration eng verbundenen Polarsystem. Dabei wird in der Literatur durchweg nur der sogenannte allgemeine Fall betrachtet, in dem niemals eine Achse durch sein ihr zugeordnetes Zentrum geht. In der vorliegenden Schrift sollen nun gerade die sogenannten ausgearteten DESARGUESschen Konfigurationen behandelt werden, wo also mindestens einmal es vorkommt, daß die Achse durch das Zentrum geht. Kommt dies einmal, zweimal, dreimal usw. vor, so soll die Konfiguration einmal, zweimal, dreimal usw. ausgeartet heißen. Es läßt sich zeigen, daß es mehr als dreimalausgeartete DESARGUESsche Konfigurationen nicht gibt. Gerade die letzteren sind von besonderem Interesse, da sie in der Nichteuklidischen Geometrie eine hübsche Deutung finden und auch in der Modulfigur, wie ich zeigen kann, eine Rolle spielen.

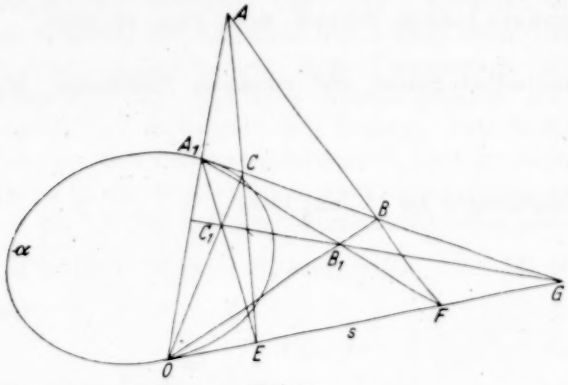


Fig. 1.

Auf die einfach ausgearteten Konfigurationen gehe ich nicht ein, da hier fast Alles trivial ist und auch nichts besonderes zu bemerken ist.

Wenden wir uns darum sogleich zu den zweimal ausgearteten DESARGUESschen Konfigurationen. Eine solche ist in Figur 1 dargestellt. Man erhält sie auf

[1]) K. MAIER, Die DESARGUESsche Konfiguration, Dissertation Tübingen 1938 = Deutsche Mathematik, Bd. **4** (1939), S. 591—641.

die folgende Weise: Eine ebene Perspektive ist bestimmt, wenn das Zentrum O, die Achse s und zwei zusammengehörige Punkte A und A_1 gegeben sind, wobei AA_1 durch O geht. In der bekannten Weise kann dann zu jedem Punkt B der entsprechende B_1 konstruiert werden. Wir lassen nun s durch O gehen, dann ist die Konfiguration mindestens einmal ausgeartet. Zu zwei beliebigen Punkten B und C suchen wir die entsprechenden — wir lassen aber BC durch A_1 gehen, dann wird die Konfiguration im Allgemeinen zweifach ausgeartet sein. Die Konstruktion von B_1 und C_1 erfolgt nun so: AB schneidet die Achse s in F, und A_1B_1 muß auch durch F gehen, darum schneidet OB aus A_1F den Punkt B_1 aus. Entsprechend schneide man AC mit s in E und projiziere C von O aus auf A_1E nach C_1. Die beiden Dreiecke ABC und $A_1B_1C_1$ liegen perspektivisch mit O als Zentrum und s als Achse, darum müssen sich BC und B_1C_1 in einem Punkt G der Achse s treffen. Hier haben wir nun eine Desarguessche Konfiguration von 10 Punkten und 10 Geraden. Auf BC und EF liegen aber vier Konfigurationspunkte, auf jeder anderen Konfigurationsgeraden werden im Allgemeinen nur drei Konfigurationspunkte liegen (man vgl. das weiter unten Gesagte). Durch O und A_1 gehen vier Konfigurationsgeraden, durch jeden anderen Punkt nur drei.

Wir wollen jetzt zeigen, daß jeder Punkt der Konfiguration Zentrum von zwei perspektivischen Dreiecken ist, wobei eine Gerade der Konfiguration die Achse ist. Weiter zeigen wir, daß eine reelle Kurve zweiter Ordnung existiert, in bezug auf die jedes Zentrum eine Polare besitzt, welche die dem Zentrum entsprechende Achse ist. Um das Erste zu beweisen, stellen wir für alle 10 Punkte die Paare von perspektivischen Dreiecken auf und konstruieren die dazugehörige Achse.

Zentrum	Perspektivische Dreiecke	Achse
(1) A	$O\ B\ C$ $A_1\ F\ E$	$B_1\ C_1\ G$
(2) B	$B_1\ F\ G$ $O\ A\ C$	$A_1\ C_1\ E$
(3) C	$A\ O\ B$ $E\ C_1\ G$	$A_1\ F\ B_1$
(4) A_1	$A\ E\ F$ $O\ C_1\ B_1$	$C\ B\ G$
(5) B_1	$O\ A_1\ C_1$ $B\ F\ G$	$A\ C\ E$
(6) C_1	$E\ C\ G$ $A_1\ O\ B_1$	$A\ F\ B$

Zentrum	Perspektivische Dreiecke	Achse
(7) O	$\begin{matrix} A & B & C \\ A_1 & B_1 & C_1 \end{matrix}$	$F\ E\ G$
(8) E	$\begin{matrix} A_1 & A & F \\ C_1 & C & G \end{matrix}$	$O\ B_1\ B$
(9) F	$\begin{matrix} A & A_1 & E \\ B & B_1 & G \end{matrix}$	$O\ C\ C_1$
(10) G	$\begin{matrix} B_1 & B & F \\ C_1 & C & E \end{matrix}$	$O\ A_1 A.$

Durch diese Tabelle, die aufs Leichteste nachgeprüft werden kann, ist der erste Teil bewiesen.

Wenden wir uns zum zweiten Teil: Wenn es ein Polarsystem gibt, in bezug auf welches jede Achse die Polare zum zugehörigen Zentrum ist, so muß das Polarsystem eine reelle Ordnungskurve α besitzen. Denn die Achse zu O, nämlich s geht durch O und die Achse zu A_1, nämlich CBG, geht durch A_1. Die Ordnungskurve α würde also, wenn die Behauptung wahr ist, die Gerade CBG in A_1 und s in O berühren. Dadurch ist aber die Ordnungskurve noch nicht bestimmt. Wenn wir aber noch festsetzen, wie es nach (6) sein müßte, daß zu C_1 die Gerade ABF Polare ist, dann ist α bestimmt. Wir denken uns also jetzt die Figur auf folgende Weise entstanden: Wir nehmen die reelle nicht zerfallende Ordnungskurve α beliebig an und auf ihr die beiden Punkte A_1 und O ebenfalls willkürlich. Die Tangenten in O und A_1 bestimmen den Punkt G. Auf OA_1 wird nun der Punkt A willkürlich gewählt, seine Polare muß dann durch G gehen. Auf ihr wird der Punkt C_1 willkürlich angenommen, seine Polare, die natürlich durch A gehen muß, schneide A_1G in B und s in F. OB und A_1F schneiden sich

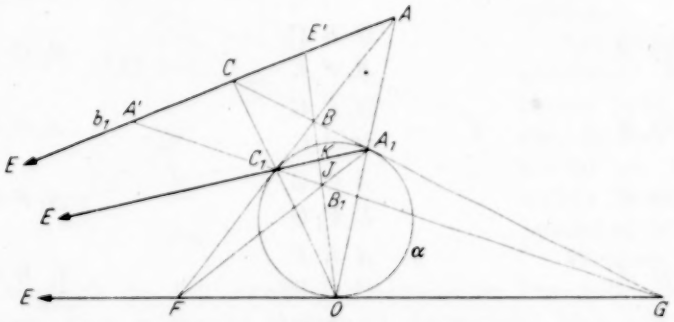


Fig. 2.

nach dem Satze vom vollständigen Viereck, angewendet auf das Viereck A_1OFB in einem Punkt B_1, der auf der Polaren von A nämlich auf

GC_1 liegt. A_1C_1 schneidet s in einem Punkt E und OC_1 schneidet A_1G in einem Punkt C: nun muß EC in dem vollständigen Viereck A_1OEC durch A gehen. So haben wir dieselbe Figur 2 wie oben erhalten, aber so, daß C_1 der Pol für die Gerade ABF in bezug auf α ist. Zusammenfassend ist

A	der Pol von	B_1C_1G	und	(1)	ist erfüllt
A_1	„	CBG	„	(4)	„
O	„	FEG	„	(7)	„
C_1	„	AFB	„	(6)	„
G	„	OA_1A	„	(10)	„

Daß nun auch die fünf übrigen Gleichungen der obigen Tabelle erfüllt sind, sieht man leicht ein. So ist B der Schnittpunkt von AF und A_1G, also ist die Polare von B die Verbindungslinie der Pole C_1 und A_1, womit (2) erfüllt ist. Entsprechend ist die Polare von F die Gerade OC_1, womit (9) erfüllt ist. C ist der Schnittpunkt von OC_1 und A_1G, und darum ist die Polare von C die Gerade FA_1, womit (3) erfüllt ist. Entsprechend ist die Polare von E die Gerade OB, womit (8) erfüllt ist. B_1 ist der Schnittpunkt von A_1F und OB, also ist seine Polare die Gerade CE, womit auch die letzte Gleichung (5) erfüllt ist.

Dreifachausgeartete Desarguessche Konfiguration.

Nehmen wir an, daß die Polare von A_1 nämlich GB_1C_1 die Ordnungskurve α reell schneide, dann wählen wir als Punkt C_1 einen der beiden Schnittpunkte. Seine Polare, nämlich ABF geht dann durch C_1 und auf ihr liegen dann vier Konfigurationspunkte, nämlich $ABFC_1$, so daß wir dann also eine mindestens dreifach ausgeartete Konfiguration erhalten.

Man sieht leicht, daß die Tabellen (1) bis (10) auch nach dem Grenzübergang gelten und daß auch jedes Zentrum der Pol zu seiner Achse ist in bezug auf die Ordnungskurve α. Die Beweise sind fast dieselben wie oben, so daß es sich erübrigt, darauf einzugehen.

In der Figur 2 liegen nun auf den Seiten des Dreiecks BFG je vier Konfigurationspunkte und dual hierzu gehen durch die Pole der Seiten, nämlich A_1, C_1, O vier Konfigurationsgeraden, während alle anderen Punkte und Geraden der Konfiguration sich normal verhalten. Man hat also wirklich eine dreifachausgeartete Desarguessche Konfiguration. Die Gerade ACE ist nun nichts anderes als die Harmonikale des Punktes B_1 in bezug auf das Dreieck BFG. Verbindet man nämlich B_1 mit den Ecken des Dreiecks BFG und schneidet die Verbindungslinien mit den bezüglichen Gegenseiten in O, A_1 und C_1, so hat man zur Konstruktion der Harmonikalen von B_1 zu F, G und O den vierten harmonischen Punkt E zu konstruieren, entsprechend zu

B, G und A_1 den Punkt C und endlich zu B, F und C_1 den Punkt A: diese drei Punkte erhält man aber nach dem Viereckssatz durch A_1C_1, bzw. OC_1 und endlich durch OA_1. Jetzt hat man auch einen ganz einfachen Beweis dafür, daß die drei Punkte E, C und A in einer Geraden, nämlich der Harmonikalen von B_1 liegen, hierzu genügt ein Hinweis auf (5).

Die Figur 2 enthält die bekannten Spezialfälle für die Sätze des Pascal und Brianchon bezüglich eines der Kurve α einbeschriebenen Dreiecks A_1OC_1, wobei ACE die Pascalgerade ist und eines umbeschriebenen Dreiseits BFG, für das B_1 der Brianchonpunkt ist. Dabei ist, wie es ja sein muß, die Pascalgerade (Harmonikale) die Polare zum Brianchonpunkt (Harmonikalpunkt) in bezug auf α.

Wir zeigen jetzt, daß es außer den genannten Konfigurationen keine anderen zweifach bzw. dreifach ausgearteten Desarguesschen Konfigurationen gibt.

Soll in Figur 1 $OEFG$ eine singuläre Gerade sein, so müssen diese vier Punkte vier voneinander verschiedene sein, insbesondere darf keine der Seiten des Dreiecks ABC durch O gehen, ebenso keine der Seiten des Dreiecks $A_1B_1C_1$. Keine Ecke der beiden Dreiecke darf auch auf s zu liegen kommen, wie dies unmittelbar klar ist. Eine weitere Entartung außer s kann also nur so eintreten, daß eine Ecke des einen Dreiecks auf eine Seite des anderen fällt. Diese Seite kann als BC genommen werden, was durch passende Bezeichnung stets erreicht werden kann. Die Ecke des anderen Dreiecks, die dann auf BC fällt, kann nicht B_1 und nicht C_1 sein; denn z. B. CC_1 (d. h. BC) muß durch O gehen, während BC durch den von O verschiedenen Punkt G geht. Auf BC kann also nur A_1 liegen, wie dies in Figur 1 angenommen wurde.

Um nun von den zweifachausgearteten zu den dreifachausgearteten zu kommen, hat man das oben Gesagte zu beachten. Bei der Wahl des Punktes A auf OA_1 darf A nicht mit A_1 zusammenfallen, ebensowenig mit O; denn sonst hätte die Konfiguration nicht 10 Punkte sondern nur 9. Nun hat man auf B_1C_1G, der Polaren von A, den Punkt C_1 willkürlich zu wählen und seine Polare in bezug auf α als ABF zu nehmen (vgl. (6)). C_1 muß natürlich aus demselben Grunde wie soeben von G verschieden angenommen werden. C_1 darf aber auch nicht auf OA_1 angenommen werden, da sonst E nach O fiele, was oben ausgeschlossen wurde.

Eine weitere Entartung kann also jetzt nur in zwei Fällen eintreten, nämlich wenn C_1 wie in Figur 2 auf der Kurve α angenommen wurde, oder wenn C_1 so gewählt wird, daß B_1 auf die Kurve fällt — nach (5) würde dann die Polare von B_1 nämlich ACE durch B_1 gehen. Dieser Fall ist aber von dem vorigen nicht verschieden, da man ja ebensogut statt C_1 auf der Polaren von A den Punkt B_1 hätte willkürlich wählen können. So folgt der

Satz. *Es gibt keine* Desarguesschen *Konfigurationen, die mehr als dreifach ausgeartet sind.*

Obgleich nun die Figur 2 vielfach in der Literatur vorkommt, so findet man nirgends sie näher untersucht, während sie es ihrer merkwürdigen Eigenschaften halber wohl verdient hätte.

Zunächst möge für die zweifachausgearteten Konfigurationen der Figur 1 erwähnt werden, daß es für sie eine Polarspiegelung gibt, welche die Konfiguration in sich und auch die Ordnungskurve α in sich transformiert. Das Zentrum der Spiegelung ist A und seine Polare GB_1C_1 ist die Spiegelungsachse. Die Punkte A, BC gehen in die Punkte OFE über, während die übrigen vier Punkte in sich übergehen.

Für die dreifachausgearteten Desarguesschen Konfigurationen gibt es drei Polarspiegelungen, welche die Konfiguration und α je in sich überführen — wir bezeichnen sie symbolisch mit A, C und E: sie sind bei der involutorischen Perspektive die Zentren und ihre Polaren, nämlich GB_1C_1, A_1B_1F und BB_1O sind die zugehörigen Achsen. Man hat nun

$$(11) \qquad A = \frac{BFGB_1}{FBGB_1}, \quad C = \frac{BFGB_1}{GFBB_1}, \quad E = \frac{BFGB_1}{BGFB_1}.$$

Diese drei Polarspiegelungen vertauschen die Ecken des Dreiecks EFG und führen B_1 in sich über. Die drei Zentren ACE liegen nun so, daß zwei Zentren von dem dritten Zentrum und dessen Polaren harmonisch getrennt werden. So sind z. B. in der Figur 2 $ACEE'$ vier harmonische Punkte. Durch Zusammensetzen der drei Polarspiegelungen (11) erhält man noch folgende Kollineationen, die die Konfiguration und die Ordnungskurve α in sich überführen:

$$(12) \qquad AC = CE = EA = \frac{BFGB_1}{FGBB_1},$$

$$(13) \qquad CA = AE = EC = \frac{BFGB_1}{GBFB_1}.$$

Dabei bedeutet z. B. AC, daß zuerst die Spiegelung A und dann die Spiegelung C vorgenommen wird.

Die fünf Kollineationen (11), (12) und (13) zusammen mit der identischen bilden nun die Gruppe aller Kollineationen, welche die Konfiguration und die Ordnungskurve in sich überführen. Diese Kollineationen bringen für die Ecken B, F, G alle Permutationen hervor und führen B_1 in sich über. Bedenkt man, daß A, C, E involutorisch sind, also $A^2 = C^2 = E^2 = 1$ ist, so erhält man aus (12) und (13) die Beziehungen

$$(14) \qquad A = CEC = ECE = EAC = CAE,$$

$$(15) \qquad C = AEA = EAE = ACE = ECA,$$

$$(16) \qquad E = ACA = CAC = CEA = AEC.$$

Man hat hier einen merkwürdigen Speziallfall für den allgemeinen Satz, nach dem drei Polarspiegelungen in bezug auf eine Kurve zweiter

Ordnung, deren Zentren auf einer Geraden liegen, durch eine einzige Polarspiegelung ersetzt werden können, deren Zentrum auch auf jener Geraden liegt[2]). Hier aber liegt darin eine besondere Merkwürdigkeit, daß, wenn man von den drei Spiegelungen ACE irgend drei nacheinander ausübt, immer wieder eine dieser drei Spiegelungen resultiert — dies ist doch der Inhalt der Gleichungen (14)—(16).

Es entsteht nun die Frage, ob auf jeder Geraden in der Ebene der Kurve α drei solche Punkte ACE existieren, ob es auf jeder Geraden viele solcher Tripel von Punkten wie ACE gibt und endlich wie man bei gegebener Geraden die Tripel konstruiert.

Wir zeigen zuerst, daß die gegebene Gerade $b_1 = ACE$ die Kurve nicht reell schneiden darf, oder anders ausgedrückt, daß ihr Pol, nämlich B_1, ein innerer Punkt der Kurve sein muß, von dem aus also keine reellen Tangenten an die Kurve gehen. Um dies einzusehen, bedenke man das obige Ergebnis, nach dem die Polare von A, nämlich GB_1, die Gerade b_1 in einem Punkte A' derart schneidet, daß die vier Punkte $AA'CE$ die harmonische Lage haben. Die beiden konjugierten Punkte AA' werden also durch CE getrennt. Wir können die Bezeichnung uns so gewählt denken, daß C zwischen A und E liegt. Die Polare BB_1 von E schneidet b_1 in dem zu E konjugierten Punkt E', der zwischen A und C liegt, weil wieder die vier Punkte $EE'AC$ vier harmonische sind. Die Involution konjugierter Punkte AA', EE' auf b_1 ist also eine elliptische, oder b_1 schneidet die Ordnungskurve α nicht reell, oder auch B_1 ist ein innerer Punkt von α.

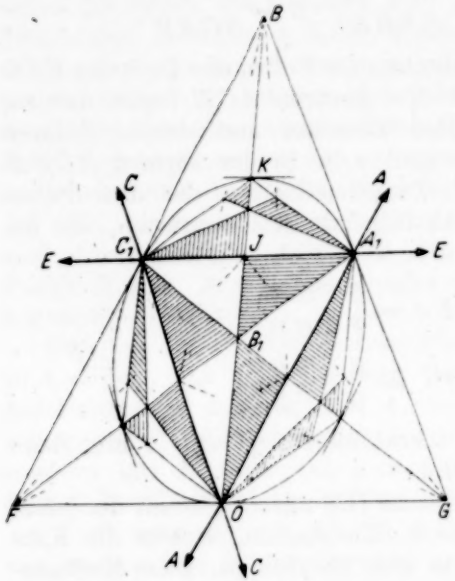


Fig. 3.

Nun üben wir auf die Figur 2 eine Kollineation aus, durch die die Gerade b_1 als Bild die Ferngerade der Bildebene hat; der Bildpunkt von B_1 wird dann als Pol von b_1 der Mittelpunkt der Bildkurve der Ordnungskurve, und darum wird aus der Ordnungskurve α durch die Kollineation eine Ellipse, weil nur für eine Ellipse der Mittelpunkt innerer Punkt der Kurve ist. Man erhält so die Figur 3.

[2]) Hierzu vergleiche man meine Arbeit „Die automorphen Kollineationen einer Kurve zweiter Ordnung", Jahresber. der Deutsch. Math. Vergg. 1942, S. 13 ff.

Die Vierecke FOA_1C_1, OGA_1C_1 und OA_1BC_1 sind jetzt Parallelogramme, und O, A_1, C_1 sind die Mitten der Seiten des Dreiecks BFG, B_1 ist sein Schwerpunkt, seine Harmonikale in bezug auf BFG oder, was dasselbe ist, die Ellipsenpolare von B_1 ist die Ferngerade der Ellipsenebene. Schneidet die Ellipse die Schwerlinie BO zum zweiten Male in K, so ist $OB_1 = B_1K = KB$, und die Tangente in K ist parallel zu OG, da OB_1B die Polare von E, d. h. der zur Richtung E konjugierte Durchmesser ist. Die Ellipse geht also durch die Mitten der oberen Abschnitte der drei Schwerlinien und besitzt in ihnen Tangenten, die mit den bezüglichen Seiten des Dreiecks BFG parallel gehen.

Nun bemerken wir, daß man durch eine Affinität aus der Ellipse einen Kreis machen kann, so daß die Fig. 4 entsteht. Natürlich hätte man durch eine einzige Kollineation aus der Figur 2 die Figur 4 herstellen können.

Da nun z. B. $BA_1 = BC_1 = C_1F = A_1G$ ist, so ist jetzt das Dreieck BFG ein gleichseitiges, dem Kreis umbeschriebenes Dreieck. Die Gruppe der automorphen Kollineationen, die also die Konfiguration in sich überführen, sind jetzt die Euklidischen Spiegelungen an den Höhen des gleichseitigen Dreiecks und die drei Drehungen um den Punkt B_1 um die Winkel $2\pi:3$, $4\pi:3$, $6\pi:3$, was die identische Kollineation bedeutet.

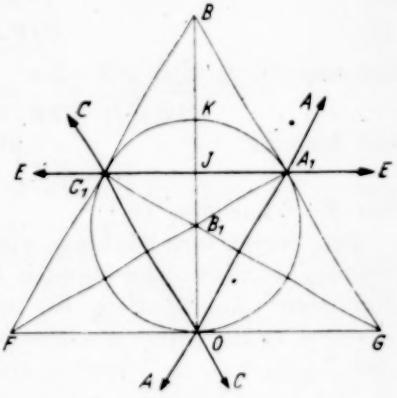


Fig. 4.

Geht man nun von dem Kreis und seinem Mittelpunkt B_1 als gegebene Stücke aus, so sieht man, daß z. B. der Punkt O auf dem Kreis noch vollkommen willkürlich wählbar ist. Jetzt kann man die Konfiguration auf die folgende Weise aufbauen: OB_1 schneidet den Kreis zum zweiten Male in K; nun ermittle man auf OK den Punkt B derart, daß das Doppelverhältnis

$$(OKBB_1) = \frac{OB}{BK} : \frac{OB_1}{B_1K} = -3$$

wird. Die Tangenten von dem Punkt B aus an den Kreis und die Kreistangente in O bestimmen dann vollends leicht die ganze Konfiguration.

Nun denke man sich die Figur durch eine Kollineation in die Figur 2 zurücktransformiert, so kann für die Ordnungskurve α, wenn noch in ihrem Innern der Punkt B_1 gegeben ist, die dazugehörige Konfiguration auf folgende Weise konstruiert werden. O ist auf α noch willkürlich wählbar, dann gibt OB_1 mit α zum zweiten Male geschnitten

den Punkt K. Jetzt ermittle man auf OK den Punkt B derart, daß

$$(OKBB_1) = -3 \tag{17}$$

wird. Die von B ausgehenden Tangenten und die Tangente in O bestimmen dann das Dreieck BFG und damit die ganze Konfiguration, insbesondere die Punkte ACE.

Das Ergebnis der Untersuchung ist also, daß es auf der willkürlich angenommenen Geraden b_1, die nur α nicht reell schneiden darf, unendlichviele Tripel von Punkten ACE gibt: einer von ihnen ist willkürlich wählbar — oben war es der Punkt E, weil eben O willkürlich gewählt wurde. Übrigens findet man direkt aus der Figur 2, daß (17) gilt. Da B der Pol zu A_1C_1 ist, so hat man

$$(OKBJ) = -1. \tag{18}$$

Weiter ergibt sich aus dem vollständigen Viereck $A_1B_1C_1B$

$$(OJBB_1) = -1. \tag{19}$$

Aus (18) und (19) folgt

$$(OBKJ) = 2, \tag{20}$$

$$(OBJB_1) = 2 \tag{21}$$

und nun durch Multiplikation

$$(OBKJ) \cdot (OBJB_1) = (OBKB_1) = 4$$

und hieraus

$$(OKBB_2) = 1 - 4 = -3,$$

also die Gleichung (17).

Die Tripel von Punkten wie ACE auf einer die Kurve zweiter Ordnung α nicht schneidenden Geraden b_1 sind nun invariant gegenüber jeder Kollineation, die man auf die Ebene von α ausübt; denn an jedem Tripel hängt ja sozusagen eine dreifachausgeartete Desarguessche Konfiguration. Während also das Doppelverhältnis von vier Punkten auf einer Geraden invariant ist, so sind es auch die Tripel von Punkten auf einer einen Kegelschnitt nicht reell schneidenden Geraden; sie gehen bei einer Kollineation in die Tripel der verwandelten Geraden in bezug auf den verwandelten Kegelschnitt über. Dies scheint mir ein recht merkwürdiges Ergebnis zu sein.

Die Lage der Tripel läßt sich am besten beschreiben, wenn man sich der Sprache der hyperbolischen Geometrie bedient.

Projiziert man die drei Punkte ACE der Figur 4 durch drei Strahlen aus B_1, so erhält man bei passender Wahl der positiven Richtung für jeden Strahl das Ergebnis, daß jene drei Strahlen gleiche Winkel $= 2\pi:3$ miteinander bilden — im Euklidischen Sinne genommen. Nimmt man nun den Kreis als Maßkegelschnitt für eine hyperbolische Maßbestimmung, so stimmen für den Mittelpunkt B_1 des Kreises die hyperbolische und Euklidische Winkelbestimmung nach dem Satze von Laguerre überein. Geht man durch die Kollineation

von der Figur 4 zurück zur Figur 2 und nimmt man den Kegelschnitt α der Figur 2 als Maßkegelschnitt einer hyperbolischen Maßbestimmung, so kann man sagen, daß jedes Tripel von (idealen) Punkten auf b_1 aus dem Punkt B_1 durch drei Strahlen projiziert wird, die gleiche hyperbolische Winkel $= 2\pi : 3$ miteinander bilden. Da weiter in der Figur 4 die Richtung des Strahles $B_1 O$ willkürlich war, oder anders ausgedrückt, da die Tripel $A C E$ auf der Ferngeraden der Euklidischen Ebene durch Euklidische Drehungen um B_1 ineinander übergehen, so kann man für die Figur 2 sagen: Die Tripel von Punkten $A C E$ gehen durch hyperbolische Drehungen mit dem Mittelpunkt B_1 ineinander über. Man kann sich auch so ausdrücken: Die Desarguesschen Konfigurationen mit demselben Punkt B_1 gehen durch hyperbolische Drehungen um den Punkt B_1 ineinander über.

Da die Polare von A der Figur 2 die Gerade $G C_1$ ist, so ist $B_1 C_1$ eine Höhe des (uneigentlichen, asymptotischen) Dreiecks $O A_1 C_1$, d. h. B_1 ist für das asymptotische Dreieck der Höhenschnittpunkt, und die drei Höhen bilden miteinander denselben hyperbolischen Winkel $= 2\pi : 3$. Da weiter nach der Figur 4

$$(OKJB_1) = 3 \tag{22}$$

ist, so ist die hyperbolische Länge von JB_1 gegeben durch

$$JB_1 = \frac{r}{2} \lg 3. \tag{23}$$

Der Punkt B_1 der Figur 2 ist also für das Dreieck $O A_1 C_1$ der Mittelpunkt des hyperbolischen Innkreises.

Da die drei Punkte $O A_1 C_1$ drei beliebige Punkte des Maßkegelschnitts sind, so gilt das Gesagte für jedes asymptotische Dreieck. Aus (23) ergibt sich noch, daß für alle asymptotischen Dreiecke der Innkreisradius konstant ist. Die muß ja auch sein, da jedes asymptotische Dreieck sich durch eine hyperbolische Bewegung in ein beliebiges anderes überführen läßt.

Die Ebene von Poincaré.

Besonders bemerkenswert werden die Verhältnisse, wenn die hyperbolische Geometrie in der Ebene von Poincare gedeutet wird, in der die hyperbolischen Winkel mit den Euklidischen übereinstimmen. Aus der Figur 4 entspringt dann die Figur 5. Das Dreieck $O A_1 C_1$ der Figur 4 ist nun zu dem Kreisbogendreieck $O A_1 C_1$ der Figur 5 geworden. Die drei Höhen dieses Dreiecks schneiden sich in B_1 unter dem Winkel $2\pi : 3$, und der Innkreis des Dreiecks ist ein Euklidischer Kreis, der in B_1 seinen hyperbolischen Mittelpunkt hat und die Seiten des Dreiecks in den Fußpunkten J, L, M der Höhen berührt. Hier wird man nun sofort an die Modulfigur erinnert: In der Tat ist z. B. das Dreieck $M B_1 O$ ein Dreieck mit den Winkeln $\pi : 2$, $\pi : 3$, 0. Derartige

Dreiecke spielen ja in der Theorie der elliptischen Modulfunktionen eine hervorragende Rolle[3]). Spiegelt man das Dreieck OJA_1 an OJ als Kreis der Inversion, so geht es, wie man unmittelbar sieht, in das Dreieck OJC_1, und darum geht durch dieselbe Spiegelung das Dreieck OLB_1 in das Dreieck OMB_1 über. Durch Spiegelung an den anderen Höhen des asymptotischen Dreiecks findet man aufs Neue, daß die drei Höhen gleiche Winkel miteinander machen, und daß die unteren Höhenabschnitte einander gleich sind. Spiegelt man die Figur auch an den Seiten des asymptotischen Dreiecks und setzt diesen Spiegelungsprozeß fort, so erhält man eben die Modulfigur. Auch die Länge von $b = JB_1$ findet man leicht wieder. Bezeichnet man den Winkel JB_1C_1 mit γ, wo also $\gamma = \pi : 3$ ist, so ist γ in dem hyperbolischen Dreieck JB_1C_1 der Parallelitätswinkel, und es besteht darum die bekannte Beziehung

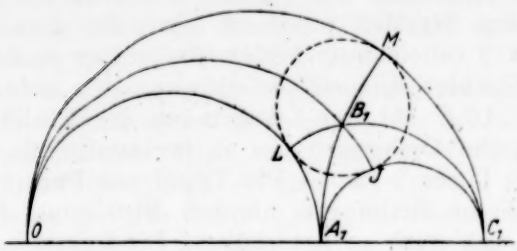


Fig. 5.

$$\operatorname{ctg}\gamma = \frac{e^{\frac{b}{r}} - e^{-\frac{b}{r}}}{2},$$

aus der sich wie in (23) der Wert

$$b = JB_1 = \frac{r}{2}\lg 3$$

ergibt.

Man kann nun auch die Modulfigur für die Figur 3 herstellen, wenn man bedenkt, daß Spiegelung durch Inversion in der Ebene von Poincaré in der Ebene des Maßkegelschnitts der Figur 3 das ist, was ich Polarspiegelung nenne. Spiegelt man z. B. polar an der Seite A_1C_1 des asymptotischen Dreiecks OA_1C_1, so erhält man das Dreieck KA_1C_1, wobei man für dieses Dreieck die Höhenfußpunkte aus denen des Dreiecks OA_1C_1 dadurch erhielt, daß man sie mit B verband und mit KC_1 bzw. KA_1 schnitt. So erhält man die Figur 62, Seite 240 bei Klein-Fricke, auf die Klein in der Fußnote zu Seite 242 so großen Wert legt. Es ist merkwürdig, wie so verschiedene Ausgangspunkte wie der von Klein und der von mir zu derselben Figur führen — ja bei Klein findet sich sogar das Dreieck BFG in unserer Figur 3. Freilich ist die von Klein befolgte Methode zur Herstellung der Figur reichlich umständlich. Was dort in ein paar Seiten abgewandelt wird, kann, wie soeben gezeigt wurde, in wenigen Zeilen erledigt werden.

[3]) Man vergleiche z. B. „Klein-Fricke, Vorlesungen über die Theorie der elliptischen Modulfunktionen", 1890. Bd. I. S. 113.

(Eingegangen am 5. August 1949.)

Über halbgeordnete Gruppen.

Von

Paul Lorenzen in Bonn.

I. TEIL.

Die vorliegenden Untersuchungen über halbgeordnete Gruppen sind aus einer Analyse gewisser Ergebnisse und Beweismethoden der Arithmetik der kommutativen Integritätsbereiche[1]) entstanden. Wie sich gezeigt hat, sind viele Sätze dieser Arithmetik ohne wesentliche Änderungen in den Beweismethoden auch für kommutative Halbgruppen gültig[2]).

Im Folgenden soll nun nicht nur nachgewiesen werden, daß für die Gültigkeit dieser arithmetischen Sätze auch die Kommutativität der Multiplikation entbehrlich ist — unser Interesse ist vielmehr hauptsächlich darauf gerichtet, den in Frage stehenden Komplex dadurch begrifflich einfacher und durchsichtiger zu machen, daß wir ihn von Anfang an von einem halbordnungstheoretischen Standpunkt aus entwickeln. Nur dadurch gelingt es uns nämlich, an den entscheidenden Stellen, an denen die kommutativen Methoden versagen, zum Ziel zu gelangen. Auf diese Weise erhält man dann, auch für den kommutativen Spezialfall z. T. eine sehr starke Vereinfachung der Beweise, z. T. auch neue Einsichten, wie ich in der folgenden Darstellung des Gedankenganges der Arbeit nachweisen will.

Die Ergebnisse der Arithmetik der kommutativen Integritätsbereiche, die wir als Spezialfälle allgemeiner Sätze über halbgeordnete Gruppen nachweisen wollen, schließen sich an die folgende Fragestellung an:

Wann und wie ist ein Integritätsbereich als Durchschnitt von Bewertungsringen darstellbar?

Wir müssen zunächst überlegen, wie diese arithmetische Fragestellung für beliebige Gruppen zu formulieren ist, so daß sie als ein Spezialfall in der allgemeinen Formulierung enthalten ist. Dazu stellen wir die folgende Betrachtung an.

Ein Integritätsbereich I definiert in der multiplikativen Gruppe K^* seines Quotientenkörpers K eine Teilbarkeitsrelation. Für jedes

[1]) Vgl. hierzu vor allem den Idealbericht (Erg. d. Math. Bd. 4, 1935) und die „Beiträge zur Arithmetik kommutativer Integritätsbereiche“ in der Math. Z. von W. Krull.

[2]) Vgl. P. Lorenzen, Math. Z. 45, 1939.

$a, b \in K^*$ gilt: a teilt b (bezügl. l) genau dann, wenn $a^{-1}b \in l$ gilt. Diese Teilbarkeitsrelation ist reflexiv und transitiv, d. h. es gilt — wenn wir $a \leqq b$ schreiben für a teilt b — für jedes $a, b, c \in K^*$

1) $\quad a \leqq a$

2) $\quad a \leqq b, \quad b \leqq c \Rightarrow a \leqq c.$

Jede reflexive und transitive Relation in einer beliebigen Menge nennen wir eine Halbordnung. Die Gruppe K^* wird also durch den Integritätsbereich l zu einer halbgeordneten Menge. Diese Halbordnung von K^* bestimmt umgekehrt wieder eindeutig den Integritätsbereich l.

Die Halbordnung von K^* ist ferner bezügl. der Multiplikation monoton, d. h. es gilt für jedes $a, b, x, y \in K^*$

3) $\quad a \leqq b, \; x \leqq y \Rightarrow ax \leqq by.$

Wir nennen jede Gruppe, in der eine Relation $\leqq$ definiert ist, die 1)—3) genügt, eine halbgeordnete Gruppe. K^* ist eine halbgeordnete Gruppe.

Jeder Bewertungsring B von K liefert durch seine Teilbarkeitsrelation nicht nur eine Halbordnung von K, sondern sogar eine Ordnung: für jedes $a, b \in K^*$ gilt nämlich stets a teilt b (bez. B) oder b teilt a (bez. B).

Umgekehrt bestimmt aber nicht jede Ordnung von K^* eine Bewertung von K, sondern nur diejenigen Ordnungen $\leqq$ von K^*, für die stets gilt:

4) $\quad c \leqq a, \; c \leqq b \Rightarrow c \leqq a + b.$

Wie man der Theorie der kommutativen Halbgruppen entnehmen kann, sind die Ordnungen, die einen Bewertungsring B bestimmen, der l umfaßt, dadurch gekennzeichnet, daß sie zugleich eine Ordnung der Ideale $\mathfrak{a}, \mathfrak{b}, \ldots$, von l ermöglichen, so daß stets gilt:

5) $\quad \mathfrak{c} \leqq \mathfrak{a}, \; \mathfrak{c} \leqq \mathfrak{b} \Rightarrow \mathfrak{c} \leqq \mathfrak{a} + \mathfrak{b}.$

Genauer gesagt: die Teilbarkeitsrelationen der Bewertungsoberringe von l sind die Ordnungen von K^*, die durch die Ordnungen des Idealsystems von l induziert werden, die 5) erfüllen. Die hier auftretenden Ordnungen des Idealsystems nennen wir die zulässigen Ordnungen.

Wir definieren in § 4 Idealsysteme für beliebige halbgeordnete Mengen und insbesondere für halbgeordnete Gruppen. Wir definieren auch für diesen allgemeinen Fall die zulässigen Ordnungen eines Idealsystems und dann weiter:

Eine Ordnung einer halbgeordneten Gruppe G, zu der ein Idealsystem H gegeben ist, heißt zulässig (bezgl. H), wenn sie durch eine zulässige Ordnung von H in G induziert wird. Die Teilbarkeitsrelationen der Bewertungsoberringe von l sind dann also genau die (bezgl. des Dedekindschen Idealsystems) zulässigen Ordnungen von K^*.

Mit Hilfe dieser Definitionen ist jetzt ohne weiteres zu sehen, daß die Fragestellung der Arithmetik der kommutativen Integritätsbereiche, von der wir ausgingen, in der folgenden Fragestellung für halbgeordnete Gruppen als Spezialfall enthalten ist.

Gegeben sei eine beliebige halbgeordnete Gruppe G und ein beliebiges Idealsystem H von G. Wann und wie ist die Halbordnung von G als Konjunktion zulässiger Ordnungen von G darstellbar? (Dabei nennen wir eine Halbordnung $\leqq$ die Konjunktion der Ordnungen $\leqq_\tau$, wenn für jedes a, b gilt:

$$a \leqq b \langle = \rangle \text{ (für jedes } \tau : a \leqq_\tau b).$$

Damit haben wir die Ausgangsfragestellung unserer Untersuchung erhalten. Abgesehen von § 2 ist sie der ausschließliche Gegenstand des I. Teils dieser Arbeit. (Die Ergebnisse des II. Teils werden in dessen Einleitung S. 519 zusammengefaßt.)

In § 1 werden die halbordnungstheoretischen Grundbegriffe definiert, von denen ich vor allem den Begriff des Halbverbandes hervorheben möchte. Wie sich später in § 4 herausstellt, ist es dieser Begriff, der eine denkbar einfache rein halbordnungstheoretische Definition des Idealsystems ermöglicht.

Überprüft man jetzt die kommutativen Beweismethoden, um zu sehen, welche Ergebnisse der Arithmetik auch noch für halbgeordnete Gruppen gültig bleiben, so wird man zwar viele Einzelheiten finden, die sich sofort auf den allgemeinen Fall übertragen — von den entscheidenden Sätzen bleibt jedoch nur ein einziger etwa genau so wie im Kommutativen beweisbar. Dieser Satz ist der folgende: Jeder Hauptidealring ist als Durchschnitt von Bewertungsringen darstellbar.

Wodurch ist ein Hauptidealring halbordnungstheoretisch gekennzeichnet? Die Teilbarkeitsrelation eines Hauptidealringes macht die multiplikative Gruppe seines Quotientenkörpers nicht nur zu einer halbgeordneten Gruppe, sondern auch zu einem Verband. Solche halbgeordneten Gruppen, die gleichzeitig einen Verband bilden, nennen wir Verbandsgruppen. Wir stehen dann vor der folgenden Frage:

Wann ist die Halbordnung einer Verbandsgruppe als Konjunktion zulässiger Ordnungen darstellbar?

(Ein Idealsystem braucht hier nicht gegeben zu sein, da eine Verbandsgruppe ihr eigenes Idealsystem ist.)

Ehe in § 3 diese Frage beantwortet wird, entwickeln wir in § 2 die einfacheren Eigenschaften der Verbandsgruppen. Es wird zunächst die verbandstheoretische Distributivität bewiesen — ein Ergebnis, das im kommutativen Fall schon auf Dedekind zurückgeht. Weiter wird ein Verfeinerungssatz bewiesen, der einfacher ist, als der nichtkommutative Verfeinerungssatz von Hencke. Im Kommutativen entsteht aus unserem Verfeinerungssatz der Artin-Schreiersche Satz, über den er nur in der bewiesenen Eindeutigkeit der Verfeinerung hinausgeht.

Das Ziel von § 3 ist der Satz:

Die Halbordnung einer Verbandsgruppe G ist genau dann als Konjunktion zulässiger Ordnungen von G darstellbar, wenn G regulär ist. (Die einfache Bedingung der „Regularität", die hier auftritt, ist im Kommutativen stets erfüllt.)

Der Beweis des Satzes, der im Kommutativen mit Hilfe der t-Primideale geführt wird, benutzt an deren Stelle prime vollständige invariante Unterhalbgruppen — das ist aber kein wesentlicher Unterschied. So wie im Kommutativen die zulässigen Ordnungen eindeutig den t-Primidealen zugeordnet sind, sind sie hier den primen vollständigen invarianten Unterhalbgruppen zugeordnet.

Das Ergebnis von § 3 stellt schon eine wichtige Antwort für unsere Ausgangsfragestellung dar, denn aus ihm ergibt sich sofort, daß die Halbordnung einer halbgeordneten Gruppe G genau dann als Konjunktion von Ordnungen von G darstellbar ist, wenn sich G in eine reguläre Verbandsgruppe einbetten läßt.

Zur Ausnutzung dieser Konsequenz von § 3 untersuchen wir in § 4 die weitere Frage: Wie läßt sich eine halbgeordnete Gruppe in eine Verbandsgruppe einbetten — vorausgesetzt, daß eine solche Einbettung möglich ist?

Die kommutativen Methoden reichen hier zu einer Antwort nicht mehr aus. In der Arithmetik geschieht diese Einbettung nämlich mit Hilfe eines arithmetisch brauchbaren Idealsystems und des dadurch bestimmten Kroneckerschen Funktionalringes. An die Stelle des Funktionalringes tritt in der Theorie der kommutativen Halbgruppen eine formal gebildete Quotientengruppe aus Idealbrüchen. Auch diese Methode jedoch kann im Nichtkommutativen ersichtlich nicht mehr benutzt werden.

Wir erhalten die Antwort auf unsere Frage durch eine genaue halbordnungstheoretische Analyse des Idealbegriffs. Im Kommutativen werden die Idealsysteme stets als Systeme von gewissen Untermengen eingeführt. Beseitigt man aber diese mengentheoretische Einkleidung, so läßt sich der Idealbegriff ganz einfach definieren: ein Idealsystem einer halbgeordneten Menge ist nichts anderes als eine Einbettung in einen Halbverband. (Ich bemerke ausdrücklich, daß man hier statt „Halbverband" nicht „Verband" setzen darf.)

Wir zeigen zunächst, daß unser Begriff des Idealsystems für kommutative Halbgruppen mit dem dort üblichen Begriff gleichwertig ist. Der halbordnungstheoretische Idealbegriff führt uns dann sofort weiter zu folgendem Ergebnis:

Läßt sich eine halbgeordnete Gruppe G in eine Verbandsgruppe einbetten, so enthält diese Verbandsgruppe 1) ein Idealsystem H von G, das eine Halbgruppe bildet, und 2) ein Idealsystem V von H, das selbst schon eine Verbandsgruppe bildet.

Eine Einbettung einer halbgeordneten Gruppe G in eine Verbandsgruppe läßt sich also — wenn sie überhaupt möglich ist — stets in zwei Schritten vollziehen: es ist 1) ein Idealsystem H von G zu bilden und 2) ein Idealsystem V von H.

Über diese Antwort auf unsere Frage hinausgehend, wird dann bewiesen, daß das Idealsystem V von H in jedem Falle von vornherein bestimmt ist: es ist die Verallgemeinerung des ARTINschen v-Idealsystems aufs Nichtkommutative. Dieses Ergebnis ist auch für die Arithmetik neu:

Ist H ein arithmetisch brauchbares Idealsystem eines Integritätsbereiches I, so bilden die v-Ideale von H eine Verbandsgruppe. (Auf Grund der kommutativen Ergebnisse ist diese Verbandsgruppe isomorph zur Quotientengruppe von H. Mir scheint jedoch, auch im kommutativen Fall die rein halbordnungstheoretische Konstruktion den Vorzug zu verdienen.)

In § 5 wird zunächst der Begriff der zulässigen Ordnung einer halbgeordneten Gruppe G, zu der ein Idealsystem H gegeben ist, definiert. Wir haben diesen Begriff nur hier vorweggenommen, um den Gedankengang klarer hervortreten zu lassen. Im Text unterscheiden wir verschiedene Idealsysteme durch einen kleinen lateinischen Kennbuchstaben, wir sprechen z. B. von s-Idealen und v-Idealen. Als Variable für diesen Kennbuchstaben benutzen wir r. Um die Darstellung nicht zu belasten, unterdrücken wir hier diesen Kennbuchstaben.

Die Ergebnisse von § 3 und 4 liefern den Satz:

Ist die Halbordnung von G als Konjunktion zulässiger Ordnungen von G darstellbar, so gibt es ein Idealsystem H' von G, dessen v-Ideale eine reguläre Verbandsgruppe bilden. Die zulässigen Ordnungen von G sind eineindeutig den primen vollständigen invarianten Unterhalbgruppen zugeordnet. Diese Zuordnung ist ein Isomorphismus bezgl. der Bildung von Konjunktion bzw. Durchschnitt.

Die hier auftretenden Idealsysteme H', die in der Arithmetik „arithmetisch brauchbar" heißen, nennen wir auch im allgemeinen Fall „brauchbar".

Der arithmetische Satz, daß der Übergang von H zu H' eine Strichoperation[3]) darstellt, erhält im allgemeinen Falle seinen einfacheren Ausdruck durch:

Jedes brauchbare Idealsystem H' ist homomorph zu H.

Wie in der Arithmetik ergibt sich dann weiter, daß unter den brauchbaren Idealsystemen eines ausgezeichnet ist, zu dem alle anderen homomorph sind[4]). Dieses ausgezeichnete Idealsystem ist in der Arith-

[3]) Vgl. [1]).

[4]) Diese Definition ist eine begriffliche Fassung der im Kommutativen üblichen Definition.

metik das Krullsche b-Idealsystem, das bekanntlich mit dem Prüferschen a-Idealsystem identisch ist.

Die Kenntnis des ausgezeichneten brauchbaren Idealsystems vorausgesetzt, ergeben sich also alle brauchbaren Idealsysteme als homomorphe Bilder — nach der Untersuchung von § 3 damit aber als eineindeutig zugeordnet gewissen regulären vollständigen invarianten Unterhalbgruppen, die in Satz 22 angegeben werden. Dieses Ergebnis ist für die Arithmetik nicht neu, nur der Beweis ist vereinfacht durch Benutzung des Homomorphiebegriffes.

Zur Beantwortung unserer Ausgangsfragestellung für halbgeordnete Gruppen bleibt uns jetzt vor allem folgende Frage:

Wie läßt sich das ausgezeichnete brauchbare Idealsystem einer halbgeordneten Gruppe G konstruieren — vorausgesetzt, daß es überhaupt existiert.

Wir setzen also voraus, daß die Halbordnung von G als Konjunktion zulässiger Ordnungen von G darstellbar ist. Bei der Konstruktion des ausgezeichneten brauchbaren Idealsystems wollen wir aber die Kenntnis dieser Ordnungen nicht voraussetzen, weil wir gerade mit Hilfe des Idealsystems die zulässigen Ordnungen bestimmen wollen.

Diese Konstruktion wird in der Arithmetik geliefert durch den Prüferschen Begriff der Ganzabhängigkeit von einem Ideal $\mathfrak{a}$ des gegebenen Integritätsbereiches I.

Ein Element a des Quotientenkörpers K heißt ganzabhängig von $\mathfrak{a}$, wenn a einer Gleichung

$$1) \qquad a^n + a_1 a^{n-1} + \cdots + a_n = 0$$

mit $a_\nu \in \mathfrak{a}^\nu$ genügt.

In der Theorie der kommutativen Halbgruppen tritt an die Stelle von 1) die Bedingung, daß es ein endliches Ideal $\mathfrak{c}$ geben soll, so daß

$$2) \qquad a\mathfrak{c} \leq \mathfrak{a}\mathfrak{c}$$

gilt. Auch diese Bedingung 2) läßt sich jedoch nicht auf den nichtkommutativen Fall ausdehnen.

Um den Grundgedanken unserer neuen Konstruktion, die wir statt 1) oder 2) verwenden, deutlich zu machen, führe ich sie hier für den arithmetischen Spezialfall durch. § 6 des Textes bringt die Durchführung für beliebige halbgeordnete Gruppen.

I sei ein beliebiger Integritätsbereich, $\mathfrak{a}$ ein (endliches oder unendliches) Ideal von I, a ein Element des Quotientenkörpers K. Wir fragen uns, wann für jeden Bewertungsoberring B von I gilt: $a \in \mathfrak{a}B$. Für beliebiges $z \in K^*$ und jeden Bewertungsoberring B von I gilt stets

$$z \in B \quad \text{oder} \quad z^{-1} \in B.$$

Gilt also $a \in \mathfrak{a}I[z]$ und $a \in \mathfrak{a}I[z^{-1}]$, so gilt stets $a \in \mathfrak{a}B$. Ebenso folgt:

Gibt es Elemente $z_1, \ldots, z_n \in K^*$, für die

$$3) \qquad a \in \mathfrak{a}\, I[z_1^{+1}, \ldots, z_n^{+1}]$$

für jede der 2^n Vorzeichenkombinationen gilt, so gilt für jeden Bewertungsoberring B von I:

$$a \in \mathfrak{a} B.$$

Diese Bedingung 3) ist auch notwendig. Ist nämlich 3) für kein $z_1, \ldots, z_n$ erfüllt, so zeigt ein einfacher Wohlordnungsschluß, daß es einen maximalen Oberring $\bar{I}$ von I gibt, mit der Eigenschaft, daß für jedes $z_1, \ldots, z_n \in K^*$

$$a \bar{\in} \mathfrak{a}\, \bar{I}[z_1^{+1}, \ldots, z_n^{+1}]$$

für mindestens eine Vorzeichenkombination gilt [4a]). Insbesondere gilt also $a \bar{\in} \mathfrak{a} \bar{I}$. Wäre dieses $\bar{I}$ kein Bewertungsring, so gäbe es ein $z \in K^*$ mit $z \bar{\in} \bar{I}$ und $z^{-1} \bar{\in} \bar{I}$, also gäbe es Elemente $x_1, \ldots, x_m$ und $y_1, \ldots, y_n$ mit

$$a \in \mathfrak{a}\, \bar{I}[z][x_1^{+1}, \ldots, x_m^{+1}]$$

$$a \in \mathfrak{a}\, \bar{I}[z^{-1}][y_1^{+1}, \ldots, y_n^{+1}]$$

für jede Vorzeichenkombination. Hieraus würde aber

$$a \in \mathfrak{a}\, \bar{I}[z^{+1}, x_1^{+1}, \ldots, x_m^{+1}, y_1^{+1}, \ldots, y_n^{+1}]$$

folgen, d. h. ein Widerspruch. Also ist $\bar{I}$ Bewertungsring.

Damit ist das folgende neue Ergebnis gewonnen:

Es gilt genau dann $a \in \mathfrak{a} B$ für jeden Bewertungsoberring B von I, wenn es Elemente $z_1, \ldots, z_n \in K^*$ gibt, für die

$$a \in \mathfrak{a}\, I[z_1^{+1}, \ldots, z_n^{+1}]$$

für jede Vorzeichenkombination gilt.

Der Beweis ist so einfach, daß er sich ohne weiteres in beliebigen halbgeordneten Gruppen durchführen läßt und hier sowohl eine Konstruktion des ausgezeichneten brauchbaren Idealsystems liefert (vorausgesetzt, daß es existiert), als auch die folgende Frage beantwortet:

Wann ist die Halbordnung einer halbgeordneten Gruppe G als Konjunktion zulässiger Ordnungen von G darstellbar?

Zum Schluß zeigen wir, daß sich diese Ergebnisse mit den bekannten Ergebnissen im Kommutativen in Übereinstimmung befinden. Dadurch erhält man für die Arithmetik einen neuen, sehr vereinfachten Beweis für die Identität des a- und b-Idealsystems. Ferner erhält man für den grundlegenden Begriff der Ganzabhängigkeit eines Elementes a von einem Integritätsbereich I einen neuen gleichwertigen Ausdruck:

a ist genau dann ganz abhängig von I, wenn es Elemente $z_1, \ldots, z_n$ des Quotientenkörpers gibt, die $a \in I[z_1^{+1}, \ldots, z_n^{+1}]$ für jede Vorzeichenkombination erfüllen.

[4a]) $\bar{\in}$ steht für : nicht $\in$.

§ 1.

Halbordnungen.

Wir betrachten zunächst Halbordnungen in beliebigen Mengen. Ist M eine Menge, so nennen wir jede reflexive und transitive Relation R in M eine Halbordnung. Es soll also für jedes $a \in M$ gelten

$$a\,R\,a.$$

Ferner soll für jedes $a, b, c \in M$ gelten

$$a\,R\,b, b\,R\,c \Rightarrow a\,R\,c^{5}).$$

Wir schreiben $a \leqq b$ für $a\,R\,b$.

Für jede Halbordnung benutzen wir außerdem zur Abkürzung:

$a \geqq b$, wenn $b \leqq a$ gilt,
$a \equiv b$, wenn $a \leqq b$ und $a \geqq b$ gilt,
$a < b$, wenn $a \leqq b$, aber nicht $a \geqq b$ gilt,
$a > b$, wenn $b < a$ gilt.

Wir forden für Halbordnungen nicht, daß

$$a \equiv b \Rightarrow a = b$$

gelten soll, wie es für die teilweisen Ordnungen meist geschieht. Das ist jedoch kein wesentlicher Unterschied.

Eine Halbordnung heißt Ordnung, wenn für jedes $a, b \in M$ stets $a \leqq b$ oder $b \leqq a$ gilt.

Eine Menge, in der eine Halbordnung bzw. eine Ordnung definiert ist, heißt eine halbgeordnete bzw. eine geordnete Menge (bzgl. $\leqq$). Wir brauchen außerdem noch den Begriff des Halbverbandes und des Verbandes.

Eine halbgeordnete Menge M (bzgl. $\leqq$) heißt Halbverband (bzgl. $\leqq$), wenn für jedes $a, b \in M$ ein $c \in M$ existiert, das die Bedingungen

$$c \leqq a$$
$$c \leqq b$$

für jedes $x \in M$: $\quad x \leqq a, x \leqq b \Rightarrow x \leqq c$

erfüllt. c wird als größter gemeinsamer Teiler (g. g. T.) von a und b bezeichnet:

$$c \equiv a \wedge b^{6}).$$

---

[5]) ..., ... $\Rightarrow$ ... bedeutet, daß die Konjunktion der Aussagen links von $\Rightarrow$ die Aussage rechts von $\Rightarrow$ impliziert.

... $\langle\Rightarrow\rangle$ ... bedeutet die Äquivalenz zweier Aussagen.

[6]) Der g. g. T. ist zwar nicht eindeutig bestimmt, aber für zwei Elemente c_1 und c_2, die die obigen Bedingungen erfüllen, gilt stets $c_1 \equiv c_2$.

Ein Halbverband M (bzgl. $\leqq$) heißt Verband (bzgl. $\leqq$), wenn M auch ein Halbverband bzgl. $\geqq$ ist. Dann existiert also für jedes $a, b \in M$ stets ein kleinstes gemeinschaftliches Vielfaches (k. g. V) $c \equiv a \vee b$, das die Bedingungen

$$a \leqq c$$
$$b \leqq c$$

für jedes $x \in M$: $\quad a \leqq x,\ b \leqq x \Rightarrow c \leqq x$

erfüllt.

Der Gegenstand dieser Arbeit sind die Halbordnungen von Gruppen. Wir müssen dabei jedoch außer den Gruppen auch allgemeinere multiplikative Bereiche, Halbgruppen betrachten.

Unter einer Halbgruppe H verstehen wir eine Menge, in der eine Verknüpfung definiert ist, die jedem $a, b \in H$ genau ein Element, das Produkt ab von a und b, zuordnet, so daß folgende Bedingungen erfüllt sind:
für jedes $a, b, c \in H$:

$$a(bc) = (ab)c,$$

es existiert ein $e \in H$, so daß für jedes $a \in H$ gilt

$$ae = ea = a\ ^{7}).$$

Wir nennen nun eine Halbgruppe H halbgeordnet, wenn H eine halbgeordnete Menge ist und für jedes $a, b, x, y \in H$ gilt

$$a \leqq b \Rightarrow xay \leqq xby.$$

Diese Bedingung ist — unter Voraussetzung von Reflexivität und Transitivität — gleichwertig mit der „Monotonie"

$$a \leqq b,\ x \leqq y \Rightarrow ax \leqq by.$$

Die Halbordnungen einer Gruppe sind schon allein durch Reflexivität und Monotonie gekennzeichnet. In diesem Falle ist nämlich die Transitivität sofort ableitbar, da in einer Gruppe $a \leqq b$ genau dann gilt, wenn $ab^{-1} \leqq 1$ gilt[8]).

---

[7]) Für zwei Elemente e_1 und e_2, die die Bedingung erfüllen, gilt $e_1 = e_1 e_2 = e_2$. Also gibt es genau ein Element e, das der Bedingung genügt. Wir nennen es das Eins-Element 1.

[8]) Unter Voraussetzung von Reflexivität und Monotonie gilt

$$a \leqq b,\ b^{-1} \leqq b^{-1} \Rightarrow ab^{-1} \leqq 1$$
$$ab^{-1} \leqq 1, \quad b \leqq b \Rightarrow a \leqq b,$$

also

$$a \leqq b \Leftrightarrow ab^{-1} \leqq 1.$$

Wegen

$$ab^{-1} \leqq 1,\ bc^{-1} \leqq 1 \Rightarrow ac^{-1} = (ab^{-1})(bc^{-1}) \leqq 1$$

gilt daher

$$a \leqq b,\ b \leqq c \Rightarrow a \leqq c.$$

Wir bemerken noch, daß in einer halbgeordneten Gruppe genau dann $a \leqq b$ gilt, wenn $a^{-1} \geqq b^{-1}$ gilt.

Die halbgeordneten Gruppen verallgemeinern den Begriff des Körpers, in dem — etwa durch Auszeichnung eines Integritätsbereiches — eine Teilbarkeit definiert ist.

Wir gebrauchen daher auch für halbgeordnete Gruppen die Bezeichnungen der Teilbarkeitstheorie.

Gilt $a \leqq b$ in einer halbgeordneten Gruppe, so heißt a ein Teiler von b und b ein Vielfaches von a.

Die Elemente a mit $a \geqq 1$ heißen ganz, die Elemente a mit $a \equiv 1$ bzw. $a > 1$ heißen Einheiten bzw. Nichteinheiten. Die Einheiten bilden einen Normalteiler E von G. Man kann stets von der halbgeordneten Gruppe G zur Faktorgruppe G/E übergehen. Dieser Übergang ist jedoch unwesentlich.

Die ganzen Elemente einer halbgeordneten Gruppe G bilden eine invariante Unterhalbgruppe $\mathfrak{g}$ von G. Es gilt nämlich

$$1 \geqq 1$$

für jedes $a, b \in G$:

$$a \geqq 1,\ b \geqq 1 \Rightarrow ab \geqq 1,$$

für jedes $a, x \in G$:

$$a \geqq 1 \Rightarrow x a x^{-1} \geqq 1.$$

Dies bedeutet für die Menge $\mathfrak{g}$ der ganzen Elemente

$$1 \in \mathfrak{g},$$

für jedes $a, b \in G$:

$$a \in \mathfrak{g},\ b \in \mathfrak{g} \Rightarrow ab \in \mathfrak{g},$$

für jedes $a, x \in G$:

$$a \in \mathfrak{g} \Rightarrow x a x^{-1} \in \mathfrak{g}.$$

Wir nennen die invariante Unterhalbgruppe der ganzen Elemente kurz die (zu $\leqq$) zugehörige Halbgruppe.

Satz 1. Die Halbordnungen einer Gruppe G entsprechen eindeutig den invarianten Unterhalbgruppen von G.

Beweis. Wir haben noch zu zeigen, daß jede invariante Unterhalbgruppe $\mathfrak{g}$ einer Gruppe G eine Halbordnung von G definiert. Dazu setze man für jedes $a, b \in G$:

$$a \leqq b,$$

wenn $a^{-1} b \in \mathfrak{g}$ gilt. Nun gilt für jedes $a \in G$:

$$a^{-1} a \in \mathfrak{g}, \text{ also } a \leqq a.$$

Ferner gilt für jedes $a, b, x, y \in G$

$$a^{-1} b \in \mathfrak{g},\ x^{-1} y \in \mathfrak{g} \Rightarrow (ax)^{-1} by \in \mathfrak{g},$$

dann aus $a^{-1} b \in \mathfrak{g}$ folgt $x^{-1} a^{-1} b x \in \mathfrak{g}$ und dann aus $x^{-1} y \in \mathfrak{g}$ auch

$$(ax)^{-1} by = x^{-1} a^{-1} b x x^{-1} y \in \mathfrak{g}.$$

Also gilt

$$a \leqq b,\ x \leqq y \Rightarrow ax \leqq by.$$

Da jetzt $a \geqq 1$ genau dann gilt, wenn $a \in \mathfrak{g}$ gilt, ist die Zuordnung von Halbordnungen und invarianten Unterhalbgruppen eineindeutig.

Die invarianten Unterhalbgruppen, die den Ordnungen von G entsprechen, nennen wir linear. Die linearen invarianten Unterhalbgruppen einer Gruppe G sind ersichtlich dadurch gekennzeichnet, daß für jedes $a \in G$ stets gilt $a \in \mathfrak{g}$ oder $a^{-1} \in \mathfrak{g}$.

§ 2.

Verbandsgruppen.

Wir untersuchen als erste wichtige Klasse von halbgeordneten Gruppen diejenigen halbgeordneten Gruppen, die einen Verband bilden. Wir nennen diese halbgeordneten Gruppen Verbandsgruppen. Zu den Verbandsgruppen gehört z. B. die Gruppe der Ideale eines endlichen algebraischen Zahlkörpers.

Satz 2. Jede halbgeordnete Gruppe G, die einen Halbverband bildet, ist eine Verbandsgruppe.

Beweis. Wir haben zu zeigen, daß für jedes $a, b \in G$ ein k. g. V. existiert, wenn die Existenz eines g. g. T. $a \wedge b$ vorausgesetzt wird. Wir setzen

$$a \vee b \equiv (a^{-1} \wedge b^{-1})^{-1}.$$

Dann folgt aus $a^{-1} \wedge b^{-1} \leqq a^{-1}$ zunächst $a \vee b \geqq a$, ebenso folgt $a \vee b \geqq b$. Da für $x \in G$ gilt

$$x^{-1} \leqq a^{-1},\ x^{-1} \leqq b^{-1} \Rightarrow x^{-1} \leqq a^{-1} \wedge b^{-1},$$

gilt auch für jedes $x \in G$:

$$x \geqq a,\ x \geqq b \Rightarrow x \geqq a \vee b.$$

Satz 3. In jeder Verbandsgruppe G gelten die folgenden Distributivgesetze:

für jedes $a, b, x, y \in G$:

$$x(a \wedge b)y \equiv xay \wedge xby$$
$$x(a \vee b)y \equiv xay \vee xby.$$

Beweis. Aus $a \wedge b \leqq a$ und $a \wedge b \leqq b$ folgt $x(a \wedge b)y \leqq xay$ und $x(a \wedge b)y \leqq xby$, also $x(a \wedge b)y \leqq xay \wedge xby$. Ebenso folgt

$$x^{-1}(xay \wedge xby)y^{-1} \leqq x^{-1}xayy^{-1} \wedge x^{-1}xbyy^{-1} \equiv a \wedge b,$$

woraus sich $xay \wedge xby \leqq x(a \wedge b)y$ ergibt. Damit ist das erste Distributivgesetz erwiesen, das zweite ergibt sich ganz entsprechend.

Es gilt in jeder Verbandsgruppe auch das verbandstheoretische Distributivgesetz

$$a \vee (b \wedge c) \equiv (a \vee b) \wedge (a \vee c)^{9}).$$

Zum Beweis brauchen wir einen Satz über teilerfremde Elemente. Wir nennen zwei Elemente a und b einer Verbandsgruppe teilerfremd, wenn $a \wedge b \equiv 1$ gilt, und schreiben hierfür $a \| b$. Teilerfremde Elemente sind also stets ganz.

Satz 4. Zu jedem Element c einer Verbandsgruppe gibt es bis auf Einheiten eindeutig bestimmte teilerfremde Elemente a und b mit $c \equiv a b^{-1} \equiv b^{-1} a$.

Beweis. Aus $c \equiv a b^{-1}$ und $a \| b$ folgt $a \equiv c b$ und $c b \wedge b \equiv 1$, also $b \equiv (1 \wedge c)^{-1} \equiv 1 \vee c^{-1}$. Hieraus folgt dann $a \equiv c(1 \vee c^{-1}) \equiv 1 \vee c$. Für $a \equiv 1 \vee c$ und $b \equiv 1 \vee c^{-1}$ folgt aus diesen Gleichungen umgekehrt $a \equiv c b$, also $c \equiv a b^{-1}$ und $a \| b$. Ebenso folgt $c \equiv b^{-1} a$.

Wir nennen $1 \vee c$ den Zähler, $1 \vee c^{-1}$ den Nenner von c.

Satz 5. Der Zähler des g. g. T. zweier Elemente ist gleich dem g. g. T. der Zähler[10]).

Beweis. Aus Satz 4 folgt für jedes $x, y \in G$

$$(1 \vee (x \wedge y)) . (1 \wedge (x \wedge y)) \equiv x \wedge y.$$

Ferner gilt aber auch

$$((1 \vee x) \wedge (1 \vee y)) . ((1 \wedge x) \wedge (1 \wedge y))$$
$$\equiv (1 \vee x) . (1 \wedge x) \wedge (1 \vee y) . (1 \wedge y) \wedge \ldots \leqq x \wedge y.$$

Wegen

$$(1 \wedge x) \wedge (1 \wedge y) \equiv 1 \wedge (x \wedge y)$$

folgt durch Vergleich

$$(1 \vee x) \wedge (1 \vee y) \leqq 1 \vee (x \wedge y).$$

Da $(1 \vee x) \wedge (1 \vee y) \geqq 1 \vee (x \wedge y)$ trivial ist, gilt also

$$(1 \vee x) \wedge (1 \vee y) \equiv 1 \vee (x \wedge y).$$

Satz 5 liefert nun sofort die verbandstheoretische Distributivität jeder Verbandsgruppe. Wir haben für $a, b, c \in G$ nur $x = a^{-1} b$ und $y = a^{-1} c$ zu setzen. Dann gilt

$$(1 \vee a^{-1} b) \wedge (1 \vee a^{-1} c) \equiv 1 \vee (a^{-1} b \wedge a^{-1} c).$$

Hieraus folgt das gesuchte Distributivgesetz

$$(a \vee b) \wedge (a \vee c) \equiv a \vee (b \wedge c).$$

---

[9]) Für kommutative Verbandsgruppen schon von Dedekind bewiesen.

[10]) Entsprechend ist der Nenner des g. g. T. zweier Elemente gleich dem k. g. V. der Nenner. Satz 5 gilt natürlich auch für mehr als zwei Elemente.

Wie in jedem distributiven Verband gilt auch in Verbandsgruppen ein Verfeinerungssatz [11]):

Satz 6. Gilt für die Elemente $c_1 c_2, \ldots, c_m$ und $c^1, \ldots, c^n$ einer Verbandsgruppe $c_1 c_2, \ldots, c_m \equiv c^1 c^2, \ldots, c^n$, so gibt es bis auf Einheiten eindeutig bestimmte Elemente c_μ^ν $(\mu = 1, \ldots, m;\ \nu = 1, \ldots, n)$, so daß

1) $$c_\mu^1 \ldots c_\mu^n \equiv c_\mu$$

2) $$c_1^\nu \ldots c_m^\nu \equiv c^\nu$$

3) $$c_{\mu+1}^\nu \ldots c_m^\nu \parallel c_\mu^{\nu+1} \ldots c_\mu^n$$

erfüllt ist. Sind die Elemente c_μ und c^ν ganz, so sind auch die Elemente c_μ^ν ganz.

Beweis. Wir beweisen zunächst die Existenz der Elemente c_μ^ν durch Induktion. Für $m = n = 2$ folgt aus

$$c_1 c_2 \equiv c^1 c^2$$

für die Elemente

$$c_1^1 \equiv c_1 \wedge c^1,\quad c_1^2 \equiv (c_1^1)^{-1} c_1$$
$$c_2^1 \equiv (c_1^1)^{-1} c^1,\quad c_2^2 \equiv c_2 \wedge c^2$$

wegen

$$c_2^1 \equiv (c_1^{-1} \vee (c^1)^{-1}) c^1 \equiv c_1^{-1} c^1 \vee 1 \equiv c_2 (c^2)^{-} \vee 1 \equiv c_2 (c_2^2)^{-1}$$

und der entsprechenden Gleichung

$$c_1^2 \equiv c^2 (c_2^2)^{-1}$$

nicht nur

1) $$c^1 \equiv c_1^1 c_2^1 \quad c^2 \equiv c_1^2 c_2^2,$$

sondern auch

2) $$c_1 \equiv c_1^1 c_1^2 \quad c_2 \equiv c_2^1 c_2^2.$$

Ferner gilt

$$c_2^1 \wedge c_1^2 \equiv (c_1^1)^{-1} c^1 \wedge (c_1^1)^{-1} c_1 \equiv (c_1^1)^{-1} (c^1 \wedge c_1) \equiv 1,$$

also

3) $$c_1^2 \parallel c_2^1.$$

Wir nehmen jetzt die Existenz als bewiesen für $m' \leqq m$ und $n' < n$ an und beweisen sie hieraus für m und n.

Es sei also

$$c_1 \ldots c_m \equiv c^1 \ldots c^n.$$

Dann ist

$$c_1 \ldots c_m \equiv c^1 \ldots c^{n-2} (c^{n-1} c^n).$$

Es gibt also eine Matrix

$$\text{(A)} \qquad \begin{matrix} c_1^1 \ldots c_m^1 \\ \ldots \\ c_1^{n-2} \ldots c_m^{n-2} \\ e_1 \ldots e_m, \end{matrix}$$

[11]) Vgl. z. B. die verbandstheoretische Arbeit über den Verfeinerungssatz von O. Ore, Ann. math. Princeton, II, 36, 1935.

wobei die Produkte der Elemente der Spalten gleich $c_1 \ldots c_m$ sind und die Produkte der Elemente der Zeilen gleich $c^1, \ldots, c^{n-2}, c^{n-1} c^n$ sind. Insbesondere gibt die letzte Zeile

$$e_1 \ldots e_m \equiv c^{n-1} c^n.$$

Hieraus folgt nach der Induktionsannahme die Existenz einer Matrix

$$\text{(B)} \qquad \begin{matrix} c_1^{n-1} \ldots c_m^{n-1} \\ c_1^n \ldots c_m^n, \end{matrix}$$

wobei die Produkte der Elemente der Spalten jetzt gleich $e_1 \ldots e_m$ und die Produkte der Elemente der Zeilen gleich c^{n-1} bzw. c^n sind. Die Elemente c_μ^ν ($\mu = 1, \ldots, m$, $\nu = 1, \ldots, n$) erfüllen also die Bedingungen 1) und 2). Die Bedingung 3) besagt, daß in der Matrix

$$\text{(C)} \qquad \begin{matrix} c_1^1 \ldots c_m^1 \\ \ldots \\ c_1^n \ldots c_m^n \end{matrix}$$

für jedes Element c_μ^ν das Produkt der rechts von ihm stehenden Elemente teilerfremd zum Produkt der unter ihm stehenden Elemente ist. Ist diese Bedingung nach Induktionsannahme für die Matrizen (A) und (B) erfüllt, so auch für (C), da ja $e_\mu \equiv c_\mu^{n-1} c_\mu^n$ ist.

Die eindeutige Bestimmtheit der Elemente c_μ^ν ergibt sich daraus, daß aus 3) folgt

$$c_\mu^\nu \ldots c_\mu^n \wedge c_\mu^\nu \ldots c_m^\nu \equiv c_\mu^\nu (c_\mu^{\nu+1} \ldots c_\mu^n \wedge c_{\mu+1}^\nu \ldots c_m^\nu) \equiv c_\mu^\nu$$

und aus 1) bzw. 2)

$$c_\mu^\nu \ldots c_m^\nu \equiv (c_1^\nu \ldots c_{\mu-1}^\nu)^{-1} c^\nu$$
$$c_\mu^\nu \ldots c_\mu^n \equiv (c_\mu^1 \ldots c_\mu^{\nu-1})^{-1} c_\mu.$$

Danach lassen sich die Elemente c_μ^ν bis auf Einheiten rekursiv berechnen. Die Ganzheit der Elemente c_μ^ν, falls c_μ und c^ν ganz sind, ergibt sich ohne weiteres ebenfalls durch Induktion.

§ 3.

Hauptgruppen.

Zu den Verbandsgruppen gehören insbesondere die geordneten Gruppen. Gilt $a \leqq b$ in einer geordneten Gruppe G für $a, b \in G$, so ist a der g. g. T. von a und b. Wir bezeichnen daher den g. g. T. von a und b in geordneten Gruppen mit $\min(a, b)$.

Satz 7. Eine Verbandsgruppe G ist genau dann geordnet, wenn für jedes $a, b \in G$ gilt

$$a > 1, b > 1 \Rightarrow a \wedge b > 1.$$

Beweis. Diese Bedingung ist in geordneten Gruppen ersichtlich erfüllt. Umgekehrt folgt aus ihr für jedes $a \in G$ wegen $1 \vee a \parallel 1 \vee a^{-1}$, daß stets $1 \vee a \equiv 1$ oder $1 \vee a^{-1} \equiv 1$ gelten muß, d. h. es gilt stets $a \leqq 1$ oder $a \geqq 1$.

Jedes direkte Produkt von geordneten Gruppen ist ebenfalls eine Verbandsgruppe. Sind G_τ geordnete Gruppen mit den Ordnungen $\underset{\tau}{\leqq}$, so besteht das direkte Produkt aus den „Vektoren" $\{\ldots, s_\tau, \ldots\}$, die aus jeder Gruppe G_τ genau ein Element a_τ enthalten. Sind

$$a = \{\ldots, a_\tau, \ldots\}, \quad b = \{\ldots, b_\tau, \ldots\}$$

Vektoren, so setze man $ab = \{\ldots, a_\tau b_\tau, \ldots\}$ und setze fest, daß $a \leqq b$ genau dann gelten soll, wenn für jedes $\tau: a_\tau \underset{\tau}{\leqq} b_\tau$ gilt.

Wir nennen diese direkten Produkte von geordneten Gruppen Vektorgruppen. Jede Vektorgruppe ist eine Verbandsgruppe, es ist nämlich

$$a \wedge b \equiv \{\ldots, \min(a_\tau, b_\tau), \ldots\}.$$

Satz 8. In einer Vektorgruppe G gilt für jedes $a, x \in G$

$$a \parallel x a x^{-1} \Longrightarrow a \equiv 1.$$

Beweis. Wir haben nur nachzuweisen, daß diese Bedingung für geordnete Gruppen gilt. Aus $a > 1 \Longrightarrow x a x^{-1} > 1$ folgt aber sofort $a > 1 \Longrightarrow \min(a, x a x^{-1}) > 1$.

Wir nennen jede Verbandsgruppe, die die Bedingung des Satzes 8 erfüllt, regulär. Also ist jede Vektorgruppe eine reguläre Verbandsgruppe [12]).

Dieser Satz läßt sich nicht umkehren, wohl aber gilt, daß jede reguläre Verbandsgruppe Untergruppe einer Vektorgruppe ist. Dieses wollen wir im Folgenden beweisen.

Wir definieren zunächst: Jede Untergruppe einer Vektorgruppe heißt eine Hauptgruppe.

Ist eine Vektorgruppe G das direkte Produkt der geordneten Gruppen G_τ, so liefert jedes G_τ eine Ordnung von G, wenn man für zwei Vektoren $a = \{\ldots, a_\tau, \ldots\}$ und $b = \{\ldots, b_\tau, \ldots\}$ festsetzt, daß $a \underset{\tau}{\leqq} b$ genau dann gelten soll, wenn $a_\tau \underset{\tau}{\leqq} b_\tau$ in G_τ gilt. Es gilt dann $a \leqq b$ genau dann, wenn für jedes $\tau: a \underset{\tau}{\leqq} b$ gilt.

Ist nun eine Hauptgruppe H gegeben und G eine Obervektorgruppe von H, so induziert jede Ordnung von G auch eine Ordnung von H [13]). Es gibt also Ordnungen $\underset{\tau}{\leqq}$ von H, so daß für jedes $a, b \in H$ genau

[12]) Ersichtlich ist jede kommutative Verbandsgruppe regulär.

[13]) d. h. zu jeder Ordnung $\leqq$ von G gibt es genau eine Ordnung $\dot{\leqq}$ von H, so daß für jedes $a, b \in H$ gilt: $a \leqq b \langle = \rangle a \dot{\leqq} b$. Wir bezeichnen dann die Ordnungen $\leqq$ und $\dot{\leqq}$ mit demselben Zeichen.

dann $a \leqq b$ gilt, wenn für jedes $\tau: a \underset{\tau}{\leqq} b$ gilt. Gibt es umgekehrt zu einer beliebigen halbgeordneten Gruppe H Ordnungen $\underset{\tau}{\leqq}$ von H, so daß für jedes $a, b \in H$ genau dann $a \leqq b$ gilt, wenn für jedes $\tau: a \underset{\tau}{\leqq} b$ gilt, so ist H eine Hauptgruppe. Das direkte Produkt der bzgl. $\underset{\tau}{\leqq}$ geordneten Gruppen H ist nämlich dann eine Vektorgruppe, die H isomorph enthält[14]). Eine Hauptgruppe ist also einfach dadurch gekennzeichnet, daß sich ihre Halbordnung $\leqq$ durch Ordnungen $\underset{\tau}{\leqq}$ darstellen läßt, indem für jedes $a, b \in H$ gilt

$$a \leqq b \langle = \rangle \text{ für jedes } \tau: a \underset{\tau}{\leqq} b.$$

Wir nennen in diesem Falle die Halbordnung $\leqq$ die „Konjunktion" der Ordnungen $\underset{\tau}{\leqq}$.

Für die zu $\leqq$ bzw. $\underset{\tau}{\leqq}$ zugehörigen Halbgruppen $\mathfrak{g}$ bzw. $\mathfrak{g}_\tau$ bedeutet dies, daß $\mathfrak{g}$ der Durchschnitt der $\mathfrak{g}_\tau$ ist:

$$\mathfrak{g} = \bigcap_\tau \mathfrak{g}_\tau.$$

Damit haben wir erhalten, daß eine halbgeordnete Gruppe genau dann Hauptgruppe ist, wenn die zugehörige Halbgruppe Durchschnitt von linearen, invarianten Unterhalbgruppen von G ist.

Um zu beweisen, daß jede reguläre Verbandsgruppe G Hauptgruppe ist, haben wir also die Existenz von linearen, invarianten Unterhalbgruppen nachzuweisen, deren Durchschnitt die zugehörige Halbgruppe von G ist. Dieser Nachweis beruht auf dem Homomorphiebegriff. Die gesuchten linearen Unterhalbgruppen werden nämlich eineindeutig gewissen maximalen Homomorphismen von G entsprechen.

Wir definieren zunächst wegen einer späteren Anwendung allgemein den Homomorphiebegriff für Halbverbandshalbgruppen, d. h. für halbgeordnete Halbgruppen, die bzgl. ihrer Halbordnung einen Halbverband bilden und die das distributive Gesetz erfüllen:

für jedes a, b, x, y

$$x(a \wedge b)y \equiv xay \wedge xby.$$

Es seien H und H' Halbverbandshalbgruppen und $\rightarrow$ eine Abbildung von H in H', die für jedes $a, b \in H$, $a', b' \in H'$ mit $a \rightarrow a'$ und $b \rightarrow b'$ erfüllt:

1) $a \leqq b \Rightarrow a' \leqq b'$
2) $a \wedge b \rightarrow a' \wedge b'$
3) $ab \rightarrow a'b'$.

Eine solche Abbildung nennen wir einen Homomorphismus von H.

[14]) Die Vektorgruppe besteht aus den Vektoren $\{\ldots, a_\tau \ldots\}$, die zu jeder Ordnung $\underset{\tau}{\leqq}$ genau ein $a_\tau \in H$ enthalten. Bildet man $a \in H$ auf den Vektor $\{\ldots, a_\tau \ldots\}$, in dem für jedes $\tau: a_\tau = a$ gilt, ab, so entsteht eine isomorphe Abbildung von H in die Vektorgruppe.

Jeder Homomorphismus definiert eine Relation $\dot{\leqq}$ in H auf folgende Weise. Wir setzen fest, daß $a \dot{\leqq} b$ in H genau dann gelten soll, wenn $a' \leqq b'$ in H' gilt. H ist bzgl. dieser Relation wieder eine Halbverbandshalbgruppe und die Relation $\dot{\leqq}$ erfüllt:

$$\text{I)} \qquad a \leqq b \Rightarrow a \dot{\leqq} b$$

$$\text{II)} \qquad x \dot{\leqq} a,\ x \dot{\leqq} b \Rightarrow x \dot{\leqq} a \wedge b.$$

Es gilt auch die Umkehrung: Ist $\dot{\leqq}$ eine Halbordnung von H, die I) und II) erfüllt, so ist H bzgl. $\dot{\leqq}$ eine Halbverbandshalbgruppe (wir wollen diese mit H' bezeichnen) und die Abbildung $a \to a$ von H auf H' ist ein Homomorphismus.

Die Bedingung 1) folgt nämlich aus I). Für die Gültigkeit von 2) hat man zu zeigen, daß das Element $a \wedge b$ nicht nur in H (d. h. bzgl. $\leqq$) der g. g. T. von a und b ist, sondern auch in H' (d. h. bzgl. $\dot{\leqq}$). Wegen I) und $a \wedge b \leqq a$ und $a \wedge b \leqq b$ gilt aber

$$a \wedge b \dot{\leqq} a \quad \text{und} \quad a \wedge b \dot{\leqq} b.$$

Zusammen mit II) folgt hieraus die Behauptung. Zugleich ist damit erwiesen, daß H' eine Halbverbandshalbgruppe ist.

Aufgrund dieser Gleichwertigkeit betrachten wir statt der Homomorphismen von H nur die Halbordnungen von H, die I) und II) erfüllen. Wir nennen diese Halbordnungen kurz die zulässigen Halbordnungen von H.

Zwei Homomorphismen von H, die dieselbe zulässige Halbordnung definieren, nennen wir äquivalent. Es entsprechen dann also die Homomorphismen von H bis auf Äquivalenz eineindeutig den zulässigen Halbordnungen von H.

Für eine Verbandsgruppe G entsprechen die zulässigen Halbordnungen von G aber auch eineindeutig gewissen Unterhalbgruppen von G. Aus Satz 1 folgt nämlich sofort:

Ist $\mathfrak{g}$ die zugehörige Halbgruppe einer Verbandsgruppe G, so entsprechen die zulässigen Halbordnungen von G eineindeutig den invarianten Unterhalbgruppen $\dot{\mathfrak{g}}$ von G, die für jedes $a, b \in G$

$$\text{I)} \quad \mathfrak{g} \leqq \dot{\mathfrak{g}} \qquad \text{II)} \quad a \in \dot{\mathfrak{g}},\ b \in \dot{\mathfrak{g}} \Rightarrow a \wedge b \in \dot{\mathfrak{g}}$$

erfüllen.

Diese Halbgruppen $\dot{\mathfrak{g}}$ nennen wir die zulässigen Halbgruppen von G. Die Homomorphismen einer Verbandsgruppe G entsprechen also bis auf Äquivalenz eineindeutig den zulässigen Halbgruppen von G.

Die zulässigen Halbgruppen einer Verbandsgruppe lassen sich nun durch „Quotientenbildung" aus der zugehörigen Halbgruppe $\mathfrak{g}$ gewinnen. Dazu haben wir invariante Unterhalbgruppen S von $\mathfrak{g}$ zu betrachten.

Gilt für jedes $a, b \in \mathfrak{g}$

$$a \leqq b,\ b \in S \Rightarrow a \in S,$$

so nennen wir S vollständig[15]).

Satz 9. Die Homomorphismen einer Verbandsgruppe G entsprechen bis auf Äquivalenz eineindeutig den vollständigen, invarianten Unterhalbgruppen der zugehörigen Halbgruppe $\mathfrak{g}$.

Beweis. Ist $\dot{\mathfrak{g}}$ eine zulässige Halbgruppe, so ist der Durchschnitt $S = \dot{E} \cap \mathfrak{g}$ der Einheitengruppe $\dot{E}$ von $\dot{\mathfrak{g}}$ mit $\mathfrak{g}$ ersichtlich eine vollständige, invariante Unterhalbgruppe von $\mathfrak{g}$[16]). Ist umgekehrt S eine beliebige, vollständige invariante Unterhalbgruppe von $\mathfrak{g}$, so sei $\dot{\mathfrak{g}}$ die Menge der $a \in G$, deren Nenner in S liegt, d. h. $1 \vee a^{-1} \in S$. Wir zeigen, daß $\dot{\mathfrak{g}}$ eine zulässige Halbgruppe ist.

Zunächst gilt für jedes $a \in G$

$$a \in \mathfrak{g} \Rightarrow a \in \dot{\mathfrak{g}}$$
$$(\text{denn } a \geqq 1 \Rightarrow 1 \vee a^{-1} \equiv 1 \in S).$$

Für jedes $a, b \in G$ gilt

$$a \in \dot{\mathfrak{g}},\ b \in \dot{\mathfrak{g}} \Rightarrow ab \in \dot{\mathfrak{g}}$$
$$(\text{denn } 1 \vee b^{-1}a^{-1} \leqq (1 \vee b^{-1})(1 \vee a^{-1}) \in S).$$

Für jedes $a, x \in G$ gilt

$$a \in \mathfrak{g} \Rightarrow xax^{-1} \in \dot{\mathfrak{g}}$$
$$(\text{denn } 1 \vee xax^{-1} \equiv x(1 \vee a^{-1})x^{-1} \in S).$$

Für jedes $a, b \in G$ gilt

$$a \in \dot{\mathfrak{g}},\ b \in \dot{\mathfrak{g}} \Rightarrow a \wedge b \in \dot{\mathfrak{g}}$$
$$(\text{denn } 1 \vee (a \wedge b)^{-1} \equiv 1 \vee a^{-1} \vee b^{-1} \leqq (1 \vee a^{-1})(1 \vee b^{-1}) \in S).$$

Die behauptete Eineindeutigkeit ergibt sich daraus, daß die Einheitengruppe $\dot{E}$ von $\dot{\mathfrak{g}}$ aus den $a \in G$ besteht, für die Zähler und Nenner in S liegen. $E \cap \mathfrak{g}$ besteht also aus den ganzen Elementen, deren Zähler und Nenner in S liegen. Da aber für ein ganzes Element a der Zähler a ist und der Nenner 1, so ist $\dot{E} \cap \mathfrak{g} = S$.

Nennen wir jetzt eine zulässige Halbgruppe regulär, wenn sie einem Homomorphismus in eine reguläre Verbandsgruppe entspricht, so sind also die regulären, zulässigen Halbgruppen $\dot{\mathfrak{g}}$ dadurch gekennzeichnet, daß die Einheitengruppe $\dot{E}$ für jedes $a, x \in G$ die Bedingung

$$a \wedge xax^{-1} \in \dot{E} \Rightarrow a \in \dot{E}$$

[15]) Die vollständigen invarianten Unterhalbgruppen treten an die Stelle der „vollständigen multiplikativ abgeschlossenen Systeme" in der kommutativen Theorie.

[16]) S enthält die Elemente a von $\mathfrak{g}$, für die in der $\dot{\mathfrak{g}}$ entsprechenden Halbordnung $\dot{\leqq}$ gilt: $a \dot{\leqq} 1$. Wegen $a \dot{\leqq} b$. $b \dot{\leqq} 1 \Rightarrow a \dot{\leqq} 1$ ist also S vollständig.

erfüllt. Hieraus ergibt sich für die vollständige, invariante Unterhalbgruppe $S = \dot{E} \cap \mathfrak{g}$

$$a \wedge xax^{-1} \in S \Rightarrow a \in S.$$

Wir nennen diese vollständigen, invarianten Unterhalbgruppen S von $\mathfrak{g}$ ebenfalls regulär. Dann ist für eine reguläre, vollständige, invariante Unterhalbgruppe S die zulässige Halbgruppe $\dot{\mathfrak{g}}$ der Elemente a mit $1 \vee a^{-1} \in S$ nämlich regulär, da aus $a \wedge xax^{-1} \in \dot{E}$ zunächst $a \in \dot{\mathfrak{g}}$ folgt, aber wegen

$$(1 \vee a) \wedge x(1 \vee a)x^{-1} \equiv 1 \vee (a \wedge xax^{-1}) \in S$$

auch $1 \vee a \in S$, also $a^{-1} \in \dot{\mathfrak{g}}$ und $a \in E$.

Damit ist erwiesen, daß die Homomorphismen einer Verbandsgruppe in eine reguläre Verbandsgruppe eineindeutig (bis auf Äquivalenz) den regulären, zulässigen Halbgruppen $\dot{\mathfrak{g}}$ und auch den regulären, vollständigen invarianten Unterhalbgruppen S der zugehörigen Halbgruppe entsprechen.

Zu den regulären, zulässigen Halbgruppen einer Verbandsgruppe G gehören insbesondere die linearen, zulässigen Halbgruppen. Entspricht die vollständige, invariante Unterhalbgruppe S einer linearen, zulässigen Halbgruppe $\dot{\mathfrak{g}}$, so gilt für jedes $a, b \in \mathfrak{g}$

$$(1) \qquad a \bar{\in} S, b \bar{\in} S \Rightarrow a \wedge b \bar{\in} S,$$

denn $a \bar{\in} S$ bedeutet $a > 1$ [17]), $b \bar{\in} S$ bedeutet $b > 1$, also gilt $a \wedge b > 1$, d. h. $a \wedge b \bar{\in} S$.

Wir nennen die vollständigen, invarianten Unterhalbgruppen S mit der Eigenschaft (1) „prim".

Satz 10. Die zulässigen Ordnungen einer Verbandsgruppe entsprechen eineindeutig den primen, vollständigen, invarianten Unterhalbgruppen der zugehörigen Halbgruppen.

Beweis. Ist S eine prime, vollständige, invariante Unterhalbgruppe von G und gilt $a \dot{>} 1$ [18]) und $b > 1$, so gilt $1 \vee a \bar{\in} S$ und $1 \vee b \bar{\in} S$. Also gilt auch

$$(1 \vee a) \wedge (1 \vee b) \equiv 1 \vee (a \wedge b) \bar{\in} S,$$

d. h. $a \wedge b \dot{>} 1$. Nach Satz 7 ist also $\dot{\leqq}$ eine Ordnung.

Für die nächsten beiden Sätze sei G eine Verbandsgruppe, $\mathfrak{g}$ die zugehörige Halbgruppe und $c \in \mathfrak{g}$.

Satz 11. Ist S eine reguläre, vollständige, invariante Unterhalbgruppe von $\mathfrak{g}$, so ist auch die Menge S_c der $a \in \mathfrak{g}$ mit $a \wedge c \in S$ eine reguläre, vollständige, invariante Unterhalbgruppe von $\mathfrak{g}$.

---

[17]) Mit $\leqq$ bezeichnen wir die zulässige Ordnung, die $\dot{\mathfrak{g}}$ entspricht.

[18]) S entspricht eine zulässige Halbgruppe $\dot{\mathfrak{g}}$. $\dot{\mathfrak{g}}$ entspricht eine Halbordnung. Diese Halbordnung bezeichnen wir mit $\dot{\leqq}$.

Beweis. Es gilt $S \leqq S_c$ (denn $a \in S \Rightarrow a \wedge c \in S$).
Für jedes $a, b \in \mathfrak{g}$ gilt

$$a \in S_c,\ b \in S_c \Rightarrow ab \in S_c$$

(denn aus $a \wedge c \in S$ und $b \wedge c \in S$ folgt

$$ab \wedge ac \wedge cb \wedge c^2 \equiv (a \wedge c)(b \wedge c) \in S,$$

woraus $ab \wedge c \in S$ folgt, wegen $c \leqq ac \wedge cb \wedge c^2$).
Für jedes $a, x \in G$ gilt

$$a \in S_c \Rightarrow xax^{-1} \in S_c$$

(denn aus $a \wedge c \in S$ folgt $a \wedge x^{-1}cx \wedge xax^{-1} \wedge c \in S$, also, da S regulär ist, $xax^{-1} \wedge c \in S$).
Für jedes $a, x \in G$ gilt

$$a \wedge xax^{-1} \in S_c \Rightarrow a \in S_c$$

(denn aus $a \wedge xax^{-1} \wedge c \in S$ folgt wie eben $a \wedge c \in S$).
Für jedes $a, b \in \mathfrak{g}$ gilt

$$a \leqq b, b \in S_c \Rightarrow a \in S_c$$

(denn aus $b \wedge c \in S$ und $a \leqq b$ folgt $a \wedge c \in S$).

Satz 12. Eine reguläre vollständige invariante Unterhalbgruppe S von $\mathfrak{g}$ mit $c \bar{\in} S$ ist prim, wenn S maximal ist bzgl. der Eigenschaft $c \bar{\in} S$ [19]).

Beweis. Aus $a \wedge b \in S$ folgt für $a \bar{\in} S$ zunächst $S_b \supset S$, also $c \in S_b$ wegen der Maximalität von S. Hieraus folgt $b \in S_c$, denn $c \in S_b$ und $b \in S_c$ bedeuten ja beide $b \wedge c \in S$. Nun gilt wegen $c \bar{\in} S$ auch $c \bar{\in} S_c$, also $S_c = S$ wegen der Maximalität von S. Damit folgt $b \in S$.

Jetzt erst kommen wir zum eigentlichen Beweis von

Satz 13. Jede reguläre Verbandsgruppe ist Hauptgruppe.

Es sei G eine reguläre Verbandsgruppe und $\mathfrak{g}$ die zugehörige Halbgruppe. Wir wollen zeigen, daß es lineare, zulässige Halbgruppen $\mathfrak{g}$ gibt, deren Durchschnitt $\mathfrak{g}$ ist. Sei dazu c ein Element von G mit $c \bar{\in} \mathfrak{g}$. Dann gilt $1 \vee c^{-1} > 1$. Es gibt also eine reguläre, vollständige, invariante Unterhalbgruppe S_0 von $\mathfrak{g}$ mit $1 \vee c^{-1} \bar{\in} S_0$, nämlich die Einheitengruppe von G. Durch Wohlordnung läßt sich jetzt eine maximale, reguläre, vollständige, invariante Unterhalbgruppe S von $\mathfrak{g}$ konstruieren mit $1 \vee c^{-1} \bar{\in} S$, d. h. es soll für jede reguläre, vollständige, invariante Unterhalbgruppe S' mit $S \subset S'$ gelten: $1 \vee c^{-1} \in S'$. Dieser Wohlordnungsschluß beruht einfach darauf, daß für jede wohlgeordnete Folge

$$S_0 \leqq \ldots \leqq S_\tau \leqq \ldots$$

[19]) S heißt maximal, wenn für jede reguläre, vollständige, invariante Unterhalbgruppe S' gilt:

$$S \subset S' \Rightarrow c \in S'.$$

von regulären, vollständigen, invarianten Unterhalbgruppen S_τ mit $1 \vee c^{-1} \bar{\in} S_\tau$ auch die Vereinigung $S' = \bigcup_\tau S_\tau$ eine reguläre, vollständige, invariante Unterhalbgruppe mit $1 \vee c^{-1} \bar{\in} S'$ ist[20]). Dies ist aber unmittelbar einzusehen. Also gibt es ein maximales S. Dieses ist nach Satz 12 prim, entspricht also nach Satz 10 einer linearen, zulässigen Halbgruppe $\mathfrak{g}$ mit $c \bar{\in} \mathfrak{g}$ wegen $1 \vee c^{-1} \bar{\in} S$. Da es zu jedem $c \bar{\in} \mathfrak{g}$ eine solche zulässige, lineare Halbgruppe $\mathfrak{g}$ gibt, ist der Durchschnitt aller dieser $\mathfrak{g}$ also $\mathfrak{g}$.

Der Beweis von Satz 13 liefert noch etwas mehr als den Satz. Es wird nämlich bewiesen, daß die Halbordnung einer regulären Verbandsgruppe nicht nur Konjunktion von Ordnungen ist, sondern sogar Konjunktion von zulässigen Ordnungen. Dieses Ergebnis läßt sich umkehren:

Ist die Halbordnung einer Verbandsgruppe G Konjunktion von zulässigen Ordnungen, so ist G regulär.

Der Beweis dieser Umkehrung entspricht genau dem Beweis von Satz 8.

Aus Satz 13 folgt ferner, daß auch jede Untergruppe einer regulären Verbandsgruppe Hauptgruppe ist.

Wegen Satz 8 gilt auch hier die Umkehrung, daß jede Hauptgruppe Untergruppe einer regulären Verbandsgruppe ist.

Zusammengefaßt erhalten wir also eine Kennzeichnung der Hauptgruppen, die unabhängig ist vom Ordnungsbegriff. Die Bedeutung dieser Kennzeichnung liegt darin, daß sich die Ordnungen einer Gruppe im allgemeinen nur mit Wohlordnungsschlüssen konstruieren lassen — die Oberverbandsgruppen dagegen lassen sich auch ohne Wohlordnung konstruieren mit Hilfe des Idealbegriffs.

§ 4.

Idealsysteme.

Wir definieren den Idealbegriff zunächst für beliebige halbgeordnete Mengen.

Unter einem Idealsystem $\mathfrak{S}$ einer halbgeordneten Menge M verstehen wir einen minimalen Oberhalbverband von M. Ein Oberhalbverband von M enthält zu endlich vielen Elementen a_μ von M ($\mu = 1, \ldots, m$) stets den g. g. T. $a_1 \wedge \ldots \wedge a_m$. Er heißt minimal, wenn er nur aus Elementen dieser Form besteht. Es gibt dann nämlich keinen echten Unterhalbverband, der auch noch M umfaßt.

Die Bezeichnung Idealsystem für jeden minimalen Oberhalbverband rechtfertigt sich dadurch, daß sich für kommutative, halbgeordnete

[20]) Dieser Wohlordnungsschluß ist immer derselbe, vgl. z. B. N. Bourbaki Actual Scient. et Ind., Nr. 846.

Gruppen die Gleichwertigkeit dieser Definition mit der üblichen herausstellen wird [21]).

Es gilt zunächst, daß sich jedes Idealsystem einer halbgeordneten Menge M durch Untermengen von M darstellen läßt.

Ist nämlich ein Idealsystem $\mathfrak{S}$ gegeben, so ordne man je endlich vielen Elementen a_μ von M ($\mu = 1, \ldots, m$) eine Untermenge $(a_1, \ldots, a_m)$ von M zu, indem man festsetzt, daß $a \in (a_1, \ldots, a_m)$ gelten soll, wenn $a_1 \wedge \ldots \wedge a_m \leqq a$ in $\mathfrak{S}$ gilt.

Dann gilt ersichtlich

$$a_1 \wedge \ldots \wedge a_m \leqq b_1 \wedge \ldots \wedge b_n$$

genau dann, wenn

$$(a_1, \ldots, a_m) \geqq (b_1, \ldots, b_n)$$

gilt.

Den Elementen a von M wird dabei die Untermenge (a) der $b \in M$ mit $a \leqq b$ zugeordnet. (a) heißt Hauptideal. Die Definition der Hauptideale ist unabhängig vom Idealsystem. Es gilt $a \leqq b$ genau dann, wenn $(a) \geqq (b)$ gilt.

Für die Untermengen $(a_1, \ldots, a_m)$ gilt

1) $a_\mu \in (a_1, \ldots, a_m) \quad (\mu = 1, \ldots, m)$

2) $b_\nu \in (a_1, \ldots, a_m) \Rightarrow (b_1, \ldots, b_n) \leqq (a_1, \ldots, a_m)$,

denn in dem Halbverband $\mathfrak{S}$ gelten ja die Formeln

1) $a_1 \wedge \ldots \wedge a_m \leqq a_\mu$

2) $a_1 \wedge \ldots \wedge a_m \leqq b_\nu \Rightarrow a_1 \wedge \ldots \wedge a_m \leqq b_1 \wedge \ldots \wedge b_n$.

Jedes Idealsystem ordnet also jeder endlichen Untermenge $\mathfrak{a} = \{a_1, \ldots, a_m\}$ eine Untermenge $\mathfrak{a}' = (a_1, \ldots, a_m)$ von M zu, so daß

1) $\mathfrak{a} \leqq \mathfrak{a}'$

2) $\mathfrak{a} \leqq \mathfrak{b}' \Rightarrow \mathfrak{a}' \leqq \mathfrak{b}'$

3) $\{a\}' = (a)$

erfüllt ist.

Definiert man „vollständige" Idealsysteme als minimale vollständige Oberhalbverbände [22]), so erhält man genau entsprechend eine Zuordnung, die jetzt jeder beliebigen Untermenge $\mathfrak{a}$ eine Untermenge $\mathfrak{a}'$ zuordnet, so daß 1)—3) erfüllt ist.

---

[21]) Vgl. H. Prüfer, J. reine angew. Math. 168, 1932.

[22]) Ein Halbverband H heißt vollständig, wenn es zu beliebig vielen $a_\tau \in H$ stets ein $c \in H$ gibt, daß die Bedingungen

$$\text{für jedes } \tau\colon c \leqq a_\tau$$

$$\text{für jedes } x \in H\colon (\text{für jedes } \tau\colon x \leqq a_\tau) \Rightarrow x \leqq c$$

erfüllt. c heißt der g. g. T. der a_τ.

Ist umgekehrt eine Zuordnung gegeben, die jeder endlichen bzw. jeder Untermenge $\mathfrak{a}$ von M eine Untermenge $\mathfrak{a}'$ zuordnet, so daß 1)—3) erfüllt ist, so bilden die Untermengen $\mathfrak{a}'$ ein Idealsystem bzw. ein vollständiges Idealsystem von M. Zum Beweis hat man nur zu beachten, daß unter Voraussetzung von 1) und 2) für endlich viele bzw. beliebig viele Untermengen $\mathfrak{a}_\tau$ die folgenden Formeln gleichwertig sind:

$$\text{für jedes } \tau: \quad \mathfrak{a}_\tau' \leqq \mathfrak{a}'$$

$$\text{für jedes } \tau: \quad \mathfrak{a}_\tau \leqq \mathfrak{a}'$$

$$\bigcup_\tau \mathfrak{a}_\tau \leqq \mathfrak{a}'$$

$$(\bigcup_\tau \mathfrak{a}_\tau)' \leqq \mathfrak{a}'.$$

Dabei bezeichnet $\bigcup_\tau \mathfrak{a}_\tau$ die Vereinigung der $\mathfrak{a}_\tau$. Die Gleichwertigkeit der ersten und letzten Formel besagt, daß $(\bigcup_\tau \mathfrak{a}_\tau)'$ der g. g. T.[23]) der $\mathfrak{a}_\tau'$ ist.

Unter Voraussetzung von 1) läßt sich 2) ersetzen durch die beiden Bedingungen

2 a) $\qquad \mathfrak{a} \leqq \mathfrak{b} \Rightarrow \mathfrak{a}' \leqq \mathfrak{b}'$

2 b) $\qquad \mathfrak{a}'' \leqq \mathfrak{a}'.$

Zum Beweis gelte 1) und 2). Dann gilt $\mathfrak{a} \leqq \mathfrak{b} \Rightarrow \mathfrak{a} \leqq \mathfrak{b}'$ nach 1), also $\mathfrak{a} \leqq \mathfrak{b} \Rightarrow \mathfrak{a}' \leqq \mathfrak{b}'$ nach 2). Ferner gilt $\mathfrak{a}' \leqq \mathfrak{a}' \Rightarrow \mathfrak{a}'' \leqq \mathfrak{a}'$ nach 2). Gilt 1), 2 a) und 2 b), so gilt $\mathfrak{b}'' = \mathfrak{b}'$ nach 1) und 2 b).

Ferner gilt dann $\mathfrak{a} \leqq \mathfrak{b}' \Rightarrow \mathfrak{a}' \leqq \mathfrak{b}''$ nach 2 a), also

$$\mathfrak{a} \leqq \mathfrak{b}' \Rightarrow \mathfrak{a}' \leqq \mathfrak{b}'.$$

Die Bedingung 2) ist aber unter Voraussetzung von 1) auch gleichwertig mit der Bedingung

2') $\qquad (\mathfrak{a}' \cup \mathfrak{b}')' \leqq (\mathfrak{a} \cup \mathfrak{b})'$[24]).

Zum Beweis gelte wieder 1) und 2). Dann gilt

$$\mathfrak{a}' \leqq (\mathfrak{a} \cup \mathfrak{b})'$$

$$\mathfrak{b}' \leqq (\mathfrak{a} \cup \mathfrak{b})',$$

also

$$\mathfrak{a}' \cup \mathfrak{b}' \leqq (\mathfrak{a} \cup \mathfrak{b})'$$

$$(\mathfrak{a}' \cup \mathfrak{b}')' \leqq (\mathfrak{a} \cup \mathfrak{b})'.$$

[23]) In mengentheoretischer Auffassung ist natürlich $(\bigcup_\tau \mathfrak{a}_\tau)'$ das k. g. V. der $\mathfrak{a}_\tau'$.

[24]) $\cup$ bezeichnet die mengentheoretische Vereinigung.

Gilt 1) und 2'), so folgt:

$$\begin{aligned} \mathfrak{a} \leqq \mathfrak{b} &\Rightarrow \mathfrak{a} \cup \mathfrak{b} = \mathfrak{b} \\ &\Rightarrow (\mathfrak{a} \cup \mathfrak{b})' = \mathfrak{b}' \\ &\Rightarrow (\mathfrak{a}' \cup \mathfrak{b}')' \leqq \mathfrak{b}' \\ &\Rightarrow \mathfrak{a}' \cup \mathfrak{b}' \leqq \mathfrak{b}' \\ &\Rightarrow \mathfrak{a}' \leqq \mathfrak{b}'. \end{aligned}$$

Der Idealbegriff ist für halbgeordnete Gruppen in dieser Form noch zu unbestimmt. Als Idealsystem einer halbgeordneten Halbgruppe H wollen wir nur diejenigen Idealsysteme der halbgeordneten Menge H bezeichnen, in denen durch die Festsetzung

$$(a_1 \wedge a_2 \ldots \wedge a_m)(b_1 \wedge \ldots \wedge b_n) \equiv a_1 b_1 \wedge \ldots \wedge a_m b_n$$

eine Multiplikation definiert werden kann.

Das ist genau dann der Fall, wenn für jedes $x, y \in H$ gilt

$$a_1 \wedge \ldots \wedge a_m \leqq b_1 \wedge \ldots \wedge b_n \Rightarrow x a_1 y \wedge \ldots \wedge x a_m y \leqq x b_1 y \wedge \ldots \wedge x b_n y.$$

Diese Bedingung ist wiederum gleichwertig mit

4) $\quad a_1 \wedge \ldots \wedge a_m \leqq a \Rightarrow x a_1 y \wedge \ldots \wedge x a_m y \leqq x a y.$

Ein Idealsystem einer halbgeordneten Halbgruppe H ist also ein minimaler Oberhalbverband von H, der 4) erfüllt.

Jedes Idealsystem einer halbgeordneten Halbgruppe ist aber ersichtlich sogar eine Halbverbandshalbgruppe.

Stellt man die Idealsysteme von H durch Untermengen von H dar, so sollen nach Obigem die Untermengen $\mathfrak{a}'$ außer 1)—3) auch die Bedingung

4) $\quad a \in \mathfrak{a}' \Rightarrow x a y \in (x \mathfrak{a} y)'$

erfüllen. Dabei ist mit $x \mathfrak{a} y$ die Menge der Elemente $x a y$ $(a \in \mathfrak{a})$ bezeichnet. Statt 4) können wir auch schreiben

$$x \mathfrak{a}' y \leqq (x \mathfrak{a} y)'.$$

Unter Voraussetzung von 1) und 2) ist 4) gleichwertig mit

4') $\quad \mathfrak{a}' \mathfrak{b}' \leqq (\mathfrak{a} \mathfrak{b})'.$

Zum Beweis gelte 1), 2) und 4). Dann gilt für jedes Element y von $\mathfrak{b}$:

$$\mathfrak{a}' y \leqq (\mathfrak{a} y)' \leqq (\mathfrak{a} \mathfrak{b})',$$

woraus $\mathfrak{a}' \mathfrak{b} \leqq (\mathfrak{a} \mathfrak{b})'$ folgt.

Ebenso ist $\mathfrak{a}' \mathfrak{b}' \leqq (\mathfrak{a}' \mathfrak{b})'$ zu beweisen. Also gilt

$$\mathfrak{a}' \mathfrak{b}' \leqq (\mathfrak{a} \mathfrak{b})'' \leqq (\mathfrak{a} \mathfrak{b})'.$$

Gilt umgekehrt 1) und 4'), so gilt

$$x\mathfrak{a}' \leqq \{x\}'\,\mathfrak{a}' \leqq (x\mathfrak{a})',$$

also

$$x\mathfrak{a}'y \leqq (x\mathfrak{a})'\,y \leqq (x\mathfrak{a}y)'.$$

Über diesen Idealbegriff für halbgeordnete Halbgruppen beweisen wir jetzt

Satz 14. Zu jeder halbgeordneten Halbgruppe H gibt es ein Idealsystem $\mathfrak{S}_s$, das in jedes Idealsystem von H homomorph abgebildet werden kann (wobei die Elemente von H auf sich abgebildet werden).

Beweis. Wir definieren das Idealsystem $\mathfrak{S}_s$, indem wir für die Folgen von endlich vielen Elementen a_μ von M $(\mu = 1, \ldots, m)$, die wir jetzt durch $a_1 \wedge \ldots \wedge a_m$ bezeichnen wollen, eine Halbordnung $\underset{s}{\leqq}$ definieren. Wir setzen fest, daß

$$a_1 \wedge \ldots \wedge a_m \underset{s}{\leqq} b_1 \wedge \ldots \wedge b_n$$

genau dann gelten soll, wenn für jedes b_ν ein a_μ existiert mit $a_\mu \leqq b_\nu$. Dann bilden die Folgen $a_1 \wedge \ldots \wedge a_m$ bezügl. dieser Relation $\underset{s}{\leqq}$ ein Idealsystem. Dieses System nennen wir das s-System. Wir haben zu beweisen:

1) $a_1 \wedge \ldots \wedge a_m \underset{s}{\leqq} a_\mu \qquad (\mu = 1, \ldots, m)$

2) $a_1 \wedge \ldots \wedge a_m \underset{s}{\leqq} b_\nu \ (\nu = 1, \ldots, n) \Rightarrow a_1 \wedge \ldots \wedge a_m \underset{s}{\leqq} b_1 \wedge \ldots \wedge b_n$

3) $a \underset{s}{\leqq} b \Leftrightarrow a \leqq b$

4) $a_1 \wedge \ldots \wedge a_m \underset{s}{\leqq} a \Rightarrow x\,a_1\,y \wedge \ldots \wedge x\,a_m\,y \underset{s}{\leqq} x\,a\,y.$

Diese Formeln folgen aber alle unmittelbar aus der Definition von $\underset{s}{\leqq}$. Daß jedes andere Idealsystem homomorph zum s-System ist, bedeutet nach § 3:

$$a_1 \wedge \ldots \wedge a_m \underset{s}{\leqq} b_1 \wedge \ldots \wedge b_n \Rightarrow a_1 \wedge \ldots \wedge a_m \leqq b_1 \wedge \ldots \wedge b_n.$$

Aus $a_1 \wedge \ldots \wedge a_m \underset{s}{\leqq} b_1 \wedge \ldots \wedge b_n$ folgt aber für jedes b_ν: $a_\mu \leqq b_\nu$. Also gilt für jedes Idealsystem $a_1 \wedge \ldots \wedge a_m \leqq a_\mu \leqq b_\nu$, d. h. $a_1 \wedge \ldots \wedge a_m$ $b_1 \leqq \wedge \ldots \wedge b_n$[25]).

Satz 15. Zu jeder halbgeordneten Halbgruppe H gibt es ein Idealsystem $\mathfrak{S}_v$, das v-System, so daß jedes Idealsystem von H sich homomorph auf das v-System abbilden läßt.

---

[25]) In der Darstellung durch Untermengen hätten wir $a \in (a_1 \ldots, a_m)_s$ zu setzen, wenn $a \in (a_\mu)$ für mindestens ein a_μ, also

$$(a_1 \ldots, a_m)_s = (a_1) \cup \ldots \cup (a_m).$$

Das vollständige s-System ließe sich durch

$$\mathfrak{a}_s = \bigcup_{a \in \mathfrak{a}} (a)$$

definieren. Vgl. [2]).

Beweis. Wir definieren wie im Beweis zu Satz 14 für beliebige Elemente a_μ, $b_\nu \in H$ eine Relation $\underset{v}{\leqq}$ zwischen den endlichen Folgen aus diesen Elementen, indem wir festsetzen, daß

$$a_1 \wedge \ldots \wedge a_m \underset{v}{\leqq} b_1 \wedge \ldots \wedge b_n$$

genau dann gelten soll, wenn für jedes $x, y, z \in H$ gilt

$$z \leqq x_1 a_1 y, \ldots, z \leqq x a_m y \Rightarrow z \leqq x b_\nu y \quad (\nu = 1, \ldots, n).$$

Dann gilt ersichtlich

1) $a_1 \wedge \ldots \wedge a_m \underset{v}{\leqq} a_\mu$ $\quad (\mu = 1, \ldots, m)$

2) $a_1 \wedge \ldots \wedge a_m \underset{v}{\leqq} b_\nu \ (\nu = 1, \ldots, n) \Rightarrow a_1 \wedge \ldots \wedge a_m \underset{v}{\leqq} b_1 \wedge \ldots \wedge b_n$.

Aus $a \leqq b$ ergibt sich wegen $x a y \leqq x b y$ sofort

$$z \leqq x a y \Rightarrow z \leqq x b y,$$

also $a \underset{v}{\leqq} b$. Umgekehrt folgt hieraus wegen

$$a \leqq 1 a 1 \Rightarrow a \leqq 1 b 1$$

sofort $a \leqq b$. Damit ist bewiesen:

3) $a \underset{v}{\leqq} b \ (\Leftrightarrow) \ a \leqq b$.

Um 4) $a_1 \wedge \ldots \wedge a_m \underset{v}{\leqq} a \Rightarrow x a_1 y \wedge \ldots \wedge x a_m y \underset{v}{\leqq} x a y$

zu beweisen, gelte $z \leqq u(x a_\mu y) v$ für $\mu = 1, \ldots, m$. Dann gilt auch $z \leqq (u x) a_\mu (y v)$, also $z \leqq (u x) a (y v)$, wenn $a_1 \wedge \ldots \wedge a_m \underset{v}{\leqq} a$ vorausgesetzt wird. Damit ist schon $x a_1 y \wedge \ldots \wedge x a_m y \underset{v}{\leqq} x a y$ bewiesen.

Daß sich jedes Idealsystem von H homomorph auf das v-System abbilden läßt, bedeutet

$$a_1 \wedge \ldots \wedge a_m \leqq b_1 \wedge \ldots \wedge b_n \Rightarrow a_1 \wedge \ldots \wedge a_m \underset{v}{\leqq} b_1 \wedge \ldots \wedge b_n.$$

Tatsächlich folgt für jedes Idealsystem unter Voraussetzung von $a_1 \wedge \ldots \wedge a_m \leqq b_1 \wedge \ldots \wedge b_n$ aus $z \leqq x a_\mu y$ $(\mu = 1, \ldots, m)$ zunächst $z \leqq x a_1 y \wedge \ldots \wedge x a_m y$ und dann $z \leqq x b_1 y \wedge \ldots \wedge x b_n y$ wegen $x a_1 y \wedge \ldots \wedge x a_m y \leqq x b_1 y \wedge \ldots \wedge x b_n y$, also $z \leqq x b_\nu y$ $(\nu = 1, \ldots, n)$.

Stellt man die Idealsysteme durch Untermengen von H dar, so bedeutet die Homomorphie in den Sätzen 14 und 15, daß für jedes Idealsystem gilt:

$$(a_1, \ldots, a_m)_s \leqq (a_1, \ldots, a_m) \leqq (a_1, \ldots, a_m)_v$$

oder in anderer Schreibweise, die auch für vollständige Idealsysteme gültig bleibt:

$$\mathfrak{a}_s \leqq \mathfrak{a}' \leqq \mathfrak{a}_v.$$

Allgemein sind zwei Idealsysteme, etwa das p- und q-Idealsystem genau dann homomorph, wenn in der Darstellung durch Untermengen für jedes $\mathfrak{a}$ gilt:

$$\mathfrak{a}_p \leqq \mathfrak{a}_q .$$

Die Einführung der Idealsysteme geschieht, um mit ihrer Hilfe die Einbettung einer Hauptgruppe G in eine reguläre Verbandsgruppe konstruktiv ohne Benutzung der Ordnungen von G zu ermöglichen.

Daß die Ideale zu dieser Konstruktion verwendbar sind, liegt im wesentlichen daran, daß jede Verbandsgruppe nach § 2 ein distributiver Verband ist. Es sei nämlich G eine beliebige halbgeordnete Gruppe. Dann enthält jede Oberverbandsgruppe V von G den Halbverband H der Elemente $\alpha \equiv a_1 \wedge \ldots \wedge a_m$.

H ist ersichtlich ein Idealsystem von G. V enthält ferner die Elemente $\alpha_1 \vee \ldots \vee \alpha_n$. Wird nun vorausgesetzt, daß V ein minimaler distributiver Oberverband von G ist, so besteht V auch nur aus Elementen dieser Form $\alpha_1 \vee \ldots \vee \alpha_n$. Also ist V dann ein minimaler Oberhalbverband von H, d. h. V ist ein Idealsystem von H. Man hat nur zu beachten, daß V nicht aus den g. g. T. der Elemente von H besteht, sondern aus den k. g. V. Die Einbettung einer halbgeordneten Gruppe G in eine minimale Verbandsgruppe V läßt sich somit stets in zwei Schritten vollziehen: es ist zunächst ein Idealsystem H von G zu bilden, und dann ist V ein Idealsystem von H.

Man hat nur noch zu zeigen, daß die Elemente $\alpha_1 \vee \ldots \vee \alpha_m$ schon eine Gruppe bilden. Mit $\alpha_1 \vee \ldots \vee \alpha_m$ und $\beta_1 \vee \ldots \vee \beta_n$ sind aber auch

$$(\alpha_1 \vee \ldots \vee \alpha_m)\,(\beta_1 \vee \ldots \vee \beta_n) \equiv \alpha_1\beta_1 \vee \ldots \vee \alpha_m\beta_n$$

und

$$(\alpha_1 \vee \ldots \vee \alpha_m) \wedge (\beta_1 \vee \ldots \vee \beta_n) \equiv (\alpha_1 \wedge \beta_1) \vee \ldots \vee (\alpha_m \wedge \beta_n)$$

von dieser Form. Für $\alpha \equiv a_1 \wedge \ldots \vee a_m$ ist auch $\alpha^{-1} \equiv a_1^{-1} \vee \ldots \vee a_m^{-1}$ von dieser Form, und daher für $A \equiv \alpha_1 \vee \ldots \vee \alpha_n$ auch $A^{-1} \equiv \alpha_1^{-1} \wedge \ldots \wedge \alpha_n^{-1}$.

Darüber hinaus läßt sich sogar jetzt beweisen, daß V das v-System von H ist [26]).

Dies ist eine Folge von

Satz 16. Ist H eine halbgeordnete Halbgruppe und V ein Idealsystem von H, das eine Gruppe bildet, so ist V das v-System von H.

---

[26]) Für halbgeordnete Gruppen vereinfacht sich die Definition des v-Systems. Es gilt $a \in (a_1, \ldots, a_m)_v$ genau dann, wenn für jedes x, y, z gilt:

$$x \leqq y\,a_1\,z, \ldots, x \leqq y\,a_m\,z \Rightarrow x \leqq y\,a\,z.$$

Diese Bedingung ist aber in halbgeordneten Gruppen gleichwertig mit

$$x \leqq a_1, \ldots, x \leqq a_m \Rightarrow x \leqq a.$$

Also wird $\mathfrak{a}_v = \bigcap_{\mathfrak{a} \subseteq (x)} (x)$. Diese Definition stimmt mit der Definition von Artin und v. d. Waerden überein. Vgl. [2]).

Beweis. Es sei ein Idealsystem gegeben, das eine Gruppe bildet. Dann folgt aus $a_1 \wedge \ldots \wedge a_m \underset{v}{\leqq} a$ für jedes $x \in H$

$$1 \leqq x a_1, \ldots, 1 \leqq x a_m \Rightarrow 1 \leqq x a.$$

Das gegebene Idealsystem enthält Ideale α und β mit $\alpha a \equiv 1$ und $\beta (a_1 \wedge \ldots \wedge a_m) \equiv 1$.

Es gilt dann $\beta \leqq x \Rightarrow 1 \leqq x(a_1 \wedge \ldots \wedge a_m)$

$\beta \leqq x \Rightarrow 1 \leqq x a_\mu \qquad (\mu = 1, \ldots, m)$

$\beta \leqq x \Rightarrow 1 \leqq x a$

also $\beta \leqq x \Rightarrow \alpha \leqq x$.

Hieraus folgt aber $\alpha \leqq \beta$

und somit $a_1 \wedge \ldots \wedge a_m \leqq a$.

Also gilt

$$a_1 \wedge \ldots \wedge a_m \underset{v}{\leqq} a \Rightarrow a_1 \wedge \ldots \wedge a_m \leqq a.$$

Die umgekehrte Formel

$$a_1 \wedge \ldots \wedge a_m \leqq a \Rightarrow a_1 \wedge \ldots \wedge a_m \underset{v}{\leqq} a$$

folgt aus Satz 15, womit

$$a_1 \wedge \ldots \wedge a_m \underset{v}{\leqq} a \Leftrightarrow a_1 \wedge \ldots \wedge a_m \leqq a$$

bewiesen ist.

In der Darstellung durch Untermengen schreibt sich die letzte Formel:

$$\mathfrak{a}' = \mathfrak{a}_v.$$

Mit Satz 16 ergibt sich jetzt, daß jede minimale Oberverbandsgruppe einer halbgeordneten Gruppe in zwei Schritten zu konstruieren ist:

1) es ist ein gewisses Idealsystem H zu bilden,

2) es ist das v-System von H zu bilden.

Wir nennen daher jede minimale Oberverbandsgruppe kurz eine Idealgruppe.

§ 5.

r-Gruppen.

Der Inhalt von § 3 und § 4 dient im Wesentlichen zur Untersuchung der Hauptgruppen. Wir wissen jetzt, daß eine halbgeordnete Gruppe G genau dann Hauptgruppe ist, wenn es eine reguläre Oberverbandsgruppe gibt. Gibt es eine solche Oberverbandsgruppe, so gibt es stets auch eine minimale, reguläre Oberverbandsgruppe, also eine reguläre Idealgruppe. Jede Idealgruppe läßt sich darstellen als v-Idealsystem eines Idealsystems von G. Ist eine reguläre Oberverbandsgruppe V

von G bekannt, so liefert jede vollständige, prime, invariante Unterhalbgruppe der zugehörigen Halbgruppe von V eine Ordnung von G. Ehe wir die Untersuchung fortsetzen, fragen wir uns jetzt, was diese Ergebnisse für die Arithmetik der kommutativen Integritätsbereiche bedeuten. Zunächst lassen sie sich hierauf noch nicht anwenden, denn für den Quotientenkörper K eines Integritätsbereiches interessieren ja gar nicht die sämtlichen Ordnungen von K, sondern es interessieren nur die Bewertungen von K.

Die Bewertungen eines Körpers K lassen sich nun kennzeichnen als diejenigen Ordnungen von K, die durch zulässige Ordnungen des DEDEKINDschen Idealsystems von K induziert werden[2]).

Damit unsere Untersuchung der halbgeordneten Gruppen auch die speziellen Fragen der Arithmetik der kommutativen Integritätsbereiche umfaßt, legen wir daher von jetzt ab eine halbgeordnete Gruppe zugrunde, zu der von vornherein ein festes Idealsystem gegeben ist. Ist dies das System der r-Ideale, so nennen wir die halbgeordnete Gruppe kurz eine r-Gruppe.

In einer r-Gruppe erklären wir nur diejenigen Halbordnungen als r-zulässig, die durch eine zulässige Ordnung des r-Idealsystems induziert werden.

Die r-zulässigen Halbordnungen lassen sich unabhängig von dem Begriff der zulässigen Halbordnung eines Halbverbandes kennzeichnen. Ist nämlich eine beliebige halbgeordnete Gruppe G gegeben, und ist H ein Idealsystem von G, so gilt

Satz 17. Eine Halbordnung $\dot{\leqq}$ von G wird genau dann durch eine zulässige Halbordnung von H induziert, wenn

$$1)\quad a \leqq b \Rightarrow a \dot{\leqq} b$$

erfüllt ist und wenn aus $a_1 \wedge \ldots \wedge a_m \leqq a$ in H für jedes $x \in G$ folgt

$$2)\quad x \dot{\leqq} a_1, \ldots, x \dot{\leqq} a_m \Rightarrow x \dot{\leqq} a.$$

Beweis. Ist $\dot{\leqq}$ eine zulässige Halbordnung von H, so gilt 1) und

$$a_1 \wedge \ldots \wedge a_m \leqq a \Rightarrow a_1 \wedge \ldots \wedge a_m \dot{\leqq} a$$

$$x \dot{\leqq} a_1, \ldots, x \dot{\leqq} a_m \Rightarrow x \dot{\leqq} a_1 \wedge \ldots \wedge a_m.$$

Also ist auch 2) für die in G induzierte Halbordnung erfüllt. Ist umgekehrt $\dot{\leqq}$ eine Halbordnung von G, die 1) und 2) erfüllt, so ist das von G bezügl. $\dot{\leqq}$ gebildete v-Idealsystem[27]) ein homomorphes Bild von H, definiert also eine zulässige Halbordnung von H, die $\dot{\leqq}$ induziert.

[27]) Es gilt $a_1 \wedge \ldots \wedge a_m \underset{v}{\dot{\leqq}} a$ genau dann, wenn für jedes $x \in G$

$$x \dot{\leqq} a_1, \ldots, x \dot{\leqq} a_m \Rightarrow x \dot{\leqq} a$$

gilt.

Für die Ordungen von G gilt darüber hinaus

Satz 18. Die zulässigen Ordnungen von H entsprechen eineindeutig den Ordnungen von G, die 1) und 2) erfüllen.

Beweis. Für jede zulässige Ordnung $\dot{\leqq}$ gilt:

$$a_1 \wedge \ldots \wedge a_m \dot{\leqq} b_1 \wedge \ldots \wedge b_n \langle = \rangle \min a_\mu \dot{\leqq} \min b_\nu .$$

Zwei Ordnungen von H, die dieselbe Ordnung von G induzieren, sind also identisch. Ferner wird jede Ordnung $\dot{\leqq}$, die 1) und 2) erfüllt, durch eine Ordnung von H induziert, da das von G bezügl. $\leqq$ gebildete v-Idealsystem eine geordnete Menge ist.

Ist G eine r-Gruppe und $\mathfrak{g}$ die zugehörige Halbgruppe, so entsprechen die r-zulässigen Halbordnungen bzw. Ordnungen von G den invarianten Unterhalbgruppen bzw. den linearen, invarianten Unterhalbgruppen $\dot{\mathfrak{g}}$ die

1) $\mathfrak{g} \leqq \dot{\mathfrak{g}}$

erfüllen, und für die aus $a_1 \wedge \ldots \wedge a_m \underset{v}{\leqq} a$ folgt:

2) $a_1 \in \dot{\mathfrak{g}}, \ldots, a_m \in \dot{\mathfrak{g}} \Rightarrow a \in \dot{\mathfrak{g}}$.

Statt 2) läßt sich auch schreiben:

$$a_1 \in \dot{\mathfrak{g}}, \ldots, a_m \in \dot{\mathfrak{g}} \Rightarrow (a_1, \ldots, a_m)_r \leqq \dot{\mathfrak{g}} .$$

Wir nennen die invarianten Unterhalbgruppen von G, die 1) und 2) erfüllen, die r-zulässigen Halbgruppen von G.

Eine r-Gruppe G heißt r-Hauptgruppe, wenn die Halbordnung von G nicht nur Konjunktion von Ordnungen von G ist, sondern sogar Konjunktion von r-zulässigen Ordnungen ist. Das ist also genau dann der Fall, wenn die zugehörige Halbgruppe Durchschnitt von linearen r-zulässigen Halbgruppen ist.

Eine r-Hauptgruppe G läßt sich demnach in eine Vektorgruppe einbetten, die das direkte Produkt von geordneten Gruppen ist, deren Ordnungen r-zulässige Ordnungen von G induzieren. Wir nennen jede solche Obervektorgruppe „r-zulässig".

Da jede Vektorgruppe eine Verbandsgruppe ist, enthält jede Obervektorgruppe von G eine minimale Oberverbandsgruppe von G, also eine Idealgruppe.

Jede Idealgruppe von G, die in einer r-zulässigen Obervektorgruppe von G enthalten ist, nenen wir ebenfalls „r-zulässig".

Satz 19. Ist G eine r-Hauptgruppe, so ist eine Idealgruppe V von G genau dann r-zulässig, wenn V regulär ist und jede zulässige Ordnung von V eine r-zulässige Ordnung von G induziert.

Beweis. Jede reguläre Idealgruppe, deren zulässige Ordnungen r-zulässige Ordnungen von G induzieren, läßt sich nach Satz 13 in eine r-zulässige Vektorgruppe einbetten.

Umgekehrt ist jede Idealgruppe V, die in eine r-zulässige Vektorgruppe einbettbar ist, zunächst jedenfalls regulär. Ferner gilt für jede zulässige Halbordnung $\dot{\leqq}$ von V und für jedes $a_1, \ldots, a_m, a \in G$ mit $a_1 \wedge \ldots \wedge a_m \leqq a$

$$x \dot{\leqq} a_1, \ldots, x \dot{\leqq} a_m \Rightarrow x \dot{\leqq} a.$$

Die Halbordnung $\leqq$ von V ist Konjunktion von zulässigen Ordnungen $\underset{\tau}{\leqq}$, für die gilt

$$a_1 \wedge \ldots \wedge a_m \underset{\iota}{\leqq} a \Rightarrow a_1 \wedge \ldots \wedge a_m \underset{\tau}{\leqq} a,$$

da diese Ordnungen r-zulässige Ordnungen von G induzieren. Also gilt für jedes $a_1, \ldots, a_m, a \in G$ mit $a_1 \wedge \ldots \wedge a_m \underset{\iota}{\leqq} a$

$$x \dot{\leqq} a_1, \ldots, x \dot{\leqq} a_m \Rightarrow x \dot{\leqq} a,$$

d. h. $\dot{\leqq}$ induziert eine r-zulässige Halbordnung von G.

Nach dem Beweis von Satz 19 induziert nicht nur jede zulässige Ordnung einer r-zulässigen Idealgruppe eine r-zulässige Ordnung von G, sondern allgemeiner jede zulässige Halbordnung eine r-zulässige Halbordnung.

Für die zulässigen Ordnungen gilt genauer

Satz 20. Die zulässigen Ordnungen einer r-zulässigen Idealgruppe V entsprechen eineindeutig den induzierten r-zulässigen Ordnungen von G.

Beweis. Jedes Element von V läßt sich in der Form $\alpha_1 \vee \ldots \vee \alpha_n$ schreiben, wobei α_ν Elemente der Form $a_1 \wedge \ldots \wedge a_m$ sind mit $a_\mu \in G$. Für jede zulässige Ordnung $\dot{\leqq}$ von V gilt nun

$$\alpha_1 \vee \ldots \vee \alpha_n \doteq \max \alpha_\nu \text{ [28]}$$

und

$$a_1 \wedge \ldots \wedge a_m \doteq \min a_\mu \in G.$$

Also gibt es zu jedem $A \in V$ ein $a \in G$ mit $A \doteq a$, d. h. die Ordnung $\dot{\leqq}$ von V ist eindeutig bestimmt durch die in G induzierte Ordnung.

Wegen Satz 10 entsprechen also die primen, vollständigen, invarianten Unterhalbgruppen der zugehörigen Halbgruppe einer r-zulässigen Idealgruppe V eineindeutig den r-zulässigen Ordnungen, die durch zulässige Ordnungen von V induziert werden.

---

[28]) Nach der Definition der Zulässigkeit gilt jedenfalls

$$\alpha_1^{-1} \wedge \ldots \wedge \alpha_n^{-1} \doteq \min \alpha_\nu^{-1},$$

also

$$(\alpha_1^{-1} \wedge \ldots \wedge \alpha_n)^{-1} \doteq (\min \alpha_\nu^{-1})^{-1}$$

d. h.

$$\alpha_1 \vee \ldots \vee \alpha_n \doteq \max \alpha_\nu.$$

Es ist daher wichtig, daß es eine r-zulässige Idealgruppe gibt, deren zulässige Ordnungen die sämtlichen r-zulässigen Ordnungen von G induzieren. Man hat nur zu bedenken, daß die Halbordnung einer r-Hauptgruppe die Konjunktion der sämtlichen r-zulässigen Ordnungen ist. Die Gruppe der Vektoren $\{\ldots, a_\tau \ldots\}$, die zu jeder r-zulässigen Ordnung $\underset{\tau}{\leqq}$ genau ein Element $a_\tau \in G$ enthalten, ist also eine r-zulässige Obervektorgruppe und enthält eine r-zulässige Idealgruppe, deren zulässige Ordnungen eineindeutig den sämtlichen r-zulässigen Ordnungen von G entsprechen. Wir nennen diese r-zulässige Idealgruppe die ausgezeichnete Idealgruppe und bezeichnen sie mit $V_a^{(r)}$.

Satz 21. Jede r-zulässige Idealgruppe V ist ein homomorphes Bild von $V_a^{(r)}$.

Beweis. Die Behauptung des Satzes läßt sich einfacher auf folgende Weise ausdrücken:

Eine Relation

$$\alpha_1 \vee \ldots \vee \alpha_m \leqq \beta_1 \vee \ldots \vee \beta_m$$

mit $\alpha_\mu \equiv a_{\mu 1} \wedge \ldots \wedge a_{\mu m_\mu}$ und $\beta_\nu \equiv b_{\nu 1} \wedge \ldots \wedge b_{\nu n_\nu}$ mit $a_{\mu\nu}, b_{\mu\nu} \in G$ gilt stets dann in V, wenn sie in $V_a^{(r)}$ gilt. Da eine solche Relation in $V_a^{(r)}$ gilt, wenn sie für alle r-zulässigen Ordnungen von G gilt, in V dagegen, wenn sie für gewisse r-zulässige Ordnungen von G gilt, so ist diese Behauptung aber selbstverständlich.

Wegen Satz 9 entsprechen also die r-zulässigen Idealgruppen eineindeutig gewissen vollständigen, invarianten Unterhalbgruppen der zugehörigen Halbgruppe von $V_a^{(r)}$.

Satz 22. Die r-zulässigen Idealgruppen entsprechen eineindeutig den regulären, vollständigen invarianten Unterhalbgruppen S der zugehörigen Halbgruppe von $V_a^{(r)}$, die mit G nur die Einheitenguppe E von G gemeinsam haben, also die Bedingung

$$S \cap G = E$$

erfüllen.

Beweis. Ist S eine reguläre, vollständige, invariante Unterhalbgruppe der zugehörigen Halbgruppe von $V_a^{(r)}$ und gilt $S \cap G = E$, so definiert S eine Halbordnung $\dot{\leqq}$ von $V_a^{(r)}$, so daß $V_a^{(r)}$ bezügl. $\dot{\leqq}$ eine reguläre Verbandsgruppe V ist und für jedes $a, b \in G$ gilt

$$a \leqq b \langle = \rangle a \dot{\leqq} b.$$

Es gilt nämlich zunächst $a \leqq b \Rightarrow a \dot{\leqq} b$, weil $\dot{\leqq}$ eine zulässige Halbordnung ist. Gilt $a \dot{\leqq} b$, so folgt $1 \vee b^{-1} a \in S$, also $1 \vee b^{-1} a \equiv 1$, woraus sich $b^{-1} a \leqq 1$ und $a \leqq b$ ergibt. $V_a^{(r)}$ ist also bezügl. $\dot{\leqq}$ eine reguläre Verbandsgruppe V, die G isomorph enthält, d. h. eine reguläre Idealgruppe von G. Daß V r-zulässig ist, ergibt sich sofort daraus, daß jede zulässige Ordnung von V einem Homomorphismus von V entspricht. Da nämlich V homomorph zu $V_a^{(r)}$ ist, definiert jeder Homo-

morphismus von V auch einen Homomorphismus von $V_a^{(r)}$. Jede zulässige Ordnung von V definiert daher eine zulässige Ordnung von $V_a^{(r)}$ – und indiziert in G also eine r-zulässige Ordnung.

Die Umkehrung ist trivial, weil jedes S, das einen Homomorphismus von $V_a^{(r)}$ auf eine Idealgruppe V definiert, keine Nichteinheit c von G enthalten darf. Es würde dann nämlich c in V eine Einheit werden, im Widerspruch dazu, daß V Idealgruppe ist, also G isomorph enthält.

Wir wollen jetzt noch berücksichtigen, daß nach § 4 jede Idealgruppe ein Idealsystem enthält und schon eindeutig durch dieses Idealsystem bestimmt ist. Wir nennen die Idealsysteme, die in einer r-zulässigen Idealgruppe enthalten sind, r-brauchbar. Speziell dasjenige r-brauchbare Idealsystem, das in der ausgezeichneten r-zulässigen Idealgruppe $V_a^{(r)}$ enthalten ist, nennen wir das r_a-System[29]). Über dieses Idealsystem gilt

Satz 23. Jedes r-brauchbare Idealsystem ist zum r_a-System und erst recht zum r-System homomorph.

Beweis. Daß jedes r-brauchbare Idealsystem homomorph zum r_a-System ist, ergibt sich aus Satz 21.

Weil ferner jede zulässige Ordnung $\leqq$ einer r-zulässigen Idealgruppe V für jedes $a_1, \ldots, a_m, a \in G$ die Bedingung

$$a_1 \wedge \ldots \wedge a_m \underset{r}{\leqq} a \Rightarrow a_1 \wedge \ldots \wedge a_m \underset{r}{\leqq} a$$

erfüllt, gilt auch für das in V enthaltene Idealsystem

$$a_1 \wedge \ldots \wedge a_m \underset{r}{\leqq} a \Rightarrow a_1 \wedge \ldots \wedge a_m \leqq a.$$

Aus dem Beweis von Satz 19 ergibt sich jetzt sofort wegen Satz 16, daß sich die r-brauchbaren Idealsysteme dadurch kennzeichnen lassen, daß sie homomorph zum r-Idealsystem sind, und daß ihre v-Ideale eine reguläre Verbandsgruppe bilden[30]).

§ 6.

Die r-Abschließung.

Wir wollen in diesem § nachweisen, daß sich das ausgezeichnete r-brauchbare Idealsystem, das r_a-System, einer r-Hauptgruppe unabhängig von den Begriffen der vorhergehenden §§ kennzeichnen läßt.

[29]) Das r_a-System stimmt für kommutative Gruppen mit dem in [2]) definierten r_a-System überein, wie in § 6 bewiesen wird.

[30]) Statt Satz 19 kann man jetzt auch beweisen:

Eine Idealgruppe V von G ist genau dann r-zulässig, wenn V regulär ist und ein Idealsystem von G enthält, das zum r-System homomorph ist.

Es sei G eine beliebige r-Gruppe, $\mathfrak{g}$ die zugehörige Halbgruppe, $\dot{\mathfrak{g}}$ eine r-zulässige Halbgruppe, $\mathfrak{a} = \{a_1, \ldots, a_m\}$ eine endliche Untermenge von G und $a \in G$.

Wir bezeichnen das r-Ideal $(a_1, \ldots, a_m)_r$ mit $\mathfrak{a}_r$.

Wir definieren das Produkt $\mathfrak{a}_r . \dot{\mathfrak{g}}$ als die kleinste Untermenge von G, die sämtliche Elemente $a\dot{g}$ mit $a \in \mathfrak{a}_r$ und $\dot{g} \in \dot{\mathfrak{g}}$ enthält und außerdem für jedes $x_1, \ldots, x_n \in G$ die Bedingung

$$x_1 \in \mathfrak{a}_r . \dot{\mathfrak{g}}, \ldots, x_n \in \mathfrak{a}_r . \dot{\mathfrak{g}} \Rightarrow (x_1, \ldots, x_n)_r \leqq \mathfrak{a}_r . \dot{\mathfrak{g}}$$

erfüllt.

Wir nennen ein Element a von G r-abhängig von $\mathfrak{a}_r$ in $\dot{\mathfrak{g}}$, wenn für jede lineare, r-zulässige Halbgruppe $\mathfrak{h}$ gilt:

$$\dot{\mathfrak{g}} \leqq \mathfrak{h} \Rightarrow a \in \mathfrak{a}_r . \mathfrak{h}.$$

Die Gültigkeit von $a \in \mathfrak{a}_r . \mathfrak{h}$ besagt, daß für die $\mathfrak{h}$ entsprechende Ordnung gilt: $\min a_\mu \leqq a$.

Ist G eine r-Hauptgruppe, so ist also a genau dann r-abhängig von $\mathfrak{a}_r$ (in $\mathfrak{g}$)[31]), wenn für jede r-zulässige Ordnung $\underset{\tau}{\leqq}$ von G gilt: $\min a_\mu \underset{\tau}{\leqq} a$. Genau dann gilt aber in dem r_a-Idealsystem $a_1 \wedge \ldots \wedge a_m \leqq a$ oder also $a \in (a_1, \ldots, a_m)_{r_a}$.

Wir untersuchen jetzt die r-Abhängigkeit für beliebige r-Gruppen genauer.

Zunächst folgt aus $a \in \mathfrak{a}_r . \dot{\mathfrak{g}}$ stets, daß a r-abhängig ist von $\mathfrak{a}_r$ in $\dot{\mathfrak{g}}$. Zur Formulierung einer weiteren Eigenschaft der r-Abhängigkeit bezeichnen wir für jedes $x \in G$ mit $\dot{\mathfrak{g}}(x)_r$ den Durchschnitt aller r-zulässigen Halbgruppen, die $\dot{\mathfrak{g}}$ umfassen und außerdem x enthalten. $\dot{\mathfrak{g}}(x)_r$ ist wieder eine r-zulässige Halbgruppe, die „r-Erweiterung" von $\dot{\mathfrak{g}}$ mit x.

Ist nun a r-abhängig von $\mathfrak{a}_r$ in $\dot{\mathfrak{g}}(x)_r$ und $\dot{\mathfrak{g}}(x^{-1})_r$, so ist a auch r-abhängig von $\mathfrak{a}_r$ in $\dot{\mathfrak{g}}$. Denn jede lineare r-zulässige Halbgruppe $\mathfrak{h}$ enthält stets x oder x^{-1}. Aus $\dot{\mathfrak{g}} \leqq \mathfrak{h}$ folgt also $\dot{\mathfrak{g}}(x)_r \leqq \mathfrak{h}$ oder $\dot{\mathfrak{g}}(x^{-1}) \leqq \mathfrak{h}$, woraus die Behauptung folgt. Wir zeigen jetzt umgekehrt, daß diese Eigenschaft der r-Abhängigkeit ausreicht, um sie zu kennzeichnen.

Wir definieren dazu eine Relation α_r zwischen den Elementen a und den Produkten $\mathfrak{a}_r . \dot{\mathfrak{g}}$.

Wir setzen $a \alpha_r \mathfrak{a}_r . \dot{\mathfrak{g}}$, wenn es Elemente $x_1, \ldots, x_n$ von G gibt mit $a \in \mathfrak{a}_r . \dot{\mathfrak{g}}\ (x_1^{+1}, \ldots, x_n^{+1})$ für jede der 2^n möglichen Vorzeichenkombinationen.

Satz 24. a ist genau dann r-abhängig von $\mathfrak{a}_r$ in $\dot{\mathfrak{g}}$, wenn $a \alpha_r \mathfrak{a}_r . \mathfrak{g}$ gilt[32]).

---

[31]) Gilt die Abhängigkeit in der zugehörigen Halbgruppe $\mathfrak{g}$, so unterlassen wir die Angabe von $\mathfrak{g}$.

[32]) Vgl. hierzu den Beweis in der Einleitung.

Beweis. Wir haben ersichtlich nur noch zu beweisen, daß a nicht r-abhängig ist von $\mathfrak{a}_r$ in $\dot{\mathfrak{g}}$, wenn $a\,\alpha_r\,\mathfrak{a}_r\,.\,\dot{\mathfrak{g}}$ nicht gilt. Wir schreiben dann $a\,\bar{\alpha}_r\,\mathfrak{a}_r\,.\,\dot{\mathfrak{g}}$.

Wir müssen zeigen, daß es mindestens eine lineare r-zulässige Halbgruppe $\mathfrak{h}$ gibt, die $\dot{\mathfrak{g}}$ umfaßt und für die $a\,\bar{\in}\,\mathfrak{a}_r\,.\,\mathfrak{h}$ gilt.

Wir werden durch Wohlordnung zeigen, daß es jedenfalls eine maximale r-zulässige Halbgruppe $\mathfrak{h}$ gibt mit $a\,\bar{\alpha}_r\,\mathfrak{a}_r\,.\,\mathfrak{h}$, d. h. für jede r-zulässige Halbgruppe $\mathfrak{h}'$ mit $\mathfrak{h}\subset\mathfrak{h}'$ gilt $a\,\alpha_r\,\mathfrak{a}_r\,.\,\mathfrak{h}'$. Ist das bewiesen, so ist $\mathfrak{h}$ linear, denn es kann für kein $x\in G$ gelten: $x\,\bar{\in}\,\mathfrak{h}$ und $x^{-1}\,\bar{\in}\,\mathfrak{h}$, da hieraus wegen $\mathfrak{h}\subset\mathfrak{h}(x)_r$ und $\mathfrak{h}\subset\mathfrak{h}(x^{-1})_r$ folgen würde:

$$a\,\alpha_r\,\mathfrak{a}_r\,.\,\mathfrak{h}(x)_r,\quad a\,\alpha_r\,\mathfrak{a}_r\,.\,\mathfrak{h}(x^{-1})_r,$$

also $a\,\alpha_r\,\mathfrak{a}_r\,.\,\mathfrak{h}$.

Zum Beweis der Existenz einer maximalen r-zulässigen Halbgruppe mit $a\,\bar{\alpha}_r\,\mathfrak{a}_r\,.\,\mathfrak{h}$ hat man nur zu zeigen, daß für jede wohlgeordnete Folge

$$\mathfrak{g}_0 \leqq \ldots \leqq \mathfrak{g}_\tau \leqq \ldots$$

von r-zulässigen Halbgruppen $\mathfrak{g}_\tau$ mit $a\,\bar{\alpha}_r\,\mathfrak{a}_r\,.\,\mathfrak{g}_\tau$ auch die Vereinigung $\mathfrak{g}' = \bigcup \mathfrak{g}_\tau$ eine r-zulässige Halbgruppe mit $a\,\bar{\alpha}_r\,\mathfrak{a}_r\,.\,\mathfrak{g}'$ ist. $\mathfrak{g}'$ ist eine r-zulässige Halbgruppe. Denn, gilt $x_1\wedge\ldots\wedge x_n \underset{r}{\leqq} x$ und $x_\nu\in\mathfrak{g}'$, so folgt, daß es ein τ gibt mit $x_\nu\in\mathfrak{g}_\tau$. Also gilt auch $x\in\mathfrak{g}_\tau$ und $x\in\mathfrak{g}'$. Ebenso leicht folgt: $a\,\bar{\alpha}_r\,\mathfrak{a}_r\,.\,\mathfrak{g}'$. Aus $a\in\mathfrak{a}_r\,.\,\mathfrak{g}'(x_1^{+1},\ldots,x_n^{+1})_r$ würde nämlich für mindestens ein τ auch $a\in\mathfrak{a}_r\,.\,\mathfrak{g}_\tau(x_1^{+1},\ldots,x_n^{+1})$, also $a\,\alpha_r\,\mathfrak{a}_r\,.\,\mathfrak{g}_\tau$ folgen. Damit ist Satz 24 bewiesen.

Die Bedeutung dieses Satzes liegt darin, daß es jetzt möglich ist, für jede r-Hauptgruppe eine direkte Konstruktion des r_a-Idealsystems anzugeben.

Dieses Idealsystem läßt sich z. B. durch Untermengen $(a_1,\ldots,a_m)_{r_a}$ definieren, indem man festsetzt, daß

$$a\in(a_1,\ldots,a_m)_{r_a}$$

genau dann gelten soll, wenn für $\mathfrak{a}=\{a_1,\ldots,a_m\}$ gilt

$$a\,\alpha_r\,\mathfrak{a}_r\,.\,\mathfrak{g}\ ^{33}).$$

Auf diese Weise kann man auch ein vollständiges r_a-Idealsystem definieren [34]).

Führt man dieselbe Konstruktion nicht nur für r-Hauptgruppen, sondern auch für beliebige r-Gruppen durch, so bilden die Untermengen $(a_1,\ldots,a_m)_{r_a}$ natürlich kein Idealsystem mehr. Ein Idealsystem

[33]) $\mathfrak{g}$ bezeichnet wieder die zugehörige Halbgruppe.

[34]) Auch für den Beweis von Satz 24 braucht das Ideal $\mathfrak{a}_r$ keine endliche Basis zu haben. Es ist nur notwendig, daß das r-System „endlichartig" ist. Vgl. [2]).

bilden sie ja nur dann, wenn die Mengen $(a)_{r_a}$ genau die Hauptideale sind, also wenn $(1)_{r_a} = \mathfrak{g}$ gilt. Gilt $a\,\mathfrak{a}_r(1).\dot{\mathfrak{g}}$, so nennen wir a r-abhängig von $\dot{\mathfrak{g}}$, da $(1).\dot{\mathfrak{g}} = \dot{\mathfrak{g}}$ ist.

Liegt jedes von $\dot{\mathfrak{g}}$ r-abhängige Element in $\dot{\mathfrak{g}}$, so nennen wir $\dot{\mathfrak{g}}$ r-abgeschlossen.

Aus Satz 24 folgt jetzt

Satz 25. Eine r-zulässige Halbgruppe $\mathfrak{g}$ ist genau dann r-abgeschlossen, wenn $\dot{\mathfrak{g}}$ Durchschnitt von linearen r-zulässigen Halbgruppen ist.

Satz 26. Eine r-Gruppe ist genau dann r-Hauptgruppe, wenn die zugehörige Halbgruppe r-abgeschlossen ist.

Ist G keine r-Hauptgruppe, so bilden die von $\mathfrak{g}$ r-abhängigen Elemente eine r-zulässige Halbgruppe $\dot{\mathfrak{g}}$. ($\dot{\mathfrak{g}}$ ist nämlich der Durchschnitt aller linearen r-zulässigen Halbgruppen von G). Wir nennen $\dot{\mathfrak{g}}$ die r-abgeschlossene Hülle von $\dot{\mathfrak{g}}$.

Wir zeigen zum Schluß, daß für kommutative r-Gruppen unser Begriff der r-Abhängigkeit mit dem dort üblichen Begriff zusammenfällt.

Satz 27. Ist G eine kommutative Gruppe, $a \in G$, $\mathfrak{a}_r$ ein r-Ideal und $\dot{\mathfrak{g}}$ eine r-zulässige Halbgruppe, so gilt genau dann $a\,\mathfrak{a}_r\,\mathfrak{a}_r.\dot{\mathfrak{g}}$, wenn es ein r-Ideal $\mathfrak{c}_r = (c_1, \ldots, c_m)_r$ gibt mit $a\,\mathfrak{c}_r \leqq \mathfrak{a}_r\,\mathfrak{c}_r.\dot{\mathfrak{g}}$[35].

Beweis. Wir beweisen zunächst durch Induktion nach n, daß aus $a \in \mathfrak{a}_r.\dot{\mathfrak{g}}(x_1^{\pm 1}, \ldots, x_n^{\pm 1})_r$ die Existenz eines Ideals $\mathfrak{c}_r$ folgt mit $a\,\mathfrak{c}_r \leqq \mathfrak{a}_r\,\mathfrak{c}_r.\dot{\mathfrak{g}}$. Dies ist für $n = 0$ trivial. Setzen wir es jetzt für n voraus, so folgt aus $a \in \mathfrak{a}_r.\dot{\mathfrak{g}}(x^{\pm 1}, x_1^{\pm 1}, \ldots, x_n^{\pm 1})_r$ die Existenz von r-Idealen $\mathfrak{c}_r'$ und $\mathfrak{c}_r''$ mit

$$a\,\mathfrak{c}_r' \leqq \mathfrak{a}_r\,\mathfrak{c}_r'.\dot{\mathfrak{g}}(x)_r \quad \text{und} \quad a\,\mathfrak{c}_r'' \leqq \mathfrak{a}_r\,\mathfrak{c}_r''.\dot{\mathfrak{g}}(x^{-1})_r.$$

Hieraus folgt für $\mathfrak{c}_r = \mathfrak{c}_r'\,\mathfrak{c}_r''$

$$a\,\mathfrak{c}_r \leqq \mathfrak{a}_r\,\mathfrak{c}_r.\dot{\mathfrak{g}}(x)_r \quad \text{und} \quad a\,\mathfrak{c}_r \leqq \mathfrak{a}_r\,\mathfrak{c}_r.\dot{\mathfrak{g}}(x^{-1})_r.$$

Da $\dot{\mathfrak{g}}(x)_r$ die Vereinigung der Glieder der Folge

$$\dot{\mathfrak{g}} \leqq (1, x)_r.\dot{\mathfrak{g}} \leqq (1, x, x^2)_r.\dot{\mathfrak{g}} \leqq \ldots$$

ist, folgt jetzt für geeignete natürliche Zahlen n' und n''

$$a\,\mathfrak{c}_r \leqq \mathfrak{a}_r\,\mathfrak{c}_r(1, x, \ldots, x^{n'})_r.\dot{\mathfrak{g}}$$

$$a\,\mathfrak{c}_r \leqq \mathfrak{a}_r\,\mathfrak{c}_r(1, x^{-1}, \ldots, x^{-n''})_r.\dot{\mathfrak{g}}.$$

Für $n = n' + n''$ gilt dann

$$a\,\mathfrak{c}_r(1, x, \ldots, x^n)_r \leqq \mathfrak{a}_r\,\mathfrak{c}_r(1, x, \ldots, x^n)_r.\dot{\mathfrak{g}}.$$

Um die Umkehrung zu beweisen, daß aus $a\,\mathfrak{c}_r \leqq \mathfrak{a}_r\,\mathfrak{c}_r.\dot{\mathfrak{g}}$ stets $a\,\mathfrak{a}_r\,\mathfrak{a}_r.\dot{\mathfrak{g}}$ folgt, bemerken wir zunächst, daß es zu jedem Ideal $\mathfrak{c}_r = (c_1, \ldots, c_m)_r$

[35]) Dieser Satz gilt nicht nur für Ideale $\mathfrak{a}_r$ mit endlicher Basis.

ein Ideal $\mathfrak{d}_r$ gibt, so daß

$$\mathfrak{c}_r \mathfrak{d}_r = \mathfrak{c}_r^{(1)} \mathfrak{c}_r^{(2)} \dots \mathfrak{c}_r^{(n)}$$

gilt, wobei $\mathfrak{c}_r^{(\nu)} = (1, x_\nu)_r$ ist, $x_\nu \in G$[36]).

Es genügt daher, durch Induktion nach n zu beweisen, daß aus

$$a\, \mathfrak{c}_r^{(1)} \dots \mathfrak{c}_r^{(n)} \leqq \mathfrak{a}_r\, \mathfrak{c}_r^{(1)} \dots \mathfrak{c}_r^{(n)}$$

stets $a \mathfrak{a}_r \mathfrak{a}_r . \dot{\mathfrak{g}}$ folgt.

Die Behauptung ist für $n = 0$ trivial.

Wir setzen jetzt die Richtigkeit für n voraus.

Es gelte dann

$$a\, \mathfrak{c}_r^{(1)} \dots \mathfrak{c}_r^{(n+1)} \leqq \mathfrak{a}_r\, \mathfrak{c}_r^{(1)} \dots \mathfrak{c}_r^{(n+1)} . \dot{\mathfrak{g}}.$$

Wir setzen

$$\mathfrak{c}_r = \mathfrak{c}_r^{(1)} \dots \mathfrak{c}_r^{(n)}$$
$$\mathfrak{c}_r^{(n+1)} = (1, x)_r.$$

Aus

$$a\, \mathfrak{c}_r (1, x)_r \leqq \mathfrak{a}_r\, \mathfrak{c}_r (1, x)_r . \dot{\mathfrak{g}}$$

folgt nun

$$a\, \mathfrak{c}_r \leqq \mathfrak{a}_r \mathfrak{c}_r . \dot{\mathfrak{g}} (x)_r$$

und wegen

$$a\, \mathfrak{c}_r (x^{-1}, 1)_r \leqq \mathfrak{a}_r\, \mathfrak{c}_r (x^{-1}, 1)_r . \dot{\mathfrak{g}}$$

auch

$$a\, \mathfrak{c}_r \leqq \mathfrak{a}_r \mathfrak{c}_r . \dot{\mathfrak{g}} (x^{-1})_r .$$

Hieraus folgt jetzt

$$a\, \mathfrak{a}_r \mathfrak{a}_r . \dot{\mathfrak{g}} (x)_r \quad \text{und} \quad a\, \mathfrak{a}_r \mathfrak{a}_r . \dot{\mathfrak{g}} (x^{-1})_r ,$$

also

$$a\, \mathfrak{a}_r \mathfrak{a}_r . \dot{\mathfrak{g}}.$$

---

[36]) Dieser Schluß stammt von DEDEKIND. Man beweist ihn durch Induktion nach m mit der folgenden Identität, die in beliebigen kommutativen „Halbverbandshalbgruppen“ gilt:

$$(a \wedge b \wedge c)\, (ab \wedge ac \wedge bc) \equiv (a \wedge b)\, (a \wedge c)\, (b \wedge c).$$

II. TEIL.

Die Ergebnisse von Teil I werden vorausgesetzt.

§ 1 geht zunächst auf die geordneten Gruppen ein, die für den nichtkommutativen Fall bisher kaum behandelt sind [1]). Es wird eine Möglichkeit angegeben, solche Gruppen aus einfacheren aufzubauen.

§ 2 beantwortet dann die Frage, wann eine beliebige Gruppe überhaupt geordnet werden kann. Dazu wird eine wesentliche Verschärfung von Satz 25 (Teil 1) benutzt.

---

[1]) Vgl. R. BAER, J. reine angew. Math. 160, 1929.

Durch Spezialisierung des Idealsystems auf das s-Idealsystem folgt aus dieser Verschärfung, daß sich eine Gruppe G genau dann ordnen läßt, wenn es keine von 1 s-abhängigen Elemente außer 1 gibt.

Ist G kommutativ, so besagt diese Bedingung, daß G keine Elemente endlicher Ordnung außer dem Einselement 1 haben darf. In § 3 wird nachgewiesen, daß dieses letzte Ergebnis auch aus einem allgemeineren Satz über kommutative Halbgruppen folgt, der sich ohne Voraussetzung des I. Teils beweisen läßt.

§ 1.

M sei eine beliebige Menge, $\leqq$ eine Halbordnung von M. $a, b, \ldots$ seien Elemente von M.

Während wir in Teil 1 außer Acht gelassen haben, ob die Halbordnung $\leqq$ die Bedingung

$$a \equiv b \Rightarrow a = b$$

erfüllt oder nicht, nennen wir jetzt jede Halbordnung, die diese Bedingung erfüllt, streng.

Eine halbgeordnete Gruppe ist also genau dann streng halbgeordnet, wenn sie keine Einheiten außer dem Einselement 1 besitzt. Der Gegenstand dieser Arbeit sind die strengen Ordnungen von Gruppen.

Die einfachsten Beispiele für streng geordnete Gruppen sind die „reellen Gruppen", d. h. die Untergruppen der additiven Gruppe R aller reellen Zahlen. Die reellen Gruppen sind bekanntlich dadurch gekennzeichnet, daß sie „archimedisch geordnet" [2]) sind.

Um nichtkommutative, streng geordnete Gruppen zu erhalten, muß man also nichtarchimedisch geordnete Gruppen aufbauen. Wir geben hierzu die folgende Konstruktion an:

Es sei N eine beliebige, streng geordnete Gruppe. Ein Automorphismus σ von N heißt Ordnungsautomorphismus, wenn für jedes $a, b \in N$ mit den Bildern a^σ, b^σ gilt

$$a \leqq b \Rightarrow a^\sigma \leqq b^\sigma.$$

Die Ordnungsautomorphismen von N bilden eine Gruppe. Denn, sind σ und τ Ordnungsautomorphismen, so folgt aus $a \leqq b$ zunächst $a^{\sigma^{-1}} \leqq b^{\sigma^{-1}}$, da aus $a^{\sigma^{-1}} > b^{\sigma^{-1}}$ nämlich $a > b$ folgen würde. Aus $a^{\sigma^{-1}} \leqq b^{\sigma^{-1}}$ folgt aber $a^{\sigma^{-1}\tau} \leqq b^{\sigma^{-1}\tau}$, also ist $\sigma^{-1}\tau$ ebenfalls ein Ordnungsautomorphismus. Ist S eine weitere streng geordnete Gruppe und φ ein Homomorphismus von S in die Gruppe der Ordnungsautomorphismen von N, der das Element s von S auf $\sigma = \varphi s$ abbildet, so bilden wir auf folgende Weise eine Gruppe S_N^φ:

Die Elemente von S_N^φ seien die Paare s_a mit $s \in S$ und $a \in N$.

[2]) Vgl. z. B. H. Cartan. Bull. Sc. Math. II, Band 63, 1939.

Die Gruppenverknüpfung für zwei Elemente s_a und t_b definieren wir durch

$$s_a t_b = s t_a \tau_b ,$$

wobei $\tau = \varphi t$ gesetzt ist.

Die Assoziativität folgt aus

$$r_a (s_b t_c) = r_a s t_b^\tau c = r s t_a^{\sigma\tau} b^\tau c$$

$$(r_a s_b) t_c = r s_a^\sigma b t_c = r s t_{(a^\sigma b)^\tau} c = r s t_a^{\sigma\tau} b^\tau c .$$

Zu jedem Element s_a gibt es ein inverses Element $(s_a)^{-1}$, denn

$$s^{-1}_{a^{-\sigma^{-1}} s_a} = s^{-1} s_{a^{-\sigma^{-1}} a} = s^{-1} s_{a^{-1} a} = 1_1 .$$

Zur Definition einer Ordnung von S_s^φ setzen wir fest, daß genau dann $s_a \leqq t_b$ gelten soll, wenn $s \leqq t$ gilt und $s < t$ oder $a \leqq b$. Durch diese Festsetzung wird die Gruppe S_s^φ zu einer streng geordneten Gruppe. Die Relation $\leqq$ ist eine strenge Ordnung, da es sich um die lexikographische Ordnung der Paare $s_a, t_b \ldots$ handelt. Es bleibt nur die Gültigkeit der Monotonie nachzuweisen:

$$s_a \leqq t_b , s'_{a'} \leqq t'_{b'} \Rightarrow s_a s'_{a'} \leqq t_b t'_{b'} .$$

Aus $s_a \leqq t_b$ und $s'_{a'} \leqq t'_{b'}$ folgt $s \leqq t$ und $s' \leqq t'$, also $s s' \leqq t t'$. Ist nun $s s' = t t'$, so folgt wegen $s^{-1} \geqq t^{-1}$ sofort $s' = t'$, also $a' \leqq b'$. Ebenso folgt $s = t$ und $a \leqq b$. Wegen $s' = t'$ ist

$$\sigma' = \varphi s' = \varphi t' = \tau' ,$$

also $a^{\sigma'} \leqq b^{\tau'}$. Zusammen ergibt sich $a^{\sigma'} a' \leqq b^{\tau'} b'$, d. h. $s s'_{a^{\sigma'} a'} \leqq t t'_{b^{\tau'} b}$.

Nimmt man für N die volle reelle Gruppe R und für S die dazu isomorphe multiplikative Gruppe der positiven reellen Zahlen, so entsteht eine Gruppe R_R, die aus den Paaren s_a besteht (s positiv reell, a beliebig reell) und die Multiplikationsvorschrift

$$s_a t_b = s t_{at+b}$$

hat. Diese Gruppe R_R ist isomorph zur Gruppe der affinen Transformationen eine reellen Variablen

$$x' = s x + a \qquad (s > 0).$$

Denn, ist

$$x'' = t x' + b \qquad (t > 0),$$

so wird

$$x'' = s t x + a t + b \qquad (s t > 0).$$

Da sich die Gruppe R_R wieder homomorph in R abbilden läßt, kann eine Gruppe $(R_R)_R$ konstruiert werden. Setzt man das Verfahren fort, so erhält man stets neue streng geordnete Gruppen.

§ 2.

Wir wenden uns jetzt zu der Frage, wann eine beliebige Gruppe G geordnet werden kann. G soll natürlich streng geordnet werden, da sonst die Frage trivial ist.

Zur Beantwortung benutzen wir Satz 25 aus Teil 1. Dieser sagt aus, daß jede r-abgeschlossene, r-zulässige Halbgruppe einer r-Gruppe Durchschnitt von linearen, r-zulässigen Halbgruppen ist.

Wir leiten zunächst eine wesentliche Verschärfung dieses Satzes her.

Es sei G eine r-Gruppe. Die zugehörige Halbgruppe $\mathfrak{g}$ sei r-abgeschlossen. G ist dann also eine r-Hauptgruppe und $\mathfrak{g}$ ist Durchschnitt von linearen, r-zulässigen Halbgruppen. Wir nennen eine lineare r-zulässige Halbgruppe $\dot{\mathfrak{g}}$ minimal, wenn es keine lineare r-zulässige Halbgruppe $\mathfrak{h}$ gibt mit

$$\mathfrak{h} \subset \dot{\mathfrak{g}}.$$

Satz 1. Jede lineare r-zulässige Halbgruppe umfaßt mindestens eine minimale, lineare r-zulässige Halbgruppe $\mathfrak{h}$.

Beweis. Die Existenz von $\mathfrak{h}$ ergibt sich wieder durch einen Wohlordnungsschluß. Es braucht nur gezeigt zu werden, daß für jede wohlgeordnete Folge

$$\mathfrak{h}_0 \geqq \mathfrak{h}_1 \geqq \ldots \geqq \mathfrak{h}_\tau \geqq \ldots$$

von linearen, r-zulässigen Halbgruppen $\mathfrak{h}_\tau$ auch der Durchschnitt $\mathfrak{h}' = \bigcap_\tau \mathfrak{h}_\tau$ aller $\mathfrak{h}_\tau$ eine lineare, r-zulässige Halbgruppe ist[3]). Daß $\mathfrak{h}'$ eine r-zulässige Halbgruppe ist, ist trivial. Aber $\mathfrak{h}'$ ist auch linear, denn, gilt für ein beliebiges $a \in G$: $a \overline{\in} \mathfrak{h}'$, so gibt es ein τ, für das $a \overline{\in} \mathfrak{h}_\tau$ gilt, also $a^{-1} \in \mathfrak{h}_\tau$. Hieraus folgt für jedes b: $a^{-1} \in \mathfrak{h}_b$. Denn, ist, $\sigma \leqq \tau$, so ist $\mathfrak{h}_\sigma \geqq \mathfrak{h}_\tau$, also $a^{-1} \in \mathfrak{h}_\sigma$. Ist $\sigma \geqq \tau$, so ist $\mathfrak{h}_\sigma \leqq \mathfrak{h}_\tau$, also $a \overline{\in} \mathfrak{h}_\sigma$, d. h. $a^{-1} \in \mathfrak{h}_\sigma$.

Wegen Satz 1 folgt jetzt sofort aus Satz 25 (Teil 1)

Satz 2. Die zugehörige Halbgruppe $\mathfrak{g}$ ist Durchschnitt von minimalen, linearen, r-zulässigen Halbgruppen.

Wir benutzen jetzt dieses Ergebnis speziell für das s-Idealsystem. Nach Satz 14 (Teil 1) läßt sich jede beliebige, halbgeordnete Gruppe stets als eine s-Gruppe auffassen. Jede invariante Unterhalbgruppe $\dot{\mathfrak{g}}$ von G, die die zugehörige Halbgruppe $\mathfrak{g}$ umfaßt, ist s-zulässig. Die minimalen, linearen, s-zulässigen Halbgruppen sind einfach die minimalen, linearen, invarianten Unterhalbgruppen, die $\mathfrak{g}$ umfassen. Wir beweisen hierüber

Satz 3. Eine lineare, invariante Unterhalbgruppe $\dot{\mathfrak{g}}$, die $\mathfrak{g}$ umfaßt, ist genau dann minimal, wenn jede Einheit von $\dot{\mathfrak{g}}$ auch Einheit von $\mathfrak{g}$ ist, wenn also für die Einheitengruppen $\dot{E}$ und E gilt: $\dot{E} = E$.

Beweis. Wir zeigen zunächst, daß eine lineare, s-zulässige Halbgruppe $\dot{\mathfrak{g}}$, für die $\dot{E} > E$ gilt, nicht minimal ist, sondern echte Ober-

[3]) Vgl. z. B. N. Bourbaki, Actual. Scient. et. Ind., Nr. 846.

menge einer linearen, s-zulässigen Halbgruppe ist. Aus $\dot{E} > E$ folgt $\dot{E} \overline{\subseteq} \mathfrak{g}$, also die Existenz eines Elementes c von $\dot{E}$, so daß $c \bar{\in} \mathfrak{g}$. Da $\mathfrak{g}$ s-abgeschlossen ist, gibt es nach Satz 25 (Teil 1) eine lineare, s-zulässige Halbgruppe $\mathfrak{h}$, so daß $c \bar{\in} \mathfrak{h}$ gilt. Wir setzen

$$\mathfrak{h}' = [\mathfrak{h} \cap \dot{E}] \cup [\dot{\mathfrak{g}} - \dot{E}]^4).$$

Dann gilt $\mathfrak{h}' < \dot{\mathfrak{g}}$. Wir behaupten außerdem, daß $\mathfrak{h}'$ eine lineare s-zulässige Halbgruppe ist.

1) $\mathfrak{g} \subseteq \mathfrak{h}'$.

Dieses folgt aus:

$$\begin{aligned} \mathfrak{g} \cap \mathfrak{h}' &= [\mathfrak{g} \cap \dot{E}] \cup [\mathfrak{g} \cap (\dot{\mathfrak{g}} - \dot{E})] \\ &= \mathfrak{g} \cap [\dot{E} \cup (\dot{\mathfrak{g}} - \dot{E})] \\ &= \mathfrak{g} \cap \dot{\mathfrak{g}} = \mathfrak{g}. \end{aligned}$$

Für jedes $a, b \in G$ gilt

2) $a \in \mathfrak{h}', b \in \mathfrak{h}' \Rightarrow ab \in \mathfrak{h}'$.

Aus $a \in \mathfrak{h}'$ und $b \in \mathfrak{h}'$ folgt $a \in \dot{\mathfrak{g}} - \dot{E}$ oder $b \in \dot{\mathfrak{g}} - \dot{E}$ oder $a \in \mathfrak{h} \cap \dot{E}$ und $b \in \mathfrak{h} \cap \dot{E}$. Aus $a \in \dot{\mathfrak{g}} - \dot{E}$ und $b \in \mathfrak{h}'$ folgt zunächst $b \in \dot{\mathfrak{g}}$ und $ab \in \dot{\mathfrak{g}} - \dot{E}$. Ebenso folgt aus $b \in \dot{\mathfrak{g}} - \dot{E}$ und $a \in \mathfrak{h}'$ sofort $ab \in \dot{\mathfrak{g}} - \dot{E}$. Aus $a \in \mathfrak{h} \cap \dot{E}$ und $b \in \mathfrak{h} \cap \dot{E}$ folgt $ab \in \mathfrak{h}$ und $ab \in \dot{E}$, also $ab \in \mathfrak{h} \cap \dot{E}$. Für jedes $a, x \in G$ gilt

3) $a \in \mathfrak{h}' \Rightarrow xax^{-1} \in \mathfrak{h}'$.

$\mathfrak{h}$, $\dot{E}$ und $\dot{\mathfrak{g}} - \dot{E}$ sind nämlich invariante Untermengen von G.

Für jedes $a \in G$ gilt

4) $a \bar{\in} \mathfrak{h}' \Rightarrow a^{-1} \in \mathfrak{h}'$.

Es gilt entweder $a \in \dot{E}$ oder $a \bar{\in} \dot{E}$. Aus $a \in \dot{E}$ folgt wegen $a \bar{\in} \mathfrak{h}'$ zunächst $a \bar{\in} \mathfrak{h}$, also $a^{-1} \in \mathfrak{h}$, woraus sich $a^{-1} \in \mathfrak{h} \cap \dot{E} \subseteq \mathfrak{h}'$ ergibt. Aus $a \bar{\in} \dot{E}$ folgt wegen $a \bar{\in} \mathfrak{h}'$ zunächst $a \bar{\in} \dot{\mathfrak{g}}$, also $a^{-1} \in \dot{\mathfrak{g}}$, woraus sich $a^{-1} \in \dot{\mathfrak{g}} - \dot{E} \subseteq \mathfrak{h}'$ ergibt.

Zum Beweis von Satz 3 ist jetzt noch zu zeigen, daß jede lineare, s-zulässige Halbgruppe $\dot{\mathfrak{g}}$, für die $\dot{E} = E$ gilt, minimal ist. Aus der Existenz einer linearen, s-zulässigen Halbgruppe $\mathfrak{h}$, für die $\mathfrak{h} \subset \dot{\mathfrak{g}}$ gilt, folgt nämlich, daß es ein $a \in \dot{\mathfrak{g}}$ gibt, so daß $a \bar{\in} \mathfrak{h}$, also $a^{-1} \in \mathfrak{h} \subseteq \dot{\mathfrak{g}}$ und $a \bar{\in} \mathfrak{g}$ gilt. Wegen $a \in \dot{E}$ und $a \bar{\in} \dot{E}$ folgt also $\dot{E} > E$.

Satz 2 und Satz 3 ergeben für den Fall einer streng halbgeordneten Gruppe (deren Einheitengruppe also nur aus dem Einselement

4) $\mathfrak{h}'$ besteht also aus den Einheiten von $\dot{\mathfrak{g}}$, soweit sie in $\mathfrak{h}$ liegen und aus den Nichteinheiten von $\dot{\mathfrak{g}}$.

1 besteht), daß jede strenge Halbordnung, die überhaupt Konjunktion von Ordnungen ist, auch stets Konjunktion von strengen Ordnungen ist. Damit ist bewiesen

Satz 4. Eine Halbordnung einer Gruppe ist genau dann Konjunktion von strengen Ordnungen, wenn die Halbordnung streng ist und wenn die zugehörige Halbgruppe s-abgeschlossen ist.

Mit Hilfe von Satz 4 können wir jetzt sofort die Frage beantworten, wann eine beliebige Gruppe sich streng ordnen läßt. Gibt es nämlich eine strenge Ordnung $\leqq$ einer Gruppe G, so ist auch $\geqq$ eine strenge Ordnung. Wegen

$$a \leqq b,\ a \geqq b \Rightarrow a = b$$

ist dann also die Gleichheitsrelation "=" Konjunktion von strengen Ordnungen.

Ist umgekehrt die Gleichheitsrelation Konjunktion von strengen Ordnungen, so gibt es jedenfalls strenge Ordnungen der Gruppe. Die zur Gleichheitsrelation zugehörige Gruppe besteht nur aus dem Einselement.

Also haben wir als Antwort auf unsere Frage

Satz 5. Eine Gruppe läßt sich genau dann streng ordnen, wenn es außer 1 keine von 1 s-abhängigen Elemente gibt.

Läßt sich eine Gruppe G nicht streng ordnen, so gibt es stets von 1 verschiedene von 1 s-abhängige Elemente. Diese bilden dann einen Normalteiler N von G. N ist nämlich der Durchschnitt aller linearen invarianten Unterhalbgruppen von G, also jedenfalls eine invariante Unterhalbgruppe. Daß N sogar eine Gruppe ist, ergibt sich sofort daraus, daß für jede Ordnung $\leqq$ auch $\geqq$ eine Ordnung ist [5]).

§ 3.

Satz 5 liefert für kommutative Gruppen das einfache Ergebnis, daß sich eine kommutative Gruppe genau dann streng ordnen läßt, wenn sie keine Elemente endlicher Ordnung außer 1 enthält, wenn sie also torsionsfrei ist.

Für eine kommutative Gruppe G ist nämlich eine Unterhalbgruppe genau dann s-abgeschlossen, wenn für jedes $a \in G$ und jede natürliche Zahl n gilt

$$a^n \in \mathfrak{g} \Rightarrow a \in \mathfrak{g}.$$

Wir zeigen im Folgenden, daß sich Satz 4 für den kommutativen Fall auch aus einem allgemeineren Satz über kommutative Halbgruppen herleiten läßt. Dies ist vor allem deshalb bemerkenswert, weil hier die Gruppeneigenschaften, die in Teil 1 unentbehrlich zu sein scheinen, keine Rolle mehr spielen.

---

[5]) Gilt $a \in N$, so gilt $a \geqq 1$ für jede Ordnung $\leqq$. Da auch $\geqq$ eine Ordnung ist, gilt auch $a \leqq 1$, d. h. $a^{-1} \geqq 1$.

Hieraus folgt $a^{-1} \in N$.

Es sei also H eine kommutative Halbgruppe, d. h. eine Menge, in der eine kommutative, assoziative Multiplikation definiert ist und in der ein Einselement 1 existiert mit $1 \cdot a = v$ für jedes $a \in H$. $a, b \ldots$ seien die Elemente von H, $\mathfrak{h}$ sei eine Unterhalbgruppe von H. Wir nennen $\mathfrak{h}$ streng, wenn für jedes a, b mit $a \in \mathfrak{h}$ und $b \in \mathfrak{h}$ gilt

$$a \neq 1,\ b \neq 1 \Rightarrow ab \neq 1.$$

Wir nennen $\mathfrak{h}$ prim in H, wenn für jedes a, b gilt

$$a \bar{\in} \mathfrak{h},\ b \bar{\in} \mathfrak{h} \Rightarrow ab \bar{\in} \mathfrak{h}.$$

Wir nennen $\mathfrak{h}$ abgeschlossen in H, wenn für jedes a und jede natürliche Zahl n gilt

$$a^n \in \mathfrak{h} \Rightarrow a \in \mathfrak{h}.$$

Ist H eine Gruppe, so entsprechen die strengen Unterhalbgruppen ersichtlich eineindeutig den strengen Halbordnungen von H.

Die abgeschlossenen Unterhalbgruppen sind genau die s-abgeschlossenen Unterhalbgruppen.

Ferner sind die primen Unterhalbgruppen genau die linearen Unterhalbgruppen: Denn, jede lineare Unterhalbgruppe einer Gruppe ist prim, da aus $a \bar{\in} \mathfrak{h}$ ja $a < 1$ folgt[6]) und

$$a < 1,\ b < 1 \Rightarrow ab < 1$$

gilt. Jede prime Unterhalbgruppe $\mathfrak{h}$ ist aber auch linear, da für kein a gelten kann $a \bar{\in} \mathfrak{h}$ und $a^{-1} \bar{\in} \mathfrak{h}$. Hieraus würde nämlich $1 = aa^{-1} \bar{\in} \mathfrak{h}$ folgen.

Für beliebige Halbgruppen H gilt nun

Satz 6. Jede abgeschlossene Unterhalbgruppe ist Durchschnitt primer Unterhalbgruppen.

Beweis. $\mathfrak{h}$ sei eine abgeschlossene Unterhalbgruppe. Wir haben zu zeigen, daß es für jedes c mit $c \bar{\in} \mathfrak{h}$ eine prime Unterhalbgruppe $\bar{\mathfrak{h}}$ gibt mit $\mathfrak{h} \leqq \bar{\mathfrak{h}}$ und $c \bar{\in} \bar{\mathfrak{h}}$. Zunächst gibt es jedenfalls eine strenge Unterhalbgruppe $\mathfrak{g}_0$, für die gilt:

1) $c \in \mathfrak{g}_0$

2) $\mathfrak{g}_0 \cap \mathfrak{h} = 1$.

Die Potenzen c^n $(n = 0, 1, \ldots)$ bilden nämlich eine solche Unterhalbgruppe, da aus $c^n \in \mathfrak{h}$, insbesondere aus $c^n = 1$ sofort $c \in \mathfrak{h}$ folgen würde, wenn $n > 0$ ist.

Durch einen Wohlordnungsschluß ergibt sich die Existenz einer maximalen strengen Unterhalbgruppe, für die 1) und 2) gilt.

Sei $\mathfrak{g}$ eine solche maximale Unterhalbgruppe und

3) $a \bar{\in} \mathfrak{g}$

4) $b \bar{\in} \mathfrak{g}$.

[6]) Die $\mathfrak{h}$ entsprechende Ordnung von H bezeichnen wir mit $\leqq$.

Mit $\mathfrak{g}_a$ bezeichnen wir die Halbgruppe der Elemente ga^n ($g \in \mathfrak{g}$, $n = 0, 1, \ldots$). Es gilt $\mathfrak{g}_a \supset \mathfrak{g}$, also ist $\mathfrak{g}_a$ nicht streng oder $\mathfrak{g}_a \cap \mathfrak{h} \neq 1$. In jedem Falle gibt es ein Element g_1 von $\mathfrak{g}$ und eine natürliche Zahl m, so daß gilt

5) $g_1 a^m \in \mathfrak{h}$.

Ebenso gibt es ein Element g_2 von $\mathfrak{g}$ und eine natürliche Zahl n, so daß gilt

6) $g_2 b^n \in \mathfrak{h}$.

Hieraus folgt

7) $g_1^n g_2^m (ab)^{mn} \in \mathfrak{h}$.

Ist jetzt $ab \neq 1$ und $g_1^n g_2^m (ab)^{mn} = 1$, so ist $\mathfrak{g}_{ab}$ nicht streng. Ist aber $g_1^n g_2^m (ab)^{mn} \neq 1$, so ist $\mathfrak{g}_{ab} \cap \mathfrak{h} \neq 1$.

Also gilt $ab = 1$ oder $\mathfrak{g}_{ab} \supset \mathfrak{g}$, d. h. $ab \bar{\in} \mathfrak{g}$.

Bezeichnen wir jetzt mit $\bar{\mathfrak{g}}$ die Menge der Elemente a mit $a \bar{\in} \mathfrak{g}$, so ist die Menge $\{1\} \cup \bar{\mathfrak{g}}$ eine Halbgruppe $\bar{\mathfrak{h}}$.

Für diese gilt

$$c \bar{\in} \bar{\mathfrak{h}}$$

$$\mathfrak{h} \subseteq \bar{\mathfrak{h}}.$$

$\bar{\mathfrak{h}}$ ist aber auch prim, denn für jedes a, b mit $a \bar{\in} \bar{\mathfrak{h}}$ und $b \bar{\in} \bar{\mathfrak{h}}$ gilt $a \neq 1$, $b \neq 1$, $a \in \mathfrak{g}$ und $b \in \mathfrak{g}$, also, da $\mathfrak{g}$ eine strenge Halbgruppe ist, $ab \neq 1$ und $ab \in \mathfrak{g}$, d. h. $ab \bar{\in} \bar{\mathfrak{h}}$.

Satz 7. Jede strenge, abgeschlossene Unterhalbgruppe ist Durchschnitt strenger, primer Unterhalbgruppen[7]).

Beweis. Unter den Voraussetzungen des Beweises von Satz 6 folgt aus $ab = 1$ in 7), nämlich

$$g_1^n g_2^m \in \mathfrak{h}$$

also $g_1^n g_2^m = 1$ und $g_1 = g_2 = 1$, da $\mathfrak{g}$ streng ist.

Wegen 5) und 6) gilt dann aber $a^m \in \mathfrak{h}$ und $b^n \in \mathfrak{h}$, also $a \in \mathfrak{h}$ und $b \in \mathfrak{h}$ und $a = b = 1$, wenn $\mathfrak{h}$ streng ist.

Dies widerspricht aber 3) und 4).

Somit gilt

$$a \bar{\in} \mathfrak{g},\ b \bar{\in} \mathfrak{g} \Rightarrow ab \bar{\in} \mathfrak{g},$$

d. h. $\mathfrak{g}$ ist prim und $\bar{\mathfrak{h}} = \{1\} \cup \bar{\mathfrak{g}}$ ist streng.

[7]) Die Umkehrung dieses Satzes ist trivial. Also ist Satz 7 für kommutative Gruppen gleichwertig mit Satz 4.

(Eingegangen am 1. Juni 1947.)

Über die Verteilung der Relativordnungen bezüglich eines Bogens.

Herrn Oskar Perron zum 70. Geburtstag am 7. Mai 1950 gewidmet.

Von

Otto Haupt in Erlangen.

Einleitung.

Bei einer früheren Untersuchung[1]) über die ordnungsfeste Erweiterbarkeit ebener Bogen $\mathfrak{B}$ war unter anderem die Betrachtung der Relativordnung $O(X;\mathfrak{B})$ eines beliebigen Punktes X der Ebene bezüglich $\mathfrak{B}$ erforderlich. Bei Untersuchung der Werteverteilung von $O(X;\mathfrak{B})$ als Funktion von X war aber seinerzeit eine einschränkende Annahme gemacht worden[2]); diese soll im folgenden beseitigt werden. Gleichzeitig soll die ganze Untersuchung verallgemeinert werden für den Fall der (eindeutigen stetigen Streckenbilder, kurz) Bogen von beschränktem starken *Stellen*ordnungswert im projektiven R_n (mit $n \geqq 2$). Außerdem werden wir für den speziellen Fall der ebenen Bogen, welche sich als Vereinigungen von endlich vielen Konvexbogen darstellen lassen, zeigen (Nr. 3. 5.): Die (in Nr. 3. 4.) als konvex nachgewiesenen Komponenten der Menge aller nicht normalen Punkte mit $O(X;\mathfrak{B}) \geqq t$, sind sogar Polygone. Anwendungen auf das Problem der ordnungsfesten Erweiterung (Nr. 4. 1. und 4. 2.) sowie die Konstruktion von Beispielen, durch welche verschiedene der eingeführten Begriffe erläutert werden, beschließen (Nr. 5. 1. ff.) die Darlegungen.

Rückgriffe auf die frühere Arbeit werden nicht gemacht; ihr gegenüber sind einzelne Begriffsbildungen modifiziert (vgl. Nr. 1. 3.), wodurch, wie uns scheint, die Darstellung übersichtlicher wird. Auf Verallgemeinerungsmöglichkeiten, wie z. B. die Ersetzung der Hyperebenen durch allgemeinere Ordnungscharakteristiken, sei nur hingewiesen.

[1]) Ordnungsfeste Erweiterung ebener Bogen und Kurven, Math. Zeitschr. 39 (1935), 126 ff. und 777.

[2]) Vgl. a. a. O.[1]), 777.

§ 1.

Definitionen und Bezeichnungen.

1.1. Es sei R_n der projektive n-dimensionale Raum [3] ($n \geqq 2$). Ferner sei $\mathfrak{C}^*$ eindeutiges stetiges Bild [4] einer abgeschlossenen Strecke im R_n. Weiter sei $\mathfrak{C}^*$ von beschränktem, *starkem* Stellenordnungswert $k \geqq 1$ bezüglich der Hyperebenen des R_n, d. h. auf *jeder* Hyperebene sollen je nur höchstens k Stellen von $\mathfrak{C}^*$ liegen und auf (mindestens) einer Hyperebene auch (genau) k Stellen von $\mathfrak{C}^*$ [5]. Unter einer (t-)Sekante von $\mathfrak{C}^*$ verstehen wir jede Hyperebene $\mathfrak{H}$, welche *nur Schnitt*stellen mit $\mathfrak{C}^*$ gemeinsam hat [6] (und zwar genau $t \geqq 1$).

Als (*Stellen*-)Index von $\mathfrak{C}^*$ werde die *Minimal*zahl von Schnittstellen bezeichnet, die eine Sekante mit $\mathfrak{C}^*$ gemeinsam hat. Es heiße

---

[3]) Der R_n ist darstellbar als Kompaktum, d. h. als metrischer kompakter Raum. Die m-dimensionalen linearen Teilräume des R_n heißen m-Ebenen, für $m = n-1$ speziell Hyperebenen. Die Gesamtheit $R_{n-1}^{(n)}$ der Hyperebenen des R_n ist ebenfalls darstellbar als Kompaktum. — Die leere Menge wird stets mit $\mathfrak{O}$ bezeichnet.

[4]) Die Punkte von $\mathfrak{C}^* = \mathfrak{C}^*(u)$ sind also eindeutige stetige Funktionen $Z^* = Z^*(u)$ von u, etwa mit $0 \leqq u \leqq 1$. Als Bild von u betrachtet heiße Z^* die zu u gehörige Stelle von $\mathfrak{C}^*$; zu verschiedenen u gehörige Stellen gelten als verschieden, auch wenn sie in den gleichen Punkt von R_n fallen. Das Bild $\mathfrak{W}^*$ einer Umgebung $\mathfrak{W}$ von u' in $[0,1]$ heiße eine Umgebung von $Z^*(u')$ in $\mathfrak{C}^*$ oder auf $\mathfrak{C}^*$. Der Punkt $Z = Z(u)$, in welchen die Stelle $Z^* = Z^*(u)$ fällt, heiße der Träger von Z^*. Die Menge der Trägerpunkte aller Stellen von $\mathfrak{C}^*$ heiße der Träger $\mathfrak{C}$ von $\mathfrak{C}^*$. Die Stellen $Z^*(0)$ und $Z^*(1)$ heißen Endstellen von $\mathfrak{C}^*$, alle anderen Stellen heißen innere Stellen von $\mathfrak{C}^*$. Es werde $\mathfrak{C}^*$ auch kurz als Bogen bezeichnet, speziell als Kurve, wenn hervorgehoben werden soll, daß die beiden Endstellen den gleichen Träger besitzen (daß also $\mathfrak{C}^*$ Bild der Kreisperipherie ist). Vgl. auch Chr. Pauc, Les méthodes directes, Pariser Thèse (Paris, Herman et Cie 1941, 84/85).

[5]) D. h. es soll höchstens k Stellen geben (und auch wirklich k Stellen), deren zugehörige Trägerpunkte in einer Hyperebene liegen. Es enthält also insbesondere $\mathfrak{C}^*$ keinen in einer Hyperebene gelegenen Teilbogen. Liegt die *innere* Stelle $P^*(u')$ von $\mathfrak{C}^*$ in der Hyperebene $\mathfrak{H}$, so heiße $P^*(u')$ Schnitt- oder Stützstelle, je nachdem eine euklidische Umgebung $\mathfrak{U}$ des Trägerpunktes $P(u')$ von $P^*(u')$ im R_n existiert, derart, daß eine Umgebung von $P^*(u')$ auf $\mathfrak{C}^*$ mit den beiden, durch $\mathfrak{H}$ in $\mathfrak{U}$ bestimmten offenen Halbräumen Punkte gemeinsam hat oder nur mit dem einen von ihnen; es heiße dann $\mathfrak{H}$ auch Schnitt- bzw. Stütz*hyperebene* von $\mathfrak{C}^*$. Der Träger $\mathfrak{C}$ von $\mathfrak{C}^*$ ist von beschränktem, starken *Punkt*ordnungswert $\leqq k$.

[6]) Gemäß dem sogen. Reduktionssatz (vgl. A. Marchaud, Sur les continus d'ordre borné, Acta math. 55 (1930), 79, sowie Haupt, Monatsh. f. Math. u. Phys. 40 (1933), 18 ff.) existieren in beliebiger Nähe jeder Hyperebene (im $R_{n-1}^{(n)}$), welche insgesamt r Stellen mit $\mathfrak{C}^*$ gemeinsam hat, ϱ-Sekanten mit $r \leqq \varrho$. Für Ordnungsbetrachtungen bedingt also die Beschränkung auf Sekanten keine Einbuße an Allgemeinheit.

$\mathfrak{C}^*$ vom (*Stellen-*)Index Null, wenn $\mathfrak{C}$ fremd ist zu (mindestens) einer Hyperebene, also, was damit gleichbedeutend, projektiv äquivalent zu einer beschränkten Menge in einem affinen Raum.

Ein Punkt $X \in R_n$ heiße *q-Punkt* ($q \geqq 1$) bezüglich $\mathfrak{C}^*$ oder Punkt des (Relativstellen-)Ordnungswertes $q = O(X; \mathfrak{C}^*)$ *bezüglich* $\mathfrak{C}^*$, wenn X auf (mindestens) einer *q-Sekante* liegt, aber auf keiner *p*-Sekante mit $q < p$.

Ein *innerer* Punkt P der Menge $\mathfrak{P}$ aller Punkte, die τ-Punkte sind für irgend ein $\tau = 1, \ldots, k$, heiße gewöhnlicher Punkt (bezüglich $\mathfrak{C}^*$), wenn sein Ordnungswert gleich ist dem Minimum der Ordnungswerte der Punkte einer Umgebung $\mathfrak{U}$ von P im R_n, wenn also $O(P; \mathfrak{C}^*) \leqq O(Y; \mathfrak{C}^*)$ für $Y \in \mathfrak{U}$; die gewöhnlichen Punkte sind mithin diejenigen inneren Punkte von $\mathfrak{P}$, in welchen die „Ordnungsfunktion" $O(X; \mathfrak{C}^*)$ unterhalb stetig ist. Jeder *innere* Punkt der *Menge* $\mathfrak{G}$ *aller gewöhnlichen* Punkte heiße normal.

Es werde bezeichnet: (α) Mit $\mathfrak{N}(t)$ die Menge aller *normalen* Punkte von *mindestens* dem Ordnungswert t, wobei $1 \leqq t \leqq k$; speziell ist dann $\mathfrak{N}(1)$ gleich der *Menge* $\mathfrak{G}$ aller *normalen Punkte* überhaupt. (β) Mit $\mathfrak{Q}(t)$ das Komplement $(\mathfrak{N}(1) - \mathfrak{N}(t))$ von $\mathfrak{N}(t)$ bezüglich $\mathfrak{N}(1)$, also die Menge aller normalen Punkte von *höchstens* dem Ordnungswert $(t-1)$, wobei $\mathfrak{Q}(1)$ gleich der leeren Menge $\mathfrak{O}$ gesetzt werden soll. (γ) Mit $\mathfrak{A}$ die *Menge aller nicht-normalen Punkte*, also $\mathfrak{A} = R_n - \mathfrak{N}(1)$.

Aus der Unterhalbstetigkeit der positiven, ganzzahligen Funktion $O(X; \mathfrak{C}^*)$ R_n folgt:

Die Menge $\mathfrak{N}(t) = [O(X; \mathfrak{C}^*) > t-1]$ *aller normalen Punkte von mindestens dem Ordnungswert t ist offen (im* R_n*), für* $1 \leqq t \leqq k$. *Die Menge* $\mathfrak{Q}(t) = \mathfrak{N}(1) - \mathfrak{N}(t)$ *aller normalen Punkte von höchstens dem Ordnungswert* $(t-1)$ *ist also abgeschlossen in* $\mathfrak{N}(1) = \mathfrak{G}$ *und die Menge* $\mathfrak{A} = R_n - \mathfrak{N}(1)$ *ist abgeschlossen im* R_n.

1. 2. Beispiele **(a)** von Punkten, welche keine t-Punkte sind oder **(b)** von τ-Punkten, welche nicht zum offenen Kern $\mathfrak{P}$ der Menge aller τ-Punkte gehören ($1 \leqq \tau \leqq k$), oder **(c)** von nicht gewöhnlichen Punkten, welche zu $\mathfrak{P}$ gehören, oder **(d)** von gewöhnlichen, aber nicht-normalen Punkten werden in Nr. 5. 1. ff. angegeben; die Existenz normaler Punkte ist aus Nr. 2. 1. zu entnehmen. Die in Nr. 1. 1. gegebenen Definitionen sind mithin sinnvoll und nicht trivial.

1. 3. In der früheren Arbeit[1]) war als „gewöhnlicher t-Punkt" bezeichnet jeder Punkt, welcher auf einer t-Sekante liegt und dessen Umgebung nur Punkte enthält, deren jeder auf einer τ-Sekante liegt mit $t \leqq \tau$. Die Menge der in diesem Sinne „gewöhnlichen ϱ-Punkte" mit $t \leqq \varrho$ war a. a. O.[2]) als offen angegeben worden; daß dies im allgemeinen nicht richtig ist, entnimmt man aus Nr. 1. 2. Beispiel **(d)**.

§ 2.

Die nicht-normalen Punkte.

2.1. Wir zeigen zunächst:

Die Menge $\mathfrak{A}$ *der nicht-normalen Punkte ist (abgeschlossen in* R_n *und) im Träger* $\mathfrak{C}$ *von* $\mathfrak{C}^*$ *enthalten; die (offene) Menge* $\mathfrak{N}(1)$ *aller normalen Punkte ist also Obermenge von* $R_n' = R_n - \mathfrak{C}$ *und folglich nicht leer.*

Bew. Gemäß Nr. 1. 1. ist $\mathfrak{A}$ abgeschlossen im R_n. Daß $\mathfrak{A} \subset \mathfrak{C}$ ergibt sich aus der folgenden Betrachtung; und daß $R_n' \neq \mathfrak{O}$ kann man z. B. aus Nr. 2. 2. entnehmen.

2.1.1. *Jeder nicht auf* $\mathfrak{C}$ *gelegene Punkt ist ein t-Punkt, d. h. jeder Punkt* $X \in R_n' = R_n - \mathfrak{C}$ *liegt auf einer Sekante von* $\mathfrak{C}^*$.

Bew. Zunächst sei $n > 2$. (a) Ist $X \in R_n'$ und ist $\mathfrak{H}$ irgend eine Hyperebene durch X, so existieren $(n-2)$-Ebenen $\mathfrak{B}$, welche in $\mathfrak{H}$ liegen und welche X, aber keinen Punkt von $\mathfrak{C}$ enthalten; denn $\mathfrak{H}\mathfrak{C}$ enthält nur endlich viele von X verschiedene Punkte. Es gibt also in $\mathfrak{H}$ unendlich viele $\mathfrak{B}$ mit $X \in \mathfrak{B}$ und mit $\mathfrak{B}\mathfrak{C} = \mathfrak{O}$. — (b) Es sei $\mathfrak{b}$ ein Hyperebenenbüschel mit einer Achse $\mathfrak{B}$, für die $\mathfrak{B} \subset \mathfrak{H}$, $X \in \mathfrak{B}$ und $\mathfrak{B}\mathfrak{C} = \mathfrak{O}$; ferner sei keine Hyperebene aus $\mathfrak{b}$ fremd zu $\mathfrak{C}$. Dann liegen in $\mathfrak{b}$ diejenigen Hyperebenen dicht, die Sekanten sind[7]). — (c) In Rücksicht auf (a) und (b) folgt daraus die Existenz von Sekanten durch jeden Punkt $X \in R_n - \mathfrak{C}$, falls $n > 2$. — Für $n = 2$ aber folgt die Existenz solcher Sekanten unmittelbar aus dem eben[7]) zitierten Satz, wenn man ihn auf ein Geradenbüschel mit X als Zentrum anwendet.

2.1.2. *Jeder nicht auf* $\mathfrak{C}$ *gelegene Punkt ist normal.*

Bew. **(a)** Es genügt, zu zeigen, daß jeder Punkt $X \in R_n'$ eine zu $\mathfrak{C}$ fremde Umgebung $\mathfrak{U} = \mathfrak{U}(X)$ im R_n besitzt, derart, daß $O(X; \mathfrak{C}^*) \leqq O(Y; \mathfrak{C}^*)$ für jeden Punkt $Y \in \mathfrak{U}$. Denn alsdann ist jeder Punkt $X \in R_n'$ ein gewöhnlicher Punkt; und weil R_n' offen ist im R_n, ist daher X sogar normal.

(b) Zum Beweise der in **(a)** formulierten Beh. bemerken wir zunächst: Liegt ein Punkt $Z \in R_n'$ auf einer Hyperebene $\mathfrak{H}'$, welche (nicht notwendig Sekante ist, aber) mindestens t *Schnitt*stellen mit $\mathfrak{C}^*$ gemeinsam hat $(1 \leqq t)$, so ist Z ein τ-Punkt mit $t \leqq \tau$. In der Tat: In $\mathfrak{H}'$ existiert zunächst im Falle $n > 2$ (gemäß Nr. 2. 1. 1., Bew. (a)) eine zu $\mathfrak{C}$ fremde $(n-2)$-Ebene $\mathfrak{B}'$, in welcher Z enthalten ist. Und im Hyperebenenbüschel mit der Achse $\mathfrak{B}'$ gibt es[7]) (beliebig nahe bei $\mathfrak{H}'$) Hyperebenen, welche nur *Schnitt*stellen mit $\mathfrak{C}^*$ gemeinsam haben und zwar mindestens t, welche also τ-Sekanten sind mit $t \leqq \tau$, w. z. z. w.

[7]) Vgl. z. B. Haupt, Über Kontinua von endlicher Relativordnung. Journ. f. d. r. u. angew. Math. 167 (1932), Nr. 1.5., 1.8. Die dort bewiesenen Sätze beziehen sich zwar auf Kontinua von endlichem (Relativ-) *Punkt*ordnungswert, gelten aber auch für eindeutige, stetige Streckenbilder von (endlichem, insbesondere) beschränktem *Stellen*ordnungswert.

Für $n = 2$ ergibt sich unmittelbar (vgl. Nr. 2. 1. 1., Bew.), daß Z ein τ-Punkt ist.

(c) Die Existenz der in **(a)** eingeführten Umgebung $\mathfrak{U}$ von $X \in R_n'$ ergibt sich nun so: Gemäß Nr. 2. 1. 1. ist X ein t-Punkt ($1 \leqq t$). Es sei $\mathfrak{H}$ eine t-Sekante durch X. Es gibt dann (für $n \geqq 2$) ein Hyperebenenbüschel $\mathfrak{b}$, dessen Achse in $\mathfrak{H}$ liegt und fremd ist zu X sowie zu $\mathfrak{C}$. In $\mathfrak{b}$ existiert nun eine Umgebung $\mathfrak{u}$ von $\mathfrak{H}$ derart, daß *jede* Hyperebene $\mathfrak{H} \in \mathfrak{u}$ mindestens t Schnittstellen mit $\mathfrak{C}^*$ gemeinsam hat. Und zu $\mathfrak{u}$ existiert eine Umgebung $\mathfrak{U}$ von X im R_n derart, daß $\mathfrak{U}$ von Hyperebenen $\mathfrak{H}'$ aus $\mathfrak{u}$ überdeckt wird; weil $X \in R_n'$ und weil R_n' offen ist, kann dabei o. B. d. A. $\mathfrak{U} \subset R_n'$ angenommen werden. *Jeder* Punkt $Z \in \mathfrak{U}$ erfüllt somit die in **(b)** gemachten Annahmen. Daher ist $O(X; \mathfrak{C}^*) \leqq O(Z; \mathfrak{C}^*)$, womit **(a)** bewiesen ist.

2. 2. Ein in $\mathfrak{C}$ enthaltener *offener* Teilbogen $\mathfrak{T}$ heiße frei, wenn eine Umgebung $\mathfrak{W}$ von $\mathfrak{T}$ im R_n existiert derart, daß $(\mathfrak{W} - \mathfrak{T})$ fremd ist zu $\mathfrak{C}$. Unter Benutzung des in Nr. 2. 1. Angegebenen gelangen wir dann zu dem

Satz. Vor. *Es sei $\mathfrak{C}^*$ von beschränktem Stellenordnungswert im R_n.*

Beh. *Die abgeschlossene, in $\mathfrak{C}$ enthaltene Menge $\mathfrak{A}$ aller nicht-normalen Punkte ist nirgends dicht in $\mathfrak{C}$. Insbesondere gibt es in beliebiger Nähe eines jeden Punktes von $\mathfrak{A}$ freie Teilbogen $\mathfrak{T}$ von $\mathfrak{C}$, welche nur normale Punkte von einem und dem nämlichen Ordnungswert enthalten (so daß speziell $\mathfrak{T}\mathfrak{A} = \mathfrak{O}$ ist).*

1. Zusatz. Es ist $\mathfrak{C}$ nirgends dicht in R_n.

2. Zusatz. Nicht-normal sind jedenfalls die Endstellen, ferner im R_2 etwa Schnabelspitzen (vgl. Nr. 5. 1.).

Bew. **(A)** Wir schicken folgende Feststellung voraus. Es sei $\mathfrak{b}$ irgend ein Hyperebenenbüschel mit zu $\mathfrak{C}$ fremder Achse (vgl. Nr. 2. 1. 1., Bew., (a)). Ist dann $P \in \mathfrak{C}$ und $\mathfrak{h}$ diejenige Hyperebene in $\mathfrak{b}$, welche durch P geht, so gibt es zu einer beliebigen Umgebung $\mathfrak{V}$ von P im R_n und in beliebiger Nähe von $\mathfrak{h}$ in $\mathfrak{b}$ eine, in $\mathfrak{b}$ offene Menge $\mathfrak{v}$ von Hyperebenen und dazu eine natürliche Zahl $q \geqq 1$ von folgender Beschaffenheit[8]): Ist $\mathfrak{M}$ die von den Hyperebenen aus $\mathfrak{v}$ überdeckte Punktmenge im R_n, so ist $\mathfrak{M}\mathfrak{C}$ Summe aus q *einfachen* (keine Verzweigungspunkte von $\mathfrak{C}$ enthaltenden, offenen) *freien Teilbogen* von $\mathfrak{C}$. Jeder dieser Teilbogen hat mit jeder Hyperebene $\mathfrak{H}$ aus $\mathfrak{v}$ genau einen Punkt und zwar einen *Schnitt*punkt gemeinsam, welcher für alle $\mathfrak{H} \in \mathfrak{v}$ bei festem Teilbogen die gleiche Anzahl Schnittstellen trägt; die Summe der Anzahl dieser Schnittstellen für alle q Teilbogen sei etwa q'. Mindestens einer dieser *freien Teilbogen* liegt in $\mathfrak{V}$ (also *beliebig nahe bei P*).

(B) Wir zeigen jetzt: Jeder Teilbogen $\mathfrak{T}$ von $\mathfrak{C}$ enthält einen, nur aus normalen Punkten gleichen Ordnungswertes bestehenden, freien

[8]) Vgl. a. a. O.[7]), Nr. 1. 11.

Teilbogen $\mathfrak{T}''$. Es genügt, die Beh. für *freie* Teilbogen zu beweisen; denn in beliebiger Nähe einer jeden Hyperebene $\mathfrak{H}$, welche mit $\mathfrak{T}$ einen Schnittpunkt gemeinsam hat, gibt es (in einem, $\mathfrak{H}$ enthaltenden Büschel $\mathfrak{b}$ mit zu $\mathfrak{C}$ fremder Achse) eine in $\mathfrak{b}$ offene Hyperebenenmenge $\mathfrak{u}$ derart[8]), daß der Durchschnitt von $\mathfrak{T}$ mit der Menge der Hyperebenen aus $\mathfrak{u}$ Vereinigung von (beschränkt vielen) freien Teilbogen von $\mathfrak{C}$ ist. Es sei also $\mathfrak{T}$ ein freier Teilbogen von $\mathfrak{C}$, ferner sei $\mathfrak{W}$ eine Umgebung von $\mathfrak{T}$ im R_n mit $(\mathfrak{W}-\mathfrak{T})\,\mathfrak{C}=\mathfrak{O}$ und es sei P ein innerer Punkt von $\mathfrak{T}$. Gemäß **(A)**, angewandt auf eine Umgebung $\mathfrak{U}\subset\mathfrak{W}$ von P in R_n, für die also $\mathfrak{U}\,\mathfrak{C}=\mathfrak{U}\,\mathfrak{T}$ ist, existiert ein (offener) freier Teilbogen $\mathfrak{T}'$ von $\mathfrak{T}$ und zu $\mathfrak{T}'$ eine Umgebung $\mathfrak{U}'$ von $\mathfrak{T}'$ im R_n mit $\mathfrak{U}'\subset\mathfrak{U}$ derart, daß durch jeden Punkt von $\mathfrak{U}'$ eine q'-Sekante geht. Jeder Punkt von $\mathfrak{U}'$ ist also ein τ'-Punkt mit $q'\leqq\tau'$. Es sei nun r' das *Maximum* der τ' für die Punkte von $\mathfrak{T}'$ und es sei $Q'\in\mathfrak{T}'$ ein r'-Punkt ($r'\leqq k$). Ist dann $\mathfrak{H}'$ eine r'-Sekante durch Q' und ist $\mathfrak{b}'$ ein, $\mathfrak{H}'$ enthaltendes Hyperebenenbüschel mit zu $\mathfrak{C}$ fremder Achse, so gibt es, wieder gemäß **(A)**, in beliebiger Nähe von Q', also innerhalb $\mathfrak{U}'$, einen (offenen) freien Teilbogen $\mathfrak{T}''$ von $\mathfrak{T}'$ und eine Umgebung $\mathfrak{U}''\subset\mathfrak{U}'$ von $\mathfrak{T}''$ im R_n derart, daß jeder Punkt von $\mathfrak{U}''$ ein τ''-Punkt ist mit $r'\leqq\tau''$. Gemäß der Definition von r' ist aber jeder Punkt P'' von $\mathfrak{T}''$ ein r'-Punkt und, weil von lauter t''-Punkten mit $r'\leqq t''$ umgeben, ein gewöhnlicher Punkt. Überdies ist jeder Punkt von $(\mathfrak{U}''-\mathfrak{C})$ gewöhnlich (sogar normal, Nr. 2. 1. 2.). Da $\mathfrak{T}''$ freier Teilbogen von $\mathfrak{C}$ ist und mithin eine Umgebung $\mathfrak{W}\subset\mathfrak{U}''$ von P'' im R_n existiert mit $\mathfrak{W}\,\mathfrak{C}=\mathfrak{W}\,\mathfrak{T}''$, so enthält $\mathfrak{W}$ nur gewöhnliche Punkte. Somit ist jeder Punkt P'' von $\mathfrak{T}''$ sogar normal.

(C) Es ist $\mathfrak{A}$ nirgends dicht in $\mathfrak{C}$. Andernfalls nämlich existierte eine im R_n offene Menge $\mathfrak{V}$ derart, daß $\mathfrak{V}\,\mathfrak{A}$ dicht wäre in $\mathfrak{V}\,\mathfrak{C}$. Ist nun $\mathfrak{T}$ gemäß **(A)** ein in $\mathfrak{V}\,\mathfrak{C}$ enthaltener freier abgeschlossener Teilbogen von $\mathfrak{C}$, so wäre die abgeschlossene Menge $\mathfrak{A}\,\mathfrak{T}$ dicht in $\mathfrak{T}$ und folglich wäre $\mathfrak{T}$ in $\mathfrak{A}$ enthalten. Dies widerspricht aber der (in **(B)** bewiesenen) Existenz eines Teilbogens $\mathfrak{T}'$ von $\mathfrak{T}$, welcher nur normale Punkte enthält, also ganz zu $\mathfrak{N}(1)=R_n-\mathfrak{A}$ gehört. Daß die abgeschlossene Menge $\mathfrak{C}$ nirgends dicht ist im R_n, folgt aus der Existenz offener, zu $\mathfrak{C}$ fremder Mengen in beliebiger Nähe eines jeden Punktes Q von $\mathfrak{C}$; und dies wiederum ist Folge davon, daß $\mathfrak{H}\,\mathfrak{C}$ endlich ist für (mindestens eine, sogar für) jede Hyperebene durch Q. Damit ist auch der 1. Zusatz bewiesen.

§ 3.

Die normalen Punkte.

Wir untersuchen nun auch die Menge $\mathfrak{N}(1)$ der normalen Punkte oder vielmehr die (bezüglich R_n genommenen, abgeschlossenen) Kom-

plemente $(\mathfrak{A} + \mathfrak{Q}(t))$ der offenen Mengen $\mathfrak{R}(t)$ aller normalen Punkte von mindestens dem Ordnungswert t (mit $1 \leqq t \leqq k$). (Vgl. Nr. 1. 1.).

3. 1. Zunächst sei bemerkt: Jede Hyperebene $\mathfrak{H}$ enthält, abgesehen von höchstens endlich vielen Ausnahmepunkten, ausschließlich normale Punkte. (Denn jeder nicht-normale Punkt liegt in $\mathfrak{C}$ und $\mathfrak{H}\mathfrak{C}$ ist von endlicher Mächtigkeit).

3. 2. Darüber hinaus gilt

Vor. *Die Hyperebene $\mathfrak{H}$ enthalte mindestens t Schnittstellen $(1 \leqq t)$.*

Beh. (I) *Abgesehen von höchstens endlich vielen Ausnahmepunkten, welche auf $\mathfrak{C}$ liegen, ist jeder Punkt von $\mathfrak{H}$ normal und von mindestens dem Ordnungswert t bezüglich $\mathfrak{C}^*$. Insbesondere also enthält $\mathfrak{H}$ höchstens endlich viele (notwendig auf $\mathfrak{C}$ gelegene) normale r-Punkte mit $r < t$.* — (II) *In jedem, $\mathfrak{H}$ enthaltenden Hyperebenenbüschel $\mathfrak{b}$ mit zu $\mathfrak{C}$ fremder Achse gibt es beliebig nahe bei $\mathfrak{H}$ eine in $\mathfrak{b}$ offene Menge $\mathfrak{v}$ von Hyperebenen derart, daß jede Hyperebene aus $\mathfrak{v}$ auch τ-Sekante mit $t \leqq \tau$ ist und ganz in $\mathfrak{R}(t)$ liegt (also nur normale Punkte enthält und zwar normale τ-Punkte mit $t \leqq \tau$).*

Bew. Betr. (I). Gemäß Nr. 2. 1. 1., Bew., (b), gehen durch jeden Punkt $P \in \mathfrak{H} - \mathfrak{C}$ *Sekanten*, welche beliebig nahe bei $\mathfrak{H}$ liegen und welche infolgedessen [7]) mindestens t Schnittstellen mit $\mathfrak{C}^*$ gemeinsam haben. Deswegen sowie gemäß Nr. 2. 1. 2. ist P ein normaler τ-Punkt mit $t \leqq \tau$. Da $\mathfrak{H}\mathfrak{C}$ endlich ist, folgt die Beh. — Betr. (II). Gemäß Nr. 2. 2., Bew. **(A)**, gibt es in $\mathfrak{b}$ beliebig nahe bei $\mathfrak{H}$ eine in $\mathfrak{b}$ offene Menge $\mathfrak{u}$, so daß der Durchschnitt jeder Hyperebene aus $\mathfrak{u}$ mit $\mathfrak{C}$ in q freien, relativ $\mathfrak{b}$ einfachen Teilbogen $\mathfrak{T}_1, \ldots, \mathfrak{T}_q$ von $\mathfrak{C}$ enthalten ist; dabei ist *jede Hyperebene aus $\mathfrak{u}$ eine τ-Sekante mit $t \leqq \tau$*. Gemäß Nr. 2. 2.. Satz, liegen aber auf jedem der $\mathfrak{T}_1, \ldots, \mathfrak{T}_q$ diejenigen Bogen dicht, welche nur *normale* Punkte enthalten. Daher ist in $\mathfrak{u}$ eine (in $\mathfrak{b}$) offene Teilmenge $\mathfrak{v}$ enthalten, so daß $\mathfrak{H}'\mathfrak{C}$ für jede Hyperebene $\mathfrak{H}' \in \mathfrak{v}$ nur normale Punkte enthält, deren jeder ein τ-Punkt mit $t \leqq \tau$ ist. Da andererseits jeder Punkt von $\mathfrak{H}(R_n - \mathfrak{C})$ normaler τ-Punkt ist, folgt die Beh. (II).

3. 3. In diesem Zusammenhange ist noch zu erwähnen der

Satz. Vor. *Es sei $k \geqq 2$ der Stellenordnungswert des eindeutigen, stetigen Streckenbildes $\mathfrak{C}^*$.*

Beh. *Es existieren k-Punkte. Jeder $(k-1)$-Punkt und jeder k-Punkt ist normal (insbesondere gilt dies also für jeden, auf $\mathfrak{C}$ gelegenen $(k-1)$- und k-Punkt). Die Menge aller $(k-1)$- und k-Punkte bzw. die Menge aller k-Punkte ist gleich $\mathfrak{R}(k-1)$ bezw. gleich $\mathfrak{R}(k)$ (ist insbesondere also offen und nicht leer).*

1. Zusatz. Die Menge der $(k-1)$-Sekanten und ebenso die der k-Sekanten ist offen im Raum $R_{n-1}^{(n)}$ aller Hyperebenen des R_n.

2. Zusatz. Es sei $\mathfrak{T}$ der offene Kern der Menge aller t-Punkte $(1 \leqq t \leqq k)$. Dann ist jeder Punkt P von $\mathfrak{T}$, welcher in $\mathfrak{T}$ *minimale*

Ordnung besitzt, ein *gewöhnlicher* Punkt. Insbesondere ist also jeder Punkt aus $\mathfrak{T}$ vom *Ordnungswert Eins* ($t = 1$) ein gewöhnlicher Punkt.

3. Zusatz. Ist $\mathfrak{C}^*$ vom *Maximalstellenindex*, das soll heißen: Ist $k-2 \leqq t \leqq k$ für jeden t-Punkt bezüglich $\mathfrak{C}^*$, so ist der offene Kern $\mathfrak{T}$ der Menge aller t-Punkte identisch mit der Menge $\mathfrak{N}(1) = \mathfrak{N}(k-2)$ aller normalen Punkte.

Bew. **(a)** Da $\mathfrak{C}^*$ den Stellenordnungswert k besitzen soll ($2 \leqq k$), existieren in jedem Falle k-Sekanten[6]), aber keine t-Sekanten mit $k+1 \leqq t$. Jeder auf einer k-Sekante gelegene Punkt ist somit ein k-Punkt (Nr. 3. 2.). Es gibt also k-Punkte. — **(b)** Es sei nun r entweder gleich $(k-1)$ oder gleich k. Jede *r-Sekante* $\mathfrak{H}'$ (soweit solche Sekanten für $r = k-1$ existieren) besitzt im $R_n^{(n)}{}_{-1}$ eine Umgebung $\mathfrak{u}'$ von folgender Beschaffenheit: Jede Hyperebene $\mathfrak{H} \in \mathfrak{u}'$ ist eine r-Sekante. (Dies ist die Beh. von Zusatz 1.) In der Tat: Da $\mathfrak{H}'$ genau r-Schnittstellen, aber keine End- oder Stützstellen enthält, so gibt es eine Umgebung $\mathfrak{u}'$ von $\mathfrak{H}'$ derart, daß jede Hyperebene $\mathfrak{H} \in \mathfrak{u}'$ *mindestens* r Schnittstellen, aber keine Endstelle enthält. Es liegen aber auch keine Stützstellen auf $\mathfrak{H}$; denn andernfalls gäbe es in beliebiger Nähe von $\mathfrak{H}$, also in $\mathfrak{u}'$, solche Hyperebenen $\mathfrak{H}''$, welche mindestens $(k+1)$ Schnittstellen enthielten, und in beliebiger Nähe einer $\mathfrak{H}''$, also ebenfalls in $\mathfrak{u}'$, gäbe es (gemäß Nr. 2. 1. 1., Bew. (b)) dann s-Sekanten mit $k+1 \leqq s$, im Widerspruch damit, daß $\mathfrak{C}^*$ den starken Stellenordnungswert k besitzen soll. Da somit auf keiner $\mathfrak{H} \in \mathfrak{u}'$ eine End- oder Stützstelle liegt, ist jede $\mathfrak{H} \in \mathfrak{u}'$ eine Sekante und zwar eine t-Sekante mit $r \leqq t$. Es ist aber stets $r = t$; denn andernfalls müßte bei stetiger Überführung von $\mathfrak{H}'$ in $\mathfrak{H}$ mindestens eine Schnittstelle „gewonnen" werden, was nur bei Auftreten von Stützstellen möglich ist[9]). Die Beh. in **(b)** ist damit bewiesen. Aus ihr folgt insbesondere der 1. *Zusatz*. — **(c)** Zufolge **(b)** geht durch jeden Punkt einer (hinreichend kleinen) Umgebung $\mathfrak{U}$ (im R_n) eines r-Punktes P (mit $k-1 \leqq r \leqq k$) eine r-Sekante, und zwar auch dann, wenn P auf $\mathfrak{C}$ liegt. Daher enthält $\mathfrak{U}$ nur t-Punkte mit $k-1 \leqq r \leqq t \leqq k$. Folglich ist jeder r-Punkt gewöhnlicher Punkt. Und mithin enthält $\mathfrak{U}$ nur gewöhnliche Punkte. Demgemäß ist jeder $(k-1)$- oder k-Punkt normal. Und es besitzt jeder k-Punkt bzw. jeder $(k-1)$-Punkt eine Umgebung, in welcher nur k-Punkte bzw. nur k- und $(k-1)$-Punkte enthalten sind. Daraus folgt die Beh. des Satzes. — Betr. den 3. *Zusatz*. Es ist jeder $(k-2)$-Punkt von minimalem Ordnungswert, also jeder in $\mathfrak{T}$ enthaltene $(k-2)$-Punkt gewöhnlich; da alle $(k-1)$- und k-Punkte gewöhnlich (sogar normal) sind, ist also jeder Punkt aus $\mathfrak{T}$ gewöhnlich und folglich normal.

---

[9]) Denn $\mathfrak{C}^*$ ist als eindeutiges stetiges Streckenbild (von beschränktem Stellenordnungswert) vorausgesetzt und Endstellen treten hier nicht auf.

3. 4. Es sei A_n ein affiner Raum und $\mathfrak{K}$ eine in A_n beschränkte, abgeschlossene, konvexe Punktmenge; es werde $\mathfrak{K}$ als q-dimensional bezeichnet, wenn $\mathfrak{K}$ in einer q-Ebene $\mathfrak{E}_q$, aber in keiner $(q-1)$-Ebene enthalten ist $(0 \leqq q$; als (-1)-Ebene erklärt man dabei die leere Menge, als 0-dimensional konvex die einpunktigen Mengen). Als relativ offenen Kern von $\mathfrak{K}$ bezeichnen wir den *bezüglich* $\mathfrak{E}_q$ genommenen offenen Kern von $\mathfrak{K}$. Über die Gestalt von $\mathfrak{Q}'(r) = \mathfrak{A} + \mathfrak{Q}(r)$ läßt sich nun folgendes aussagen:

Satz. Vor. *Es sei $\mathfrak{C}^*$ eindeutiges stetiges Streckenbild im R_n, wobei $n \geqq 2$. Ferner besitze $\mathfrak{C}^*$ den starken Stellenordnungswert k. Es sei $\mathfrak{A}$ die Menge der nicht-normalen Punkte und $\mathfrak{Q}(r)$ die Menge derjenigen normalen Punkte, deren Ordnungswert bezüglich $\mathfrak{C}^*$ höchstens $(r-1)$ beträgt, $2 \leqq r \leqq k$.*

Beh. **A.** *Die abgeschlossene Menge $(\mathfrak{A} + \mathfrak{Q}(r))$ ist projektiv äquivalent zu einer beschränkten Menge (in einem affinen Raum A_n).*

B. *Jede Komponente $\mathfrak{K}$ von $(\mathfrak{A} + \mathfrak{Q}(r))$ ist projektiv äquivalent zu einer (beschränkten, abgeschlossenen) konvexen Punktmenge (im A_n).*

C. *Jede extreme*[10]) *Stützhyperebene $\mathfrak{H}$ einer solchen Komponente $\mathfrak{K}$ ist fremd zum relativ offenen Kern*[11]) *einer beliebigen anderen Komponente $\mathfrak{K}'$, es sei denn, daß $\mathfrak{K}'$ in $\mathfrak{H}$ enthalten ist.*

Bew. **(A)** Gemäß Nr. 3. 3. existieren k-Punkte und daher auch k-Sekanten $\mathfrak{H}_k$. Gemäß Nr. 3. 2., Beh. (II), existieren aber k-Sekanten $\mathfrak{H}'_k$, welche ganz in $\mathfrak{R}(k)$ enthalten, also fremd sind zu $(\mathfrak{A} + \mathfrak{Q}(r))$. Zeichnet man daher (irgend eine solche) $\mathfrak{H}'_k$ als uneigentliche Hyperebene im R_n aus und berücksichtigt die Kompaktheit des R_n[3]), so ergibt sich die Existenz *eines affinen Raumes A_n* von der in Beh. **A** genannten Art. Zur Vereinfachung der Ausdrucksweise werden wir *im folgenden* einen solchen Raum A_n *zu Grunde legen* und auf ihn Bezeichnungen wie „eigentlicher Punkt", „beschränkt", „Seite einer Hyperebene" usw. beziehen. — **(B)** Es sei $\mathfrak{K}$ eine mehrpunktige Komponente von $\mathfrak{Q}' = \mathfrak{Q}'(r) = \mathfrak{A} + \mathfrak{Q}(r)$; mit $\mathfrak{Q}'$ ist auch $\mathfrak{K}$ abgeschlossen in A_n. Es seien P_j, $j = 1, 2$, verschiedene Punkte von $\mathfrak{K}$ und $\mathfrak{s}$ ihre offene Verbindungsstrecke (in A_n). Es ist zu zeigen, daß $\mathfrak{s}\,\mathfrak{R}(r) = 0$. Wir schließen indirekt. Angenommen, es enthielte $\mathfrak{s}$ einen Punkt $Q \in \mathfrak{R} = \mathfrak{R}(r)$. Dann existierte eine, Q enthaltende t-Sekante $\mathfrak{H}$ mit $r \leqq t$.

Wir unterscheiden die zwei Fälle, daß $\mathfrak{s}$ in $\mathfrak{H}$ entweder (1) enthalten oder (2) nicht enthalten ist. *Im Falle* (1) gibt es einen zu Q

[10]) Vgl. Bonnesen-Fenchel, Theorie der konvexen Körper, Ergebn. d. Math. u. i. Grenzgeb., 3. Bd., Berlin 1934, Seite 15/16. Wir benutzen hier nur die Eigenschaft der extremen Stützhyperebenen, daß sie Limiten von Tangentialstützhyperebenen sind.

[11]) Als relativ *offener Kern* einer konvexen Punktmenge $\mathfrak{K}'$ werde bezeichnet die Menge aller inneren Punkte aller ganz in $\mathfrak{K}'$ enthaltenen Strecken.

beliebig benachbarten, im Innern von $\mathfrak{s}$ sowie nicht auf $\mathfrak{C}$ gelegenen Punkt Q' und durch Q' eine zu $\mathfrak{C}$ fremde, in $\mathfrak{H}$ enthaltene $(n-2)$-Ebene $\mathfrak{B}'$ (falls $n=2$ fällt $\mathfrak{B}'$ mit Q' zusammen). Gemäß Nr. 3. 2., Beh. (II), existiert dann im Büschel mit der Achse $\mathfrak{B}'$ beliebig nahe bei $\mathfrak{H}$ eine, Q' enthaltende, ganz in $\mathfrak{R}$ gelegene Hyperebene $\mathfrak{H}'$. Wegen $\mathfrak{H}' \subset \mathfrak{R}$ liegen P_1 sowie P_2 nicht in $\mathfrak{H}'$ und zwar, wegen $Q' \in \mathfrak{H}' \mathfrak{s}$, auf verschiedenen Seiten von $\mathfrak{H}'$. Weil $\mathfrak{H}' \subset \mathfrak{R}$, also $\mathfrak{H}' \mathfrak{R} = \mathfrak{D}$, wäre daher die zusammenhängende Menge $\mathfrak{R}$ Summe zweier fremder (nicht leerer) abgeschlossener Teile; Widerspruch. *Im Falle* (2) liegen P_1 sowie P_2 auf verschiedenen Seiten von $\mathfrak{H}$ und ebenso auf verschiedenen Seiten einer zu $\mathfrak{H}$ beliebig benachbarten, ganz in $\mathfrak{R}$ enthaltenen (gemäß Nr. 3. 2., Beh. (II), existierenden) Hyperebene $\mathfrak{H}'$. Daraus ergibt sich, wie im Falle (1), ein Widerspruch. (Im Falle (1) ließe sich der Beweis auch unmittelbarer führen). — **(C)** Es sei $\mathfrak{H}$ eine (beliebige) Stützhyperebene, kurz S-Ebene, an $\mathfrak{R}$ im Punkte R des Randes $\mathfrak{R}_r$ von $\mathfrak{R}$. Ist $\mathfrak{H}$ die *einzige* S-Ebene an $\mathfrak{R}$ in R, so bezeichnen wir $\mathfrak{H}$ als Tangentialstützhyperebene, kurz TS-Ebene. Jede TS-Ebene ist extreme S-Ebene und jede extreme S-Ebene ist Limes von TS-Ebenen (jeder Limes von S-Ebenen ist eine S-Ebene). Es ist aber *jede TS-Ebene (an $\mathfrak{R}$) und damit überhaupt jede extreme S-Ebene Limes von t-Sekanten $\mathfrak{H}_\mu$ mit* $r \leqq t$. In der Tat: Ist R Stützpunkt der TS-Ebene $\tilde{\mathfrak{H}}$, so ist R Limes von zu $\mathfrak{R}$ fremden Punkten $Q_\mu \in \mathfrak{R} = \mathfrak{R}(r)$. Durch Q_μ geht daher eine t_μ-Sekante $\mathfrak{H}_\mu$ mit $r \leqq t_\mu$; gemäß Nr. 3. 2., Beh. (II), kann dabei Q_μ o. B. d. A. so angenommen werden, daß $\mathfrak{H}_\mu \subset \mathfrak{R}$, daß also $\mathfrak{H}_\mu$ fremd ist zu $\mathfrak{R}$. Somit liegt $\mathfrak{R}$ ganz auf der einen Seite von $\mathfrak{H}_\mu$. Ist daher $\{\mathfrak{H}'_\mu\}$ eine (stets existierende) *konvergente* Teilfolge von $\{\mathfrak{H}_\mu\}$ mit $\mathfrak{H}' = \lim \mathfrak{H}'_\mu$, so liegt R auf $\mathfrak{H}'$ (wegen $R = \lim Q_\mu$) und es ist somit $\mathfrak{H}'$ eine S-Ebene in R an $\mathfrak{R}$. Da es nach Annahme in R an $\mathfrak{R}$ nur eine einzige S-Ebene, nämlich $\tilde{\mathfrak{H}}$, gibt, folgt $\mathfrak{H}' = \tilde{\mathfrak{H}} = \lim \mathfrak{H}'_\mu$. Es sei nun $\mathfrak{R}'$ eine von $\mathfrak{R}$ verschiedene Komponente von $\mathfrak{D}'$, aber nicht $\mathfrak{R}' \subset \tilde{\mathfrak{H}}$. Ist $\mathfrak{R}'$ mehrpunktig und enthält $\tilde{\mathfrak{H}}$ einen Punkt J des relativ offenen Kerns von $\mathfrak{R}'$, so ist J (innerer) Punkt (mindestens) einer in $\mathfrak{R}'$ enthaltenen, offenen Strecke $\mathfrak{s}$, deren Endpunkte E_1, E_2 nicht auf $\tilde{\mathfrak{H}}$, sondern auf verschiedenen „Seiten" von $\tilde{\mathfrak{H}}$ liegen; denn andernfalls wären alle, J enthaltenden, in $\mathfrak{R}'$ enthaltenen Strecken ganz in $\tilde{\mathfrak{H}}$ enthalten, also $\mathfrak{R}' \subset \tilde{\mathfrak{H}}$. Da E_1, E_2 auf verschiedenen Seiten von $\tilde{\mathfrak{H}}$ liegen, enthält jede zu $\tilde{\mathfrak{H}}$ hinreichend benachbarte Hyperebene (innere) Punkte von $\mathfrak{s}$, also (wegen $\mathfrak{R}' \subset \mathfrak{D}'$) Punkte aus $\mathfrak{D}'$; dies gilt somit für schließlich alle $\mathfrak{H}'_\mu$. Im Widerspruch damit ist aber $\mathfrak{H}'_\mu \subset \mathfrak{R} = R_n - \mathfrak{D}'$. Daraus folgt die Beh. in **(C)**.

3. 5. In der Ebene R_2 läßt sich noch etwas mehr aussagen für den speziellen Fall, daß $\mathfrak{C}^*$ endliche Konvexbogensumme ist, das soll heißen: Das Urbildintervall $\mathfrak{D}$ von $\mathfrak{C}^*$ gestattet eine Zerlegung

in endlich viele, bis auf höchstens ihre Endpunkte fremde Intervalle $\mathfrak{D}_\tau = [d_{\tau-1}, d_\tau]$, $\tau = 1, \ldots, t$; $d_0 = 0$, $d_t = 1$, von folgender Eigenschaft: $\mathfrak{D}_\tau$ ist topologisches Urbild eines streckenfreien, konvexen Teilbogens $\mathfrak{B}_\tau$ von $\mathfrak{C}$ und je zwei der $\mathfrak{B}_\tau$ sind identisch oder bis auf höchstens ihre Endpunkte fremd. Es ist also $\mathfrak{C}$ bzw. $\mathfrak{C}^*$ Vereinigung dieser $\mathfrak{B}_\tau$[12]). Jede endliche Konvexbogensumme $\mathfrak{C}^*$ ist von beschränktem Stellenordnungswert.

Wir bezeichnen eine Stelle $P^*(u)$ der endlichen Konvexbogensumme $\mathfrak{C}^*$ als singulär, wenn $P^*(u)$ in *jeder* Darstellung von $\mathfrak{C}^*$ als Vereinigung endlich vieler, bis auf Endpunkte fremder bzw. identischer Konvexbogen $\mathfrak{B}_\tau$, *End*stelle (mindestens) eines der in der Darstellung auftretenden $\mathfrak{B}_\tau$ ist. Für eine singuläre Stelle $P^*(u)$ ist demgemäß entweder der ihr entsprechende Punkt von $\mathfrak{C}$ Verzweigungspunkt[13]) von $\mathfrak{C}$ oder $P^*(u)$ ist Endstelle von $\mathfrak{C}^*$ oder beliebig kleine Umgebungen von $P^*(u)$ auf $\mathfrak{C}^*$ sind nicht konvex. Der Begriff der singulären Stelle ist somit unabhängig von der jeweils benutzten Darstellung von $\mathfrak{C}^*$ als Vereinigung von Konvexbogen $\mathfrak{B}_\tau$, der Begriff ist also festgelegt lediglich durch $\mathfrak{C}^*$ selbst. Jeder einer singulären Stelle entsprechende Punkt von $\mathfrak{C}$ heiße singulär bezüglich $\mathfrak{C}^*$. Ferner heiße eine Gerade $\mathfrak{G}$ singulär (bezüglich $\mathfrak{C}^*$), wenn $\mathfrak{G}$ unter eine der folgenden vier Arten fällt: (1) Es ist $\mathfrak{G}$ Träger einer Halbtangente an $\mathfrak{C}^*$ (d. h. an einen Teilbogen $\mathfrak{B}_\tau$ von $\mathfrak{C}^*$) in einer singulären Stelle; (2) Auf $\mathfrak{G}$ liegen zwei verschiedene singuläre Punkte; (3) Es enthält $\mathfrak{G}$ einen singulären Punkt und ist gleichzeitig Stützgerade an einen der Konvexbogen $\mathfrak{B}_\tau$ (in einem nicht singulären Punkt, also in einem inneren Punkt von $\mathfrak{B}_\tau$); (4) Es ist $\mathfrak{G}$ Stützgerade an zwei nicht identische der $\mathfrak{B}_\tau$ und die Stützpunkte sind nicht singulär.

Zu einer endlichen Konvexbogensumme existieren (zufolge der Definition) *nur endlich viele singuläre Stellen, Punkte und Geraden.*

Die angekündigte schärfere Aussage lautet nun so:

Satz. Vor. *Es sei $\mathfrak{C}^*$ endliche Konvexbogensumme in R_2. Ferner sei $\mathfrak{K}$ irgend eine mehrpunktige Komponente des Komplements $\mathfrak{Q}' = \mathfrak{Q}'(r)$ der Menge $\mathfrak{R} = \mathfrak{R}(r)$ aller bezüglich $\mathfrak{C}^*$ normalen Punkte von mindestens dem Ordnungswert r.*

Beh. (1) *Der Rand $\mathfrak{K}_r$ von $\mathfrak{K}$ ist ein konvexes Polygon (vom Index Null), ev. eine Strecke.*

(2) *Die Seiten des Polygons $\mathfrak{K}_r$ liegen sämtlich auf singulären Geraden jedenfalls dann, wenn $\mathfrak{K}$ keine Strecke ist.*

Der Beweis kann so geführt werden.

[12]) Jedes Kontinuum von beschränktem Punktordnungswert ist erbliche Bogensumme. Vgl. Haupt, Limessätze bei geometrischen Ordnungen, Annali mat. pura appl., Bologna (4) 23 (1944), Nr. 3. 1.; vgl. ferner Math. Ann. 120 (1948), Nr. 2. 1.

[13]) Verzweigungspunkt im Sinne der topologischen Kurventheorie, K. Menger, Kurventheorie, Leipzig 1932, S. 99, 214.

3. 5. 1. Es sei $\mathfrak{H}$ eine extreme Stützgerade an $\mathfrak{K}$. Gemäß Nr. 3. 4., Satz, Bew. betr. (C), ist $\mathfrak{H}$ Limes von q_μ-Sekanten $\mathfrak{H}_\mu$ mit $r \leqq q_\mu (\leqq k)$, deren jede fremd ist zu $\mathfrak{K}$. Indem wir jeweils eine bestimmte (geeignet gewählte) Darstellung von $\mathfrak{C}^*$ als endliche Konvexbogensumme zu Grunde legen, können wir o. B. d. A.[8]) folgende Annahme machen: Für jedes $\mathfrak{H}_\mu$ ist keine ihrer q_μ Schnittstellen mit $\mathfrak{C}^*$ singulär (diese Schnittstellen liegen also sämtlich innerhalb der $\mathfrak{B}_r$). Durch geeignete Auswahl einer, wieder mit $\{\mathfrak{H}_\mu\}$ zu bezeichnenden, Teilfolge aus $\{\mathfrak{H}_\mu\}$ läßt sich erreichen: Alle q_μ sind einander gleich, etwa $q_\mu = q$ mit $r \leqq q \leqq k$; die Urbilder $u_{\mu\varkappa}$, $\varkappa = 1, \ldots, q$; $\mu = 1, 2, \ldots$, der Schnittstellen von $\mathfrak{H}_\mu$ mit $\mathfrak{C}^*$ liegen für *festes* $\varkappa$ und alle μ im *Innern* des gleichen unter den $\mathfrak{B}_r$, etwa in $\mathfrak{B}'_\varkappa = \mathfrak{B}_{r_\varkappa}$, wobei o. B. d. A. angenommen sei, daß $0 < u_{\mu 1} < u_{\mu 2} < \cdots < u_{\mu q} < 1$; es existiert $u_\varkappa = \lim u_{\mu\varkappa}$ für $\mu \to \infty$ für jedes $\varkappa$ (wobei dann $0 \leqq u_1 \leqq u_2 \leqq \ldots \leqq u_q \leqq 1$ und $u_\varkappa \in \mathfrak{B}'_\varkappa$).

3. 5. 2. Wir zeigen jetzt: Sind in der Reihe der (zu $\mathfrak{H}$ gehörigen) $u_1, \ldots, u_q$ mehr als zwei unmittelbar aufeinanderfolgende gleich, so ist $\mathfrak{H}$ singuläre Gerade, und zwar Träger einer Halbtangente an $\mathfrak{C}^*$ in einem singulären Punkt.

Bew. Es sei etwa $u_\varkappa = u_{\varkappa+1} = u_{\varkappa+2}$. Zunächst kann $P^*(u_\varkappa)$ nicht Stelle im Innern eines konvexen Teilbogens $\mathfrak{B}'_\varkappa$ von $\mathfrak{C}^*$ sein. Denn sonst müßten für alle μ die drei Stellen $P^*(u_{\mu\varkappa})$, $P^*(u_{\mu,\varkappa+1})$, $P^*(u_{\mu,\varkappa+2})$ im Innern von $\mathfrak{B}'_\varkappa$ liegen und in drei verschiedene Punkte von $\mathfrak{B}'_\varkappa$ fallen, was der Tatsache widerspricht, daß die drei Punkte einerseits auf einer Geraden $\mathfrak{H}$ und andererseits auf einem konvexen streckenfreien Teilbogen $\mathfrak{B}'_\varkappa$ liegen sollen. Ebenso schließt man, daß $P^*(u_\varkappa)$ nicht Endstelle von $\mathfrak{C}^*$ sein kann. Somit ist $u_\varkappa$ singuläre Stelle, aber nicht Endstelle von $\mathfrak{C}^*$. Dann liegen von den drei Stellen $P^*(u_{\mu\varkappa})$, $P^*(u_{\mu,\varkappa+1})$, $P^*(u_{\mu,\varkappa+2})$ für alle μ mindestens zwei, etwa die beiden ersten, im Innern des gleichen Konvexbogens $\mathfrak{B}'_\varkappa$. Infolgedessen konvergiert $\mathfrak{H}_\mu$ gegen die Trägergerade der Halbtangente an $\mathfrak{B}'_\varkappa$ in $P^*(u_\varkappa)$, so daß $\mathfrak{H}$ singulär ist.

3. 5. 3. Anschließend an Nr. 3. 5. 2. ist nunmehr der Fall zu betrachten, daß unter den zur extremen Stützgeraden $\mathfrak{H}$ an $\mathfrak{K}$ gehörigen $u_1, \ldots, u_q$ nur zwei unmittelbar aufeinanderfolgende gleich sind, etwa $u_\varkappa = u_{\varkappa+1}$. Dann liegen die $P^*(u_{\mu\varkappa})$ und $P^*(u_{\mu,\varkappa+1})$ für schließlich alle μ in einer (beliebig kleinen, festen) Umgebung $\mathfrak{U}^*$ von $P^*(u_\varkappa)$ auf $\mathfrak{C}^*$. Ist nun $P^*(u_\varkappa)$ *nicht singulär*, so konvergieren die $\mathfrak{H}_\mu$ für $\mu \to \infty$ gegen eine *Stützgerade* $\mathfrak{H}'$ an $\mathfrak{C}^*$ mit der *nicht-singulären Stützstelle* $P^*(u_\varkappa)$ und es ist $\mathfrak{H}' = \mathfrak{H}$. Ist hingegen $P^*(u_\varkappa)$ singulär, so ist $\mathfrak{H}$ entweder *singuläre Gerade* (wenigstens dann, wenn die $P^*(u_{\mu\varkappa})$, $P^*(u_{\mu,\varkappa+1})$ schließlich alle in einer einseitigen Umgebung von $P^*(u_\varkappa)$ auf $\mathfrak{C}^*$ liegen und es ist dann $\mathfrak{H}$ singulär von der Art (1)); oder es ist $\mathfrak{H}$ *Stützgerade* an $\mathfrak{C}^*$ mit der *singulären Stützstelle* $P^*(u_\varkappa)$.

3. 5. 4. Schließlich ist der Fall dreier benachbarter, aber verschiedener $u_\varkappa$ in Betracht zu ziehen, also etwa $u_{\varkappa-1} < u_\varkappa < u_{\varkappa+1}$, wobei

$\varkappa = 1$ oder $\varkappa = q$ zugelassen sei; für $\varkappa = 1$ bzw. $\varkappa = q$ ist zu setzen $u_0 = 0$ bzw. $u_{q+1} = 1$. Dann ist $P^*(u_\varkappa)$ Schnittstelle von $\mathfrak{H}$ mit $\mathfrak{C}^*$ (wobei $P^*(u_\varkappa)$ auch singulär sein kann). In der Tat: Schließlich alle $\mathfrak{H}_\mu$ haben mit einer Umgebung $\mathfrak{U}^*$ von $P^*(u_\varkappa)$ auf $\mathfrak{C}^*$, also mit einem einfachen Teilbogen $\mathfrak{U}^*$ von $\mathfrak{C}^*$ je genau einen Schnittpunkt, nämlich $P^*(u_{\mu\varkappa})$ gemeinsam. Wäre $P^*(u_\varkappa)$ Stützstelle von $\mathfrak{H}$ auf $\mathfrak{U}^*$, so hätten alle, zu $\mathfrak{H}$ hinreichend benachbarten Geraden $\mathfrak{H}'$, wenn mit $\mathfrak{U}$ mindestens einen, dann sogar mindestens zwei Punkte gemeinsam.

3.5.5. Aus der Definition der singulären Geraden (Nr. 3.5.) und aus den Feststellungen in Nr. 3.5.2.—3.5.4. folgt: *Jede extreme Stützgerade* $\mathfrak{H}$ *an* $\mathfrak{K}$, *die nicht singulär ist bezüglich* $\mathfrak{C}^*$, *besitzt nachstehende Eigenschaften:* (I) Sämtliche (etwa vorhandene) Stützstellen von $\mathfrak{H}$ mit $\mathfrak{C}^*$ fallen in den nämlichen Punkt V von $\mathfrak{C}$ (wobei V auch singulär sein kann); (II) Ist V singulär, so ist $\mathfrak{H}$ nicht Träger einer Halbtangente an $\mathfrak{C}^*$ in V; (III) Ist a bzw. b bzw. e die Anzahl aller auf $\mathfrak{H}$ gelegenen Schnitt- bzw. Stütz- bzw. Endstellen, so gilt $(r \leqq) q \leqq a + 2b + e$, wobei $0 \leqq e \leqq 1$ und wobei $b = 0$, wenn $e = 1$.

Bew. (I) und (II) folgt aus der Definition der singulären Geraden klar. Hinsichtlich (III) kann man so schließen: Da $\mathfrak{H}$ als nicht-singuläre Gerade höchstens eine Endstelle und dann keine Stützstelle tragen kann, folgt $e \leqq 1$ und $b = 0$ für $e = 1$. Beweis, daß $q \leqq a + 2b + e$ ist:

In beliebiger Nachbarschaft von $\mathfrak{H}$ gibt es q-Sekanten $\mathfrak{H}_\mu$ mit den q Schnittstellen $P^*(u_{\mu\varkappa})$, $\varkappa = 1, \ldots, q$; $r \leqq q$. Für $\mu \to \infty$ konvergieren diese $u_{\mu\varkappa}$ gegen $u_\varkappa$. Nach dem schon Bemerkten ist nun entweder $u_1 = 0$ oder $u_q = 1$ oder keines von beiden der Fall. Ferner ist $u_2 > 0$ für $u_1 = 0$ bzw. $u_{q-1} < 1$ für $u_q = 1$, da andernfalls $\mathfrak{H}$ singulär wäre von der Art (1) (Nr. 3.5.). Gemäß Nr. 3.5.2. können ferner höchstens je zwei benachbarte der $u_\varkappa$ gleich sein und liefern dann eine Stützstelle von $\mathfrak{H}$ auf $\mathfrak{C}^*$ (gemäß Nr. 3.5.3.). Für die hiermit festgestellten a' Schnitt-, b' Stütz- und e' Endstellen $P^*(u_\varkappa)$ gilt in Rücksicht auf Nr. 3.5.4. mithin $q = a' + 2b' + e'$. Beim Grenzübergang von den $\mathfrak{H}_\mu$ zu $\mathfrak{H}$ können nun zu diesen b' Stütz- und e' Endstellen unter Umständen noch neue hinzutreten, etwa b'' Stütz- und e'' Endstellen; hingegen können durch den Grenzübergang keine Schnittstellen gewonnen werden. Setzt man $b = b' + b''$ und $e = e' + e''$, so ergibt sich (III).

3.5.6. Ist die in dem zu beweisenden Satze von Nr. 3.5. betrachtete Komponente $\mathfrak{K}$ von $\mathfrak{D}'(r)$ eine Strecke, so ist der Satz richtig. Wir werden daher von jetzt ab voraussetzen, daß der bezüglich R_r offene Kern $\underline{\mathfrak{K}}$ von $\mathfrak{K}$ nicht leer ist. *Zu beweisen* ist, daß keine extremen Stützgeraden an $\mathfrak{K}$ existieren, die nicht-singulär sind (bezüglich $\mathfrak{C}^*$).

3.5.7. Es sei also $\mathfrak{H}$ nicht-singulär und extreme Stützgerade an $\mathfrak{K} > \underline{\mathfrak{K}} \neq \mathfrak{D}$ mit dem Stützpunkt S. Wir *behaupten vorerst, daß* $b \geqq 2$ sein muß. Wäre nämlich *zunächst* $b = 0$, so würden auf *jeder*, zu $\mathfrak{H}$

hinreichend benachbarten Geraden $\mathfrak{H}'$ mindestens $(q-e)$ Schnittstellen liegen, wobei $r \leqq q$. Wir betrachten *Erstens* den Fall, daß S *nicht* in eine, auf $\mathfrak{H}$ gelegene Endstelle von $\mathfrak{C}^*$ fällt. Weil $e \leqq 1$, gäbe es dann in beliebiger Nachbarschaft von $\mathfrak{H}$ Geraden $\mathfrak{H}''$ durch S mit mindestens q Schnittstellen (mit $\mathfrak{C}^*$). Und da S als Stützpunkt von $\mathfrak{H}$ auf $\mathfrak{K}_r$ Häufungspunkt des nicht leeren offenen Kerns $\underline{\mathfrak{K}}$ der konvexen Menge $\mathfrak{K}$ ist, so gäbe es in beliebiger Nachbarschaft von $\mathfrak{H}''$, und damit von $\mathfrak{H}$, eine (nicht leere) offene Menge $\mathfrak{u}$ von Geraden; deren jede mindestens r Schnittstellen mit $\mathfrak{C}^*$ gemeinsam hat und deren jede gleichzeitig nicht fremd ist zu $\mathfrak{Q}' = \mathfrak{Q}'(r) = \mathfrak{A} + \mathfrak{Q}(r)$. Wendet man aber Nr. 3.2., Beh. (II), auf ein in $\mathfrak{u}$ enthaltenes Geradenbüschel mit zu $\mathfrak{C}$ fremdem Zentrum an (solche Büschel existieren), so ergibt sich die Existenz von in $\mathfrak{u}$ enthaltenen, ganz in $\mathfrak{R}(r)$ gelegenen Geraden, die also fremd sind zu $\mathfrak{Q}'(r)$. Widerspruch. Es falle jetzt Zweitens S in eine Endstelle von $\mathfrak{C}^*$, etwa in $P^*(0)$. Da $\mathfrak{H}$ extreme Stützgerade von $\mathfrak{K}$ ist, gibt es zu $\mathfrak{H}$ beliebig benachbarte Geraden $\mathfrak{H}'$ durch S, die nicht fremd sind zu $\underline{\mathfrak{K}}$; und, wie oben festgestellt, trägt $\mathfrak{H}'$ außer $P^*(0)$ noch mindestens $(q-1)$ Schnittstellen. Daher gibt es in beliebiger Nachbarschaft von $\mathfrak{H}'$ eine offene Menge von zu $\underline{\mathfrak{K}}$ nicht fremden Geraden mit je mindestens r Schnittstellen. Dies ist aber, wie vorhin gezeigt; widersinnig. — Wäre *ferner* $b = 1$ (und dann $e = 0$), und wäre V Trägerpunkt der (einzigen) Stützstelle von $\mathfrak{C}^*$ auf $\mathfrak{H}$, so gäbe es Geraden $\mathfrak{H}'$, welche durch V gehen, zu $\mathfrak{H}$ beliebig benachbart sind sowie nicht fremd sind zu $\underline{\mathfrak{K}}$ und auf welchen mindestens $a \geqq q-2 \geqq r-2$ Schnittstellen liegen, sowie entweder eine Stützstelle in V oder (mindestens) zwei zu V beliebig benachbarte Schnittstellen. Daher gäbe es in beliebiger Nachbarschaft von $\mathfrak{H}'$, und damit von $\mathfrak{H}$, eine offene (nicht leere) Menge von Geraden, auf deren jeder mindestens r Schnittstellen und gleichzeitig Punkte von $\underline{\mathfrak{K}}$, also von $\mathfrak{Q}'(r)$ liegen. Daraus folgt, wie im Falle $b = 0$, ein Widerspruch.

3.5.8. Gemäß Nr. 3.5.7. nehmen wir jetzt an: Auf der nichtsingulären, extremen Stützgeraden $\mathfrak{H}$ an $\mathfrak{K}$ liegen $b \geqq 2$, sämtlich vom Punkt V getragene Stützstellen mit $\mathfrak{C}^*$ und außerdem noch $a \geqq q-2b$ Schnittstellen mit $\mathfrak{C}^*$ (wegen $b > 0$ ist $e = 0$, so daß Endstellen von $\mathfrak{C}^*$ nicht auf $\mathfrak{H}$ liegen). Wir setzen $b' = 2^{-1}(q-a)$ (vgl. Nr. 3.5.5.; Bew.); es gilt $0 \leqq b' \leqq b$. Ist $b' = 0$ oder $b' = 1$, so ist $a = q$ oder $a = q-2$ und wir können wie in Nr. 3.5.7. für $b = 0$ oder $b = 1$ zu einem Widerspruch gelangen. Es sei also $2 \leqq b' \leqq b$, wobei $q = a + 2b'$. Ferner seien $\mathfrak{B}'_\varrho$, $\mathfrak{B}''_\varrho$, $\varrho = 1, \ldots, b$, konvexe Teilbogen von $\mathfrak{C}^*$, deren jeder V als einen seiner Endpunkte besitzt und die so beschaffen sind, daß jeder Bogen $\mathfrak{U}_\varrho = \mathfrak{B}'_\varrho + \mathfrak{B}''_\varrho$, welcher übrigens, als Punktmenge in R_2 betrachtet, mit $\mathfrak{B}'_\varrho$ oder mit anderen $\mathfrak{U}_\varrho$ identisch sein kann, je eine Umgebung auf $\mathfrak{C}^*$ für jede der b in V vereinigt liegenden Stützstellen von $\mathfrak{H}$ mit $\mathfrak{C}^*$ liefert. Da $\mathfrak{H}$ Stützgerade an $\mathfrak{U}_\varrho$ in V ist, $\varrho = 1, \ldots, b$, kann o. B. d. A. von $\mathfrak{U}_\varrho$ vorausgesetzt werden, daß $\mathfrak{U}_\varrho < \mathfrak{V}$, wo $\mathfrak{V}$ eine beliebig kleine (feste) Umgebung von V in R_2 bezeichnet, und daß jedes $\mathfrak{U}_\varrho$

ganz auf *einer* „Seite" von $\mathfrak{H}$ (in $\mathfrak{V}$) liegt, d. h. ganz in (dem Durchschnitt von $\mathfrak{V}$ mit) einer von $\mathfrak{H}$ begrenzten, abgeschlossenen Halbebene.

Jetzt sind nur folgende zwei Fälle möglich: (A) Auf (mindestens) einer der beiden Seiten von $\mathfrak{H}$ (in $\mathfrak{V}$) liegen mindestens b' der $\mathfrak{U}_\varrho$. In diesem Falle gelangt man analog wie in Nr. 3.5.7. für $b = 1$ zu einem Widerspruch. Oder (B) Auf *jeder* der beiden Seiten von $\mathfrak{H}$ (in $\mathfrak{V}$) liegen höchstens $(b' - 1)$ der $\mathfrak{U}_\varrho$ und auf jeder Seite auch mindestens ein $\mathfrak{U}_\varrho$; also etwa $\mathfrak{U}_1, \ldots, \mathfrak{U}_p$ auf der einen und $\mathfrak{U}_{p+1}, \ldots, \mathfrak{U}_b$ auf der anderen Seite von $\mathfrak{H}$, wobei $1 \leqq p \leqq b' - 1$, $1 \leqq b - p \leqq b' - 1$. In diesem Falle ist V Verzweigungspunkt von $\mathfrak{C}$ und somit singulär. Daher besitzt $\mathfrak{H}$ die Eigenschaft (II) in Nr. 3.5.5.. Folglich existiert in R_2 ein Paar abgeschlossener (bis auf V fremder) (Scheitel-) Winkelräume $\mathfrak{W}'$, $\mathfrak{W}''$ mit V als gemeinsamem Scheitel und mit folgenden Eigenschaften: Es liegt $(\mathfrak{H} - (V))$ im Komplement von $\mathfrak{W}' + \mathfrak{W}''$; ist ferner $\mathfrak{V}' = \mathfrak{U}_1 + \cdots + \mathfrak{U}_p$, $\mathfrak{V}'' = \mathfrak{U}_{p+1} + \cdots + \mathfrak{U}_b$, dann gibt es eine Umgebung $\mathfrak{V} < \mathfrak{V}$ von V in R_2 derart, daß $\mathfrak{V}'\mathfrak{V}' < \mathfrak{W}'$ und $\mathfrak{V}''\mathfrak{V}' < \mathfrak{W}''$. Nun gelangen wir so zu einem Widerspruch: Es existiert eine in $\mathfrak{V}'$ enthaltene Umgebung $\mathfrak{V}''$ von V in R_2 und eine $\mathfrak{H}$ enthaltende offene Menge $\mathfrak{u}$ von Geraden so, daß jede, V nicht enthaltende Gerade $\mathfrak{H}' \in \mathfrak{u}$ fremd ist entweder zu $\mathfrak{V}'\mathfrak{V}''$ oder zu $\mathfrak{V}''\mathfrak{V}''$ und daß $\mathfrak{H}'$ zugleich mit jedem $\mathfrak{U}_\varrho$ höchstens 2 Schnittpunkte gemeinsam hat. Dies folgt aus den Eigenschaften von $\mathfrak{W}'$, $\mathfrak{W}''$ bzw. $\mathfrak{V}'$, $\mathfrak{V}''$. Somit hat jede solche Gerade $\mathfrak{H}'$ mit $\mathfrak{C}^*$ innerhalb $\mathfrak{V}''$ weniger als $2b'$ Stellen gemeinsam, während doch schließlich alle Geraden $\mathfrak{H}_\mu$ zu $\mathfrak{H}$ beliebig benachbart sind sowie fremd zu V und mit $\mathfrak{C}^*$ innerhalb $\mathfrak{V}''$ mindestens $2b'$ Schnittstellen gemeinsam haben (gemäß der Definition von b').

Damit ist der Satz in Nr. 3.5. bewiesen.

§ 4

Ordnungsfeste Erweiterung von Bogen.

4.1. Je nachdem die beiden Endstellen des eindeutigen, stetigen Streckenbildes $\mathfrak{C}^*$ verschiedene oder gleichen Träger (Endpunkte) besitzen, wollen wir von einem *Bogen* oder von einer *Kurve* sprechen. Es sei jetzt $\mathfrak{C}^*$ ein Bogen vom starken Stellenordnungswert k mit den beiden Endpunkten E_1, E_2. Die beiden offenen Strecken im (projektiven) R_n, welche die Endpunkte E_1, E_2 besitzen, seien $\mathfrak{s}'$ und $\mathfrak{s}''$. Dann sind $\mathfrak{C}^{*\prime} = \mathfrak{C}^* + \mathfrak{s}'$ und $\mathfrak{C}^{*\prime\prime} = \mathfrak{C}^* + \mathfrak{s}''$ Kurven[11]) vom beschränkten

[11]) Dabei sind $\mathfrak{C}^{*\prime}$ und $\mathfrak{C}^{*\prime\prime}$ als Kurven in einem etwas weiteren Sinne, als bisher von uns gebraucht, zu verstehen, insofern sie nämlich je eine *Strecke* $\mathfrak{s}'$ bzw. $\mathfrak{s}''$ enthalten. Die Trägergerade dieser Strecken hat also mit der Kurve unendlich viele Punkte gemeinsam. Sieht man bei der Definition des Stellenordnungswertes der Kurven $\mathfrak{C}^*$, $\mathfrak{C}^{**}$ von allen Hyperebenen ab, in denen $\mathfrak{s}'$, $\mathfrak{s}''$ enthalten sind, so erhält man den schwachen Stellenordnungswert (vgl. a. a. O.[12]), Nr. 1.4.2.)

schwachen Stellenordnungswert k' bzw. k''. Es ist nun entweder $k' = k$ und $k'' = k+1$ oder umgekehrt. In der Tat: Einerseits ist $k' + k'' \equiv 1 \pmod 2$, also $\mathrm{Min}(k', k'') < \mathrm{Max}(k', k'')$; denn von unseren beiden Kurven hat die eine eine ungerade, die andere eine gerade Anzahl Stellen mit einer k-Sekante von $\mathfrak{C}^*$ gemeinsam und das gilt dann für jede Sekante überhaupt. Andererseits ist $k-1 < \mathrm{Min}(k', k'') < \mathrm{Max}(k', k'') < k+2$. Daraus folgt die Beh. Ist etwa $k' = k$, so bezeichnen wir $\mathfrak{s}'$ als die *Schlußstrecke* von $\mathfrak{C}^*$; durch Hinzufügung von $\mathfrak{s}'$ zu $\mathfrak{C}^*$ wird also der schwache Stellenordnungswert k nicht geändert (schwach ordnungsfeste Erweiterung des Bogens zu einer Kurve). Es gilt nun der

Satz. (A) *Jeder Bogen $\mathfrak{C}^*$ im R_n vom starken Stellenordnungswert k läßt sich durch Hinzufügung seiner Schlußstrecke $\mathfrak{s}'$ zu einer Kurve $\mathfrak{K}^*$ erweitern, deren schwacher Stellenordnungswert gleich k ist.* **(B)** *Die Schlußstrecke $\mathfrak{s}'$ ist enthalten in einer Komponente $\mathfrak{K}'$ von $\mathfrak{Q}'(k) = \mathfrak{A} + \mathfrak{Q}(k)$; dabei enthält $\mathfrak{Q}'(k)$, also auch $\mathfrak{s}'$, keine k-Punkte.*

Bew. (A) folgt aus den vorangehenden Überlegungen. — (B) ergibt sich so: Wegen $k' = k$ wird $\mathfrak{s}'$ von keiner k-Sekante getroffen, so daß $\mathfrak{s}'$ keine k-Punkte enthält. Da aber (gemäß Nr. 3. 4.) sämtliche k-Punkte normal sind, also in $\mathfrak{N}(k)$ liegen, ist $\mathfrak{s}' \subset \mathfrak{A} + \mathfrak{Q}'(k)$. Weil $\mathfrak{s}'$ zusammenhängend ist, liegt daher $\mathfrak{s}'$ in einer Komponente von $\mathfrak{Q}'(k)$.

4. 2. Mit Hilfe der Feststellungen in Nr. 4. 1. erhalten wir weiter den

Satz. Vor. *Es sei $\mathfrak{C}^*$ ein Bogen vom starken Stellenordnungswert k im R_n mit $n \geqq 2$; und es sei $\mathfrak{K}'$ die die Schlußstrecke $\mathfrak{s}'$ von $\mathfrak{C}^*$ enthaltende Komponente von $\mathfrak{Q}'(k)$. Schließlich sei $\mathfrak{B}$ ein (einfacher), keine hyperebenen Teilbogen enthaltender Bogen vom starken (Stellen-) Ordnungswert n, welcher die Endpunkte von $\mathfrak{s}'$ verbindet und in $\mathfrak{K}'$ enthalten ist ($n \leqq k$).*

Beh. *Je nachdem $n \equiv 0 \pmod 2$ oder $n \equiv 1 \pmod 2$ ist $\mathfrak{B}^* = \mathfrak{C}^* + \mathfrak{B}$ eine Kurve, deren starker Stellenordnungswert höchstens $(k + n - 2)$ oder höchstens $k + n - 1$ beträgt.*

Zusatz. *Im Falle $n = 2$* existiert ein solcher Bogen $\mathfrak{B}$ dann und nur dann, wenn $\mathfrak{K}'$ zweidimensional ist. Dann und nur dann ist also $\mathfrak{C}^*$ *ordnungsfest* (d. h. ohne Änderung des starken Stellenordnungswertes) zu einer Kurve ohne Teilstrecken erweiterbar. Ist überdies $\mathfrak{C}^*$ vom Maximalstellenindex (d. h. ist $k-2 \leqq t \leqq k$ für *jeden* t-Punkt bezüglich $\mathfrak{C}^*$), so kann $\mathfrak{C}^*$ ordnungsfest zu einer Kurve vom Maximalstellenindex (ohne Teilstrecken) erweitert werden.

Bew. (1) O. B. d. A. können wir $\mathfrak{K}'$, also auch $(\mathfrak{s}' + \mathfrak{B})$ als beschränkt annehmen (Nr. 3. 4., Beh. A.). Mithin ist $(\mathfrak{s}' + \mathfrak{B})$ eine Kurve von geradem schwachem Stellenordnungswert. Für jede, $\mathfrak{s}'$ nicht enthaltende Sekante $\mathfrak{H}$ von $(\mathfrak{s}' + \mathfrak{B})$ ist also $\mathfrak{H}\mathfrak{s}' = \mathfrak{O}$ oder $\mathfrak{H}\mathfrak{s}' \neq \mathfrak{O}$, je nachdem $\mathfrak{H}$ mit $\mathfrak{B}$ eine gerade oder ungerade Anzahl Stellen gemeinsam hat. — (2) Ist $\mathfrak{H}$ eine Sekante von $\mathfrak{B}^* = \mathfrak{C}^* + \mathfrak{B}$, von der auch $\mathfrak{B}$ getroffen wird, so ist $\mathfrak{H}$ (gemäß Nr. 4. 1. Satz, (B)) nicht fremd zu $\mathfrak{K}'$ und hat daher, falls

$\mathfrak{H}\mathfrak{s}' = \mathfrak{O}$, nicht mehr als $(k-2)$ Schnittstellen mit $\mathfrak{C}^*$ gemeinsam; denn wegen $\mathfrak{H}\mathfrak{K}' \neq \mathfrak{O}$ kann $\mathfrak{H}$ nicht mehr als $(k-1)$ Schnittstellen enthalten und wegen $\mathfrak{H}\mathfrak{s}' = \mathfrak{O}$ auch nicht $(k-1)$ Schnittstellen (gemäß Nr. 4. 1., Satz). — (3) Ist $\mathfrak{H}$ eine Hyperebene, welche *höchstens* $(n-2)$ *Punkte*[15]) von $\mathfrak{B}$ enthält, so hat $\mathfrak{H}$ höchstens $(n-2+k)$ Schnittstellen mit $\mathfrak{B}^*$ gemeinsam. Es sei nun $\mathfrak{H}'$ bzw. $\mathfrak{H}''$ eine Hyperebene, welche $(n-1)$ *bzw. n Schnittpunkte* mit $\mathfrak{B}$ gemeinsam hat; o. B. d. A. können dabei auch die auf $\mathfrak{H}$ liegenden Stellen von $\mathfrak{C}^*$ als Schnittstellen und $\mathfrak{s}'$ als nicht in $\mathfrak{H}$ enthalten angenommen werden. Die Anzahl aller Schnittstellen von $\mathfrak{H}'$ bzw. $\mathfrak{H}''$ mit $\mathfrak{B}^*$ sei p' bzw. p''. *Im Falle* $n \equiv 0$ ist nun $\mathfrak{H}'\mathfrak{s}' \neq \mathfrak{O}$ bzw. $\mathfrak{H}''\mathfrak{s}' = \mathfrak{O}$ (gemäß (1)) und folglich $p' \leqq (n-1)+(k-1) = n+k-2$ bzw. $p'' \leqq n+(k-2) = n+k-2$ (letzteres gemäß (2)). *Im Falle* $n \equiv 1$ hingegen ist $\mathfrak{H}'\mathfrak{s}' = \mathfrak{O}$ bzw. $\mathfrak{H}''\mathfrak{s}' \neq \mathfrak{O}$ und folglich $p' \leqq (n-1)+(k-2) = n+k-3$ bzw. $p'' \leqq n+(k-1) = n+k-1$; w. z. z. w. Der Zusatz ist ohne weiteres klar.

§ 5.

Verschiedene Beispiele.

Die vorangehenden Begriffsbildungen und Sätze sollen noch für den Fall $n = 2$ durch Beispiele erläutert werden[16]).

5.1. Punkte, welche nicht t-Punkte sind $(1 \leqq t)$.

Solche Punkte werden geliefert: (a) durch die Endpunkte eines jeden Bogens; (b) durch eine Schnabelspitze, d. h. durch einen inneren Punkt S eines (etwa einfachen) Bogens $\mathfrak{C}$ von der Art, daß in S an $\mathfrak{C}$ genau eine Halbtangente $\mathfrak{h}$ existiert und daß eine Umgebung von S auf $\mathfrak{C}$ ganz im einen der beiden von der Halbtangente h und von der Normalen auf h in S gebildeten Quadranten liegt. (Eine solche Schnabelspitze S ist nämlich Stützpunkt auf *jeder*, also Schnittpunkt auf *keiner*, durch S gehenden Geraden); (c) durch eine Dornspitze D, auf deren Spitzentangente eine, nicht nach D fallende Stützstelle liegt. Eine Dornspitze D ist dabei erklärt als innerer Punkt eines (etwa einfachen) Bogens $\mathfrak{C}$ von der Art, daß in D an $\mathfrak{C}$ genau eine Halbtangente $\mathfrak{h}$ existiert und daß die beiden einseitigen Umgebungen von D auf $\mathfrak{C}$ in verschiedenen derjenigen beiden Quadranten liegen, welche von $\mathfrak{h}$ und der Normalen auf $\mathfrak{h}$ in D gebildet werden. (Eine solche Dornspitze D ist nämlich Stützpunkt auf jeder Geraden durch D mit Ausnahme der Spitzentangente, d. h. der Trägergeraden von $\mathfrak{h}$, auf welcher D Schnittpunkt ist.)

Anmerkung. Die Verteilung der t-Punkte für die verschiedenen Werte von t im Falle einer von zwei, bis auf einen gemeinsamen

[15]) Diese Punkte können o. B. d. A. als Schnittpunkte mit $\mathfrak{B}$ und folglich als von den Endpunkten verschieden angenommen werden.

[16]) Vgl. oben im Text Nr. 1. 2. sowie a. a. O.[1]), S. 135.

9254-52 35 B

Endpunkt fremden, Konvexbogen gebildeten Schnabelspitze kann an einer zugehörigen Figur einfach abgelesen werden.

5. 2. Punkte, welche zwar t-Punkte, aber nicht innere Punkte der Menge $\mathfrak{P}$ aller t-Punkte sind ($1 \leqq t \leqq k$).

Einen solchen Punkt kann man mit Hilfe der nachstehenden Konstruktion erhalten: (A) Es sei $\mathfrak{B} = \widehat{E_1 E_2}$ ein streckenfreier, stetig differenzierbarer Konvexbogen ohne parallele Tangenten (die Tangenten in den Endpunkten einbegriffen). Auf $\mathfrak{B}$ werde ein innerer Punkt Q ausgezeichnet sowie eine, auf $\mathfrak{B}$ monoton von E_1 her gegen Q konvergierende Folge verschiedener Punkte P_μ. Das vom Bogen $\mathfrak{B}$ bzw. von seinem Teilbogen $\mathfrak{B}'_\nu = \widehat{P_{2\nu-1} P_{2\nu}}$ und von der Strecke $E_1 E_2$ bzw. $P_{2\nu-1} P_{2\nu}$ begrenzte, konvexe, offene „Segment" sei mit $\mathfrak{S}$ bzw. mit $\mathfrak{S}_\nu$ bezeichnet, $\nu = 1, 2, \ldots$. Jede Gerade hat dann mit höchstens zweien der S_ν Punkte gemeinsam. — (B) Es sei jetzt $\mathfrak{B}_\nu$ ein in $\mathfrak{S}_\nu$ gelegener, streckenfreier, einfacher, offener, stetig differenzierbarer Bogen mit den Endpunkten $P_{2\nu-1}$ und $P_{2\nu}$, der an Singularitäten, außer Wendepunkten, genau eine Schnabelspitze besitzt und im übrigen stückweise konvex ist. Außerdem soll sich $\mathfrak{B}_\nu$ in $P_{2\nu-1}$ und $P_{2\nu}$ stetig differenzierbar an $(\mathfrak{B} - \mathfrak{B}'_\nu)$ anschließen, $\nu = 1, 2, \ldots$. — (C) Die Bogensumme $\widehat{Q E_2} + \mathfrak{B}_1 + \mathfrak{B}''_1 + \mathfrak{B}_2 + \mathfrak{B}''_2 + \cdots$, wobei $\mathfrak{B}''_\nu = \widehat{P_{2\nu} P_{2\nu+1}}$ Teilbogen von $\mathfrak{B}$, ist dann ein einfacher Bogen $\mathfrak{B}^*$ von endlichem starkem Stellenordnungswert, auf dem Q zwar ein t-Punkt, aber zugleich Häufungspunkt von Schnabelspitzen ist, welch letztere nicht t-Punkte sind (Nr. 5. 1.).

5. 3. Punkte, welche zwar innere Punkte der Menge aller t-Punkte ($1 \leqq t$), aber keine gewöhnlichen Punkte sind.

Konstruktion. (A) wie in Nr. 5. 2. — (B) Als Bogen $\mathfrak{B}_\nu$ nehmen wir jetzt einen in $\mathfrak{S}_\nu$ gelegenen, streckenfreien, einfachen, offenen, stetigdifferenzierbaren, stückweise konvexen Bogen mit den Endpunkten $P_{2\nu-1}$ und $P_{2\nu}$, welcher an Singularitäten[17]) genau eine Dornspitze D_ν besitzt, deren Spitzenhalbtangente $\mathfrak{h}$ parallel und gleichgerichtet ist zur Halbtangente an $\mathfrak{B}$ in E_1 sowie fremd zu $\mathfrak{B}_\nu$, während die Trägergerade von $\mathfrak{h}$ bzw. die Gerade durch D_ν und Q mit $\mathfrak{B}_\nu$ genau zwei bzw. mindestens drei (von D_ν verschiedene) *Schnittpunkte* gemeinsam hat. — (C) Eine Gerade durch Q und durch geeignete, zu D_ν hinreichend benachbarte Punkte hat mit $\mathfrak{B}_\nu$ (mindestens) 5 Schnittpunkte gemeinsam, so daß Q auf $\mathfrak{B}^*$ den Ordnungswert $k \geqq 6$ besitzt. Da andererseits D_ν für jedes ν gewöhnlicher Punkt vom Ordnungswert Drei bezüglich ($\mathfrak{B}_\nu$ und) $\mathfrak{B}^*$ ist (wegen des Fehlens paralleler Tangenten an $\mathfrak{B}$) und da die Punkte einer Umgebung von Q in R_2 sämtlich t-Punkte sind, so ist Q nicht-gewöhnlicher, innerer Punkt der Menge aller t-Punkte. (Es ist Q sogar isolierter Punkt der Menge aller nicht-gewöhnlichen Punkte.)

[17]) abgesehen von Wendepunkten.

5.4. Punkte, welche zwar gewöhnliche, aber nicht normale Punkte sind.

Konstruktion. (A) wie in Nr. 5.2. — (B) Es wird (A) und (B) wie in Nr. 5.3. ausgeführt (aber jetzt statt auf das Segment $\mathfrak{S}$) auf jedes einzelne Segment $\mathfrak{S}_\nu$, wie sie in Nr. 5.2. vermöge (A) konstruiert wurden; dabei sollen die Spitzenhalbtangenten aller (unendlich vielen) in $\mathfrak{S}_\nu$ gelegenen Dornspitzen parallel und gleichgerichtet sein zur Halbtangente an den ursprünglich zu Grunde gelegten Bogen $\mathfrak{B}$ im Endpunkt E_1 (vgl. Nr. 5.3., (B)). Wir erhalten so statt $\mathfrak{B}'_\nu \subset \mathfrak{S}_\nu$ einen Bogen $\mathfrak{B}^*_\nu \subset \mathfrak{S}_\nu$. Schließlich werde der Teilbogen $\overset{\frown}{QE_2}$ von $\mathfrak{B}$ ersetzt durch den zu ihm bezüglich Q spiegelbildlichen Konvexbogen $\overset{\frown}{QE_2^*}$; dadurch entsteht in Q eine Dornspitze, für welche die Trägergerade der Spitzenhalbtangente außer Q keinen Punkt mit $\mathfrak{B}$ oder mit einem der $\mathfrak{S}_\nu$ gemeinsam hat. — (C) Es sei $\mathfrak{B}^* = \overset{\frown}{QE_2^*} + B_1^* + \mathfrak{B}_1'' + \mathfrak{B}_2^* + \mathfrak{B}_2'' + \cdots$. Dann besitzt Q bezüglich $\mathfrak{B}^*$ den Ordnungswert Eins; und da eine Umgebung von Q im R_2 nur t-Punkte enthält, ist Q gewöhnlicher Punkt (vgl. Nr. 3.3., Zusatz 2.). Andererseits enthält aber (zufolge der Konstruktion) $\mathfrak{B}_\nu^*$ einen auch bezüglich $\mathfrak{B}^*$ nicht-gewöhnlichen Punkt Q_ν^*. Mithin ist Q gewöhnlich, aber Häufungspunkt von nicht-gewöhnlichen Punkten bezüglich $\mathfrak{B}^*$.

5.5. *Isolierter Punkt der Menge $\mathfrak{Q}(t)$ aller normalen Punkte von höchstens dem Ordnungswert $(t-1)$.* Ein derartiger Punkt ist insbesondere *einpunktige* (isolierte) *Komponente von $\mathfrak{Q}(t)$.* — Beispiel: Einfacher streckenfreier, stetig differenzierbarer Bogen, welcher Summe dreier Konvexbogen ist und an Singularitäten eine Dornspitze D sowie einen Wendepunkt besitzt, wobei ferner $t = 3$ und D vom Ordnungswert 2 ist, während in einer Umgebung von D in R_2 nur normale Punkte von mindestens der Ordnung 3 liegen.

5.6. Einfacher Bogen vom Ordnungswert $k\,(=4)$, dessen Endpunkte isolierte Punkte von $\mathfrak{A}$ und innere Punkte von $\mathfrak{A} + \mathfrak{Q}(k)$ sind.

Ein derartiger Bogen mit $k = 4$ kann so erhalten werden: Es sei $\mathfrak{K}$ ein streckenfreier, stetig differenzierbarer Konvexbogen ohne parallele Tangenten. An $\mathfrak{K}$ setze man in seinen Endpunkten T', T'' je einen Konvexbogen $\mathfrak{K}'$ bzw. $\mathfrak{K}''$ der gleichen Art so an, daß in T' und in T'' je ein Wendepunkt entsteht. Überdies können und sollen $\mathfrak{K}'$ und $\mathfrak{K}''$ so gewählt werden: $\mathfrak{K}'$ und $\mathfrak{K}''$ sind fremd; ferner liegen ihre von T' und T'' verschiedenen Endpunkte im Innern desjenigen, von den beiden Wendetangenten in T' und T'' gebildeten Winkelraums, welcher Scheitelwinkelraum des $\mathfrak{K}$ enthaltenden Winkelraumes ist; schließlich ist $\mathfrak{K}' + \mathfrak{K} + \mathfrak{K}''$ vom starken Ordnungswert $k = 4$.

5.7. Einfache geschlossene Kurve vom Ordnungswert k, für die $\mathfrak{A} = \mathfrak{Q}$ ist und $\mathfrak{Q}(k)$ keine zweidimensionale Komponente besitzt. Beispiel: Die Evolute der Ellipse.

5. 8. Die Anzahl der Komponenten des offenen Kerns von $\mathfrak{Q}' = \mathfrak{A} + \mathfrak{Q}(k)$ kann beliebig groß sein.

5. 8. 1. Zur Konstruktion derartiger (einfacher) Bogen $\mathfrak{C} = \mathfrak{C}^*$ betrachten wir zunächst das kartesische Bild $\mathfrak{B}_1$ von $y = \sin 2\pi m x$, $0 \leqq x \leqq 1$; $m \geqq 2$; es ist $\mathfrak{B}_1$ Summe endlich vieler Konvexbogen. Von den beiden Endpunkten E_1', E_1'' abgesehen, ist jeder Punkt von $\mathfrak{B}_1$ normal und besitzt maximal den Ordnungswert $(2m+1)$ bezüglich $\mathfrak{B}_1$. Um die Menge $\mathfrak{Q}' = \mathfrak{A} + \mathfrak{Q}(2m+1)$ zu beschreiben, bezeichnen wir mit $\mathfrak{B}'$ bzw. $\mathfrak{B}''$ denjenigen größten *konvexen* Teilbogen von $\mathfrak{B}_1$, dessen einer Endpunkt E_1' bzw. E_1'' ist. Es sei dann $\mathfrak{d}$ die gemeinsame Tangente von $\mathfrak{B}'$ und $\mathfrak{B}''$ (von der also $\mathfrak{B}'$ und $\mathfrak{B}''$ je in einem inneren Punkte gestützt wird); ferner sei $\mathfrak{t}'$ bzw. $\mathfrak{t}''$ die Tangente durch E_1' bzw. E_1'' an $\mathfrak{B}''$ bzw. an $\mathfrak{B}'$. Ist dann F' bzw. F'' der Schnittpunkt von $\mathfrak{d}$ mit $\mathfrak{t}'$ bzw. mit $\mathfrak{t}''$, so ist $\mathfrak{Q}'$ das abgeschlossene, die Strecke $0 \leqq x \leqq 1$ nicht enthaltende Viereck $\mathfrak{B}_1$, dessen Seiten die beschränkten bzw. nichtbeschränkten Verbindungsstrecken von E_1' mit F' und von F'' mit E_1'' bzw. von E_1'' mit E_1' und von F' mit F'' sind. Schließlich sei $\mathfrak{R}_1$ das Rechteck $(-1 \leqq x \leqq +2;\ -2 \leqq y \leqq +2)$.

5. 8. 2. Es sei nun $\mathfrak{B}_\sigma$ bzw. $\mathfrak{B}_\sigma$ bzw. $\mathfrak{R}_\sigma$ das Bild von $\mathfrak{B}_1$, $\mathfrak{B}_1$, $\mathfrak{R}_1$ vermöge Translation in der $+y$-Richtung je um die Strecke der Länge $(\sigma-1)a$, $\sigma = 1, \ldots, s$; $a > 0$. Bei beliebig vorgeschriebenem $s \geqq 3$ werde $m \geqq 2s-2$ gewählt. Ist nun $a > 0$ hinreichend groß, so sind die $\mathfrak{R}_\sigma$ fremd und es hat jede Gerade, die mindestens 2 der B_σ trifft, mit *jedem* der $\mathfrak{B}_1, \ldots, \mathfrak{B}_\sigma$ höchstens einen Punkt gemeinsam; es sei a derart gewählt. Sind E_σ', E_σ'' die Bilder von E_1', E_1'' bei der zu σ gehörigen Translation, so verbinde man $E_{2\nu-1}'$ mit $E_{2\nu}'$ sowie $E_{2\nu}''$ mit $E_{2\nu+1}''$, $\nu = 1, 2, \ldots, 2^{-1}s$ bzw. $2^{-1}(s-1)$, durch je einen Kreisbogen $\mathfrak{K}_\nu$, welcher fremd zum Streifen $0 < x < 1$ und dessen Radius so groß ist, daß jede Parallele zu jeder, den $\mathfrak{K}_\nu$ in 2 Punkten treffenden Geraden höchstens je einen Punkt mit jedem der $\mathfrak{B}_\sigma$ gemeinsam hat. Für die aus den $\mathfrak{B}_\sigma$ und den $\mathfrak{K}_\nu$ gebildete Bogensumme $\mathfrak{C}$ hat dann die zugehörige Punktmenge $\mathfrak{Q}'$ mindestens $(s-1)$ Komponenten. In der Tat: Jede Gerade, welche keinen oder mindestens zwei der $\mathfrak{B}_\sigma$ trifft, hat mit $\mathfrak{C}$ nicht mehr als $2(s-1)+s = 3s-2$ Punkte gemeinsam[18]). Jede Gerade, welche genau einen der $\mathfrak{B}_\sigma$ trifft, hat mit $\mathfrak{C}$ maximal $k = 2m+3$ Punkte gemeinsam; und zwar wird diese Anzahl k erreicht nur von solchen Geraden, welche mit dem betreffenden $\mathfrak{B}_\sigma$ genau $(k-2)$ Schnittpunkte gemeinsam haben. (Denn wegen $2s \leqq m+2$ ist $3s-2 < 2m+3$, also k wirklich der Ordnungswert von $\mathfrak{C}$.) Mithin ist $\mathfrak{Q}'(k)$ für $\mathfrak{C}$ gleich dem Durchschnitt der $\mathfrak{B}_1, \ldots, \mathfrak{B}_\sigma$, welcher mindestens $(s-1)$ Komponenten besitzt.

[18]) Sogar nur höchstens s Punkte, so daß auch $m \geqq s-1$ genügt.

(Eingegangen am 11. März 1948.)

Über Wurzelapproximation nach Euler und Fixgebilde linearer Transformationen.

Herrn Oskar Perron zum 70. Geburtstag gewidmet.

Von

Hermann Schmidt in Braunschweig.

Vor einigen Jahren hat Herr Lorey [4] auf ein Eulersches Verfahren zur Berechnung m-ter Wurzeln durch Iteration linearer homogener Transformationen aufmerksam gemacht, Herr Krafft [3] gab anschließend einen besonders einfachen Konvergenzbeweis, den Herr Müller [6] neuerdings von unnötigen Einschränkungen über die Anfangswerte befreite und verallgemeinerte. Durch den mir freundlicherweise gestatteten Einblick in die Druckbogen dieser Arbeit wurde ich angeregt, ältere Untersuchungen wieder aufzugreifen, die sich teilweise mit denen von Herrn Müller überschneiden, in anderer Hinsicht aber darüber hinausgehen. Als tieferer Kern des Eulerschen Verfahrens erscheinen uns danach die Sätze über die Approximation von Fixpunkten bei wiederholter Ausübung von Kollineationen im n-dimensionalen projektiven Raum, wie sie im Lauf der Zeit in verschiedenem Allgemeinheitsgrade aufgestellt wurden, insbesondere der unten formulierte Satz 2, dem sich der Euler-Kraffische Fall unterordnet. Eine Darlegung dieser Verhältnisse, die möglichst unmittelbar und mit möglichst geringem Aufwand an Rechnung und algebraischen Begriffen sogleich zu rechnerisch verwertbaren Bedingungen für die Lage des Ausgangspunktes der Approximation führt, dürfte vielleicht erwünscht sein, zumal in den genannten Arbeiten, die sich im Anschluß an Euler auf sehr spezielle Fälle beschränken, der geometrisch ja naheliegende Zusammenhang nicht hergestellt wird (er dürfte aber Wirtinger vorgeschwebt haben, vgl. Lorey [4] 196[1]). Es sei hier auch auf die inhaltreiche Arbeit [15] von Herrn Wielandt hingewiesen, wo zur Vorbereitung der Iterationsmethode für Integraloperatoren auch der algebraische Fall eine übersichtliche mehr begrifflich gehaltene Behandlung erfährt (vgl. besonders Abschnitt 4, S. 114 ff. und unten [3]).

---

[1]) Für die dort erwähnten W-Kurven, die schließlich auch bei uns auftreten, ohne daß wir etwas über sie oder über kontinuierliche Gruppen als bekannt anzunehmen brauchten, vgl. die Übersicht bei Schubarth [12].

Im Folgenden ersetzen wir, in anderer Richtung etwas allgemeiner, den Folgenindex durch eine stetige Veränderliche t, und leiten zunächst als Hilfsmittel eine geschlossene Darstellung für eine zu vorgeschriebenen Anfangswerten gehörige Lösung eines linearen homogenen Differenzengleichungssystems mit festen Koeffizienten her (Satz 1). Satz 3 beschäftigt sich mit mehrfachen Eigenwerten, und zum Schluß folgt eine mit den obigen Fragen in loserem Zusammenhang stehende Bemerkung über Fixkurven einer einzelnen Affinität (Satz 4).

§ 1.

Analytische Iteration linearer Transformationen.

Gegeben sei das lineare homogene Differenzengleichungssystem

$$x(t+1) = x(t)\,A. \tag{1}$$

Hierin bedeute A eine $m(=n+1)$-reihige, quadratische, nichtsinguläre Matrix komplexer Zahlen, $x = (x^{(1)}, x^{(2)}, \ldots x^{(m)})$ die gesuchte Lösungszeile, t sei reell, insbesondere ganzzahlig. Im letzteren Falle gibt es genau eine Lösung $x(\nu)$ ($\nu = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$), die für $\nu = 0$ den beliebigen Anfangswert x_0 annimmt, nämlich

$$x = x_0 A^{\nu}. \tag{2}$$

Zur asymptotischen Untersuchung benötigen wir aber eine andere Darstellung, die die Eigenwerte von A hervortreten läßt und zugleich für beliebige t brauchbar ist. Wir bilden hierzu die Matrix

$$X(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\mathfrak{G}} z^t (z\,E - A)^{-1}\, dz, \tag{3}$$

wo der Integrationsweg eine einfach geschlossene Kurve sei, die ganz in einer von 0 nach ∞ aufgeschnittenen komplexen z-Ebene verläuft und die Umlaufszahl 1 bezüglich jedes Eigenwerts von A hat. arc z sei an einer beliebigen Stelle des Wegs normiert, dann stetig fortgesetzt. Durch Eintragen von (3) in (1) sieht man sofort, daß die Zeilen von $X(t)$ (1) erfüllen. Ferner ist $X(0) = E$ die Einheitsmatrix. Denn für $t = 0$ ist $z = 0$ eine reguläre Stelle des Integranden, also $X(0) = -\operatorname{Res}_{z=\infty} (z\,E - A)^{-1} = E$. Letzteres folgt aus der für große $|z|$ gültigen Entwicklung $(z\,E - A)^{-1} = \sum_{\lambda=0}^{\infty} \frac{A^{\lambda}}{z^{\lambda+1}}$, oder auch aus der später noch gebrauchten Darstellung

$$(z\,E - A)^{-1} = (f_{jk}(z)) : f(z), \tag{4}$$

worin $f(z) = \det(z\,E - A)$ ein normiertes Polynom genau m-ten Grades ist, während die $f_{jj}(z)$ vom genau $(m-1)$-ten Grade, die $f_{jk}(z)$ $(j \neq k)$ aber geringeren Grades sind. Es ist also $X(\nu) = A^{\nu}$, so daß man

definieren kann $A^t = X(t)$, wodurch eine (sogar für alle komplexen t) eindeutige, analytische Funktionsmatrix entsteht. Weiter setzen wir nun, wenn $\varrho_\lambda (\lambda = 0, 1, \ldots l)$ die verschiedenen Wurzeln der Gleichung $f(z) = 0$ bedeutet,

$$(5) \qquad (z\,E - A)^{-1} = \sum_{\lambda=0}^{l} \sum_{\varkappa=1}^{h_\lambda} \frac{A_{\lambda\varkappa}}{(z-\varrho_\lambda)^\varkappa}.$$

Dabei ist jeweils die Polordnung $h_\lambda \leqq$ der Vielfachheit k_λ des Eigenwerts ϱ_λ als Nullstelle von $f(z)$. Vergleich von (5) mit (4) zeigt

$$(6) \qquad A_{\lambda h_\lambda} = \frac{k_\lambda!}{(k_\lambda - h_\lambda)!} \left(f_{jk}^{(k_\lambda - h_\lambda)}(\varrho_\lambda) \right) : f^{(k_\lambda)}(\varrho_\lambda).$$

Anderseits folgt durch Heraufmultiplizieren mit der Matrix $z\,E - A$ und Koeffizientenvergleichung nach Entwicklung an der Stelle $z = \varrho_\lambda$

$$(7\,a) \qquad A_{\lambda,\varkappa+1} = A_{\lambda\varkappa}(A - \varrho_\lambda E) = (A - \varrho_\lambda E)\, A_{\lambda\varkappa} \quad (\varkappa = 1, 2, \ldots h_\lambda - 1)$$

und

$$(7\,b) \qquad A_{\lambda h_\lambda}(A - \varrho_\lambda E) = (A - \varrho_\lambda E)\, A_{\lambda h_\lambda} = 0.$$

Durch (7a) sind bei bekannten $A_{\lambda 1}$ die übrigen Zählermatrizen in (5) bestimmt; für die $A_{\lambda 1}$, die „Frobeniusschen Kovarianten" vgl. etwa die Darstellung bei Wegner [14] 201, 205. Wir merken uns hier nur die ohne weiteres aus (5) hervorgehende Formel an

$$(8) \qquad E = \sum_{\lambda=0}^{l} A_{\lambda 1}.$$

Durch Einsetzen von (5) in (3) und Berechnung der Residuen folgt nun

$$(9) \qquad X(t) = \sum_{\lambda=0}^{l} \sum_{\varkappa=1}^{h_\lambda} A_{\lambda\varkappa} \varrho_\lambda^{t-\varkappa+1} \binom{t}{\varkappa - 1} \quad [2],$$

und damit

Satz 1. *Eine für alle reellen (und komplexen) t analytische Lösung des Differenzengleichungssystems* (1), *die für $t = 0$ den Anfangswert x_0 annimmt, ist $x = x_0 X(t)$, wenn $X(t)$ die Matrix* (9) *bedeutet. Für $t = \nu$ liefert sie die eindeutig bestimmte Folge* (2).

Zu gegebenem $x_0 \neq 0$ gibt es nun wenigstens ein Indexpaar $\lambda, \varkappa$ mit $x_0 A_{\lambda\varkappa} \neq 0$; es gilt ja nach (8) oder (9) für $t = 0$

$$(10) \qquad x_0 = \sum_{\lambda=0}^{l} x_0 A_{\lambda 1}.$$

Unter diesen Paaren wählen wir diejenigen, für die $|\varrho_\lambda|$ maximal ist. Ist dann $\varkappa = \varkappa_1$ das Maximum der auftretenden $\varkappa$-Werte, und wird schließlich die Numerierung so eingerichtet, daß dieses genau für

[2]) Methodisch vgl. z. B. Nörlund [7] 297/8. Schwerdtfeger [13] 33. Mac Duffee [5] 100, Z. 3 von unten.

$\lambda = 0, 1, \ldots l_1$ erreicht wird, dann ergibt sich aus (9) sofort die asymptotische Darstellung

$$(11)\quad x(t) = t^{\varkappa_1 - 1}\left\{\sum_{\lambda=0}^{l_1} x_0 A_{\lambda \varkappa_1}\, \varrho_\lambda^{t-\varkappa_1+1} + O\left(\frac{\varrho_0^t}{t}\right)\right\} \text{ für reelles } t \to +\infty.$$

Sie enthält, wie leicht zu sehen, insbesondere für $t = \nu$ ganzzahlig die asymptotische Formel (4. 7) bei WIELANDT [15] (im Falle eines nichtsingulären A)[3]).

Ist nun hier $l_1 = 0$, so daß die Summe in (11) aus einem einzigen Glied besteht, so ist also

$$\lim_{t \to \infty} x(t)\, \varrho_0^{-t+\varkappa_1 - 1}\, t^{-\varkappa_1+1} = x_0 A_{0\varkappa_1} \neq 0.$$

In der Sprechweise der projektiven Geometrie heißt das[4]): der Punkt x strebt gegen den Fixpunkt $x_0 A_{0\varkappa_1}$. Dieser braucht freilich nicht von der Wahl von x_0 unabhängig zu sein, auch sind die entsprechenden Bedingungen für x_0, wie sie aus der Herleitung von (11) hervorgehen, vielleicht nicht ganz bequem zu prüfen. Für die Anwendung wird daher der besondere Fall in erster Linie in Betracht kommen, daß ein einfacher Eigenwert ϱ_0 mit $|\varrho_0| > |\varrho_1| \geqq |\varrho_\lambda|$ für $\lambda = 1, 2, \ldots l$ vorhanden ist. Es ist dann zunächst der relative Fehler in (11) gleich $O\left(\left(\frac{\varrho_1}{\varrho_0}\right)^t t^{h_1 - 1}\right)$, $\varkappa_1 = h_0 = k_0 = 1$, ferner $A_{01} = (f_{jk}(\varrho_0)) : f'(\varrho_0) \neq 0$ und Rang $(\varrho_0 E - A) = m - 1$. Sei etwa $f_{11}(\varrho_0) = \tau \neq 0$. (7b) mit $\lambda = 0$

---

[3]) Um den Übergang zu den dortigen Formulierungen wirklich durchzuführen, ist zunächst festzustellen, daß (unter Beibehaltung unserer Bezeichnungen) die dort eingeführte Sprechweise „ein Eigenwert ϱ_λ ist an x_0 beteiligt" mit Rücksicht auf die Bemerkungen bei (4. 6) a. a. O. S. 115 offenbar auf $x_0 A_{\lambda_1} \neq 0$ hinauskommt: denn wegen (7) ist ja (10) eine Darstellung des Anfangsvektors x_0 als Summe von „Hauptvektoren" im Sinne von [15] 114/115, d. h. also von Komponenten aus den „invarianten Teilgebilden"

$$x(A - \varrho_\lambda E)^{h_\lambda} = 0 \qquad (\lambda = 0, 1, 2, \ldots l)$$

(vgl. SCHREIER-SPERNER [11] II, § 6, besonders 74, Satz 13). Ersichtlich ist

$$\prod_0^l (z - \varrho_\lambda)^{h_\lambda} = M(z)$$

das „Minimalpolynom" (m-ter FROBENIUSscher Elementarteiler) zur Matrix A. Daß weiter die $x_0 \cdot A_{\lambda \varkappa_1}$ Eigenvektoren sind, folgt aus der Definition und aus (7 a b). Bei unserem Gedankengang sind indes diese Begriffe nicht erforderlich, vielmehr wird alles auf die Frage, welche unter den Produkten $x_0 A_{\lambda \varkappa}$ nicht verschwinden, und damit auf unmittelbar prüfbare Bedingungen für x_0 hinausgespielt. — Es sei noch bemerkt, daß unsere Methode dem von Herrn WIELANDT a. a. O. im Falle von Integraloperatoren (aber nicht im algebraischen Falle) benützten, mit der FREDHOLMschen Resolvente zusammenhängenden Verfahren nahesteht.

[4]) Wegen (7 a b).

besagt, daß in jeder (nicht verschwindenden) $\begin{matrix}\text{Zeile}\\ \text{Spalte}\end{matrix}$ von A_{01} ein System von projektiven Koordinaten $\begin{matrix}\text{des}\\ \text{der}\end{matrix}$ zum Eigenwert $\begin{cases}\varrho_0\\ \varrho_0^{-1}\end{cases}$ gehörigen Fixpunkts $\xi = (\xi^{(k)})$ Fixhyperebene $\omega = (\omega_j)$ der Kollineation $\begin{cases}\sigma x^* = x A\\ \sigma u^* = u \breve{A}\end{cases}$ steht. Die untere der Behauptungen folgt in der Tat sofort aus $u\left(\breve{A} - \frac{E}{\varrho_0}\right) = 0$ oder also $(\varrho_0 E - A)\,\tilde{u} = 0$. ($\sim$ bezeichnet den Übergang zur transponierten Matrix, $\breve{A} = \tilde{A}^{-1}$ die komplementäre einer quadratischen nicht singulären Matrix.)

Wir dürfen setzen $\xi^{(1)} = \omega_1 = 1$, worauf dann

(12) $f_{1k}(\varrho_0) = \tau\,\xi^{(k)}$, $f_{j1}(\varrho_0) = \tau\,\omega_j$ $(j,\ k \geqq 2)$ und $f_{jk}(\varrho_0) = \tau\,\omega_j\,\xi^{(k)}$.

Wenn nun

$$\sum_{j=1}^{m} x_0^{(j)}\,\omega_j \neq 0,$$

d. h. x_0 nicht auf der Hyperebene ω liegt, folgt

$$\lim_{t \to \infty} x^{(k)}(t) : x^{(1)}(t) = \xi^{(k)} = \frac{f_{1k}(\varrho_0)}{f_{11}(\varrho_0)}.$$

Damit haben wir

Satz 2. *Es sei ξ ein Fixpunkt einer nichtsingulären Kollineation A des komplexen n-dimensionalen projektiven Raumes, der zu einem einfachen Eigenwert ϱ_0 streng maximalen Betrags gehört. Liegt dann der Punkt x_0 nicht auf der zu $\frac{1}{\varrho_0}$ gehörigen Fixhyperebene, so strebt die Folge seiner Bilder bei Wiederholung der Abbildung, und ebenso ein auf der Kurve $x = x(t)$ des Satzes 1 laufender Punkt für $t \to \infty$, gegen den Grenzpunkt ξ. Fixpunkt und Ausnahmehyperebene sind durch* (12) *in Verbindung mit* (4) *gegeben*[5]).

[5]) Für ältere Sonderfälle vgl. z. B. Schoenfliess [10], S. 423/4. — Ein verwandter Satz auch bei O. Perron [9], Satz VII. In unserer Bezeichnungsweise handelt es sich dort um eine „Begleitmatrix" der besonderen Form

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 1 \\ 1 & 0 & \dots & a_1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 1\,a_n \end{pmatrix}$$

und es werden die Verhältnisse der Elemente einer Spalte von A^ν untersucht, während es sich bei uns um eine allgemeine nichtsinguläre Matrix A und die Verhältnisse der Elemente einer Zeilenkombination handelt. Demgemäß tritt dort die Frage nach der zulässigen Auswahl von x_0 nicht auf; übrigens sind die Methoden von den unseren ganz verschieden, auch ist dort nicht auf geometrische Deutungen eingegangen.

Im Euler-Krafftschen Falle ist (vgl. Krafft [3] (8))

$$a_{jk} = \begin{cases} 1 & j \geqq k \\ r > 0, & j < k \end{cases}, \quad \varrho_z = \sum_{\lambda=0}^{m-1} e^{2\pi i \lambda z/m} \cdot \varrho^\lambda, \quad 0 < \varrho = \sqrt[m]{r}.$$

Man bestätigt sofort, daß die Werte

$$\xi^{(k)} = \varrho^{k-1}, \quad \omega_j = \varrho^{-(j-1)}$$

die linearen Gleichungen (7b) für die Zeilen und Spalten von A_{01} erfüllen. Nach Satz 1 ist also (sogar im Komplexen) die Annahme

$$\sum_1^m x_0^{(j)} \varrho^{-j} \neq 0.$$

gewiß also die a. a. O. [3] gemachte Voraussetzung $x_0^{(j)} > 0$ hinreichend für

$$\frac{x^{(k+1)}}{x^{(k)}} \to \frac{\xi^{(k+1)}}{\xi^{(k)}} = \varrho$$

für $t \to \infty$.

Eine ähnliche Bedingung, nämlich

$$\sum_{j=1}^m x_0^{(j)} \varrho_0^{-j} \neq 0$$

ergibt sich unter den Voraussetzungen von Satz 2, wenn man setzt

$$A_0 = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \dots & a_m \\ 1 & 0 \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 1 \quad 0 \end{vmatrix}.$$

Es wird dann

$$f(z) = z^m - \sum_{\lambda=1}^m a_\lambda z^{m-\lambda}$$

und nach (7) oder (12)

$$\sigma \xi^{(k)} = \varrho_0^k - \sum_{\lambda=1}^{k-1} a_\lambda \varrho_0^{k-\lambda} \text{ insbesondere } \frac{a_m x^{(1)}}{x^{(m)}} = \frac{x^{(m)}(t+1)}{x^{(m)}(t)} \to \frac{a_m \xi^{(1)}}{\xi^{(m)}} = \varrho_0$$

(vgl. für $x_0 = (1, 0, \dots 0)$ die anders gewonnenen Formeln bei Perron [9] ('26')). Will man nur ϱ_0 berechnen, so genügt es demnach, nach Festlegung von $x^{(m)}(\nu)$ für $\nu = 0, 1, \dots (m-1)$ die Differenzengleichung

$$u(\nu + m) = \sum_{\lambda=1}^m a_\lambda u(\nu + m - \lambda) \tag{13}$$

für $x^{(m)}$ weiter zu behandeln. Im Grunde kommt man also hier auf das altbekannte Bernoullische Verfahren zur Wurzelberechnung algebraischer Gleichungen zurück, nur mit erweiterter Anfangsbedingung:

die auf Grund von (13) schrittweise zu berechnenden Werte $u(\nu)$ brauchen keine Potenzsummen zu werden.

Die Prüfung, ob $\sum x_0^{(j)} \omega_j \neq 0$, erfordert wegen der Werte (12) schon eine näherungsweise Kenntnis von ϱ_0. Im folgenden, für numerische Zwecke wohl in erster Linie in Frage kommenden Falle erübrigt sie sich völlig. Die Elemente a_{jk} von A seien aus einem Unterkörper K des komplexen Zahlkörpers, z. B. rationale Zahlen, und $f(z)$ sei über K unzerlegbar. Unter den obigen Voraussetzungen über ϱ_0 sind dann die Größen $f_{1k}(\varrho_0)$ $(k = 1, 2, \ldots m)$ des $K(\varrho_0)$ linear unabhängig. Andernfalls wäre nämlich für gewisse $r_k \in K$, die nicht sämtlich verschwinden, wegen (12) für jedes j

$$\sum_{k=1}^{m} r_k f_{jk}(\varrho_0) = 0, \text{ also auch } \sum_{k=1}^{m} r_k f_{jk}(z) \equiv 0,$$

da der Grad von $f_{jk}(z) \leqq m-1$. Dann wäre aber auch

$$0 = \det(f_{jk}(z)) = f^{m-1}(z) \neq 0,$$

was ein Widerspruch ist. Die Hyperebene ω enthält keinen Punkt mit Koordinaten $\in K$, die Elemente von x_0 dürfen in K beliebig (nur nicht alle 0) angenommen werden.

Liegt x_0 auf ω, so entsteht das gleiche Problem in einem projektiven Raum von um 1 geringerer Dimension, bei $\varrho_1, \varrho_2, \ldots$ als Eigenwerten, so daß sich neue Formulierungen wohl erübrigen. Dagegen soll noch der Fall behandelt werden, daß ϱ_0 mehrfacher Eigenwert ist. Es sei jetzt $k_0 \geqq 2$ und $|\varrho_0| \geqq |\varrho_\lambda|$ $(\lambda \neq 0)$, ferner $h_\lambda < h_0$ falls $|\varrho_\lambda| = |\varrho_0|$. Dann erzeugen die linear unabhängigen unter den Zeilen / Spalten von A_{0h_0} {einen linearen Unterraum L von Fixpunkten / eine lineare Schar A von Fixhyperebenen} zu ϱ_0 / ϱ_0^{-1}. Aus (9) erhält man daher ähnlich wie früher, gleich unter Benützung der eingeführten Mannigfaltigkeiten L und A formuliert,

Satz 3. *Die Matrix A einer nichtsingulären Kollineation habe einen Eigenwert ϱ_0 von (im weiteren Sinn) maximalem Betrag; etwa vorhandene betragsgleiche Eigenwerte seien Pole geringerer Ordnung der Funktionsmatrix $(zE - A)^{-1}$ als ϱ_0. Liegt dann x_0 nicht im Durchschnitt D der zu ϱ_0^{-1} gehörigen Fixhyperebenenschar A, so strebt der Bildpunkt bei der analytischen Iteration gegen den (nicht mehr notwendig von x_0 unabhängigen!) Punkt $x_0 A_{0h_0}$ des zu ϱ_0 gehörigen Fixpunktraumes L. (Berechnung der gebrauchten Stücke nach (6) (7)).*

Wir bemerken noch, daß die Iterierten von y_0 (nicht aus D) dann und nur dann dem gleichen Fixpunkt zustreben wie die von x_0, wenn y_0 dem linearen Raum angehört

$$\sum_{\mu,\nu=1}^{m} y^{(\mu)} x_0^{(\nu)} (c_{\mu\varkappa} c_{\nu\lambda} - c_{\mu\lambda} c_{\nu\varkappa}) = 0 \quad \begin{pmatrix} \varkappa, \lambda = 1, \ldots m \\ (c_{\varkappa\lambda}) = A_{0, h_0} \end{pmatrix},$$

der übrigens mit dem Gesamtraum zusammenfallen kann.

§ 2.

Die Fixkurven einer einzelnen Affinität.

Wir gehen hier von einer einzelnen linearen Abbildung des affinen m-dimensionalen Raumes durch eine nicht singuläre Matrix A aus:

$$'x = xA. \tag{14}$$

Bei ihr geht, wenn $p(t)$ eine Zeile stetiger komplexwertiger Funktionen der Periode 1 bedeutet, die stetige Kurve

$$x = p(t)\,X(t) \qquad (-\infty < t < +\infty) \tag{15}$$

wegen (1) als Ganzes in sich über. Wir wollen noch kurz zeigen, daß in gewissem Sinne (15) alle zu A und damit der unendlichen zyklischen Gruppe $A^\nu (\nu = 0, \pm 1, \ldots)$ gehörigen Fixkurven liefert; der Nachdruck liegt darauf, daß nicht die Invarianz bei der kontinuierlichen Gruppe A^α (α beliebig reell) gefordert, diese auch gar nicht benützt wird.

Wir verstehen hier unter einem Fixbogen $\mathfrak{B}$ zu A ein offenes Jordansches Kurvenstück $x = x(\tau)$, wo $-\infty \leqq \alpha < \tau < \beta \leqq +\infty$, das durch $'x = xA$ auf sich selbst (und nicht nur einen echten Teil), damit also topologisch auf sich abgebildet wird. Dann gilt

Satz 4. *Jeder Fixbogen $\mathfrak{B}$ der Abbildung* (14), *der keinen Fixpunkt enthält, läßt sich in der Form* (15) *darstellen.*

Beweis. Es darf $\alpha = -\infty$, $\beta = +\infty$ angenommen werden, sonst könnte man für $-\infty < \alpha < \beta < +\infty$ z. B. $\tau^* = -\left(\frac{1}{\tau - \alpha} + \frac{1}{\tau - \beta}\right)$, bzw. für $\alpha = -\infty < \beta < \infty$ $\tau^* = \tau - \frac{1}{\tau - \beta}$ einführen, beide Male mit $\frac{d\tau^*}{d\tau} > 0$. Daß $\mathfrak{B}$ Fixbogen ist, drückt sich nun darin aus, daß

$$'x = x(\tau)A = x('\tau), \tag{16}$$

wo auf Grund der Voraussetzungen (insbesondere $\det A \neq 0$)

$$'\tau = '\tau('x) = '\tau(x(\tau)A) = g(\tau)$$

die offene Zahlenachse topologisch auf sich abbildet. Da $\mathfrak{B}$ keinen Fixpunkt enthalten soll, darf dann $g(\tau) > \tau$ und damit $g(\tau)$ streng monoton steigend angenommen werden. Wir suchen dann eine Parametertransformation $\tau = \psi(t)$, $'\tau = \psi('t)$, die diese Zuordnung in eine Translation verwandelt:

$$\psi(t + 1) = g(\psi(t)) \text{ oder also } \psi^{-1} g \psi(t) = t + 1. \tag{17}$$

Hierzu genügt es, etwa in $0 \leqq t < 1$ zu setzen $\psi(t) = t\,g(0)$, ferner induktiv $\psi(t) = g(\psi(t-1))$ zu definieren für $h \leqq t < h+1$ ($h = 1, 2, \ldots$ entsprechend für $t < 0$. Man prüft leicht, daß $\psi(t)$ monoton wächst

und die Zahlenachse eineindeutig in sich transformiert[6]). Damit verwandelt sich aber (14) in $y(t+1) = y(t)A$, wenn $x(\psi(t)) = y(t)$ gesetzt wird. Nun ist $\det X(t) \neq 0$ für alle t, worauf wir sogleich zurückkommen. Daraus folgt, daß yX^{-1} eine Zeile stetiger Funktionen mit der Periode 1 ist, w. z. b. w.

$\det X(t) \neq 0$ folgt nun bekanntlich nicht entsprechend wie bei Differentialgleichungen unmittelbar aus $\det X(0) \neq 0$, vgl. z. B. Nörlund [7] 274/6, Art. 145. Unserer an (3) anknüpfenden Methode entspricht vielleicht am besten die Bezugnahme auf folgenden allgemeinen Satz der Matrizenanalysis, aus dem sogleich

$$A^t \cdot A^s = A^{t+s}, \tag{18}$$

damit für $t = -s$ die Behauptung, allgemein die volle Rechtfertigung der Bezeichnung A^t folgt, und für den wir einen kurzen Beweis andeuten wollen:

Satz 5. *Setzt man für jede in dem einfach zusammenhängenden Gebiet $\mathfrak{G}$ reguläre Funktion $F(z)$ und jede m-reihige quadratische Matrix, deren Eigenwerte sämtlich in $\mathfrak{G}$ liegen*

$$2\pi i F(A) = \int F(z)(zE - A)^{-1} dz, \tag{19}$$

wo der Integrationsweg bezüglich aller Eigenwerte die Umlaufszahl 1 hat, so folgt aus $F(z)G(z) = H(z)$ stets $F(A)G(A) = H(A)$ [7]).

Der Beweis ergibt sich leicht aus der Integraldarstellung

$$F(A)G(A) = \frac{1}{(2\pi i)^2} \sum_{\nu,\lambda=0}^{l} \int_{\mathfrak{k}_\nu} dz \int_{\mathfrak{K}_\lambda} dw \, \frac{F(z)\,G(w)}{w - z} \left(\frac{1}{zE - A} - \frac{1}{wE - A} \right).$$

Hier sind wie in (5) ϱ_λ die verschiedenen Eigenwerte von A, und die Integrationswege $\mathfrak{k}_\lambda$, $\mathfrak{K}_\lambda$ seien Kreise um ϱ_λ vom Radius r_λ bzw. R_λ mit $r_\lambda < R_\lambda$. Irgend zwei zu λ, ν $(\lambda \neq \nu)$ gehörige Kreise sollen dabei auseinander liegen.

Abschließend sei noch kurz bemerkt, daß jetzt vermöge (18) durch Grenzübergang unter dem Integralzeichen die (bekannte) Formel hervorgeht $\frac{dA^t}{dt} = A^t \lg A$ ($\lg A$ vermöge (19) eindeutig, solange die ϱ_λ eine wie bei (3) aufgeschnittene z-Ebene nicht verlassen), wodurch die Kurven $x = x_0 A^t$ nunmehr in der Tat als W-Kurven des projektiven n-dimen-

[6]) Ein ähnliches Verfahren ist in der seither erschienenen Arbeit [1] von Herrn Bödewadt enthalten (S. 501, § 2, 1, Absatz 1), weshalb wir uns knapp fassen durften. — Der obige Hilfssatz über die Transformation der Fixkurven in sich kann, wenn man die abzählbare Gruppe der Iterierten von $g(\tau)$ ins Auge faßt, mit einem Satz der Theorie der kontinuierlichen Gruppen über die Zurückführung eingliedriger Gruppen auf Translationen in Parallele gesetzt werden, vgl Pascal [8] 205.

[7]) Herr Fantappiè [2] gewinnt umgekehrt aus dieser Aussage und einigen naheliegenden Forderungen die Darstellung (19). Im Referat hierüber bei Mac Duffee [5] ist S. 100, Zeile 19 die Stelle „is ... $d(A)$" unrichtig und etwa durch „is $D(t)(A - tE)^{-1}/r_s$, and $D(t) = d(A - tE)$" zu ersetzen.

sionalen Raumes erkannt sind (als Lösungskurven des Differentialsystems $\frac{dx}{dt} = xB$ mit $B = \lg A$). Hieraus folgt übrigens, daß gleichzeitig mit (9) die Darstellung gilt:

$$A^t = \sum_{\lambda=0}^{t} \sum_{\varkappa=1}^{h_\lambda} B_{\lambda\varkappa} \varrho_\lambda^t \frac{t^{\varkappa-1}}{(\varkappa-1)!},$$

wo die $B_{\lambda\varkappa}$ entsprechend aus B hervorgehen, wie die $A_{\lambda\varkappa}$ in (9) aus A.

Schriftenverzeichnis.

U. T. Bödewadt.

[1] Zur Iteration reeller Funktionen, Math. Z. 49 (1944), 497—516.

L. Fantappié.

[2] La calcul des matrices. C. R. Acad. sc. Paris 186 (1928), 619—621.

M. Krafft.

[3] Über ein Eulersches Verfahren zur Wurzelberechnung, Monatsh. Math. Phys. 59 (1941), 312—315.

W. Lorey.

[4] Über ein Eulersches Verfahren zur Wurzelberechnung, Monatsh. Math. Phys. 48 (1939), 190—197.

C. C. Mac Duffee.

[5] The theory of matrices, Ergebnisse der Math. II 5, Berlin 1933.

M. Müller.

[6] Über ein Eulersches Verfahren zur Wurzelberechnung, Math. Z. 51 (1949), 474—496.

N. E. Nörlund.

[7] Vorlesungen über Differenzenrechnung, Berlin 1924.

E. Pascal.

[8] Repertorium der Höheren Mathematik I (1900). Deutsch von Schepp.

O. Perron.

[9] Grundlagen für eine Theorie des Jacobischen Kettenbruchalgorithmus, Math. Ann. 64 (1907), 1—76.

A. Schoenfliess.

[10] Projektive Geometrie, Enz. Math. Wiss. III 1. 3, (1909).

O. Schreier und E. Sperner.

[11] Einführung in die Analytische Geometrie und Algebra, Bd. II, Leipzig/Berlin 1935.

E. Schubarth.

[12] Bestimmung der W-Kurven, Verh. Naturforsch. Ges. Basel 38 (1927), 459—475.

H. Schwerdtfeger.

[13] Les fonctions de matrices. Actualités scientifiques 649. Paris 1938.

U. Wegner.

[14] Über die Frobeniusschen Kovarianten, Monatsh. Math. Phys. 40 (1933), 201—208.

H. Wielandt.

[15] Das Iterationsverfahren bei nicht selbstadjungierten linearen Eigenwertsaufgaben, Math. Z. 50 (1944), 93—143.

(Eingegangen am 5. Februar 1949.)

Gesetze in Ringen. I.

Herrn Oskar Perron zum 70. Geburtstag gewidmet.

Von

Wilhelm Specht in Erlangen.

Den nachfolgenden Untersuchungen zugrundegelegt ist die Gesamtheit aller Ringe der Charakteristik Null im Sinne von E. Steinitz [1]), also die Gesamtheit aller Systeme mathematischer Größen, in denen Addition und Multiplikation mit den folgenden üblichen Eigenschaften erklärt sind: Die Addition soll dem kommutativen und dem assoziativen Gesetze genügen und ausnahmslos umkehrbar sein, die Multiplikation dagegen im allgemeinen nur dem assoziativen Gesetze genügen, das distributive Gesetz aber beidseitig erfüllt sein.

Die Forderung der Charakteristik Null besagt, daß die Vielfachen λa eines von 0 verschiedenen Elementes a eines Ringes sämtlich verschieden sein sollen, daß also $\lambda a = 0$ mit ganzem λ nur dann gelten soll, wenn $\lambda = 0$ oder $a = 0$ ist [2]). Diese Forderung ist für diese Untersuchungen eine wesentliche und notwendige Einschränkung, da die herangezogenen Hilfsmittel aus der Darstellungstheorie der symmetrischen Gruppe schon für Primzahlcharakteristiken nicht mehr in ausreichendem Umfange zur Verfügung stehen.

Weitere Bedingungen werden den Ringen der zu untersuchenden Gesamtheit im allgemeinen nicht auferlegt, insbesondere nicht die Bedingung der Existenz der Einheit, wenn auch die Ringe mit Einheit im Verlauf der Untersuchungen einer eingehenderen Betrachtung unterzogen werden.

In der Gesamtheit aller Ringe der Charakteristik Null sind die kommutativen Ringe durch die Eigenschaft ausgezeichnet, daß in ihnen auch die Multiplikation dem kommutativen Gesetze genügt, also die Bedingung

$$f(x_1, x_2) \equiv x_1 x_2 - x_2 x_1 = 0$$

für jedes Wertepaar der Unbestimmten x_1, x_2 des Ringes erfüllt ist, obwohl der Ausdruck $f(x_1, x_2)$ in einem noch schärfer zu kennzeichnenden Sinne formal nicht verschwindet.

---

[1]) Vgl. E. Steinitz. Algebraische Theorie der Körper, Journal f. d. reine und angew. Math. **137** (1910), 167—308. Buchausgabe Walter de Gruyter, Berlin 1930.

[2]) Durchwegs werden ganze rationale Zahlen mit griechischen, Ringelemente mit lateinischen Buchstaben bezeichnet.

In einem nilpotenten Ringe gilt mit einem festen Exponenten n die Gleichung

$$f(x_1) \equiv x_1^n = 0$$

für jeden Wert der Unbestimmten x_1 des Ringes, obwohl auch dieser Ausdruck $f(x_1)$ formal nicht verschwindet.

Im Ring aller zweireihigen Matrizen

$$a = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix}$$

aus ganzen Zahlen $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ gilt die Beziehung

$$f(x_1, x_2, x_3, x_4) \equiv \sum \pm x_{\nu_1} x_{\nu_2} x_{\nu_3} x_{\nu_4} = 0,$$

in der die Summe über alle Permutationen der ersten vier Ziffern zu erstrecken und das Vorzeichen danach zu wählen ist, ob die Permutation gerade oder ungerade ist, für jedes Wertequadrupel der Unbestimmten x_1, x_2, x_3, x_4 aus diesem Matrixring, obwohl auch dieser Ausdruck $f(x_1, x_2, x_3, x_4)$ formal nicht verschwindet.

Im Ring aller dreireihigen Matrizen der Gestalt

$$a = \begin{pmatrix} \alpha & 0 & 0 \\ \beta & \alpha & 0 \\ \gamma & \delta & \alpha \end{pmatrix},$$

aus ganzen Zahlen $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ gilt die Beziehung

$$f(x_1, x_2, x_3) \equiv (x_1 x_2 - x_2 x_1) x_3 - x_3 (x_1 x_2 - x_2 x_1) = 0$$

für jedes Wertetripel der Unbestimmten x_1, x_2, x_3 aus diesem Ring, obwohl auch dieser Ausdruck $f(x_1, x_2, x_3)$ formal nicht verschwindet.

Wie diese Beispiele erkennen lassen, können für einen Ring $\mathfrak{R}$ unter Umständen gewisse formal nichtverschwindende Ausdrücke

$$f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$$

aufgestellt werden mit der Eigenschaft, daß für jede Wertereihe der Unbestimmten $x_1, x_2, \ldots, x_n$ aus $\mathfrak{R}$ die Gleichung

$$f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = 0$$

erfüllt ist. Eine solche Gleichung will ich ein *Gesetz* des Ringes nennen [3].

[3] Von einem sehr abstrakten, formalen Standpunkt aus gelangt G. Birkhoff zu ähnlichen Begriffbildungen in seiner Arbeit On the structure of abstract algebras, Proceedings Cambridge Phil. Soc. **31** (1935), 433—454. Von ihm habe ich die Bezeichnung Gesetz (Law) übernommen. Spezielle Gesetze, dort Rechenregeln genannt, treten in den geometrischen Grundlagenuntersuchungen von K. Wagner, Über die Grundlagen der projektiven Geometie und allgemeine Zahlensysteme, Math. Ann. **113** (1937), 528—567 auf. Naturgemäß finden sich einige Berührungspunkte, die indes lediglich die einfachsten formalen Dinge betreffen. Entsprechende Fragestellungen für Gruppen behandelt B. H. Neumann, Identical relations in groups I. Math. Ann. **114** (1937), 506—525.

Die Menge aller in einem vorgegebenen Ringe $\mathfrak{R}$ geltenden Gesetze erfüllt gewisse Vollständigkeitsbedingungen, die unabhängig von Struktureigenschaften des Ringes allgemein charakterisiert werden können. Umgekehrt läßt sich zeigen, daß zu einer beliebig gewählten Menge von Gesetzen, die diese Vollständigkeitsbedingungen erfüllt, stets Ringe existieren, in denen genau die Gesetze dieser Menge gelten und keine anderen. Besitzt der Ring $\mathfrak{R}$ insbesondere eine Einheit, so erfüllt die Menge der in $\mathfrak{R}$ geltenden Gesetze eine einfache zusätzliche Vollständigkeitsbedingung. Auch hier kann nachgewiesen werden, daß zu einer beliebigen Menge von Gesetzen, die außer den allgemeinen Vollständigkeitsbedingungen diese zusätzliche Forderung erfüllt, auch Ringe mit Einheit existieren, in denen genau die Gesetze dieser Menge gelten und keine anderen.

Die eben erwähnten Vollständigkeitsbedingungen haben ihren Ursprung darin, daß aus einem im Ringe $\mathfrak{R}$ geltenden Gesetze durch genau zu kennzeichnende Verfahren stets weitere Gesetze als Folgegesetze abgeleitet werden können. Diese Tatsache legt die Frage nahe, ob nicht die Menge aller in $\mathfrak{R}$ geltenden Gesetze aus einer Teilmenge von Gesetzen möglichst einfacher Struktur abgeleitet werden könne. In der Tat lassen sich alle in einem Ringe $\mathfrak{R}$ geltenden Gesetze aus den *mehrfach linearen* Gesetzen herleiten, die wiederum auf eine endliche oder unendliche, nach wachsenden Dimensionszahlen geordnete Folge von mehrfach linearen Gesetzen zurückgeführt werden können. Es ist mir hier bisher noch keine Entscheidung der Frage gelungen, ob sich für jeden Ring $\mathfrak{R}$ eine endliche Folge von mehrfach linearen Gesetzen angeben läßt, aus denen alle in $\mathfrak{R}$ geltenden Gesetze abgeleitet werden können, oder ob auch Ringe existieren, in denen für die Herleitung aller in ihnen geltenden Gesetze eine unendliche Folge von mehrfach linearen Gesetzen erforderlich ist.

Eingehendere Untersuchungen können für Ringe mit Einheit durchgeführt werden. Zunächst läßt sich zeigen, daß eine Beschränkung auf Gesetze möglich ist, deren formal gebildeten partiellen Ableitungen nach sämtlichen Unbestimmten verschwinden. Für die mehrfach linearen Gesetze, deren partielle Ableitungen sämtlich verschwinden, können mit Hilfe der höheren Kommutatoren genaue Strukturaussagen gemacht werden. Sie lassen sich als lineare Verbindungen von speziellen geordneten Kommutatorprodukten darstellen.

I.

Aus einer abzählbaren Menge von Symbolen

$$(x) = x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n, \ldots,$$

die ich im folgenden stets als *Unbestimmte* bezeichnen will, bilde man zu jeder natürlichen Zahl $k = 1, 2, 3, \ldots$ die gleichfalls abzählbare

Menge formaler Potenzprodukte

$$x_{\nu_1} x_{\nu_2} \dots x_{\nu_k}$$

der Dimension k, worin die Indizes $\nu_1, \nu_2, \dots, \nu_k$ unabhängig voneinander alle natürlichen Zahlen durchlaufen. Nimmt man der Reihe nach für die Dimensionszahl k alle natürlichen Zahlen, so erhält man die (wiederum abzählbare) Menge aller Potenzprodukte beliebiger Dimension in den Unbestimmten der Folge (x), die in einer willkürlichen, für das Weitere festgehaltenen Abzählung mit

$$(X) = X_1, X_2, \dots, X_n, \dots$$

bezeichnet werden mögen. Nur dann sollen zwei solche Potenzprodukte als gleich angesehen werden, wenn sie formal übereinstimmen:

$$x_{\mu_1} x_{\mu_2} \dots x_{\mu_k} = x_{\nu_1} x_{\nu_2} \dots x_{\nu_l}$$

nur wenn

$$k = l \quad \text{und} \quad \mu_1 = \nu_1, \ \mu_2 = \nu_2, \dots, \mu_k = \nu_k.$$

Ist in der Folge (X) etwa $X_\alpha = x_{\mu_1} x_{\mu_2} \dots x_{\mu_k}$ ein Potenzprodukt der Dimension k und $X_\beta = x_{\nu_1} x_{\nu_2} \dots x_{\nu_l}$ ein Potenzprodukt der Dimension l, so läßt sich aus ihnen durch formales Zusammensetzen ein Potenzprodukt $X_\alpha X_\beta$ von der Dimension $k + l$ bilden, das in der Folge (X) etwa als X_γ erscheint:

$$X_\gamma = X_\alpha X_\beta = x_{\mu_1} x_{\mu_2} \dots x_{\mu_k} x_{\nu_1} x_{\nu_2} \dots x_{\nu_l}.$$

Man erkennt sogleich, daß es zu einem vorgegebenen Potenzprodukt X_γ nur endlich viele Paare von Potenzprodukten X_α, X_β gibt, deren formale Zusammensetzung gerade X_γ liefert.

Mit Hilfe der Folge (X) werde nun die (wiederum abzählbare) Menge $\mathfrak{F}$ aller Symbole

$$f(x) = \varrho_1 X_1 + \varrho_2 X_2 + \varrho_3 X_3 + \dots = \sum_{\alpha=1}^{\infty} \varrho_\alpha X_\alpha \tag{1}$$

gebildet, worin die Koeffizienten ϱ_α ganze Zahlen darstellen, von denen indes stets nur endlich viele von Null verschieden sein sollen.

Jeden Ausdruck $f(x)$ der Gestalt (1) will ich eine *Form* in den Unbestimmten (x) nennen. Kommen in der Darstellung (1) einer Form $f(x)$ noch Potenzprodukte der Dimension k, aber keine Potenzprodukte höherer Dimension als k wirklich vor, so ist $f(x)$ eine *Form der Dimension* k. Ferner will ich für eine Form $f(x)$ auch das Zeichen $f(x) = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ verwenden, um anzudeuten, daß in der Darstellung (1) der Form $f(x)$ die Unbestimmten $x_{n+1}, x_{n+2}, \dots$ nicht mehr auftreten, wobei aber nicht verlangt werden soll, daß sämtliche Unbestimmten $x_1, x_2, \dots, x_n$ in der Form auch wirklich erscheinen.

Die Menge $\mathfrak{F}$ aller Formen $f(x)$ bildet nun einen Ring der Charakteristik Null, den *Formenring* $\mathfrak{F}$, wenn nachstehende Festsetzungen getroffen werden:

1. Zwei Formen $f(x) = \sum_{\alpha} \varrho_\alpha X_\alpha$ und $g(x) = \sum_{\alpha} \sigma_\alpha X_\alpha$ sind dann und nur dann gleich, wenn $\varrho_\alpha = \sigma_\alpha$ für jeden Index α erfüllt ist.

2. Die Summe zweier Formen $f(x) = \sum_{\alpha} \varrho_\alpha X_\alpha$ und $g(x) = \sum_{\alpha} \sigma_\alpha X_\alpha$ ist erklärt durch

$$f(x) + g(x) = \sum_{\alpha} (\varrho_\alpha + \sigma_\alpha) X_\alpha .$$

3. Das Produkt zweier Formen $f(x) = \sum_{\alpha} \varrho_\alpha X_\alpha$ und $g(x) = \sum_{\beta} \sigma_\beta X_\beta$ ist erklärt durch

$$f(x)\, g(x) = \sum_{\gamma} \tau_\gamma X_\gamma \quad \text{mit} \quad \tau_\gamma = \sum \varrho_\alpha \sigma_\beta ,$$

wobei α, β alle Indizespaare durchlaufen, für die $X_\alpha X_\beta = X_\gamma$ ist.

Daß die Menge $\mathfrak{F}$ unter diesen Festsetzungen alle Ringeigenschaften besitzt, erkennt man sehr leicht aus der Bemerkung, daß die Produktbildung nichts anderes darstellt als das formale Ausmultiplizieren der beiden Ausdrücke $f(x)$ und $g(x)$ zu

$$f(x)\, g(x) = \sum_{\alpha, \beta} \varrho_\alpha \sigma_\beta X_\alpha X_\beta ,$$

worin nun noch die Glieder mit gleichen Potenzprodukten $X_\alpha X_\beta = X_\gamma$ zu einem Glied zusammenzufassen sind. Insbesondere ist danach eine Form $f(x) = \sum_{\alpha} \varrho_\alpha X_\alpha$ nur dann die *Nullform* 0 des Ringes $\mathfrak{F}$, wenn für alle Indizes $\varrho_\alpha = 0$ ist.

Eine Form $f(x) = f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ heißt weiter *homogen* von der Dimension k, wenn in ihrer Darstellung (1) nur Potenzprodukte der Dimension k in den Unbestimmten $x_1, x_2, \ldots, x_n$ wirklich auftreten, wenn also in leichtverständlicher Schreibweise für jedes ganze τ die Gleichung

$$f(\tau x_1, \tau x_2, \ldots, \tau x_n) = \tau^k f(x_1, x_2, \ldots, x_n) \tag{2}$$

besteht. Ferner heißt eine Form $f(x) = f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ *homogen bezüglich der Unbestimmten* x_λ von der Dimension k_λ mit einem festen λ der Reihe $\lambda = 1, 2, \ldots, n$, wenn die Gleichung

$$f(x_1, x_2, \ldots, \tau x_\lambda, \ldots, x_n) = \tau^{k_\lambda} f(x_1, x_2, \ldots, x_\lambda, \ldots, x_n) \tag{3}$$

für jedes ganze τ erfüllt ist. Offenbar ist eine Form homogen, wenn sie bezüglich aller (in ihr wirklich auftretenden) Unbestimmten homogen ist. Eine allgemeine Form $f(x)$ der Dimension k kann stets als Summe

$$f(x) = \sum_{\varkappa = 1}^{k} f_\varkappa(x)$$

homogener Formen $f_\varkappa(x)$ der durch den Index angegebenen Dimension dargestellt werden; eine ähnliche Zerlegung in der Gestalt

$$f(x) = \sum_{\varkappa = 0}^{k} f_\varkappa(x)$$

ist aber auch möglich nach Formen $f_\varkappa(x)$, die bezüglich einer der

Unbestimmten x_λ in der durch den Index $\varkappa$ angegebenen Dimension homogen sind, wobei sinngemäß $f_0(x)$ eine Form bezeichnet, für die die Gleichung

$$f_0(x_1, x_2, \ldots, \tau x_\lambda, \ldots, x_n) = f_0(x_1, x_2, \ldots, x_n)$$

besteht, in der die Unbestimmte x_λ also nicht wirklich auftritt.

Ist nun $g(x) = g(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ eine beliebige, von der Nullform verschiedene Form der Dimension k, ferner $\mathfrak{R}$ ein beliebiger vorgegebener Ring der Charakteristik Null, so stellt für jede Wertereihe $a_1, a_2, \ldots, a_n$ von Elementen aus $\mathfrak{R}$ der durch die formale Substitution $x_\lambda \to a_\lambda$ für $\lambda = 1, 2, \ldots, n$ gebildete Ausdruck $g(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ wiederum ein Element des Ringes $\mathfrak{R}$ dar. Ich sage, *im Ringe* $\mathfrak{R}$ *gelte das Gesetz*

$$g(x) \equiv g(x_1, x_2, \ldots, x_n) = 0$$

der Dimension k, *wenn stets, wie auch die Wertereihe* $a_1, a_2, \ldots, a_n$ *aus* $\mathfrak{R}$ *gewählt sein mag, die Gleichung*

$$g(a_1, a_2, \ldots, a_n) = 0$$

erfüllt ist.

Ein Ring $\mathfrak{R}$, in dem wenigstens ein Gesetz der Dimension k, aber kein Gesetz niedrigerer Dimension gilt, heiße *Ring k-ter Stufe*; ein Ring $\mathfrak{R}$, in dem überhaupt kein Gesetz irgendeiner Dimension gilt, soll als *gesetzloser Ring* bezeichnet werden. Die Existenz gesetzloser Ringe, allgemeiner die Existenz von Ringen jeder Stufe, wird im nächsten Abschnitt nachgewiesen werden.

Jedem in einem vorgegebenen Ringe $\mathfrak{R}$ geltenden Gesetze $g(x) = 0$ entspricht eine eindeutig bestimmte Form $g(x)$ aus dem Formenring $\mathfrak{F}$, der Gesamtheit aller in $\mathfrak{R}$ geltenden Gesetze daher eine wohlbestimmte Teilmenge $\mathfrak{g}$ des Ringes $\mathfrak{F}$, die kurz als der *Typus* des Ringes $\mathfrak{R}$ bezeichnet werden soll. Besteht $\mathfrak{g}$ allein aus der Nullform des Ringes $\mathfrak{F}$, so ist $\mathfrak{R}$ ein gesetzloser Ring, weshalb $\mathfrak{g} = 0$ den Typus jedes gesetzlosen Ringes darstellt. Allgemeiner stellt eine Teilmenge $\mathfrak{g}$, die als Typus eines vorgegebenen Ringes $\mathfrak{R}$ gefunden wurde, den Typus einer Klasse von Ringen dar, deren Mitglieder gemeinsame innere strukturelle Eigenschaften besitzen, die durch die Gültigkeit des Gesetzes $g(x) = 0$ für jede beliebige Form $g(x)$ aus $\mathfrak{g}$ bestimmt werden.

Es ist daher eine erste Aufgabe dieser Untersuchungen, die möglichen Typen $\mathfrak{g}$ festzustellen und durch Vollständigkeitseigenschaften zu kennzeichnen. Zu diesem Zwecke gebe ich im folgenden eine Reihe von Regeln an, die erlauben, aus einem Satze von in einem vorgegebenen Ringe $\mathfrak{R}$ geltenden Gesetzen neue, gleichfalls in $\mathfrak{R}$ geltende Gesetze abzuleiten:

1. Sind $g_1(x) \equiv g_1(x_1, x_2, \ldots, x_n) = 0$; $g_2(x) \equiv g_2(x_1, x_2, \ldots, x_n) = 0$ zwei in $\mathfrak{R}$ gültige Gesetze, so gilt mit beliebigen ganzen Zahlen γ_1, γ_2 in $\mathfrak{R}$ auch das Gesetz

$$g(x) \equiv g(x_1, x_2, \ldots, x_n) \equiv \gamma_1 g_1(x) + \gamma_2 g_2(x) = 0.$$

2. Ist $g(x) = g(x_1, x_2, \ldots, x_n) = 0$ ein in $\mathfrak{R}$ gültiges Gesetz, ferner $f(x) = f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ eine beliebige Form aus $\mathfrak{F}$, so gelten in $\mathfrak{R}$ auch die Gesetze

$$h_1(x) \equiv h_1(x_1, x_2, \ldots, x_n) \equiv g(x) f(x) = 0,$$
$$h_2(x) \equiv h_2(x_1, x_2, \ldots, x_n) \equiv f(x) g(x) = 0.$$

3. Gilt in $\mathfrak{R}$ das Gesetz $\gamma g(x) = \gamma g(x_1, x_2, \ldots, x_n) = 0$ mit einer von 0 verschiedenen ganzen Zahl γ und einer Form $g(x)$ aus $\mathfrak{F}$, so gilt in $\mathfrak{R}$ auch das Gesetz

$$g(x) = 0.$$

4. Ist $g(x) \equiv g(x_1, x_2, \ldots, x_n) = 0$ ein in $\mathfrak{R}$ gültiges Gesetz, sind ferner

$$f_\nu(x) \equiv f_\nu(x_1, x_2, \ldots, x_m) \qquad (\nu = 1, 2, \ldots, n)$$

beliebige Formen aus $\mathfrak{F}$, so gilt in $\mathfrak{R}$ auch das aus $g(x) = 0$ durch die formale Substitution $x_\nu \to f_\nu(x)$ entstehende Gesetz

$$h(x) \equiv h(x_1, x_2, \ldots, x_m) \equiv g(f_1(x), f_2(x), \ldots, f_n(x)) = 0.$$

Der Beweis dieser vier Regeln bedarf wohl keiner näheren Ausführung.

Für Ringe $\mathfrak{R}$ mit Einheit e tritt hierzu noch die Regel der *formalen partiellen Ableitung:* Zu diesem Zwecke erweitere ich zunächst den Formenring $\mathfrak{F}$ zu dem *erweiterten Formenring* $\mathfrak{F}^*$ mit Einheit e. Man hat dazu nur die Menge $\mathfrak{F}^*$ aller Symbole

$$f^*(x) = \varrho_0 e + f(x)$$

mit beliebigem ganzzahligem ϱ_0 und beliebigem $f(x)$ aus $\mathfrak{F}$ zu bilden und folgende Festsetzungen zu treffen:

1. Die Gleichung

$$\varrho_0 e + f(x) = \sigma_0 e + g(x)$$

soll dann und nur dann gelten, wenn $\varrho_0 = \sigma_0$ und $f(x) = g(x)$ ist.

2. Die Summe zweier Elemente wird erklärt durch

$$(\varrho_0 e + f(x)) + (\sigma_0 e + g(x)) = (\varrho_0 + \sigma_0) e + (f(x) + g(x)).$$

3. Das Produkt zweier Elemente wird erklärt durch

$$(\varrho_0 e + f(x))(\sigma_0 e + g(x)) = \varrho_0 \sigma_0 e + (\varrho_0 g(x) + \sigma_0 f(x) + f(x) g(x)).$$

Dann ist offenbar $\mathfrak{F}^*$ ein Ring mit der Einheit e.

Werden nun im erweiterten Formenring $\mathfrak{F}^*$ die partiellen Ableitungen von e und x_ν formal erklärt durch

$$\frac{\partial e}{\partial x_\lambda} = 0; \quad \frac{\partial x_\nu}{\partial x_\lambda} = \delta_{\nu\lambda} e \qquad (\nu, \lambda = 1, 2, 3, \ldots)$$

mit dem bekannten Kroneckerschen Symbol

$$\delta_{\nu\lambda} = 0 \text{ für } \nu \neq \lambda; \quad \delta_{\nu\nu} = 1 \qquad (\nu, \lambda = 1, 2, 3, \ldots),$$

so gestatten die Bedingungsgleichungen

$$\frac{\partial (f(x)+g(x))}{\partial x_\lambda} = \frac{\partial f(x)}{\partial x_\lambda} + \frac{\partial g(x)}{\partial x_\lambda}$$

$$\frac{\partial (f(x)g(x))}{\partial x_\lambda} = f(x)\frac{\partial g(x)}{\partial x_\lambda} + \frac{\partial f(x)}{\partial x_\lambda} g(x)$$

die Bildung der formalen partiellen Ableitungen nach den Unbestimmten x_λ für jede beliebige erweiterte Form $\varrho_0 e + f(x)$.

Offensichtlich erhält man allgemeiner die höheren partiellen Ableitungen $\frac{\partial^\varkappa f(x)}{\partial x_\lambda^\varkappa}$ auch aus der formalen Entwicklung des Ausdruckes

$$f(x_1, x_2, \ldots, x_\lambda + \xi e, \ldots, x_n) = f(x) + \xi f_1(x) + \xi^2 f_2(x) + \cdots + \xi^k f_k(x)$$

nach Potenzen der (mit allen Unbestimmten x_λ vertauschbar angenommenen) weiteren Unbestimmten ξ vermittels der Gleichungen

$$\frac{\partial^\varkappa f(x)}{\partial x_\lambda^\varkappa} = \varkappa!\, f_\varkappa(x) \qquad (\varkappa = 1, 2, \ldots, k).$$

Unter diesen Festsetzungen gilt für Ringe $\mathfrak{R}$ mit Einheit e die nachstehende Regel:

5. Ist $g(x) \equiv g(x_1, x_2, \ldots, x_n) = 0$ ein in $\mathfrak{R}$ gültiges Gesetz, so gelten in $\mathfrak{R}$ auch die Gesetze

$$\frac{\partial g(x)}{\partial x_1} = 0; \quad \frac{\partial g(x)}{\partial x_2} = 0; \ \ldots; \ \frac{\partial g(x)}{\partial x_n} = 0.$$

Neben dem Gesetz $g(x) = 0$ gilt nämlich, da $\mathfrak{R}$ eine Einheit e besitzt, bei beliebig gewähltem ganzem ξ auch das Gesetz

$$g(x_1, x_2, \ldots, x_\lambda + \xi e, \ldots, x_n) \equiv g(x) + \xi g_1(x) + \xi^2 g_2(x) + \cdots + \xi^k g_k(x) = 0.$$

Hieraus folgt aber aufgrund der Regel 3 in bekannter Weise durch Wahl von $k+1$ verschiedenen ganzen Werten für ξ die Gültigkeit der Gesetze

$$g(x) = 0, \ g_1(x) = 0, \ g_2(x) = 0, \ \ldots, \ g_k(x) = 0,$$

von denen insbesondere $g_1(x)$ das Gesetz

$$g_1(x) \equiv \frac{\partial g(x)}{\partial x_\lambda} = 0$$

liefert. Daß der Ausdruck $g_1(x)$ dem Formenring $\mathfrak{F}$ angehört, liegt auf der Hand, da in einem Gesetz $g(x) = 0$ für einen Ring mit Einheit e gewiß keine Potenzprodukte der Dimension 1 auftreten können.

Allgemeiner folgt aus der Gültigkeit des Gesetzes $g(x) = 0$ in einem Ringe $\mathfrak{R}$ mit Einheit e die Gültigkeit des Gesetzes

$$\frac{1}{\varkappa!}\frac{\partial^\varkappa g(x)}{\partial x_\lambda^\varkappa} = 0 \qquad (\varkappa = 1, 2, \ldots, k)$$

und durch Wiederholung des Verfahrens die Gültigkeit des Gesetzes

$$\frac{1}{\varkappa_1!\,\varkappa_2!\dots\varkappa_n!}\,\frac{\partial^{\varkappa_1+\varkappa_2+\cdots+\varkappa_n} g(x)}{\partial x_1^{\varkappa_1}\,\partial x_2^{\varkappa_2}\dots\partial x_n^{\varkappa_n}} = 0$$

für jede Reihe nichtnegativer ganzer Zahlen $\varkappa_1, \varkappa_2, \dots, \varkappa_n$, die die Bedingung

$$\varkappa + \varkappa_2 + \cdots + \varkappa_n \leqq k$$

erfüllt.

II.

Die beiden ersten Regeln, die zur Bildung neuer Gesetze aus bereits bekannten, in einem Ringe $\mathfrak{R}$ gültigen Gesetzen angegeben wurden, zeigen, daß der Typus $\mathfrak{g}$ eines Ringes $\mathfrak{R}$ ein (zweiseitiges) Ideal im Formenring $\mathfrak{F}$ ist. Die weiteren Regeln legen die folgenden Definitionen nahe:

Ein (zweiseitiges) Ideal $\mathfrak{a}$ des Formenringes $\mathfrak{F}$ heißt *T-Ideal*, wenn es außer den Idealeigenschaften noch die folgenden beiden Eigenschaften besitzt:

1. Gehört ein Vielfaches $\gamma g(x)$ einer Form $g(x)$ mit von 0 verschiedenem ganzem γ zu $\mathfrak{a}$, so gehört die Form $g(x)$ selbst zu $\mathfrak{a}$.

2. Gehört die Form $g(x) \equiv g(x_1, x_2, \dots, x_n)$ zu $\mathfrak{a}$, so gehört auch die Form

$$h(x) \equiv g(f_1(x), f_2(x), \dots, f_n(x))$$

zu $\mathfrak{a}$, die aus $g(x)$ durch die formale Substitution

$$x_\nu \to f_\nu(x) \qquad (\nu = 1, 2, \dots, n)$$

mit beliebigen (nicht notwendig zu $\mathfrak{a}$ gehörenden) Formen $f_\nu(x)$ aus $\mathfrak{F}$ erhalten wird.

Ein (zweiseitiges) Ideal $\mathfrak{a}$ des Formenringes $\mathfrak{F}$ heißt *T*-Ideal*, wenn es ein *T*-Ideal ist und überdies die Eigenschaft besitzt:

3. Gehört die Form $g(x) = g(x_1, x_2, \dots, x_n)$ zu $\mathfrak{a}$, so gehören auch die partiellen Ableitungen

$$\frac{\partial g(x)}{\partial x_\nu} \qquad (\nu = 1, 2, \dots, n)$$

zu $\mathfrak{a}$.

Mit Hilfe dieser Bezeichnungen findet man sogleich den

Satz 1. *Der Typus* $\mathfrak{g}$ *eines Ringes* $\mathfrak{R}$ *ist ein T-Ideal und sogar ein T*-Ideal, falls* $\mathfrak{R}$ *eine Einheit e besitzt.*

Die Umkehrung dieses Satzes stellt eine vollständige Lösung des mit diesen Untersuchungen verknüpften Existenzproblems dar. Es gilt nämlich, wie nunmehr gezeigt werden soll, der

Satz 2. *Zu jedem T-Ideal* $\mathfrak{g}$ *des Formenringes* $\mathfrak{F}$ *gibt es einen Ring* $\mathfrak{R}$, *zu jedem T*-Ideal* $\mathfrak{g}$ *des Formenringes* $\mathfrak{F}^*$ *gibt es einen Ring* $\mathfrak{R}$ *mit Einheit e, der den Typus* $\mathfrak{g}$ *besitzt.*

Zum Beweise bilde man, genau entsprechend der Bildung des Formenringes $\mathfrak{F}$ im Abschnitt I, aus einer abzählbaren Menge von Unbestimmten

$$(u) = u_1, u_2, u_3, \ldots, u_n, \ldots$$

den Formenring $\mathfrak{U}$ aller Formen

$$f(u) = \varrho_1 U_1 + \varrho_2 U_2 + \varrho_3 U_3 + \cdots = \sum_\alpha \varrho_\alpha U_\alpha$$

in den Potenzprodukten U_α beliebiger Dimension mit ganzzahligen Koeffizienten ϱ_α, von denen stets nur endlich viele von Null verschieden sein sollen. Der Ring $\mathfrak{U}$ ist ein gesetzloser Ring. Wäre nämlich

$$g(x) \equiv g(x_1, x_2, \ldots, x_n) = 0$$

ein in $\mathfrak{U}$ gültiges Gesetz, so müßte insbesondere die Gleichung

$$g(u) \equiv g(u_1, u_2, \ldots, u_n) = 0$$

gelten, was nur für die Nullform $g(x) \equiv 0$ zutreffen kann.

Auch der erweiterte Formenring $\mathfrak{U}^*$, der von allen Symbolen

$$f^*(u) = \varrho_0 e + f(u)$$

mit beliebigem ganzzahligem ϱ_0 und beliebigem $f(u)$ aus $\mathfrak{U}$ gebildet wird, ist gesetzlos, da er ja den Formenring $\mathfrak{U}$ als Teilring enthält.

Nun sei $\mathfrak{g}$ ein beliebiges T-Ideal des Formenringes $\mathfrak{F}$; ihm entspricht durch die Zuordnung

$$g(x_1, x_2, \ldots, x_n) \longleftrightarrow g(u_1, u_2, \ldots, u_n)$$

ein eindeutig bestimmtes Ideal $\mathfrak{u}$ des Formenringes $\mathfrak{U}$. Der Restklassenring $\mathfrak{R} = \mathfrak{U}/\mathfrak{u}$ ist dann, wie leicht gezeigt werden kann, ein Ring vom Typus $\mathfrak{g}$.

Ist nämlich $g(x) \equiv g(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ eine Form des T-Ideals $\mathfrak{g}$, so ist auch

$$h(x) \equiv g(f_1(x), f_2(x), \ldots, f_n(x))$$

mit beliebigen Formen $f_\nu(x)$ aus $\mathfrak{F}$ eine Form aus $\mathfrak{g}$ und daher

$$g(f_1(u), f_2(u), \ldots, f_n(u)) \equiv 0\,(\mathfrak{u})$$

mit beliebigen Elementen $f_\nu(u)$ des Ringes $\mathfrak{U}$. Mithin gilt im Restklassenring $\mathfrak{R} = \mathfrak{U}/\mathfrak{u}$ das Gesetz $g(x) = 0$.

Gilt andererseits im Ringe $\mathfrak{R} = \mathfrak{U}/\mathfrak{u}$ das Gesetz

$$g(x) \equiv g(x_1, x_2, \ldots, x_n) = 0,$$

so gilt insbesondere für die ersten n Unbestimmten $u_1, u_2, \ldots, u_n$

$$g(u) \equiv g(u_1, u_2, \ldots, u_n) \equiv 0\,(\mathfrak{u}),$$

weshalb die Form $g(x)$ zu dem T-Ideal $\mathfrak{g}$ gehört.

Ist $\mathfrak{g}$ ein T^*-Ideal des Formenringes $\mathfrak{F}$, so entspricht ihm in der gleichen Zuordnung

$$g(x_1, x_2, \ldots, x_n) \longleftrightarrow g(u_1, u_2, \ldots, u_n)$$

ein eindeutig bestimmtes Ideal u des erweiterten Formenringes $\mathfrak{U}^*$. Der Restklassenring $\mathfrak{R} = \mathfrak{U}^*/\mathfrak{u}$ ist dann ein Ring mit Einheit und besitzt den Typus $\mathfrak{g}$.

Ist nämlich $g(x) \equiv g(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ eine Form aus dem T^*-Ideal $\mathfrak{g}$, so ist, da alle partiellen Ableitungen

$$\frac{1}{\varkappa_1!\,\varkappa_2!\ldots\varkappa_n!}\,\frac{\partial^{\varkappa_1+\varkappa_2+\cdots+\varkappa_n} g(x)}{\partial x_1^{\varkappa_1}\,\partial x_2^{\varkappa_2}\ldots\partial x_n^{\varkappa_n}} \quad \text{mit} \quad \varkappa_1+\varkappa_2+\cdots+\varkappa_n \leqq k$$

ebenfalls zu $\mathfrak{g}$ gehören, auch der Ausdruck

$$g(\varrho_1 e + x_1,\ \varrho_2 e + x_2,\ \ldots,\ \varrho_n e + x_n)$$

mit beliebigen ganzen Koeffizienten $\varrho_1, \varrho_2, \ldots, \varrho_n$ eine Form aus $\mathfrak{g}$, folglich auch

$$g(\varrho_1 e + f_1(x),\ \varrho_2 e + f_2(x),\ \ldots,\ \varrho_n e + f_n(x))$$

mit beliebigen Formen $f_\nu(x)$ aus $\mathfrak{F}$ eine Form aus $\mathfrak{g}$, mithin

$$g(\varrho_1 e + f_1(u),\ \varrho_2 e + f_2(u),\ \ldots,\ \varrho_n e + f_n(u)) \equiv 0\,(\mathfrak{u})$$

mit beliebigen Elementen $\varrho_\nu e + f_\nu(u)$ aus $\mathfrak{U}^*$. Daher gilt im Restklassenring $\mathfrak{R} = \mathfrak{U}^*/\mathfrak{u}$ das Gesetz $g(x) = 0$.

Gilt andererseits in $\mathfrak{R} = \mathfrak{U}^*/\mathfrak{u}$ das Gesetz

$$g(x) = g(x_1, x_2, \ldots, x_n) = 0,$$

so ist insbesondere für die ersten n Unbestimmten $u_1, u_2, \ldots, u_n$

$$g(u) \equiv g(u_1, u_2, \ldots, u_n) \equiv 0\,(\mathfrak{u}),$$

weshalb $g(x)$ zum T^*-Ideal $\mathfrak{g}$ gehört.

Damit ist der Satz 2 in vollem Umfange bewiesen.

III.

Von besonderer Bedeutung ist für die weiteren Untersuchungen der Begriff der *mehrfach linearen Form*: Aus den ersten n Unbestimmten der Folge (x) lassen sich das spezielle Potenzprodukt

$$x = x_1 x_2 \ldots x_n$$

und weiter durch Permutation der Ziffern $1, 2, \ldots, n$ insgesamt $n!$ verschiedene Potenzprodukte

$$x^P = x_{\alpha_1} x_{\alpha_2} \ldots x_{\alpha_n} \quad \text{bei} \quad P = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \ldots & n \\ \alpha_1 & \alpha_2 & \ldots & \alpha_n \end{pmatrix}$$

herstellen. Dann ist auch der Ausdruck

$$L(x) \equiv L(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \sum_P \gamma_P x^P \tag{4}$$

mit ganzzahligen Koeffizienten γ_P, in dem die Summe über alle Permutationen P zu erstrecken ist, eine homogene Form des Formenringes $\mathfrak{F}$

von der Dimension n, die dann und nur dann die Nullform darstellt, wenn alle Zahlen γ_P gleich Null sind. Überdies erfüllt eine Form $L(x)$ dieser Gestalt die Bedingungen

$$(5) \qquad L(x_1, x_2, \ldots, \tau x_\lambda, \ldots, x_n) = \tau L(x_1, x_2, \ldots, x_\lambda, \ldots, x_n)$$
$$(\lambda = 1, 2, \ldots, n)$$

bei beliebigem ganzem τ, ist also homogen von der Dimension 1 bezüglich jeder Unbestimmten x_λ. Daher will ich eine solche Form als *mehrfach linear*, genauer als *n-fach linear* bezeichnen. Umgekehrt erkennt man mühelos, daß jede Form $f(x) \equiv f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ aus $\mathfrak{F}$, die den Bedingungen (5) genügt, n-fach linear ist.

Die Tatsache, daß aus einem oder mehreren in einem Ring gültigen Gesetzen mit Hilfe der im Abschnitt I angegebenen Regeln auf mannigfache Weise neue in $\mathfrak{R}$ gültige Gesetze hergeleitet werden können, legt die weitere Frage nahe, ob nicht für jeden Ring Gesetze besonders einfacher Gestalt ausfindig gemacht werden können, aus denen alle weiteren in $\mathfrak{R}$ gültigen Gesetze durch diese Regeln sich ableiten lassen. Um eine bequeme und kurze Bezeichnung für diesen Sachverhalt zu haben, nenne ich eine Menge von im Ringe $\mathfrak{R}$ gültigen Gesetzen *vollständig*, wenn aus diesen durch Anwendung jener Regeln sämtliche in $\mathfrak{R}$ gültigen Gesetze hergeleitet werden können, wobei naturgemäß wieder zu unterscheiden sein wird, ob der Ring $\mathfrak{R}$ eine Einheit besitzt oder nicht, da im ersten Fall auch die fünfte Regel in Anwendung zu bringen ist.

Eine entscheidende Rolle spielt hierbei der folgende

Satz 3. *Die Menge der in einem Ringe $\mathfrak{R}$ gültigen mehrfach linearen Gesetze ist vollständig.*

Zum Beweise dieses Satzes zeige ich zunächst, daß alle in $\mathfrak{R}$ gültigen Gesetze sich aus den bezüglich der einzelnen Unbestimmten homogenen Gesetzen herleiten lassen. Es genügt, da die Unbestimmten in ihren Rollen vertauscht werden können, dies hinsichtlich der Unbestimmten x_1 nachzuweisen.

Eine Form $f(x) \equiv f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ der Dimension k läßt sich als Summe

$$f(x) = \sum_{\varkappa=0}^{k} f_\varkappa(x)$$

von bezüglich der Unbestimmten x_1 homogenen Formen $f_\varkappa(x)$ der durch den Index $\varkappa$ gegebenen Dimension darstellen. Gilt nun in $\mathfrak{R}$ das Gesetz $f(x) = 0$, so gelten auch die Gesetze

$$f(\tau x_1, x_2, \ldots, x_n) \equiv \sum_{\varkappa=0}^{k} \tau^\varkappa f_\varkappa(x_1, x_2, \ldots, x_n) = 0,$$

wobei τ beliebige ganzzahlige Werte annehmen darf. Mithin ist schon

$$f_\varkappa(x_1, x_2, \ldots, x_n) = 0 \quad \text{für} \quad \varkappa = 0, 1, 2, \ldots, k$$

ein Gesetz in $\mathfrak{R}$. Umgekehrt gewinnt man aus diesen Gesetzen durch Summenbildung das ursprüngliche Gesetz.

Für den weiteren Beweisgang verwende ich ein Verfahren, das gestattet, das vorgegebene Gesetz $g(x) = 0$ der Dimension k, das nunmehr homogen bezüglich aller in ihm wirklich auftretenden Unbestimmten angenommen werden darf, durch Einführung weiterer Unbestimmten durch eine Reihe gleichwertiger mehrfach linearer Gesetze zu ersetzen. Hat $g(x) = 0$ bereits bezüglich aller Unbestimmten x_ν für $\nu = 1, 2, \ldots, n$ die Dimension $k_\nu = 1$, so ist $g(x)$ schon selbst mehrfach linear. Daher kann unter Vertauschung oder Umbenennung der Unbestimmten, ohne Beschränkung der Allgemeingültigkeit des Beweises, angenommen werden, daß

$$g(\tau x_1, x_2, \ldots, x_n) = \tau^{k_1} g(x_1, x_2, \ldots, x_n) \qquad \text{mit } k_1 \geqq 2$$

ist. Überdies genügt es, das Verfahren an der Unbestimmten x_1 aufzuzeigen, da es ohne weiteres auch an den anderen Unbestimmten in gleicher Weise durchzuführen ist.

Neben dem Gesetz $g(x_1, x_2, \ldots, x_n) = 0$ gilt im Ringe $\mathfrak{R}$ auch das daraus hergeleitete Gesetz

$$f(x_1, x_2, \ldots, x_n, x_{n+1})$$
$$= g(x_1 + x_{n+1}, x_2, \ldots, x_n) - g(x_1, x_2, \ldots, x_n) - g(x_{n+1}, x_2, \ldots, x_n) = 0,$$

aus dem insbesondere die Gleichung

$$f(x_1, x_2, \ldots, x_n, x_1)$$
$$= g(2x_1, x_2, \ldots, x_n) - g(x_1, x_2, \ldots, x_n) - g(x_1, x_2, \ldots, x_n)$$
$$= (2^{k_1} - 2)\, g(x_1, x_2, \ldots, x_n) = 0$$

hervorgeht, die zeigt, daß $f(x_1, x_2, \ldots, x_n, x_{n+1})$ nicht Nullform ist, und daß das Gesetz $g(x) = 0$ aus dem Gesetz $f(x) = 0$ durch Identifizierung der Unbestimmten x_1 und x_{n+1} herleitbar ist.

Nun ist $f(x)$ homogen von gleicher Dimension wie die Form $g(x)$; überdies ist $f(x)$ auch bezüglich der Unbestimmten $x_2, x_3, \ldots, x_n$ homogen von gleicher Dimension wie $g(x)$. Außerdem gilt

$$f(x_1, x_2, \ldots, x_n, 0)$$
$$= g(x_1, x_2, \ldots, x_n) - g(x_1, x_2, \ldots, x_n) - g(0, x_2, \ldots, x_n) \equiv 0,$$

$$f(0, x_2, \ldots, x_n, x_{n+1})$$
$$= g(x_{n+1}, x_2, \ldots, x_n) - g(0, x_2, \ldots, x_n) - g(x_{n+1}, x_2, \ldots, x_n) \equiv 0,$$

weshalb in jedem in $f(x)$ auftretenden Potenzprodukt wenigstens einmal x_1 und wenigstens einmal x_{n+1} auftreten muß. Daher besitzt die Form $f(x)$ bezüglich x_1 ebenso wie bezüglich x_{n+1} höchstens die Dimension $k_1 - 1$.

Wird nunmehr das neue Gesetz $f(x) = 0$ nach seinen bezüglich x_1 homogenen Summanden zerlegt, so kann das Verfahren für die Sum-

manden einzeln weiter durchgeführt werden. Nach einer endlichen Kette von Schritten findet man eine Reihe von mehrfach linearen Gesetzen, aus denen umgekehrt das ursprüngliche Gesetz wieder abgeleitet werden kann. Gilt beispielsweise in einem Ringe $\mathfrak{R}$ das Gesetz

$$x_1^3 = 0,$$

so gilt auch das Gesetz

$$(x_1 + x_2)^3 - x_1^3 - x_2^3 = x_2 x_1^2 + x_1 x_2 x_1 + x_1^2 x_2 + x_2^2 x_1 + x_2 x_1 x_2 + x_1 x_2^2 = 0,$$

mithin auch die beiden Gesetze

$$x_2 x_1^2 + x_1 x_2 x_1 + x_1^2 x_2 = 0; \quad x_2^2 x_1 + x_2 x_1 x_2 + x_1 x_2^2 = 0,$$

die auseinander durch Vertauschung der Unbestimmten hervorgehen. Der nächste Schritt liefert

$$x_2(x_1 + x_3)^2 + (x_1 + x_3) x_2 (x_1 + x_3) + (x_1 + x_3)^2 x_2 - x_2 x_1^2 - x_1 x_3 x_1 - x_1^2 x_2 - x_2 x_3^2 - x_3 x_2 x_3 - x_3^2 x_2 = 0,$$

oder

$$x_1 x_2 x_3 + x_1 x_3 x_2 + x_2 x_1 x_3 + x_2 x_3 x_1 + x_3 x_1 x_2 + x_3 x_2 x_1 = 0.$$

Mithin ist dieses dreifach lineare Gesetz mit dem ursprünglichen Gesetz völlig gleichwertig.

Auf Grund dieses Satzes können sich nun die weiteren Untersuchungen auf die Behandlung der mehrfach linearen Gesetze eines Ringes $\mathfrak{R}$ beschränken. Daher soll auch im folgenden, sofern nichts anderes angegeben, unter einer Form nur noch eine mehrfach lineare Form, unter einem Gesetz nur noch ein mehrfach lineares Gesetz verstanden werden.

Aus einer n-fach linearen Form

$$L(x) \equiv L(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \sum_P \gamma_P x^P = \sum_P \gamma_P (x_1 x_2 \ldots x_n)^P$$

läßt sich durch eine Permutation Q der Unbestimmten eine neue n-fach lineare Form

$$L^Q(x) = \sum_P \gamma_P x^{PQ} = \sum_P \gamma_{PQ^{-1}} x^P$$

gewinnen. Ferner ist jede lineare Verbindung

$$L(x) = \alpha_1 L_1(x) + \alpha_2 L_2(x)$$

zweier n-fach linearer Formen $L_1(x)$, $L_2(x)$ mit ganzzahligen Koeffizienten α_1, α_2 wiederum eine n-fach lineare Form. Daher bildet die Gesamtheit aller n-fach linearen Formen einen *symmetrischen Modul*[4]).

[4]) Vgl. W. Specht, Die irreduziblen Darstellungen der symmetrischen Gruppe, Math. Zeitschr. **39** (1935), 696—711; Zur Darstellungstheorie der symmetrischen Gruppe, Math. Zeitschr. **42** (1937), 774—779.

Allgemein nenne ich jede Menge M von n-fach linearen Formen einen *symmetrischen Modul*, die die folgenden Eigenschaften besitzt:

1. Enthält M die Formen $L_1(x)$, $L_2(x)$, so enthält M auch jede Form $L(x) = \alpha_1 L_1(x) + \alpha_2 L_2(x)$ mit beliebigen ganzen Zahlen α_1, α_2.

2. Enthält M ein Vielfaches $\gamma L(x)$ der Form $L(x)$ mit von 0 verschiedenem ganzem γ, so enthält M auch die Form $L(x)$.

3. Enthält M die Form $L(x)$, so enthält M auch die Form $L^P(x)$ bei beliebiger Permutation P der Unbestimmten.

Insbesondere bildet bei einer festgewählten n-fach linearen Form

$$L(x) = \sum_P \gamma_P x^P,$$

deren ganzzahligen Koeffizienten γ_P teilerfremd sind, die Gesamtheit aller Formen der Gestalt

$$F(x) = \sum_P \alpha_P L^P(x)$$

mit beliebigen ganzzahligen Koeffizienten α_P, wobei über sämtliche Permutationen der Unbestimmten zu summieren ist, einen symmetrischen Modul, den ich als *den durch die Form $L(x)$ erzeugten symmetrischen Modul* $\mathsf{M}(L(x))$ bezeichne.

Ist M ein beliebiger symmetrischer Modul n-fach linearer Formen, so kann, da der Modul aller n-fach linearen Formen eine linear unabhängige Basis in den $n!$ Formen x^P besitzt, auch für M eine linear unabhängige Basis von Formen $L_\varrho(x)$ (mit $\varrho = 1, 2, \ldots, r$) angegeben werden, derart daß jede Form $L(x)$ des Moduls M eindeutig als lineare Verbindung

$$L(x) = \sum_\varrho \alpha_\varrho L_\varrho(x) \qquad (\varrho = 1, 2, \ldots, r)$$

mit ganzzahligen Koeffizienten α_ϱ erhalten werden kann. Insbesondere gelten also Beziehungen der Gestalt

$$L_\varrho^P(x) = \sum_\sigma d_{\varrho\sigma}^P L_\sigma(x) \qquad (\varrho, \sigma = 1, 2, \ldots, r)$$

für jede Permutation P mit ganzen Zahlen $d_{\varrho\sigma}^P$. Da weiter für jedes Paar P, Q von Permutationen hieraus die Gleichungen

$$L_\varrho^{PQ}(x) = \sum_\tau d_{\varrho\tau}^P L_\tau^Q(x) = \sum_{\tau,\sigma} d_{\varrho\tau}^P d_{\tau\sigma}^Q L_\sigma(x) = \sum_\sigma d_{\varrho\sigma}^{PQ} L_\sigma(x)$$

folgen, findet man wegen der linearen Unabhängigkeit der Basis

$$\sum_\tau d_{\varrho\tau}^P d_{\tau\sigma}^Q = d_{\varrho\sigma}^{PQ}$$

oder

$$D(P)\, D(Q) = D(P\,Q)$$

für die r-reihigen ganzzahligen Matrizen

$$D(P) = (d_{\varrho\sigma}^P) \qquad (\varrho, \sigma = 1, 2, \ldots, r)$$

Jeder symmetrische Modul M n-fach linearer Formen liefert demnach eine *Darstellung der symmetrischen Gruppe* $\mathfrak{S}_n$ durch ganzzahlige Matrizen[5]).

Der Satz von der vollständigen Zerlegbarkeit endlicher Matrixgruppen sowie die Tatsache, daß jede Darstellung der symmetrischen Gruppe $\mathfrak{S}_n$ durch ganzzahlige Matrizen in absolut unzerlegbare, gleichfalls ganzzahlige Bestandteile zerlegt werden kann, führen sogleich auf einige Aussagen über symmetrische Moduln n-fach linearer Formen, die ich ohne nähere Begründung nachstehend angebe[6]):

1. Ist M_1 ein symmetrischer Teilmodul des symmetrischen Moduls M, so gibt es einen zweiten symmetrischen Teilmodul M_2 von M, derart daß in direkter Zerlegung gilt:

$$\mathsf{M} = \mathsf{M}_1 + \mathsf{M}_2.$$

2. Jeder symmetrische Modul M ist als direkte Summe

$$\mathsf{M} = \mathsf{M}_1 + \mathsf{M}_2 + \cdots + \mathsf{M}_k$$

unzerlegbarer symmetrischer Teilmoduln darstellbar.

3. Ein symmetrischer Modul M ist dann und nur dann unzerlegbar, wenn er keinen symmetrischen Teilmodul enthält.

4. Ein unzerlegbarer symmetrischer Modul M wird durch jede von Null verschiedene, in ihm enthaltene n-fach lineare Form $L(x) = \sum_P \gamma_P x^P$ erzeugt, deren Koeffizienten γ_P teilerfremd sind:

$$\mathsf{M} = \mathsf{M}(L(x)).$$

Diese Aussage kann, was für die weiteren Betrachtungen besonders wichtig ist, in folgender Weise auf beliebige symmetrische Moduln ausgedehnt werden:

5. Zu jedem symmetrischen Modul M kann eine erzeugende Form $L(x)$ angegeben werden:

$$\mathsf{M} = \mathsf{M}(L(x)).$$

Da nämlich der Modul Γ aller n-fach linearen Formen den Modul M als Teilmodul enthält, gibt es einen zweiten symmetrischen Teilmodul M^*, so daß in direkter Zerlegung

$$\Gamma = \mathsf{M} + \mathsf{M}^*$$

ist. Mithin läßt sich jede Form $L(x)$, insbesondere also das Potenzprodukt $x = x_1 x_2 \ldots x_n$ eindeutig als Summe einer Form $F(x)$ aus M und einer Form $G(x)$ aus M^* darstellen:

$$x = F(x) + G(x) \quad \text{mit} \quad F(x) \in \mathsf{M};\ G(x) \in \mathsf{M}^*.$$

[5]) Vgl. die in [4]) angegebenen Arbeiten.

[6]) Für alle allgemeinen darstellungstheoretischen Dinge vgl. B. L. VAN DER WAERDEN. Moderne Algebra II. 17. Kapitel. Berlin Jul. Springer 1931.

Daraus findet man für eine beliebige Form $L(x) = \sum_P \gamma_P x^P$ die Darstellung

$$L(x) = \sum_P \gamma_P (F(x) + G(x))^P = \sum_P \gamma_P F^P(x) + \sum_P \gamma_P G^P(x) = L_1(x) + L_2(x)$$

mit zwei Formen

$$L_1(x) \in \mathsf{M}(F(x)) < \mathsf{M}; \quad L_2(x) \in \mathsf{M}(G(x)) \leqq \mathsf{M}^*.$$

Ist also $L(x)$ insbesondere eine Form aus M, so ist die Form $L(x) - L_1(x) = L_2(x)$ sowohl in M als auch in M^* enthalten. Daher ist

$$L_2(x) \equiv 0 \quad \text{oder} \quad L(x) = \sum_P \gamma_P F^P(x).$$

Jede Form des Moduls M gehört demnach dem Modul $\mathsf{M}(F(x))$ an:

$$\mathsf{M} = \mathsf{M}(F(x)).$$

Die Bedeutung dieser Tatsachen für die Untersuchung der Gesetze in einem Ringe $\mathfrak{R}$ erhellt nun sogleich aus der folgenden, leicht zu beweisenden Bemerkung:

Satz 4. *Die in einem Ringe $\mathfrak{R}$ geltenden n-fach linearen Gesetze bilden einen symmetrischen Modul.*

Gilt nämlich in $\mathfrak{R}$ das n-fach lineare Gesetz $\gamma L(x) = 0$ mit von 0 verschiedenem ganzem γ und einer (n-fach linearen) Form $L(x)$, so gilt in $\mathfrak{R}$ auch das Gesetz $L(x) = 0$; gelten in $\mathfrak{R}$ die beiden n-fach linearen Gesetze $L_1(x) = 0$ und $L_2(x) = 0$, so gilt in $\mathfrak{R}$ mit beliebigen ganzen Zahlen α_1, α_2 auch das Gesetz $\alpha_1 L_1(x) + \alpha_2 L_2(x) = 0$; gilt in $\mathfrak{R}$ schließlich das n-fach lineare Gesetz $L(x) = 0$, so gilt in $\mathfrak{R}$ bei beliebiger Permutation P der Unbestimmten auch das Gesetz $L^P(x) = 0$.

Daraus kann aber unter Beachtung der letzten Bemerkung über symmetrische Moduln sogleich das folgende Ergebnis entnommen werden:

Satz 5. *Die in einem Ringe $\mathfrak{R}$ geltenden n-fach linearen Gesetze lassen sich aus einem einzigen n-fach linearen Gesetz*

$$L_n(x) = 0$$

herleiten und in der Gestalt

$$g(x) = \sum_P \alpha_P L_n^P(x) = 0$$

mit ganzzahligen Koeffizienten α_P darstellen.

Wie bereits früher angegeben wurde, lassen sich aus einem in $\mathfrak{R}$ gültigen Gesetz stets auch Gesetze höherer Dimension herleiten. Daher ist nun noch festzustellen, unter welchen Bedingungen die angegebenen Verfahren wiederum auf mehrfach lineare Gesetze führen. Man erkennt leicht, daß im wesentlichen, d. h. abgesehen von Permutation der Unbestimmten, Bildung linearer Verbindungen mit ganzzahligen Koeffizienten und Wiederholung der Verfahren, hierfür die folgenden Regeln zur Verfügung stehen:

Satz 6. *Ist* $L_n(x) = L_n(x_1, x_2, \ldots, x_n) = 0$ *ein in* $\mathfrak{R}$ *gültiges n-fach lineares Gesetz, so sind*

$$L_n(x_1, x_2, \ldots, x_n) \cdot x_{n+1} = 0,$$
$$x_{n+1} \cdot L_n(x_1, x_2, \ldots, x_n) = 0,$$
$$L_n(x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}, x_n x_{n+1}) = 0$$

gleichfalls in $\mathfrak{R}$ *gültige* $(n+1)$*-fach lineare Gesetze.*

Somit bestehen neben n-fach linearen Gesetzen in einem Ring stets auch mehrfach lineare Gesetze jeder höheren Dimension. Damit erhält man:

Satz 7. *Für jeden Ring* $\mathfrak{R}$ *k-ter Stufe läßt sich eine Kette*

$$L_k(x) = 0,\ L_{k+1}(x) = 0, \ldots, L_n(x) = 0, \ldots$$

mehrfach linearer Gesetze der durch den Index angegebenen Dimension angeben, aus denen alle anderen, in $\mathfrak{R}$ *gültigen Gesetze herleitbar sind.*

Die in diesem Satze angegebene Kette von Gesetzen für einen Ring k-ter Stufe ist zwar vollständig in dem früher angegebenen Sinne, da jedes im Ring gültige Gesetz aus den Gesetzen der Kette herleitbar ist, die Gesetze der Kette sind indes nicht notwendig unabhängig voneinander, da der Modul $\mathsf{M}(L_n(x))$ aller n-fach linearen Gesetze auch alle Gesetze enthält, die aus den vorangehenden Gliedern der Kette durch Anwendung des Satzes 6 gewonnen werden können. Eine weitere Reduktion der Kette läßt sich auf folgende Weise durchführen:

Alle aus den mehrfach linearen Gesetzen der Kette

$$L_k(x) = 0,\ L_{k+1}(x) = 0, \ldots, L_{n-1}(x) = 0$$

durch den Satz 6 herleitbaren n-fach linearen Gesetze bilden einen symmetrischen Teilmodul M'_n des Moduls $\mathsf{M}(L_n(x))$; zu ihm kann ein ergänzender Teilmodul M''_n angegeben werden, derart daß in direkter Zerlegung gilt:

$$\mathsf{M}(L_n(x)) = \mathsf{M}'_n + \mathsf{M}''_n = \mathsf{M}(L'_n(x)) + \mathsf{M}(L''_n(x)),$$

wenn $L'_n(x)$ und $L''_n(x)$ erzeugende Formen der Moduln M'_n und M''_n bezeichnen. Die Gesetze des Moduls M''_n, also die Gesetze der Gestalt

$$g(x) = \sum_P \gamma_P L''^P_n(x) = 0,$$

die in $\mathfrak{R}$ gelten, lassen sich dann auf keine Weise aus den in $\mathfrak{R}$ gültigen mehrfach linearen Gesetzen niedrigerer Dimension herleiten, da M'_n und M''_n zueinander fremd sind, wobei unter Umständen der Modul M''_n sogar leer sein kann, nämlich dann, wenn alle n-fach linearen Gesetze sich bereits aus den Gesetzen niedrigerer Dimension herleiten lassen. Somit gilt der

Satz 8. *Für jeden Ring* $\mathfrak{R}$ *k-ter Stufe läßt sich eine reduzierte Kette*

$$L_k(x) = 0,\ L_{k_1}(x) = 0,\ L_{k_2}(x) = 0, \ldots, L_{k_n}(x) = 0, \ldots$$

mehrfach linearer Gesetze der durch die Indizes

$$k < k_1 < k_2 < \ldots < k_n < \ldots$$

bezeichneten Dimensionen angeben mit folgenden Eigenschaften:

1. *Kein Gesetz des Moduls* $\mathsf{M}(L_{k_n}(x))$ *ist aus den Gesetzen niedrigerer Dimension ableitbar.*

2. *Jedes Gesetz des Ringes* $\mathfrak{R}$ *ist aus den Gesetzen der Kette herleitbar.*

Hierin ist stillschweigend der Fall miteingeschlossen worden, daß die reduzierte Kette mehrfach linearer Gesetze abbricht, also nur aus endlich vielen Gliedern besteht. Ob es Ringe k-ter Stufe mit unendlicher reduzierter Kette mehrfach linearer Gesetze gibt oder ob jede reduzierte Kette eines Ringes mit Notwendigkeit abbricht, habe ich bisher nicht entscheiden können. Die Beantwortung dieser Frage scheint sehr schwierig zu sein.

In diesem Zusammenhang will ich als Ergänzung zu Satz 2 noch zeigen, daß bereits der Ring $\mathfrak{U}_2$ aller Formen $f(u_1, u_2)$ des Formenrings $\mathfrak{U}$, also der Ring aller Formen aus $\mathfrak{U}$, in denen nur die ersten beiden Unbestimmten u_1, u_2 wirklich auftreten, ein gesetzloser Ring ist.

Wäre dies nämlich nicht der Fall, so müßte in $\mathfrak{U}_2$ auch ein mehrfach lineares Gesetz, etwa

$$L(x) = \sum_P \gamma_P x^P = 0 \quad \text{mit} \quad x = x_1 x_2 \ldots x_n$$

gelten. Dann müßte auch für $x_\nu = u_1^\nu u_2$ (mit $\nu = 1, 2, \ldots, n$) die Gleichung

$$L(u_1 u_2,\ u_1^2 u_2,\ \ldots,\ u_1^n u_2) = \sum_P \gamma_P (u_1 u_2 u_1^2 u_2 \ldots u_1^n u_2)^P = 0$$

oder

$$\sum_P \gamma_P u_1^{\alpha_1} u_2 u_1^{\alpha_2} u_2 \ldots u_1^{\alpha_n} u_2 = 0 \quad \text{bei} \quad P = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \ldots & n \\ \alpha_1 & \alpha_2 & \ldots & \alpha_n \end{pmatrix}$$

bestehen, was offenbar nur möglich ist, wenn alle γ_P verschwinden.

IV.

Die bisherigen allgemeinen Ergebnisse lassen sich weitgehend vertiefen, wenn die Forderung gestellt wird, daß der Ring $\mathfrak{R}$ eine Einheit e besitze. Wesentliche Ursache dieser Verschärfung und Ergänzung der Ergebnisse ist die bereits früher angegebene Tatsache, daß sich durch das Verfahren der partiellen Ableitung unter Umständen aus mehrfach linearen Gesetzen auch Gesetze niedrigerer Dimension herleiten lassen. Nun gilt für eine n-fach lineare Form $L(x) = L(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, wie man sich leicht überlegt, die Gleichung

$$\frac{\partial L(x)}{\partial x_\nu} = L(x_1, x_2, \ldots, x_{\nu-1}, e, x_{\nu+1}, \ldots, x_n).$$

Daher läßt sich im Falle des mehrfach linearen Gesetzes, den wir allein noch zu beachten haben, die fünfte Regel des Abschnittes I auf die folgende Regel zurückführen:

5. Ist $L(x) = L(x_1, x_2, \ldots, x_n) \equiv 0$ ein in einem Ringe $\mathfrak{R}$ mit Einheit e gültiges Gesetz, so ist auch

$$L^*(x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}) \equiv L(x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}, e) = 0$$

ein in $\mathfrak{R}$ gültiges Gesetz.

Ich werde indes trotz diesem recht einfachen Sachverhalt in der Folge die Bezeichnung durch partielle Ableitungen als bequeme Schreibweise beibehalten.

Nach dem Verhalten der partiellen Ableitungen werden die mehrfach linearen Formen in zwei Arten unterschieden: Eine n-fach lineare Form $L(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ heiße *eigentlich* n-fach linear, wenn alle ihre partiellen Ableitungen $\frac{\partial L(x)}{\partial x_\nu}$ Nullformen sind, im anderen Falle *uneigentlich* n-fach linear. Die gleiche Unterscheidung werde auch für mehrfach lineare Gesetze getroffen. Eine eigentlich n-fach lineare Form $L(x)$ ist demgemäß durch die Bedingungsgleichungen

$$\frac{\partial L(x)}{\partial x_\nu} \equiv 0 \qquad (\nu = 1, 2, \ldots, n)$$

gekennzeichnet.

Gilt in einem Ringe $\mathfrak{R}$ mit Einheit e das eigentlich n-fach lineare Gesetz $L(x) = 0$, so ist auch das (gleichfalls in $\mathfrak{R}$ gültige) Gesetz $L^P(x) = 0$ bei beliebiger Permutation P eigentlich n-fach linear. Weiter ist die Form $L(x)$ gewiß eigentlich n-fach linear, wenn irgendein Vielfaches $\gamma L(x)$ mit von 0 verschiedenem ganzem γ eigentlich n-fach linear ist. Das Entsprechende gilt schließlich für jede lineare Verbindung $L(x) \equiv \alpha_1 L_1(x) + \alpha_2 L_2(x) = 0$ zweier in $\mathfrak{R}$ gültiger eigentlich n-fach linearer Gesetze $L_1(x) = 0$, $L_2(x) = 0$ bei beliebigen ganzen Zahlen α_1, α_2. Daher bilden die in einem Ringe $\mathfrak{R}$ mit Einheit e geltenden eigentlich n-fach linearen Gesetze für sich einen symmetrischen Modul.

Die Bedeutung der hier gemachten Unterscheidung erhellt aus dem nachstehenden

Satz 9. *Die in einem Ringe $\mathfrak{R}$ mit Einheit e geltenden uneigentlich n-fach linearen Gesetze lassen sich aus den in $\mathfrak{R}$ geltenden eigentlich ν-fach linearen Gesetzen (mit $2 \leqq \nu \leqq n$) herleiten.*

Zum Beweise wird ein doppeltes Induktionsverfahren benötigt: Ist der vorgegebene Ring $\mathfrak{R}$ mit Einheit e etwa k-ter Stufe, so ist jedes in $\mathfrak{R}$ gültige k-fach lineare Gesetz gewiß eigentlich k-fach linear, da andernfalls ein $(k-1)$-fach lineares Gesetz für $\mathfrak{R}$ daraus hergeleitet werden könnte. Mithin kann die Behauptung des Satzes für Gesetze niedrigerer Dimension als n bereits für bewiesen angenommen werden, weshalb es zum Beweise völlig ausreicht zu zeigen, daß ein uneigent-

lich n-fach lineares Gesetz in $\mathfrak{R}$ aus den eigentlich n-fach linearen und den Gesetzen niedrigerer Dimension hergeleitet werden kann.

Liegt in $\mathfrak{R}$ das uneigentlich n-fach lineare Gesetz $L(x_1, x_2, \ldots, x_n) = 0$ vor, so kann weiter, nach etwaiger Permutation der Unbestimmten, ohne Beschränkung der Gültigkeit des Verfahrens, vorausgesetzt werden, daß für die partiellen Ableitungen von $L(x)$ die nachstehenden Bedingungen erfüllt sind:

$$\frac{\partial L(x)}{\partial x_1} \equiv \frac{\partial L(x)}{\partial x_2} \equiv \cdots \equiv \frac{\partial L(x)}{\partial x_\nu} \equiv 0; \quad \frac{\partial L(x)}{\partial x_{\nu+1}} \not\equiv 0; \quad \frac{\partial L(x)}{\partial x_{\nu+2}} \not\equiv 0; \cdots; \quad \frac{\partial L(x)}{\partial x_n} \not\equiv 0.$$

Dann gelten neben $L(x) = 0$ in $\mathfrak{R}$ auch die beiden Gesetze

$$\frac{\partial L(x)}{\partial x_{\nu+1}} = 0; \quad \frac{\partial L(x)}{\partial x_{\nu+1}} \cdot x_{\nu+1} = 0,$$

also auch das Gesetz

$$G(x) \equiv G(x_1, x_2, \ldots, x_n) \equiv L(x) - \frac{\partial L(x)}{\partial x_{\nu+1}} \cdot x_{\nu+1} = 0.$$

Ist dabei $G(x)$ die Nullform, so ist

$$L(x) \equiv \frac{\partial L(x)}{\partial x_{\nu+1}} \cdot x_{\nu+1},$$

also das Gesetz $L(x) = 0$ aus dem $(n-1)$-fach linearen, in $\mathfrak{R}$ gültigen Gesetz $\frac{\partial L(x)}{\partial x_{\nu+1}} = 0$ herleitbar. Ist aber $G(x)$ nicht die Nullform, so gelten in $\mathfrak{R}$ die Gesetze

$$G(x) = 0; \quad \frac{\partial L(x)}{\partial x_{\nu+1}} = 0,$$

aus denen wiederum das Gesetz $L(x) \equiv G(x) + \frac{\partial L(x)}{\partial x_{\nu+1}} \cdot x_{\nu+1} = 0$ hergeleitet werden kann. Für die Ableitungen $\frac{\partial G(x)}{\partial x_\lambda}$ mit $\lambda = 1, 2, \ldots, \nu$ findet man

$$\frac{\partial G(x)}{\partial x_\lambda} \equiv \frac{\partial L(x)}{\partial x_\lambda} - \frac{\partial^2 L(x)}{\partial x_{\nu+1} \partial x_\lambda} \cdot x_{\nu+1} \equiv 0,$$

ferner ist

$$\frac{\partial G(x)}{\partial x_{\nu+1}} \equiv \frac{\partial L(x)}{\partial x_{\nu+1}} - \frac{\partial^2 L(x)}{\partial x_{\nu+1}^2} \cdot x_{\nu+1} - \frac{\partial L(x)}{\partial x_{\nu+1}} \cdot e \equiv 0,$$

so daß die Form $G(x)$ gewiß die Bedingungen

$$\frac{\partial G(x)}{\partial x_1} \equiv \frac{\partial G(x)}{\partial x_2} \equiv \cdots \equiv \frac{\partial G(x)}{\partial x_\nu} \equiv \frac{\partial G(x)}{\partial x_{\nu+1}} \equiv 0$$

erfüllt. Durch Fortführung dieses Verfahrens erhält man demnach nach höchstens n Schritten ein eigentlich n-fach lineares Gesetz, aus dem mit Hilfe von Gesetzen niedrigerer Dimension das ursprüngliche Gesetz $L(x) = 0$ wieder hergeleitet werden kann.

Als Regeln für die Bildung eigentlich mehrfach linearer Gesetze höherer Dimension können hier aufgestellt werden:

1. Ist $L(x_1, x_2, \ldots, x_n) = 0$ ein im Ringe $\mathfrak{R}$ geltendes eigentlich n-fach lineares Gesetz, so gelten in $\mathfrak{R}$ auch die eigentlich $(n+1)$-fach linearen Gesetze

$$L_1(x_1, x_2, \ldots, x_{n+1}) \equiv L(x_1, x_2, \ldots, x_n) \cdot x_{n+1} - x_{n+1} \cdot L(x_1, x_2, \ldots, x_n) = 0,$$

$$L_2(x_1, x_2, \ldots, x_{n+1}) \equiv L(x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}, x_n x_{n+1} - x_{n+1} x_n) = 0.$$

2. Ist $L_1(x_1, x_2, \ldots, x_n) = 0$ ein im Ringe $\mathfrak{R}$ gültiges eigentlich n-fach lineares Gesetz, ferner $L_2(x_{n+1}, x_{n+2}, \ldots, x_{n+m})$ eine beliebige eigentlich n-fach lineare Form in den Unbestimmten $x_{n+1}, x_{n+2}, \ldots, x_{n+m}$, so gelten in $\mathfrak{R}$ auch die beiden eigentlich $(n+m)$-fach linearen Gesetze

$$L_1(x_1, x_2, \ldots, x_n) L_2(x_{n+1}, x_{n+2}, \ldots, x_{n+m}) = 0,$$

$$L_2(x_{n+1}, x_{n+2}, \ldots, x_{n+m}) L_1(x_1, x_2, \ldots, x_n) = 0,$$

sowie das eigentlich $(n+m-1)$-fach lineare Gesetz

$$L_1(L_2(x_{n+1}, x_{n+2}, \ldots, x_{n+m}), x_2, \ldots, x_n) = 0.$$

Entsprechende, auf diese Verfahren sich stützende Überlegungen wie die, die zu den Sätzen 7 und 8 führten, ergeben hier die nachstehenden Sätze:

Satz 10. *Für jeden Ring $\mathfrak{R}$ k-ter Stufe mit Einheit e läßt sich eine Kette*

$$L_k(x) = 0, \; L_{k+1}(x), \ldots, \; L_n(x) = 0, \ldots$$

mehrfach linearer Gesetze angeben mit folgenden Eigenschaften:

1. *Jedes Glied $L_n(x) = 0$ der Kette ist eigentlich n-fach linear.*
2. *Jedes in $\mathfrak{R}$ gültige Gesetz ist aus den Gesetzen der Kette herleitbar.*

Satz 11. *Für jeden Ring $\mathfrak{R}$ k-ter Stufe mit Einheit e läßt sich eine reduzierte Kette*

$$L_k(x) = 0, \; L_{k_1}(x) = 0, \ldots, \; L_{k_n}(x) = 0, \ldots$$

mehrfach linearer Gesetze der durch die Indizes

$$k < k_1 < \cdots < k_n < \cdots$$

bezeichneten Dimensionen angeben mit folgenden Eigenschaften:

1. *Jedes Glied $L_{k_n}(x) = 0$ der Kette ist eigentlich n-fach linear.*
2. *Kein Gesetz des Moduls $\mathfrak{M}(L_{k_n}(x))$ ist aus den Gesetzen niedrigerer Dimension herleitbar.*
3. *Jedes in $\mathfrak{R}$ gültige Gesetz ist aus den Gesetzen der Kette herleitbar.*

Auch in diesem Falle habe ich nicht entscheiden können, ob es Ringe k-ter Stufe mit unendlich langer, reduzierter Kette aus eigentlich mehrfach linearen Gesetzen gibt oder ob jede reduzierte Kette eines Ringes im Endlichen abbricht.

Sehr leicht zu beweisen ist dagegen die folgende interessante Bemerkung:

Satz 12. *Besitzt ein Ring $\mathfrak{R}$ mit Einheit e eine im Endlichen abbrechende reduzierte Kette*

$$L_k(x) = 0, \quad L_{k_1}(x) = 0, \ldots, \quad L_{k_n}(x) = 0$$

mehrfach linearer Gesetze, so gibt es ein Fundamentalgesetz $G(x) = 0$ (der Dimension k_n), aus dem sämtliche in $\mathfrak{R}$ geltenden Gesetze hergeleitet werden können.

Der Beweis beruht auf der Tatsache, daß für Ringe mit Einheit e die Gesetze

$$L(x_1, x_2, \ldots, x_n) = 0 \quad \text{und} \quad L(x_1, x_2, \ldots, x_n)\, x_{n+1} = 0$$

völlig gleichwertig sind, so daß alle Gesetze der reduzierten Kette auch durch höherdimensionale Gesetze ersetzt werden können. Ersetzt man sie demgemäß durch k_n-fach lineare Gesetze, so lassen sich diese Gesetze gleicher Dimension nach früherem durch ein einziges ersetzen.

V.

Für die Aufstellung der in einem Ring $\mathfrak{R}$ mit Einheit e geltenden Gesetze ist nach Satz 9 die Kenntnis der eigentlich n-fach linearen Gesetze von besonderer Bedeutung, andererseits aber auch völlig ausreichend.

Wie bereits gezeigt wurde, bildet die Menge der eigentlich n-fach linearen Formen einen symmetrischen Modul Γ_n^*, also einen Teilmodul des symmetrischen Moduls Γ_n aller n-fach linearen Formen. Eine eingehende Untersuchung des Moduls Γ_n^* soll den Inhalt der letzten beiden Abschnitte ausmachen.

Ich beginne mit der Angabe der linearen Bedingungen für die Koeffizienten einer eigentlich n-fach linearen Form, die sich bei Einführung der (als Zykeln dargestellten) speziellen Permutationen

$$V_1 = (1), \quad V_2 = (12), \quad V_3 = (123), \ldots, \quad V_n = (123 \ldots n)$$

in einfacher Gestalt zusammenfassen lassen:

Satz 13. *Eine n-fach lineare Form*

$$L(x) = \sum_P \gamma_P x^P$$

ist dann und nur dann eigentlich n-fach linear, wenn für alle Permutationen P die linearen Beziehungen

$$\sum_{\nu=1}^{n} \gamma_{V_\nu P} = 0 \tag{6}$$

erfüllt sind.

Für den Gang des Beweises bezeichne ich die Inverse V_ν^{-1} auch mit U_ν (für $\nu = 1, 2, \ldots, n$). Ferner setze ich aus Zweckgründen $\gamma_P = \gamma(P)$.

Die vorgegebene Form $L(x)$ kann auch in der Gestalt

$$L(x) = \sum_{\nu=1}^{n} \sum_{R} \gamma(U_n^\nu R)\, x^{U_n^\nu R}$$

dargestellt werden, wenn R alle Permutationen durchläuft, die die Ziffer n festlassen. Die Ableitung $\frac{\partial L(x)}{\partial x_\lambda}$ der Form $L(x)$ wird dann

$$\frac{\partial L(x)}{\partial x_\lambda} = \sum_{\nu} \sum_{R} \gamma(U_n^\nu R) \frac{\partial x^{U_n^\nu R}}{\partial x_\lambda}.$$

Um ihre Gestalt genauer angeben zu können, kommt es daher darauf an festzustellen, in welche Potenzprodukte die Produkte $x^{U_n^\nu R}$ bei partieller Ableitung nach der Unbestimmten x_λ, also bei der Substitution $x_\lambda \to e$ übergehen, wobei es ausreichen wird, den Fall $\lambda = n$ allein zu betrachten.

Nun gilt, wie man leicht nachrechnet,

$$U_n^\nu = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \cdots & \nu & \nu+1 & \cdots & n-1 & n \\ n-\nu+1 & n-\nu+2 & \cdots & n & 1 & \cdots & n-\nu-1 & n-\nu \end{pmatrix},$$

also bei

$$R = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \cdots & n-1 & n \\ \alpha_1 & \alpha_2 & \cdots & \alpha_{n-1} & n \end{pmatrix}$$

offenbar

$$U_n^\nu R = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \cdots & \nu-1 & \nu & \nu+1 & \nu+2 & \cdots & n-1 & n \\ \alpha_{n-\nu+1} & \alpha_{n-\nu+2} & \cdots & \alpha_{n-1} & n & \alpha_1 & \alpha_2 & \cdots & \alpha_{n-\nu-1} & \alpha_{n-\nu} \end{pmatrix}$$

Mithin ist

$$x^{U_n^\nu R} = x_{\alpha_{n-\nu+1}} x_{\alpha_{n-\nu+2}} \cdots x_{\alpha_{n-1}} x_n x_{\alpha_1} x_{\alpha_2} \cdots x_{\alpha_{n-\nu-1}} x_{\alpha_{n-\nu}},$$

$$\frac{\partial x^{U_n^\nu R}}{\partial x_n} = x_{\alpha_{n-\nu+1}} x_{\alpha_{n-\nu+2}} \cdots x_{\alpha_{n-1}} x_{\alpha_1} x_{\alpha_2} \cdots x_{\alpha_{n-\nu-1}} x_{\alpha_{n-\nu}}.$$

Dieses Potenzprodukt aber entsteht aus dem Potenzprodukt $x_1 x_2 \ldots x_{n-1}$ durch Anwendung der Permutation

$$U_{n-1}^{\nu-1} R = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \cdots & \nu-1 & \nu & \nu+1 & \cdots & n-1 & n \\ \alpha_{n-\nu+1} & \alpha_{n-\nu+2} & \cdots & \alpha_{n-1} & \alpha_1 & \alpha_2 & \cdots & \alpha_{n-\nu} & n \end{pmatrix}.$$

Daher ist

$$\frac{\partial L(x)}{\partial x_n} \cdot x_n = \sum_{\nu} \sum_{R} \gamma(U_n^\nu R)\, x^{U_{n-1}^{\nu-1} R} = \sum_{R} \sum_{\nu} \gamma(U_n^\nu U_{n-1}^{-\nu+1} R)\, x^R.$$

Ist also, wie nun vorausgesetzt werden soll,

$$\frac{\partial L(x)}{\partial x_n} \equiv 0,$$

so gilt die lineare Beziehung

$$\sum_{\nu} \gamma(U_n^\nu U_{n-1}^{-\nu+1} R) = 0$$

für alle Permutationen R, die die Ziffer n festlassen. Umgekehrt folgt aus diesen Bedingungen für die Koeffizienten der Form $L(x)$ sogleich

$$\frac{\partial L(x)}{\partial x_n} \equiv 0$$

für die partielle Ableitung nach der Unbestimmten x_n.

Die weiteren Bedingungen für eine eigentlich n-fach lineare Form $L(x)$ erhält man aus der Tatsache, daß mit $L(x)$ auch jede Form $L^Q(x)$ eigentlich n-fach linear ist. Insbesondere gilt also $\frac{\partial L(x)}{\partial x_\lambda} \equiv 0$ für die partielle Ableitung von $L(x)$ nach der Unbestimmten x_λ dann und nur dann, wenn $\frac{\partial L^Q(x)}{\partial x_n} \equiv 0$ bei $Q = U_n^\lambda$ für die partielle Ableitung der Form $L^{U_n^\lambda}(x)$ nach der Unbestimmten x_n erfüllt ist. Nun gilt aber

$$L^{U_n^\lambda}(x) = \sum_P \gamma(P)\, x^{PU_n^\lambda} = \sum_S \gamma(SU_n^{-\lambda})\, x^S = \sum_S \gamma_\lambda(S)\, x^S .$$

Soll für diese Form die partielle Ableitung nach x_n die Nullform sein, müssen nach dem eben Gezeigten die linearen Beziehungen

$$\sum_\nu \gamma_\lambda(U_n^\nu U_{n-1}^{-\nu+1} R) = \sum_\nu \gamma(U_n^\nu U_{n-1}^{-\nu+1} R U_n^{-\lambda}) = 0$$

für alle Permutationen R bestehen, die die Ziffer n festlassen. Da indes $RU_n^{-\lambda}$ alle Permutationen durchläuft, wenn $\lambda = 1, 2, \ldots, n$ gesetzt wird, findet man die Bedingungen

$$\sum_\nu \gamma(U_n^\nu U_{n-1}^{-\nu+1} P) = 0$$

für alle Permutationen P. Durch die Gleichung

$$U_n^\nu U_{n-1}^{-\nu+1} = V_\nu U_n \tag{7}$$

gehen diese Gleichungen über in

$$\sum_\nu \gamma(V_\nu U_n P) = 0 \quad \text{oder} \quad \sum_\nu \gamma(V_\nu P) = 0$$

für alle Permutationen P in Übereinstimmung mit der Aussage des Satzes 13.

Die Gleichung (7) ist für $\nu = 1$ offenbar erfüllt. Durch vollständige Induktion findet man weiter

$$U_n^{\nu+1} U_{n-1}^{-\nu} = U_n (U_n^\nu U_{n-1}^{-\nu+1}) U_{n-1}^{-1} = U_n V_\nu U_n U_{n-1}^{-1} = V_{\nu+1} U_n ,$$

wie man unmittelbar nachrechnet.

Der Rang des Moduls Γ_n^* aller eigentlich n-fach linearen Formen wird durch den folgenden Satz angegeben:

Satz 14. *Der Rang R_n des Moduls Γ_n^* ist*

$$R_n = n!\left(1 - \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} - + \cdots + (-1)^n \cdot \frac{1}{n!}\right). \tag{8}$$

Für den Beweis benötige ich vorübergehend den Begriff des *linearen Moduls*: Darunter verstehe ich eine Menge n-fach linearer Formen, der mit zwei Formen $L_1(x)$, $L_2(x)$ bei beliebigen ganzzahligen Koeffizienten α_1, α_2 stets auch die Form $\alpha_1 L_1(x) + \alpha_2 L_2(x)$, mit einem Vielfachen $\alpha L(x)$ einer n-fach linearen Form $L(x)$ bei von 0 verschiedenem α stets auch die Form $L(x)$ selbst angehört.

Für jedes ν der Reihe $\nu = 1, 2, \ldots, n$ bezeichne Λ_ν die Menge aller n-fach linearen Formen $L(x)$, deren partiellen Ableitungen nach den ersten ν Unbestimmten $x_1, x_2, \ldots, x_\nu$ Null sind:

$$\frac{\partial L(x)}{\partial x_1} \equiv \frac{\partial L(x)}{\partial x_2} \equiv \cdots \equiv \frac{\partial L(x)}{\partial x_\nu} \equiv 0 .$$

Insbesondere ist Λ_n die Menge aller eigentlich n-fach linearen Formen. Weiter sei Λ_0 die Menge aller n-fach linearen Formen.

Alle Mengen Λ_ν für $\nu = 1, 2, \ldots, n$ sind lineare Moduln, besitzen daher einen linearen Rang $R_\nu(n)$. Die Zahl $R_n = R_n(n)$ soll bestimmt werden, der Rang $R_0(n)$ des Moduls Λ_0 ist $R_0(n) = n!$.

Nun sei $L(x)$ eine Form aus Λ_ν für irgend ein festes ν, es sei also

$$\frac{\partial L(x)}{\partial x_1} \equiv \frac{\partial L(x)}{\partial x_2} \equiv \cdots \equiv \frac{\partial L(x)}{\partial x_\nu} \equiv 0 .$$

Bildet man noch die partielle Ableitung $\frac{\partial L(x)}{\partial x_{\nu+1}}$ und setzt

$$L(x) = x_{\nu+1} \frac{\partial L(x)}{\partial x_{\nu+1}} + F(x) ,$$

so gelten für die Formen $\frac{\partial L(x)}{\partial x_{\nu+1}}$ und $F(x)$, da $L(x)$ zu Λ_ν gehört:

$$(9) \qquad \frac{\partial^2 L(x)}{\partial x_{\nu+1} \partial x_1} \equiv \frac{\partial^2 L(x)}{\partial x_{\nu+1} \partial x_2} \equiv \cdots \equiv \frac{\partial^2 L(x)}{\partial x_{\nu+1} \partial x_\nu} \equiv 0 ,$$

$$(10) \qquad \frac{\partial F(x)}{\partial x_1} \equiv \frac{\partial F(x)}{\partial x_2} \equiv \cdots \equiv \frac{\partial F(x)}{\partial x_\nu} \equiv \frac{\partial F(x)}{\partial x_{\nu+1}} \equiv 0 .$$

Mithin ist $F(x)$ eine Form aus $\Lambda_{\nu+1}$.

Die Darstellung der Form $L(x)$ aus Λ_ν in der Gestalt

$$L(x) = x_{\nu+1} \frac{\partial L(x)}{\partial x_{\nu+1}} + F(x)$$

mit einer Form $F(x)$ aus $\Lambda_{\nu+1}$ ist dabei eindeutig. Denn wäre etwa auch

$$L(x) = x_{\nu+1} G^*(x) + F^*(x)$$

mit einer Form $F^*(x)$ aus $\Lambda_{\nu+1}$, so würde folgen

$$x_{\nu+1} \left(\frac{\partial L(x)}{\partial x_{\nu+1}} - G^*(x) \right) + F(x) - F^*(x) \equiv 0$$

und daher durch die Substitution $x_{\nu+1} \to e$

$$\frac{\partial L(x)}{\partial x_{\nu+1}} - G^*(x) \equiv 0 ,$$

also auch

$$F(x) - F^*(x) \equiv 0 .$$

Der lineare Modul Λ_ν läßt sich demnach aufspannen durch den linearen Modul $\Lambda_{\nu+1}$ und den linearen Modul Λ_ν^* aller Formen der Gestalt $x_{\nu+1} \frac{\partial L(x)}{\partial x_{\nu+1}}$, die (9) erfüllen. Der Rang dieses Moduls Λ_ν^* ist offenbar $R_\nu(n-1)$.

Mithin erhält man die Beziehung

$$R_\nu(n) = R_\nu(n-1) + R_{\nu+1}(n) \qquad (\nu = 0, 1, 2, \ldots, n-1),$$

weshalb die Rangzahlen $R_\nu(n)$ sich aus den Werten $R_0(n)$ durch Differenzenbildung gewinnen lassen. Insbesondere findet man für $R_n = R_n(n)$ den Ausdruck

$$R_n = \sum_{\nu=0}^{n} (-1)^\nu \binom{n}{\nu} (n-\nu)! = n! \sum_{\nu=0}^{n} (-1)^\nu \frac{1}{\nu!} ,$$

wie in (8) angegeben worden war.

Beispielsweise ist

$$R_2 = 1, \quad R_3 = 2, \quad R_4 = 9, \quad R_5 = 44, \quad R_6 = 265, \quad R_7 = 1854.$$

Der Rang R_n des Moduls Γ_n^* stimmt übrigens überein mit der Anzahl der *echten* Permutationen in n Ziffern, d. h. der Permutationen, die keine Ziffer ungeändert lassen. Die Ursache dieser Übereinstimmung werden die weiteren Betrachtungen erkennen lassen.

VI.

Über die Gestalt der eigentlich n-fach linearen Formen können nähere Angaben gemacht werden, vor allem aber läßt sich eine linear unabhängige Basis für den Modul Γ_n^* aufstellen, die aus Formen sehr einfachen Aufbaus besteht. Zur bequemeren Darstellung dieser Formen empfiehlt es sich, die *höheren Kommutatoren* einzuführen: Ist

$$x_{\alpha_1}, x_{\alpha_2}, \ldots, x_{\alpha_n}$$

eine beliebige Anordnung der Unbestimmten $x_1, x_2, \ldots, x_n$, so werde

$$[x_{\alpha_1}, x_{\alpha_2}] = x_{\alpha_1} x_{\alpha_2} - x_{\alpha_2} x_{\alpha_1}$$

und weiter für $2 \leqq r \leqq n$

$$(11) \quad [x_{\alpha_1}, x_{\alpha_2}, \ldots, x_{\alpha_r}] = [x_{\alpha_1}, x_{\alpha_2}, \ldots, x_{\alpha_{r-1}}] x_{\alpha_r} - x_{\alpha_r} [x_{\alpha_1}, x_{\alpha_2}, \ldots, x_{\alpha_{r-1}}]$$

gesetzt. Offenbar verschwindet jeder dieser Ausdrücke, wenn irgendeine in ihnen vorkommende Unbestimmte durch die Einheit des Ringes ersetzt wird. Daher ist auch jedes für irgendeine Zerlegung

$$n = n_1 + n_2 + \cdots + n_s \qquad (n_\sigma \geqq 2;\ \sigma = 1, 2, \ldots, s)$$

gebildete *Kommutatorprodukt*

$$(12) \qquad K_{n_1 n_2 \dots n_s}(x_{\alpha_1}, x_{\alpha_2}, \dots, x_{\alpha_n})$$
$$= [x_{\alpha_1}, x_{\alpha_2}, \dots, x_{\alpha_{n_1}}][x_{\alpha_{n_1+1}}, x_{\alpha_{n_1+2}}, \dots, x_{\alpha_{n_1+n_2}}] \dots [x_{\alpha_{n-n_s+1}}, x_{\alpha_{n-n_s+2}}, \dots, x_{\alpha_n}]$$

eine eigentlich n-fach lineare Form.

Unter den möglichen Kommutatorprodukten werde nun eine Anzahl ausgezeichnet, die als *normierte Kommutatorprodukte* bezeichnet werden sollen:

Ein Kommutatorprodukt der Gestalt (12) heißt normiert, wenn es die folgenden Bedingungen erfüllt:

1. Die Kommutatorlängen $n_1, n_2, \dots, n_s$ sind der Größe nach geordnet:

$$n_1 \geqq n_2 \geqq \dots \geqq n_s \geqq 2.$$

2. Die erste Unbestimmte jedes Kommutators besitzt den kleinsten Index unter allen in ihm vorkommenden Unbestimmten.

3. Kommutatoren gleicher Länge stehen in der Reihenfolge, daß die Indizes der jeweils ersten Unbestimmten der Größe nach zunehmen.

Als Beispiel gebe ich die normierten Kommutatorprodukte in 4 Unbestimmten an. Für die Zerlegung $4 = 4$ findet man 6 normierte Kommutatorprodukte

$$[x_1, x_2, x_3, x_4], \quad [x_1, x_3, x_4, x_2], \quad [x_1, x_4, x_2, x_3],$$
$$[x_1, x_3, x_2, x_4], \quad [x_1, x_2, x_4, x_3], \quad [x_1, x_4, x_3, x_2],$$

da die Unbestimmte x_1 stets an erster Stelle stehen muß, während die weiteren Unbestimmten keinen Bedingungen unterliegen. Für die Zerlegung $4 = 2 + 2$ findet man 3 normierte Kommutatorprodukte

$$[x_1, x_2]\,[x_3, x_4], \quad [x_1, x_3]\,[x_2, x_4], \quad [x_1, x_4]\,[x_2, x_3],$$

da auch hier die Unbestimmte x_1 im ersten Kommutator stets an erster Stelle stehen muß, während der Index der im zweiten Kommutator an erster Stelle stehenden Unbestimmten stets kleiner als der Index der an zweiter Stelle stehenden Unbestimmten sein muß.

Unter diesen Festsetzungen und Bezeichnungen gilt der

Satz 15. *Die normierten Kommutatorprodukte in n Unbestimmten $x_1, x_2, \dots, x_n$ bilden eine linear unabhängige Basis des symmetrischen Moduls Γ_n^* aller eigentlich n-fach linearen Formen.*

Um den Beweis dieses Satzes durchsichtiger zu gestalten, will ich ihn in folgenden drei Schritten durchführen:

1. Die Anzahl der normierten Kommutatorprodukte ist gleich dem Rang des Moduls Γ_n^*, also gleich der Anzahl der echten Permutationen.

2. Jede eigentlich n-fach lineare Form läßt sich als lineare Verbindung von Kommutatorprodukten mit ganzzahligen Koeffizienten darstellen.

3. Jedes Kommutatorprodukt läßt sich als lineare Verbindung von normierten Kommutatorprodukten mit ganzzahligen Koeffizienten darstellen.

Erster Schritt: Jede Permutation P läßt sich bekanntlich in ziffernfremde Zykeln zerlegen:

$$(13)\quad P = (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{n_1})(\alpha_{n_1+1}, \alpha_{n_1+2}, \ldots, \alpha_{n_1+n_2}) \ldots (\alpha_{n-n_s+1}, \alpha_{n-n_s+2}, \ldots, \alpha_n).$$

Diese Darstellung ist nicht eindeutig, läßt sich indes durch die folgenden Bedingungen normieren:

a) Die Zykellängen $n_1, n_2, \ldots, n_s$ seien der Größe nach geordnet:

$$n_1 \geqq n_2 \geqq \ldots \geqq n_s \qquad (n_1 + n_2 + \cdots + n_s = n)$$

b) Die Anfangsziffer jedes Zyklus sei die kleinste im Zyklus vorkommende Ziffer.

c) Die Zykeln gleicher Länge seien derart angeordnet, daß ihre Anfangsziffern der Größe nach zunehmen.

Eine nach diesen Bedingungen geordnete Zykelndarstellung einer Permutation ist vollständig eindeutig. Dabei gilt für eine echte Permutation insbesondere

$$n_1 \geqq n_2 \geqq \ldots \geqq n_s \geqq 2.$$

Damit erkennt man aber, daß diese Normierungsbedingungen für die Zykelndarstellung einer echten Permutation völlig den oben angegebenen Normierungsbedingungen der normierten Kommutatorprodukte entsprechen. Mithin ist jeder echten Permutation P in der Darstellung (13) umkehrbar eindeutig ein normiertes Kommutatorprodukt (12) zugeordnet. Also stimmt auch die Anzahl der normierten Kommutatorprodukte mit der Anzahl der echten Permutationen, also auch mit dem Rang R_n des Moduls Γ_n^* überein.

Zweiter Schritt: Der Beweis für die Behauptung, daß jede eigentlich n-fach lineare Form als lineare Verbindung von Kommutatorprodukten dargestellt werden kann, gründet sich auf die Gleichung

$$x_1 x_2 \ldots x_n =$$
$$[x_1, x_2]\, x_3 \ldots x_n + x_2 [x_1, x_3]\, x_4 \ldots x_n + \cdots + x_2 x_3 \ldots x_{n-1} [x_1, x_n] + x_2 x_3 \ldots x_n x_1,$$

die zeigt, auf welche Weise jeder Faktor eines Potenzproduktes unter Bildung von Kommutatoren auf die rechte Seite des Potenzproduktes gezogen werden kann. Mit ihrer Hilfe kann jede Form $L(x)$ als Summe

$$L(x_1, x_2, \ldots, x_n) \equiv F_1(x_1, x_2, \ldots, x_n) + F_2(x_2, x_3, \ldots, x_n) \cdot x_1$$

dargestellt werden, wobei $F_1(x)$ die Unbestimmte x_1 nur noch in Kommutatoren $[x_1, x_\nu]$ enthält. Daher ist

$$\frac{\partial F_1(x)}{\partial x_1} \equiv 0,$$

so daß

$$\frac{\partial L(x)}{\partial x_1} \equiv F_2(x_2, x_3, \ldots, x_n)$$

folgt. Ist demnach $L(x)$ eigentlich n-fach linear, so ist $\frac{\partial L(x)}{\partial x_1} \equiv 0$ und weiter

$$L(x_1, x_2, \ldots, x_n) \equiv F_1(x_1, x_2, \ldots, x_n).$$

Wendet man das gleiche Verfahren auf die Unbestimmte x_2 an, so erhält man wiederum unter Beachtung der Gleichung

$$[x_1, x_\nu, x_2] \equiv [x_1, x_\nu] x_2 - x_2 [x_1, x_\nu]$$

eine Darstellung der Form $L(x)$ in der Gestalt

$$L(x_1, x_2, \ldots, x_n) \equiv G_1(x_1, x_2, \ldots, x_n) + G_2(x_1, x_3, \ldots, x_n) x_2,$$

wobei aber in $G_1(x)$ die beiden Unbestimmten x_1, x_2 nur noch in Kommutatoren auftreten. Mithin ist auch hier, falls $L(x)$ eigentlich n-fach linear ist,

$$\frac{\partial L(x)}{\partial x_2} \equiv G_2(x_1, x_3, \ldots, x_n) \equiv 0,$$

also

$$L(x_1, x_2, \ldots, x_n) \equiv G_1(x_1, x_3, \ldots, x_n).$$

Damit ist das Verfahren wohl hinreichend genau geschildert. Nach höchstens n Schritten erhält man eine Darstellung von $L(x)$ als lineare Verbindung von Kommutatorprodukten, falls $L(x)$ eigentlich n-fach linear ist.

Dritter Schritt: Der Schluß des Beweisganges stützt sich auf eine Kommutatorbeziehung, die den Kommutator von Kommutatoren als lineare Verbindung von Kommutatoren darstellt. Sind

$$y_1, y_2, \ldots, y_r; \quad z_1, z_2, \ldots, z_s$$

zwei Reihen von Unbestimmten, so schreibe man bei beliebigen Permutationen

$$R = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \cdots & r \\ \alpha_1 & \alpha_2 & & \alpha_r \end{pmatrix}; \quad S = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \cdots & s \\ \beta_1 & \beta_2 & & \beta_s \end{pmatrix}$$

für die Kommutatoren zur Abkürzung

$$[y^R] = [y_{\alpha_1}, y_{\alpha_2}, \ldots, y_{\alpha_r}]; \quad [y^R, z^S] = [y_{\alpha_1}, y_{\alpha_2}, \ldots, y_{\alpha_r}, z_{\beta_1}, z_{\beta_2}, \ldots, z_{\beta_s}].$$

Dann gilt der

Satz 16. *Ist der Kommutator* $[z] = [z_1, z_2, \ldots, z_s]$ *nach Potenzprodukten entwickelt*

$$[z] = \sum_S \gamma_S z^S,$$

worin über alle Permutationen S *in* s *Ziffern* $1, 2, \ldots, s$ *zu summieren ist, so gilt die Kommutatorbeziehung*

$$[[y], [z]] = [y][z] - [z][y] = \sum_S \gamma_S [y, z^S]. \tag{14}$$

Der Beweis dieses Satzes benötigt ein doppeltes Induktionsverfahren: Zunächst gilt für $r = s = 2$

$$\begin{aligned}
&[y_1, y_2]\,[z_1, z_2] - [z_1, z_2]\,[y_1, y_2] \\
&= [y_1, y_2]\,z_1 z_2 - [y_1, y_2]\,z_2 z_1 - z_1 z_2 [y_1, y_2] + z_2 z_1 [y_1, y_2] \\
&= [y_1, y_2]\,z_1 z_2 - z_1 [y_1, y_2]\,z_2 - z_2 [y_1, y_2]\,z_1 + z_2 z_1 [y_1, y_2] \\
&\qquad - [y_1, y_2]\,z_2 z_1 + z_2 [y_1, y_2]\,z_1 + z_1 [y_1, y_2]\,z_2 - z_1 z_2 [y_1, y_2] \\
&= [y_1, y_2, z_1, z_2] - [y_1, y_2, z_2, z_1] .
\end{aligned}$$

Daher kann die Formel (14) für festes r und $s = 2$ als bewiesen angenommen werden. Dann ist

$$\begin{aligned}
&[x_2, x_3, \ldots, x_{r+1}]\,[z_1, z_2] - [z_1, z_2]\,[x_2, x_3, \ldots, x_{r+1}] \\
&= [x_2, x_3, \ldots, x_{r+1}, z_1, z_2] - [x_2, x_3, \ldots, x_{r+1}, z_2, z_1]
\end{aligned}$$

eine formale Identität in den Unbestimmten $x_2, x_3, \ldots, x_{r+1}, z_1, z_2$, weshalb sie auch gilt für die Substitution

$$x_2 = [y_1, y_2],\ x_3 = y_3, \ldots, x_{r+1} = y_{r+1},$$

woraus sogleich wegen

$$[[y_1, y_2], y_3, \ldots, y_{r+1}] = [y_1, y_2, \ldots, y_{r+1}]$$

die Formel (14) für $r+1$ und $s = 2$ folgt. Damit ist (14) bewiesen für beliebiges r bei $s = 2$.

Demnach kann im Weiteren die Gültigkeit von (14) bei beliebigem r und festem s als bekannt vorausgesetzt werden, so daß hieraus nur noch ihre Gültigkeit für r und $s+1$ bewiesen werden muß. Nun gilt für den Kommutator $[z]$ die Gleichung

$$[z_1, z_2, \ldots, z_s, z_{s+1}] = [z]\,z_{s+1} - z_{s+1}[z] ,$$

weshalb die zu beweisende Identität auch in der Gestalt

$$[y]\,[z, z_{s+1}] - [z, z_{s+1}]\,[y] = \sum_S \gamma_S ([y, z^S, z_{s+1}] - [y, z_{s+1}, z^S])$$

mit den früheren Bezeichnungen geschrieben werden kann. Für den linksstehenden Ausdruck erhält man zunächst

$$\begin{aligned}
&[y]\,[z, z_{s+1}] - [z, z_{s+1}]\,[y] \\
&= [y]\,[z]\,z_{s+1} - [y]\,z_{s+1}[z] - [z]\,z_{s+1}[y] + z_{s+1}[z]\,[y] \\
&= ([y]\,[z] - [z]\,[y])\,z_{s+1} - z_{s+1}([y]\,[z] - [z]\,[y]) - ([y, z_{s+1}]\,[z] - [z]\,[y, z_{s+1}]) ,
\end{aligned}$$

also nach (14)

$$\begin{aligned}
[[y], [z, z_{s+1}]] &= \sum_S \gamma_S [y, z^S]\,z_{s+1} - \sum_S \gamma_S z_{s+1} [y, z^S] - \sum_S \gamma_S [y, z_{s+1}, z^S] \\
&= \sum_S \gamma_S ([y, z^S, z_{s+1}] - [y, z_{s+1}, z^S]) ,
\end{aligned}$$

wie zu zeigen war.

Aus dem Satz 16 ergibt sich nun sehr rasch der Beweis der Behauptung, daß jedes Kommutatorprodukt als lineare Verbindung der normierten Kommutatorprodukte dargestellt werden kann.

Zunächst weise ich nach, daß die $(n-1)!$ Kommutatoren der Gestalt

$$[x_1, x_{\alpha_1}, x_{\alpha_2}, \ldots, x_{\alpha_n}]$$

linear unabhängig sind, und jeder andere Kommutator der Länge n sich durch diese linear darstellen läßt. Die lineare Unabhängigkeit folgt unmittelbar aus der Tatsache, daß

$$[x_1, x_{\alpha_1}, x_{\alpha_2}, \ldots, x_{\alpha_n}] = x_1 x_{\alpha_1} x_{\alpha_2} \ldots x_{\alpha_n} + F(x)$$

gilt mit einer Form $F(x)$, in der nur solche Potenzprodukte auftreten, bei denen die Unbestimmte x_1 nicht an erster Stelle steht, die $(n-1)!$ Potenzprodukte $x_1 x_{\alpha_1} x_{\alpha_2} \ldots x_{\alpha_n}$ aber linear unabhängig sind.

Für $n = 2$ gilt

$$[x_2, x_1] = -[x_1, x_2].$$

Ist daher $K_n = [x_{\beta_1}, x_{\beta_2}, \ldots, x_{\beta_n}]$ ein beliebiger Kommutator, in dem x_{β_n} von x_1 verschieden ist, so folgt durch vollständige Induktion

$$\begin{aligned} K_n &= [x_{\beta_1}, x_{\beta_2}, \ldots, x_{\beta_{n-1}}] x_{\beta_n} - x_{\beta_n} [x_{\beta_1}, x_{\beta_2}, \ldots, x_{\beta_{n-1}}] \\ &= \sum_{(\alpha)} \gamma_\alpha ([x_1, x_{\alpha_1}, \ldots, x_{\alpha_{n-1}}] x_{\beta_n} - x_{\beta_n} [x_1, x_{\alpha_2}, \ldots, x_{\alpha_{n-1}}]) \\ &= \sum_{(\alpha)} \gamma_\alpha [x_1, x_{\alpha_2}, x_{\alpha_3}, \ldots, x_{\alpha_{n-1}}, x_{\beta_n}]. \end{aligned}$$

Mithin brauchen nur noch Kommutatoren der Gestalt

$$K_n = [x_{\beta_1}, x_{\beta_2}, \ldots, x_{\beta_{n-1}}, x_1]$$

behandelt zu werden. Für diese folgt aus (14) im Falle $n > 3$:

$$\begin{aligned} &[x_{\beta_1}, x_{\beta_2}, \ldots, x_{\beta_{n-2}}] [x_{\beta_{n-1}}, x_1] - [x_{\beta_{n-1}}, x_1] [x_{\beta_1}, x_{\beta_2}, \ldots, x_{\beta_{n-2}}] \\ &= [x_{\beta_1}, x_{\beta_2}, \ldots, x_{\beta_{n-1}}, x_1] - [x_{\beta_1}, x_{\beta_2}, \ldots, x_{\beta_{n-2}}, x_1, x_{\beta_{n-1}}], \end{aligned}$$

andererseits nach der gleichen Formel

$$[[x_{\beta_{n-1}}, x_1], [x_{\beta_1}, x_{\beta_2}, \ldots, x_{\beta_{n-2}}]] = \sum_S \gamma_S [x_{\beta_{n-1}}, x_1, x^S],$$

worin S alle Permutationen der Ziffern $\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_{n-2}$ durchläuft. Somit ist

$$[x_{\beta_1}, x_{\beta_2}, \ldots, x_{\beta_{n-1}}, x_1] = [x_{\beta_1}, x_{\beta_2}, \ldots, x_{\beta_{n-2}}, x_1, x_{\beta_{n-1}}] - \sum_S \gamma_S [x_{\beta_{n-1}}, x_1, x^S].$$

Für die auf der rechten Seite stehenden Kommutatoren, die sämtlich die Unbestimmte x_1 nicht mehr an letzter Stelle enthalten, ist die Behauptung bereits bewiesen.

Der noch verbleibende Fall $n = 3$ erledigt sich leicht mittels der bekannten Identität

$$[x_1, x_2, x_3] + [x_2, x_3, x_1] + [x_3, x_1, x_2] = 0.$$

Nunmehr kann als bewiesen angenommen werden, daß jedes Kommutatorprodukt aus weniger als s Kommutatoren sich als lineare Verbindung normierter Kommutatorprodukte darstellen läßt. Zur Vereinfachung der Schreibweise nenne ich Λ den durch die normierten Kommutatorprodukte aufgespannten linearen Modul. Ferner werde ein beliebiges Kommutatorprodukt

$$K_{n_1 n_2 \dots n_s}(x_{\beta_1}, x_{\beta_2}, \dots, x_{\beta_n}) = C_1 C_2 \dots C_s$$

gesetzt, worin C_σ einen Kommutator der Länge n_σ bezeichnet (für $\sigma = 1, 2, \dots, s$). Auf Grund der Formel (14) und der Induktionsannahme gilt dann

$$C_1 C_2 \dots C_s \equiv C_{\sigma_1} C_{\sigma_2} \dots C_{\sigma_s} (\Lambda)$$

für jede Permutation der Kommutatoren, da die Differenz

$$C_1 C_2 \dots C_s - C_{\sigma_1} C_{\sigma_2} \dots C_{\sigma_s}$$

nach (14) als lineare Verbindung von Kommutatorprodukten aus weniger als s Kommutatoren dargestellt werden kann. Daher darf für das Kommutatorprodukt

$$K_{n_1 n_2 \dots n_s}(x_{\beta_1}, x_{\beta_2}, \dots, x_{\beta_n})$$

angenommen werden, daß

$$n_1 \geqq n_2 \geqq \dots \geqq n_s$$

gilt und daß die etwa auftretenden Kommutatoren gleicher Länge bereits in der Reihenfolge stehen, die notwendig ist, damit die in ihnen vorkommenden Unbestimmten mit kleinstem Index bereits nach zunehmender Größe angeordnet sind. Nunmehr läßt sich jeder einzelne Kommutator C_σ als lineare Verbindung solcher Kommutatoren gleicher Länge in den gleichen Unbestimmten darstellen, die sämtlich die Unbestimmte mit dem kleinsten vorkommenden Index an erster Stelle enthalten. Damit wird aber

$$K_{n_1 n_2 \dots n_s}(x_{\beta_1}, x_{\beta_2}, \dots, x_{\beta_n}) = C_1 C_2 \dots C_s$$

als lineare Verbindung von Kommutatorprodukten erhalten, die die drei Bedingungen für die normierten Kommutatorprodukte erfüllen.

Mithin ist Satz 15 in allen seinen Teilen bewiesen.

(Eingegangen am 29. Juni 1949.)

Die Relation zwischen den drei quadratischen Fundamentalformen einer Fläche.

Herrn Oskar Perron zum 70. Geburtstag gewidmet.

Von

Heinrich Tietze in München.

Es handelt sich um die bekannte Relation der Flächentheorie

$$\text{III} - 2H\,\text{II} + K\,\text{I} = 0, \tag{1}$$

worin I, II, III die drei quadratischen Fundamentalformen einer Fläche des dreidimensionalen euklidischen Raumes bedeuten, ferner K das Krümmungsmaß und H die mittlere Krümmung. Für diese Relation (1) wird in § 2 ein Beweis gegeben, der abweicht von den Beweisen in den mir zugänglichen Werken, der also — wenn nicht neu — so doch weniger bekannt scheint. Der Beweis bedient sich des auf die charakteristische Gleichung einer Matrix bezüglichen Hamilton-Cayley-Frobenius'schen Satzes, dem wir in § 1 die nachher benötigte Gestalt geben.

§ 1.

Ist $Q = (q_i^k)$ eine quadratische Matrix $(i, k = 1, 2, \ldots, n)$ von n^2 Elementen, $J = (\delta_i^k)$ die Einheits-Matrix, O die Nullmatrix und $\varphi(\lambda)$ die charakteristische Funktion von Q:

$$\varphi(\lambda) = |Q - \lambda J| = |q_i^k - \lambda \delta_i^k| = \sum_{\nu=0}^{n} \gamma_{n-\nu} \lambda^\nu,$$

dann gilt dem erwähnten Satz [1]) gemäß die Gleichung

$$O = \varphi(Q) = \sum_{\nu=0}^{n} \gamma_{n-\nu} Q^\nu \tag{2}$$

(darin $Q^0 = J$). Sind nun $A = (a_{ik})$, $B = (b_{ik})$ zwei quadratische Matrizen von je n^2 Elementen, dabei die Determinante $|A| \neq 0$, so daß

[1]) Vgl. dazu auch „Verallgemeinerung eines Hamilton-Cayley-Frobenius'schen Satzes auf ein beliebiges Paar vertauschbarer Matrizen", Sitzungsberichte der Bayer. Akad. der Wiss., Mathemat. naturwiss. Abt., Jahrgang 1945/46 (1947), S. 45—56. [Dem Referat über diese Note in Math. Reviews, vol. 9, p. 406 von Herrn C. C. Mac Duffee entnehme ich übrigens, daß ein noch allgemeinerer Satz von H. B. Philipps, Am. J. Math. 41 (1919) gegeben worden sei (Zusatz bei der Korrektur)].

die zu A inverse Matrix $A^{-1} = (a^{ik})$ sich gemäß

$$\sum_h a_{ih}\, a^{hk} = \delta_i^k \tag{3}$$

bestimmen läßt, dann werde $Q = BA^{-1}$, also

$$q_i^k = \sum_h b_{ih}\, a^{hk} \tag{4}$$

genommen, und es ergibt sich aus (2) die Gleichung

$$O = \varphi(BA^{-1}) = \sum_{\nu=0}^{n} \gamma_{n-\nu}(BA^{-1})^\nu, \tag{5}$$

die wir in § 2 (für $n = 2$) verwenden werden. Dabei ist $\gamma_0 = (-1)^n$ und es sind $(-1)^{n-1}\gamma_1$, $(-1)^{n-2}\gamma_2$, $(-1)^{n-3}\gamma_3$, ... die symmetrischen Grundfunktionen der Wurzeln $\lambda', \lambda'', \ldots, \lambda^{(n)}$ der Gleichung $0 = \varphi(\lambda)$. Mit dieser Gleichung äquivalent ist, wegen

$$B - \lambda A = (Q - \lambda J)\, A$$

die Gleichung

$$0 = f(\lambda) = |B - \lambda A| = \varphi(\lambda) \cdot |A|, \tag{6}$$

so daß wir $\lambda', \lambda'', \ldots, \lambda^{(n)}$ auch als die Wurzeln der Gleichung (6) bezeichnen können.

§ 2.

Sei $n = 2$, seien ferner $u = u^1$, $v = u^2$ die Flächenparameter, $\mathfrak{x} = \mathfrak{x}(u^1, u^2)$ der Vektor vom Anfangspunkt zu einem Flächenpunkt, ξ derjenige zur Fläche normale Einheitsvektor, für den die Determinante der drei Vektoren $\left(\frac{\partial \mathfrak{x}}{\partial u^1}, \frac{\partial \mathfrak{x}}{\partial u^2}, \xi\right) > 0$ ausfällt, $a_{ik} = \frac{\partial \mathfrak{x}}{\partial u^i} \cdot \frac{\partial \mathfrak{x}}{\partial u^k}$, $b_{ik} = \frac{\partial^2 \mathfrak{x}}{\partial u^i \partial u^k} \cdot \xi$ somit

$$\mathrm{I} = \sum_{ik} a_{ik}\, du^i\, du^k = ds^2 \text{ und } \mathrm{II} = \sum_{ik} b_{ik}\, du^i\, du^k$$

die erste und die zweite Fundamentalform[2]). Unter Verwendung der Weingarten'schen Ableitungsformeln

$$\frac{\partial \xi}{\partial u^i} = -\sum_{hr} a^{rh} b_{hi} \frac{\partial \mathfrak{x}}{\partial u^r} \tag{7}$$

ergibt sich dann die dritte Fundamentalform

$$\mathrm{III} = \sum_{ik} c_{ik}\, du^i\, du^k,$$

[2]) In der klassischen Gauss'schen Schreibweise ist also $a_{11} = E$, $a_{12} = a_{21} = F$, $a_{22} = G$, während man für die b_{ik} häufig die Bezeichnungen $b_{11} = L$, $b_{12} = b_{21} = M$, $b_{22} = N$ antrifft.

— als erste Fundamentalform $\sum_{ik} \frac{\partial \xi}{\partial u} \frac{\partial \xi}{\partial u^k} du^i du^k = d\sigma^2$ des sphärischen Bildes $\xi = \xi(u^1, u^2)$ der Fläche, — gemäß

$$c_{ik} = \frac{\partial \xi}{\partial u^i} \frac{\partial \xi}{\partial u^k} = \sum_{hjrs} a^{rh} a^{sj} b_{hi} b_{jk} \frac{\partial x}{\partial u^r} \frac{\partial x}{\partial u^s}$$

$$= \sum_{hjrs} a^{rh} a^{sj} b_{hi} b_{jk} a_{rs} = \sum_{hj} b_{ih} a^{hj} b_{jk}$$

(wegen $a_{ik} = a_{ki}$ ist $a^{rh} = a^{hr}$ und gemäß (3) ist $\sum_{rs} a^{hr} a_{rs} a^{sj} = \sum_{s} \delta_s^h a^{sj} = a^{hj}$). Es ist also die Matrix

$$C = (c_{ik}) = BA^{-1}B.$$

Die Wurzeln λ', λ'' der Gleichung (6) sind nun in unserem Falle[3]) nichts anderes als die Hauptkrümmungen; es ist also

$$\gamma_1 = -(\lambda' + \lambda'') = -2H, \qquad \gamma_2 = \lambda' \lambda'' = K;$$

und aus Gleichung (5) für $n = 2$, das ist

$$BA^{-1}BA^{-1} - (\lambda' + \lambda'')\, BA^{-1} + \lambda' \lambda'' J = O.$$

wird, wenn wir von rechts mit A multiplizieren,

$$C - 2HB + KA = O$$

oder

$$c_{ik} - 2H b_{ik} + K a_{ik} = 0,$$

also die zu beweisende Relation (1).

[3]) In der Schreibweise der Anm. 2 lautet die Gleichung

$$\begin{vmatrix} L - \lambda E, & M - \lambda F \\ M - \lambda F, & N - \lambda G \end{vmatrix} = 0.$$

(Eingegangen am 29. Juli 1949.)

Due semplici limitazioni nel campo complesso delle funzioni associate ai polinomi di Tchebychef-Hermite e del termine complementare della loro rappresentazione asintotica.

Herrn Oskar Perron zum 70. Geburtstag am 7. Mai 1950 gewidmet.

Nota di

Giovanni Sansone a Firenze.

1. Le trascendenti intere [1])

$$f_n(x) = \pi^{-1/4}[2^n n!]^{-1/2}\, e^{-x^2/2} H_n(x) \tag{1}$$

associate ai polinomi di Tchebychef-Hermite

$$H_n(x) = e^{x^2} \frac{d^n e^{-x^2}}{dx^n}, \quad n = 1, 2, \ldots, \quad H_0 = 1 \tag{2}$$

formano un sistema ortogonale e normale nell'intervallo $(-\infty, \infty)$

$$\int_{-\infty}^{\infty} f_n(x) f_m(x)\, dx = 0, \quad n \neq m; \tag{3_1}$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} f_n^2(x)\, dx = 1, \tag{3_2}$$

e soddisfano l'equazione integrale di seconda specie di Volterra [2])

$$f_n(x) = f_n(0)\cos\left[\sqrt{2n+1}\; x\right] + f_n'(0)\frac{\operatorname{sen}\left[\sqrt{2n+1}\; x\right]}{\sqrt{2n+1}} - \frac{1}{\sqrt{2n+1}}\int_0^x \alpha^2 f_n(\alpha)\operatorname{sen}\left[\sqrt{2n+1}\;(\alpha - x)\right] d\alpha, \tag{4}$$

dove

$$f_{2n}(0) = \frac{(-1)^n}{\sqrt[4]{\pi}}\left[\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}\right]^{1/2}, \quad f_{2n}'(0) = 0, \tag{5_1}$$

$$f_{2n+1}(0) = 0, \quad f_{2n+1}'(0) = (-1)^{n+1}\frac{\sqrt{4n+2}}{\sqrt[4]{\pi}}\left[\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}\right]^{1/2}. \tag{5_2}$$

[1]) Cfr. a) E. Kamke: Differentialgleichungen. Lösungsmethoden und Lösungen. (2. Auflage, 1943), p. 401; b) G. Szegö: Orthogonal Polynomials, Am. Math. Soc. Colloquium Publications, 23 (New York, 1939), p. 102; c) G. Sansone: Sviluppi in serie di funzioni ortogonali (2ª ediz., Bologna, 1946), p. 293.

[2]) Cfr. U. Kowallik: Entwicklung einer willkürlichen Funktion nach Hermiteschen Orthogonalfunktionen. Math. Zeitschr., 31 (1930), (pp. 498—518), p. 502.

Dalla (4) supposto ad es. n pari, si ha per $f_{2n}(x)$ l'equazione

$$(6)\quad f_{2n}(x) = f_{2n}(0)\cos[N^{1/2}x] - N^{-1/2}\int_0^x \alpha^2 f_{2n}(\alpha)\,\mathrm{sen}\,[N^{1/2}(\alpha - x)]\,d\alpha,$$

$$N = 4n +$$

e tenuto conto che $|f_{2n}(0)| < 2^{3/4}\pi^{-1/2}N^{-1/4}$ e che per la disuguaglianza di Bunikowski-Schwarz e la (3_2) si ha

$$\left|\int_0^x \alpha^2 f_{2n}(\alpha)\,\mathrm{sen}\,[N^{1/2}(\alpha - x)]\,d\alpha\right| < \left[\int_0^x \alpha^4\,d\alpha\right]^{1/2}\left[\int_{-\infty}^{\infty} f_{2n}^2(\alpha)\,d\alpha\right]^{1/2} < |x|^{5/2}$$

ne risulta qualunque sia x reale

$$(7)\quad |f_{2n}(x)| \leqq \frac{1}{N^{1/4}}\left[\frac{2^{3/4}}{\sqrt{\pi}} + \frac{x^{5/2}}{N^{1/4}}\right].$$

Dalla (6) si ha

$$f'_{2n}(x) = -N^{1/2}f_{2n}(0)\,\mathrm{sen}\,[N^{1/2}x] + \int_0^x \alpha^2 f_{2n}(\alpha)\cos[N^{1/2}(\alpha - x)]\,d\alpha,$$

e perciò anche, qualunque sia x reale

$$(8)\quad |f'_{2n}(x)| \leqq N^{1/4}\left[\frac{2^{3/4}}{\sqrt{\pi}} + \frac{x^{5/2}}{N^{1/4}}\right].$$

Troveremo nel n. 2 una limitazione di $f_{2n}(x)$ nel campo complesso, che riesce assai utile quando si voglia applicare il metodo di J. V. Uspensky per la determinazione asintotica dei polinomi di Tchebychef-Laguerre [3]).

2. Sia $x = u + iv$, (u e v reali), e per fissare le ipotesi $v > 0$. Si ha

$$f_{2n}(u + iv) = f_{2n}(0)\cos[N^{1/2}(u + iv)] - \frac{1}{N^{1/2}}\int_0^u \alpha^2 f_{2n}(\alpha)\,\mathrm{sen}\,[N^{1/2}(\alpha - u - iv)]\,d\alpha$$

$$+ \frac{1}{N^{1/2}}\int_0^v (u + it)^2 f_{2n}(u + it)\,\mathrm{senh}\,[N^{1/2}(t - v)]\,dt.$$

dove il primo integrale è esteso al segmento $(0, u)$ dell'asse reale e il secondo al segmento $(0, v)$ dello stesso asse.

Posto

$$(9)\quad f_{2n}(u + jv) = \varphi(v),$$

$$(10)\quad f_{2n}(0)\cos[N^{1/2}(u + iv)] - \frac{1}{N^{1/2}}\int_0^u \alpha^2 f_{2n}(\alpha)\,\mathrm{sen}\,[N^{1/2}(\alpha - u - iv)]\,d\alpha$$

$$= \omega(v)$$

[3]) J. V. Uspensky: On the development of arbitrary functions in series of Hermite's and Laguerre's Polynomials. Ann. of Math (2), 28 (1927), pp. 593—619.

si ha

$$(11) \qquad \varphi(v) = \omega(v) - \frac{1}{N^{1/2}} \int_0^v (u+it)^2 \operatorname{senh}\left[N^{1/2}(v-t)\right] \varphi(t)\, dt$$

la quale è per $\varphi(v)$ un'equazione integrale di seconda specie di VOLTERRA col nucleo

$$K(v,t) = -\frac{1}{N^{1/2}} (u+it)^2 \operatorname{senh}\left[N^{1/2}(v-t)\right].$$

Risulta

$$|K(v,t)| \leqq \frac{1}{N^{1/2}} (u^2+t^2)\, e^{N^{1/2}(v-t)}, \quad 0 \leqq t \leqq v,$$

per il secondo nucleo iterato $K^{(2)}(v,t)$ si ha

$$|K^{(2)}(v,t)| \leqq \frac{1}{N} \int_t^v (u^2+\xi^2)\, e^{N^{1/2}(v-\xi)} (u^2+t^2)\, e^{N^{1/2}(\xi-t)}\, d\xi$$

$$\leqq \frac{1}{N} (u^2+t^2)(u^2+v^2)\, e^{N^{1/2}(v-t)} \frac{v-t}{1!},$$

e per induzione per il nucleo iterato $K^{(l)}(v,t)$ di rango l si ha

$$|K^{(l)}(v,t)| \leqq \frac{1}{N^{l/2}} (u^2+t^2)(u^2+v^2)^{l-1}\, e^{N^{1/2}(v-t)} \frac{(v-t)^{l-1}}{(l-1)!},$$

e si ottiene quindi per il nucleo risolvente $\Gamma(v,t)$ della (11) la limitazione

$$|\Gamma(v,t)| \leqq \frac{1}{N^{l/2}} (u^2+t^2)\, e^{N^{1/2}(v-t)+N^{-1/2}(u^2+v^2)(v-t)}.$$

Risulta

$$f_{2n}(u+iv) = \omega(v) + \int_0^v \Gamma(v,t)\, \omega(t)\, dt,$$

e poiché dalle (10), (7), (8) si ha

$$\omega(v) = \cosh\left[N^{1/2} v\right] f_{2n}(u) + i \frac{\operatorname{senh}\left[N^{1/2} v\right]}{N^{1/2}} f'_{2n}(u)$$

$$(12_1) \qquad \omega(v) \leqq \frac{e^{N^{1/2} v}}{N^{1/4}} A(u^{1/2}), \qquad (12_2) \qquad \boxed{A(u^{1/2}) = 2\left[\frac{2^{3/4}}{\sqrt{\pi}} + \frac{u^{5/2}}{N^{1/4}}\right]}$$

otteniamo

$$|f_{2n}(u+iv)| \leqq \frac{e^{N^{1/2} v}}{N^{1/4}} A(u^{1/2}) \left| 1 + \int_0^v \frac{u^2+v^2}{N^{1/2}} e^{N^{-1/2}(u^2+t^2)(v-t)}\, dt \right|$$

e infine per v reale qualunque

$$f_{2n}(u+iv) \leqq \frac{e^{N^{1/2} v}}{N^{1/4}} A(u^{1/2})\, e^{N^{-1/2}(u^2+t^2)\, v}.$$

Ragionando analogamente per il caso di n dispari otteniamo la cercata limitazione

$$(13)\qquad \boxed{|f_n(u+iv)| \leqq \frac{e^{N^{1/2}|v|}}{N^{1/4}} A(u^{1/2})\, e^{N^{-1/2}(u^2+v^2)|v|}, \qquad N = 2n+1}$$

dove $A(u^{1/2})$ è dato dalla (12_2)[4]).

3. a) Per l'applicazione del ricordato metodo di J. V. Uspensky nella valutazione asintotica dei polinomi di Tchebychef-Laguerre occorre limitare nel campo complesso il termine complementare della formula di approssimazione asintotica di $f_n(x)$.

Il nucleo $K(x, \alpha)$ della (6) ha l'espressione $-N^{-1/2}\alpha^2 \operatorname{sen}[N^{1/2}(\alpha - x)]$, e con procedimento di induzione si prova che il suo nucleo iterato di rango $l+1$, $K^{(l+1)}(x, \alpha)$ ha l'espressione

$$(14)\qquad K^{(l+1)}(x,\alpha) = \frac{\alpha^2}{N^{(l+1)/2}}\Big[(x-\alpha)\, Q^{(1)}_{3l-1}(x,\alpha)\cos[N^{1/2}(x-\alpha)] + Q^{(2)}_{3l}(x,\alpha)\operatorname{sen}[N^{1/2}(x-\alpha)]\Big]$$

dove $Q^{(1)}_{3l-1}(x, \alpha)$, $Q^{(2)}_{3l}(x, \alpha)$ indicano dei polinomi razionali interi nelle variabili (x, α) di grado rispettivo $3l-1$, $3l$, con coefficienti uniformemente limitati rispetto ad N.

Dalla (6) si ottiene

$$\frac{f_{2n}(x)}{f_{2n}(0)} = \cos[N^{1/2}x] + \int_0^x K(x,\alpha)\cos[N^{1/2}\alpha]\, d\alpha + \sum_{j=2}^{l}\int_0^x K^{(j)}(x,\alpha)\cos[N^{1/2}\alpha]\, d\alpha + \int_0^x K^{(l+1)}(x,\alpha)\, f_{2n}(\alpha)\, d\alpha.$$

ed osservato che

$$\int_0^x K(x,\alpha)\cos[N^{1/2}\alpha]\, d\alpha = \frac{x^3}{6N^{1/2}}\operatorname{sen}[N^{1/2}x] + \frac{1}{4N}\left\{x^2\cos[N^{1/2}x] - \frac{x\operatorname{sen}[N^{1/2}x]}{N^{1/2}}\right\}$$

[4]) H. Hille [A class of reciprocal functions. Ann. of Math. 27 (1925). (pp. 427—464). p. 431] applicando la formula della derivata n esima di Cauchy deduce dalla (2) la limitazione

$$|f_n(u+iv)| \leq \pi^{-1/4}(n!)^{1/2}[2^{1/2}R]^{-n}\, e^{-(u^2-v^2)/2 + R(u^2+v^2)^{1/2} + n/2}$$

ove

$$R = [(u^2+v^2+2n)^{1/2} - (u^2+v^2)^{1/2}]/2.$$

Per altre limitazioni del campo complesso cfr. N. Schwid: The asymptotic forms of the Hermite and Weber functions. Trans. of the Am. Math. Soc., 37 (1935), pp. 339—362.

otteniamo

$$(15)\qquad \boxed{f_{2n}(x) = f_{2n}(0)\cos[N^{1/2}x] + \frac{f_{2n}(0)}{N^{1/2}}\,\frac{x^3}{6}\,\operatorname{sen}[N^{1/2}x] + \frac{t(2n,x)}{N}}$$

$$(16)\qquad \boxed{t(2n,x) = \frac{1}{N^{1/4}}\left\{P^{(1)}_{3l+3}(x)\cos[N^{1/2}x] + P^{(2)}_{3l+3}(x)\operatorname{sen}[N^{1/2}x]\right\} + \frac{\bar t(2n,x)}{N^{(l+1)/2}}}$$

con

$$\bar t(2n,x) = N^{(l+1)/2}\int_0^x K^{(l+1)}(x,\alpha)\,f_{2n}(\alpha)\,d\alpha,$$

e $P^{(1)}_{3l+3}(x)$, $P^{(2)}_{3l+3}(x)$ *indicano dei polinomi in* x, *di grado* $3l+3$, *con coefficienti limitati rispetto ad* n.

Per $x = u + iv$ (u e v reali) si ha

$$\bar t(2n, u+iv) = N^{(l+1)/2}\left\{\int_0^u K^{(l+1)}(u+iv,\alpha)\,f_{2n}(\alpha)\,d\alpha + i\int_0^v K^{(l+1)}(u+iv,\,u+i\alpha)\,f_{2n}(u+i\alpha)\,d\alpha\right\},$$

dove i due integrali sono estesi ai segmenti dell'asse reale di estremi 0, u, e 0, v.

Tenuto conto delle (14) e (15) risulta

$$(17)\qquad \boxed{|\bar t(2n,\,u+iv)| \leqq \frac{e^{N^{1/2}|v|}}{N^{1/4}}\left[\sum_{r=0}^{6l+11} c_r\,(u^2+v^2)^{r/4}\right] e^{N^{-1/2}(u^2+v^2)\,|v|}}$$

con le c_r *costanti non negative, dipendenti unicamente da* l *e indipendenti da* n, e le (16) e (17) servono per limitare il termine complementare della (15).

Sostituendo la (15) nella (6) si ha per $t(2n,x)$ l'equazione

$$t(2n,x) = f_{2n}(0)\cos[N^{1/2}x]\left\{-\frac{x^6}{72} + \frac{5x^4}{48N} - \frac{15x^2}{48N^2} + \frac{x^2}{4}\right\} + f_{2n}(0)\,\frac{\operatorname{sen}[N^{1/2}x]}{N^{1/2}}\left\{\frac{x^5}{24} - \frac{5x^3}{24N} + \frac{15x}{48N^2} - \frac{x}{4}\right\} - \frac{1}{N^{1/2}}\int_0^x \alpha^2\,t(2n,\alpha)\operatorname{sen}[N^{1/2}(\alpha-x)]\,d\alpha,$$

e sostituendo in quest'ultima nel primo membro a $t(2n,x)$ l'espressi-

one ricavata dalla (16) si ottiene

$$(18) \qquad \boxed{\bar{t}(2n, x) = \bar{t}_1(2n, x)\cos[N^{1/2}x] + \bar{t}_2(2n, x)\operatorname{sen}[N^{1/2}x]}$$

dove $\bar{t}_1(2n, x)$, $\bar{t}_2(2n, x)$ *sono due trascendenti intere in* x, *che soddisfano entrambe la limitazione* (17).

b) Cangiando $2n$ in $2n+1$, e posto $N = 4n+3$ si avrà

$$(15') \quad f_{2n+1}(x) = f'_{2n+1}(0)\frac{\operatorname{sen}[N^{1/2}x]}{N^{1/2}} - \frac{f'''_{2n+1}(0)}{N}\frac{x^3}{6}\cos[N^{1/2}x] + \frac{t(2n+1, x)}{N},$$

e $t(2n+1, x)$ gode le stesse propietà di $t(2n, x)$.

(Eingegangen am 7. September 1949.)

Über die Existenz von beschränkten Potentialfunktionen auf Flächen von unendlichem Geschlecht.

Herrn Oskar Perron zum 70. Geburtstag am 7. Mai 1950 gewidmet.

Von

Rolf Nevanlinna in Helsinki.

1. Bei der Untersuchung der offenen Riemann'schen Flächen hat man besondere Aufmerksamkeit denjenigen Flächen gewidmet, auf welchen nichtkonstante eindeutige analytische oder harmonische Funktionen existieren, die entweder beschränkt sind oder ein endliches Dirichletintegral besitzen. Für Potentialfunktionen gilt der Satz, daß das Verschwinden des harmonischen Maßes (der Kapazität) des idealen Randes der Fläche die Existenz von nichtkonstanten eindeutigen regulären Potentialfunktionen mit beschränktem Betrag oder Dirichletintegral ausschließt. Diese Bedingung löst für den Fall einer schlichtartigen Fläche vollständig die Aufgabe: Ist nämlich das harmonische Maß des Randes positiv, so gibt es auf der Fläche sicher nichtkonstante Potentialfunktionen, welche den angegebenen Beschränktheitsbedingungen genügen. Dagegen ist die Frage nach der Existenz solcher Potentialfunktionen auf beliebigen Flächen (vom Geschlecht ∞), deren Ränder positives harmonisches Maß haben, noch nicht entschieden[1]).

2. Studiert man näher die Methode, welche zur Lösung des Problems geführt hat für eine schlichtartige Fläche ($p = 0$), so sieht man, daß das Wesentliche dabei die Eigenschaft einer solchen „positivberandeten" Fläche ist, daß der Rand Γ der Fläche sich durch einen (kompakten) Rückkehrschnitt Γ_0 auf der Fläche in zwei isolierte Komponenten Γ_1, Γ_2 ($\Gamma = \Gamma_1 + \Gamma_2$) zerlegen läßt, welche b e i d e positives harmonisches Maß haben. Diese Beweismethode läßt sich auch ohne wesentliche Modifikationen auf Flächen von endlichem Geschlecht p anwenden; denn der Rand Γ einer solchen Fläche gestattet stets eine solche Zerlegung. Und dasselbe gilt auch für Flächen mit $p = \infty$, falls der Rand Γ einer derartigen Darstellung $\Gamma = \Gamma_1 + \Gamma_2$ fähig ist. Der kom-

[1]) Die Bemerkung (S. 31, N. 25) meiner Arbeit „Quadratisch integrierbare Differentiale etc.", Ann. Ac. Sci. Fenn., Math.-Phys. I, N:01, 1941, ist dahin zu berichtigen, daß die Existenz von nichtkonstanten beschränkten Potentialfunktionen auf offenen Flächen mit positivem Rand nur dann gesichert ist, wenn die Menge der idealen Randpunkte *harmonisch meßbar* ist. Ob der Fall der Nichtmeßbarkeit eintreffen kann, ist unentschieden.

plizierte und schwerzugängliche Fall ist derjenige, wo der Flächenrand Γ nicht in zwei solche isolierte Teile eingeteilt werden kann. Die folgenden Seiten geben einen kleinen Beitrag zur Lösung des gestellten Problems gerade für diesen Fall.

3. Sei also F eine offene RIEMANN'sche Fläche mit $p \leqq \infty$ und α eine Punktmenge auf F, mit folgenden Eigenschaften:

1^0. α besteht aus endlich oder abzählbar unendlich vielen analytischen (geschlossenen oder nichtgeschlossenen) kompakten Bogen auf F. Falls diese Teilbogen in unendlicher Anzahl vorhanden sind, so sollen sie sich nur gegen den idealen Rand Γ der Fläche F häufen.

2^0. Die Bogenmenge α zerlegt die Fläche in zwei getrennte zusammenhängende Teile F' und F'' $(F = F' + F'')$.

Eine solche zerlegende Menge α läßt sich immer konstruieren, z. B. so, daß man F zunächst durch eine (abzählbare) Rückkehrschnittmenge α' einfach zusammenhängend macht und dann die aufgeschnittene Fläche durch einen Querschnitt α'' zerlegt; es ist dann $\alpha = \alpha' + \alpha''$. Im folgenden wird jedoch nicht vorausgesetzt, daß α durch diese besondere Konstruktion gewonnen worden ist: das Wesentliche für uns sind lediglich die Bedingungen 1^0 und 2^0 der Querschnittsmenge α.

4. Wenn nun α eine beliebige zerlegende Querschnittsmenge von F ist mit den Eigenschaften 1^0 und 2^0, so wird F' einen Rand Γ' haben, der teilweise aus den inneren Punkten α der Fläche, teilweise aus einem „idealen" Teil Γ' der Berandung Γ besteht, und entsprechendes gilt für F'' und seinen Rand $\Gamma'' = \alpha + \Gamma''$ $(\Gamma = \Gamma' + \Gamma'')$.

Wir führen nun die harmonischen Maße der Randteile Γ' und Γ'' inbezug auf bzw. F' und F'' ein. Diese Maße werden folgendermaßen definiert:

Man schöpfe F mit Hilfe einer Folge von ineinander geschachtelten kompakten Teilgebieten F_n mit den (kompakten) stückweise analytischen Rändern Γ_n aus $(n = 0, 1, 2, \ldots)$. Das harmonische Maß ω von Γ' wird dann bekanntlich als Grenzwert der harmonischen Maße ω_n der Kurven Γ_n, inbezug auf das Gebiet $F_n - F_0$, durch den Grenzübergang $n \to \infty$ gewonnen, wobei das Maß ω_n als diejenige in $F_n - F_0$ eindeutige Potentialfunktion definiert ist, welche auf Γ_n gleich 1 ist und auf Γ_0 verschwindet.

Entsprechend bilde man nun das harmonische Maß ω_n' desjenigen Teils Γ_n' von Γ_n, welcher in F' fällt, inbezug auf das Durchschnittsgebiet $F_n' = F' \cdot F_n$: es ist also ω_n' diejenige in F_n' reguläre, eindeutige und beschränkte Potentialfunktion, welche auf Γ_n' gleich 1 ist und auf α verschwindet; ähnlich wird ω_n'' als das harmonische Maß des komplementären Teils Γ_n'' $(\Gamma_n = \Gamma_n' + \Gamma_n'')$, inbezug auf das Gebiet $F_n'' = F'' \cdot F_n$, erklärt.

Mit Hilfe des Maximumprinzips folgt sofort, daß die Folge ω_n' für einen festen Punkt P der Fläche F' mit wachsendem n monoton ab-

nimmt. Nach dem HARNACK'schen Prinzip existiert also die Grenzfunktion

$$\omega' = \lim \omega'_n;$$

sie ist in F' harmonisch und variiert im Intervall $(0, 1)$. Es wird nun ω' als das harmonische Maß des Randteils Γ' inbezug auf das Gebiet F' definiert; entsprechend wird das harmonische Maß von Γ'' inbezug auf das Gebiet F'':

$$\omega' = \lim \omega''_n.$$

5. Zwei Fälle sind möglich: Entweder ist das eingeführte Maß ω' (bzw. ω'') innerhalb F' (bzw. F'') positiv; dann ist es eine nichtkonstante Funktion und nimmt auf α den Randwert Null an. Oder verschwindet diese Funktion identisch: man sagt dann, der Randteil Γ' (bzw. Γ'') habe das harmonische Maß Null in Bezug auf F' (bzw. F'').

Falls das harmonische Maß ω von Γ verschwindet, so gilt dasselbe auch für die Maße ω' und ω'' von Γ' und Γ''. Durch geeignete Wahl von F_n kann man nämlich erreichen, daß ω eine Majorante für ω' in F' und von ω'' in F'' definiert. Wenn umgekehrt $\omega > 0$, so läßt sich daraus noch nicht der Schluß ziehen, daß auch die Maße ω' und ω'' positiv seien; im Gegenteil kann man schon in einfachen Fällen von positivberandeten Flächen, z. B. wenn F das Innere eines Kreises ist, die Querschnittsmenge α so wählen, daß sowohl ω' als ω'' verschwinden.

Es würde für das hier gestellte Problem wichtig sein, zu entscheiden, für welche offenen RIEMANN'schen Flächen F mit positivem Rand eine Zerlegung $F = F' + F''$ so möglich ist, daß die Maße ω' und ω'' beide positiv ausfallen; denn es gilt der

Satz. *Falls die Fläche F positiven Rand hat und mit einer zerlegenden Querschnittsmenge α in zwei Teilflächen F' und F'' geteilt werden kann, deren ideale Randteile Γ' und Γ'' beide positives Maß haben, so läßt sich auf F eine nichtkonstante, eindeutige Potentialfunktion mit beschränktem Betrag konstruieren.*

6. Der Beweis ergibt sich mittels des alternierenden Verfahrens. Man konstruiere zu α eine in F'' verlaufende benachbarte Kurvenmenge β, welche ebenfalls E zerlegt und so nahe an α verläuft, daß der zwischen α und β liegende Flächenteil aus lauter zwei- oder einfach zusammenhängenden Flächenstücken besteht, je nachdem der betreffende angrenzende Randteil α geschlossen oder offen (nichtkompakt) ist. Es ist dann auch β eine zerlegende Punktmenge auf F. Um eine übersichtliche Schreibweise einzuführen, soll das Gebiet F' fortan mit F_α bezeichnet werden; die Bezeichnung F_β soll dasjenige der zwei von der Querschnittsmenge β berandeten Teilgebiete von F angeben, welches nicht als Teilgebiet in F_α enthalten ist. Die Durchschnittsmenge $F_\alpha F_\beta$ ist nicht leer. Die idealen Randteile der Flächen F_α und F_β seien Γ_α ($\equiv \Gamma'$) und Γ_β ($\Gamma_\beta > \Gamma''$).

Es ist für das Folgende wichtig, die Wahl der Punktmenge β durch eine weitere, metrische Bedingung noch einzuschränken. Sei γ_n derjenige Teil der Kurvenmenge Γ_n, welcher im Durchschnittsgebiet $F_\alpha . F_\beta$ liegt. Mit μ_n bezeichne ich das harmonische Maß von γ_n, in Bezug auf das Gebiet F_n, d. h. diejenige in F_n eindeutige Potentialfunktion, welche auf γ_n gleich 1 ist und auf dem komplementären Randteil $\Gamma_n - \gamma_n$ verschwindet. Indem man β genügend nahe an α wählt, kann man erreichen, daß $\mu_n \to 0$ für $n \to \infty$. Diese Bedingung, die man so kurz aussprechen kann, daß der ideale Randteil von $F_\alpha . F_\beta$ das harmonische Maß Null hat, soll im folgenden als gültig vorausgesetzt werden.

7. Wir beweisen zunächst zwei Hilfssätze:

Hilfssatz 1. *Das harmonische Maß von Γ_β ist positiv.*

Dies ist eine fast unmittelbare Folgerung daraus, daß der Randteil $\Gamma'' < \Gamma_\beta$ schon nach Voraussetzung positives Maß hat. Bildet man nämlich mit Hilfe der Kurven Γ_n die Näherungsfunktionen, als deren Grenzwerte die Maße von Γ'' und Γ_β erhalten werden, so sieht man mit dem Maximumprinzip sofort ein, daß das Maß von Γ_β das Maß von Γ'' majoriert.

8. Hilfssatz 2. *Es sei auf der Querschnittsmenge α eine, auf den einzelnen konstituierenden Bogen (α) stetige, reelle Funktion f_α gegeben, so daß*

$$0 \leqq f_\alpha \leqq 1.$$

Unter allen in F_α eindeutigen und regulären Potentialfunktionen u_α, welche den Bedingungen

$$0 \leqq u_\alpha \leqq 1, \qquad u_\alpha = f_\alpha \text{ auf } \alpha,$$

genügen, gibt es zwei wohlbestimmte, $\bar{u}_\alpha$ und $\underline{u}_\alpha$, welche durch die Extremumeigenschaft

$$u_\alpha \leqq \bar{u}_\alpha, \qquad u_\alpha \geqq \underline{u}_\alpha$$

ausgezeichnet sind.

Beweis. Man definiere zwei reguläre, eindeutige Potentialfunktionen $\bar{u}_\alpha^n$ und $\underline{u}_\alpha^n$ im kompakten Gebiet $F_\alpha . F_n$ durch die Randbedingungen

$$\bar{u}_\alpha^n = \underline{u}_\alpha^n = f_\alpha \text{ auf } \alpha;$$
$$\bar{u}_\alpha^n = 1, \ \underline{u}_\alpha^n = 0 \text{ auf } \Gamma_n.$$

Nach dem Dirichlet'schen Prinzip gibt es nur eine beschränkte Potentialfunktion $\bar{u}_\alpha^n$ bzw. $\underline{u}_\alpha^n$ mit diesem Randverhalten, und die Werte dieser Funktionen fallen in das Intervall (0, 1). Es folgt aus dem Maximum- und Minimumprinzip, daß die Folge $\bar{u}_\alpha^n$ $(n = 1, 2, \ldots)$ mit wachsendem n monoton abnimmt, während die Folge $\underline{u}_\alpha^n$ monoton zunimmt. Nach dem Harnack'schen Prinzip streben sie zwei wohlbestimmten regulären Grenzfunktionen $\bar{u}_\alpha$ und $\underline{u}_\alpha$ zu, und es ist leicht einzusehen, daß diese Funktionen zu der betrachteten Klasse (u_α) gehören. Sie besitzen auch die gewünschten Extremaleigenschaften.

Die Bedingung $u_\alpha \leqq \bar{u}_\alpha$ ist nämlich eine direkte Folgerung aus dem Maximumprinzip: Es ist im Gebiet $F_n . F_\alpha$ offenbar $u_\alpha \leqq \bar{u}_\alpha^n$, und also auch $u_\alpha \leqq \bar{u}_\alpha$. Entsprechend beweist man die Relation $u_\alpha \geqq \underline{u}_\alpha$.

9. Es ist leicht einzusehen, daß $\bar{u}_\alpha \equiv \underline{u}_\alpha$, falls das harmonische Maß von Γ_α Null ist. In dem uns interessierenden Fall, wo dieses Maß nach Voraussetzung positiv ist, ist dagegen, für innere Punkte des Gebietes F_α, $\underline{u}_\alpha < \bar{u}_\alpha$. Es gilt ferner der für das folgende wichtige

Hilfssatz 3. *Falls das harmonische Maß von Γ_α positiv ist, so wird*

$$\overline{\lim}\ \bar{u}_\alpha = 1, \qquad \underline{\lim}\ \underline{u}_\alpha = 0.$$

Zum Beweise vergleiche man die Näherungsfunktion $\bar{u}_\alpha^n$, welche in $F_n . F_\alpha$ mit Hilfe der gegebenen Randwerte f_α und 1 gebildet ist, mit der Funktion ω_α^n, welche der besonderen Wahl $f_\alpha = 0$ entspricht, und findet $\omega_\alpha^n \leqq \bar{u}_\alpha^n$. Für $n \to \infty$ strebt ω_α^n gegen das harmonische Maß $\omega_\alpha \equiv \omega'$ von Γ_α, und man erhält durch diesen Grenzübergang: $\omega_\alpha \leqq \bar{u}_\alpha$. Für den ersten Teil des Hilfssatzes 3 genügt es also nachzuweisen, daß $\overline{\lim}\ \omega_\alpha = 1$. Dies folgt aber daraus, daß einerseits $\omega_\alpha > 0$ in F_α ist, anderseits ω_α (nach Hilfssatz 2) die obere Grenze aller Funktionen der Klasse (u_α) ist, welche den Randwerten $f_\alpha = 0$ entsprechen. Es ist somit jedenfalls $1 \geqq \overline{\lim}\ \omega_\alpha = \lambda > 0$, und sogar genau $\lambda = 1$; denn würde $0 < \lambda < 1$ sein, so würde man in $\omega_\alpha + (1-\lambda)\omega_\alpha$ eine Funktion der Klasse (u_α) haben, welche in F_α größer als ω_α wäre, im Widerspruch zu der Extremumeigenschaft von ω_α.

Damit ist der erste Teil der Behauptung bewiesen. Der zweite Teil $\underline{\lim}\ u_\alpha = 0$ ergibt sich durch eine ähnliche Betrachtung: man hat beim Beweis nur die Hilfsfunktion ω_α^n mit $1 - \omega_\alpha^n$ zu ersetzen.

10. Nach diesen Vorbereitungen setze man das alternierende Verfahren folgendermaßen an. Wir erklären in F_α und F_β zwei Folgen von eindeutigen Potentialfunktionen $u_0, u_1, \ldots$ und $v_0, v_1, \ldots$, indem wir

$$u_0 = \omega_\alpha$$

setzen und die Funktionen u_n allgemein als die „Oberfunktionen" $\bar{u}_\alpha$ definieren, entsprechend den Randwerten

$$f_\alpha = v_{n-1} \text{ auf } \alpha \qquad (n = 1, 2, \ldots),$$

während v_n gleich der „Unterfunktion" $\underline{v}_\beta$ in F_β genommen wird, mit den Randwerten

$$f_\beta = u_n \text{ auf } \beta \qquad (n = 0, 1, \ldots);$$

diese Funktionen bestimmen sich in der Reihenfolge $u_0, v_0, u_1, v_1, \ldots$

Mit Hilfe des Maximumprinzips ergibt sich, daß die Funktionen u_n, v_n nur Werte aus dem Intervall (0, 1) annehmen, und daß sie monoton zunehmen:

$$u_0 \leqq u_1 \leqq \ldots, \qquad v_0 \leqq v_1 \leqq \ldots.$$

Aus dem HARNACKschen Prinzip folgt, daß die Grenzfunktionen $u = \lim u_n$, $v = \lim v_n$ in F_α bzw. F_β reguläre Potentialfunktionen darstellen. Die Anwendung des Maximumprinzips auf die Differenz $u_n - v_n$ im Gebiet $F_\alpha . F_\beta . F_n$ ergibt ferner, mit Rücksicht auf die definierenden Randbedingungen der Funktionen u_n und v_n und auf das Verschwinden des harmonischen Maßes μ_n von γ_n für $n \to \infty$, daß $u_n - v_n \to 0$ im Gebiet $F_\alpha F_\beta$ gilt. Es ist also hier $u = v$ und diese Funktionen bilden eine auf der ganzen Fläche F eindeutige, reguläre Potentialfunktion U, deren Werte im Intervall (0, 1) eingeschlossen sind.

Es bleibt noch übrig zu beweisen, daß U nicht konstant ist. In der Tat läßt es sich zeigen, daß sogar

$$\underline{\lim}\, U = 0, \qquad \overline{\lim}\, U = 1.$$

Um dies einzusehen, gehen wir zum Beweis von Hilfssatz 3 zurück. Es wurde dort gezeigt, daß das harmonische Maß ω_α die Eigenschaft $\overline{\lim}\, \omega_\alpha = 1$ besitzt, und ferner, daß

$$\omega_\alpha \leqq \bar{u}_\alpha,$$

wo $\bar{u}_\alpha$ die mit einer beliebigen Randwertfolge $f_\alpha (0 \leqq f_\alpha \leqq 1)$ gebildete Oberfunktion ist. Da nun U als Grenzwert einer Folge u_n von solchen Oberfunktionen ist, so gilt also auch $\omega_\alpha \leqq U$, und die Beziehung $\overline{\lim}\, U = 1$ ist hiermit nachgewiesen.

Die Bedingung $\underline{\lim}\, U = 0$ folgt durch eine analoge Überlegung, angewandt auf das harmonische Maß ω_β des idealen Randteils von F_β. Man hat (vgl. Nr. 9) für eine beliebige Unterfunktion $\underline{u}$, entsprechend einer Randbelegung $f_\beta (0 \leqq f_\beta \leqq 1)$ auf β, die Relation

$$\underline{u}_\beta \leqq 1 - \omega_\beta,$$

und somit, da U der Grenzwert einer Folge v_n von Unterfunktionen im Gebiet F_β ist, auch

$$U \leqq 1 - \omega_\beta.$$

Daraus folgt aber

$$\underline{\lim}\, U \leqq 1 - \overline{\lim}\, \omega_\beta = 0,$$

und, da $U \geqq 0$, $\underline{\lim}\, U = 0$, w. z. b. w.

Unser Satz ist hiermit vollständig bewiesen. Wie es sich mit der Endlichkeit des DIRICHLETintegrals der konstruierten beschränkten Potentialfunktion verhält, ist eine kompliziertere Frage. Jedenfalls gibt es Fälle, wo dieses Integral für eine durch das obige Verfahren hergestellte Funktion unendlich ausfällt.

(Eingegangen am 3. Oktober 1949.)

Bestimmung einer ebenen birationalen quadratischen Verwandtschaft durch sieben Paare entsprechender Punkte.

Herrn Oskar Perron zum 70. Geburtstag am 7. Mai 1950 gewidmet.

Von

Josef Lense in München.

§ 1.

Durch sieben Paare entsprechender Punkte in „allgemeiner" Lage ist eine ebene birationale quadratische Verwandtschaft eindeutig bestimmt. Für diesen Satz findet sich ein Beweis in dem Buch von K. Doehlemann, Geometrische Transformationen, II. Teil, Sammlung Schubert Bd. 28, Leipzig 1908, S. 28. Er zerfällt in zwei Teile. Zuerst wird gezeigt, daß es eine ebene birationale quadratische Verwandtschaft gibt, für die sieben Punktepaare in „allgemeiner" Lage Paare von entsprechenden Punkten sind; dann versucht Verf. nachzuweisen, daß es nur eine derartige Verwandtschaft gibt. Doch dieser Teil des Beweises ist unverständlich. Wir wollen daher im folgenden näher darauf eingehen.

Als Beweismittel wird die Erzeugung einer ebenen birationalen quadratischen Verwandtschaft durch zwei ebene korrelative Verwandtschaften benutzt. Es sei an die im folgenden verwendeten Tatsachen kurz erinnert. Durch eine gleich null gesetzte Bilinearform in den projektiven Punktkoordinaten x_1, x_2, x_3; x_1', x_2', x_3' aus dem Bereich der komplexen Zahlen

$$\sum_{\mu,\nu=1}^{3} a_{\mu\nu} x_\mu x_\nu' = 0 \tag{1}$$

wird eine ebene korrelative Verwandtschaft festgelegt, d. h. dem Punkt (x_1, x_2, x_3), kurz Punkt x genannt, entspricht die Gerade (1), wenn wir x_1', x_2', x_3' als laufende Koordinaten auffassen, und ähnlich dem Punkt x' die Gerade (1), wenn wir die x_ν als laufende Koordinaten betrachten. Ist durch

$$\sum_{\mu,\nu=1}^{3} b_{\mu\nu} x_\mu x_\nu' = 0 \tag{2}$$

noch eine zweite korrelative Verwandtschaft gegeben, die von der ersten verschieden ist, wobei also die $b_{\mu\nu}$ nicht den $a_{\mu\nu}$ proportional sind, so entsprechen dem Punkt x in der ersten Verwandtschaft alle

Punkte x' der Geraden (1), in der zweiten alle Punkte x' der Geraden (2), in beiden gleichzeitig somit der Schnittpunkt der beiden Geraden. Führen wir die Bezeichnungen

$$A_\nu = \sum_{\mu=1}^{3} a_{\mu\nu} x_\mu, \quad B_\nu = \sum_{\mu=1}^{3} b_{\mu\nu} x_\mu \qquad (\nu = 1, 2, 3) \tag{3}$$

ein, so sind seine Koordinaten den Determinanten der Matrix

$$\begin{vmatrix} A_1 & A_2 & A_3 \\ B_1 & B_2 & B_3 \end{vmatrix} \tag{4}$$

proportional. Ähnlich entspricht dem Punkte x' gleichzeitig in beiden korrelativen Verwandtschaften der Punkt, dessen Koordinaten den Determinanten der Matrix

$$\begin{vmatrix} A'_1 & A'_2 & A'_3 \\ B'_1 & B'_2 & B'_3 \end{vmatrix} \tag{5}$$

proportional sind, wobei

$$A'_\mu = \sum_{\nu=1}^{3} a_{\mu\nu} x'_\nu, \quad B'_\mu = \sum_{\nu=1}^{3} b_{\mu\nu} x'_\nu \qquad (\mu = 1, 2, 3) \tag{6}$$

ist. x und x' sind also entsprechende Punkte einer ebenen birationalen quadratischen Verwandtschaft.

Bildet man das Korrelationsbüschel

$$\sum_{\mu,\nu=1}^{3} (\alpha a_{\mu\nu} + \beta b_{\mu\nu}) x_\mu x'_\nu = 0, \tag{7}$$

so entsprechen einander die eben bestimmten Punkte x und x' in allen Korrelationen des Büschels. Denn die dem Punkt x in den einzelnen korrelativen Verwandtschaften entsprechenden Geraden bilden ein Strahlenbüschel mit dem Scheitel x' und ebenso die dem Punkt x' entsprechenden Geraden ein Strahlenbüschel mit dem Scheitel x. Bestimmt man das Verhältnis $\alpha : \beta$ aus der kubischen Gleichung

$$\text{Det.}\,|\alpha a_{\mu\nu} + \beta b_{\mu\nu}| = 0 \tag{8}$$

und hiernach mit diesem Wert von $\alpha : \beta$ den Punkt x aus den Gleichungen

$$\sum_{\mu,\nu=1}^{3} (\alpha a_{\mu\nu} + \beta b_{\mu\nu}) x_\mu = 0 \qquad (\nu = 1, 2, 3), \tag{9}$$

so fallen die diesem Punkt x entsprechenden Geraden (1) und (2) und damit alle Gerade des Strahlenbüschels zusammen, dem Punkt x entspricht in der quadratischen Verwandtschaft eine ganze Gerade, er ist Haupt- oder Fundamentalpunkt. Man erhält damit die drei Hauptpunkte der quadratischen Verwandtschaft in der x-Ebene. Ähnlich ergeben sich die drei Hauptpunkte in der x'-Ebene.

Die mit einem dieser drei Werte von $\alpha : \beta$ gebildete Korrelation hat wegen (8) eine verschwindende Determinante, sie ist ausgeartet:

dem zugehörigen Hauptpunkt entspricht wegen (9) keine bestimmte Gerade, er entspricht allen Geraden der x'-Ebene.

Die Hauptpunkte der x-Ebene erhält man auch aus (4), wenn man die Koordinaten des dem Punkte x entsprechenden Punktes gleich null setzt, d. h. als die drei gemeinsamen Schnittpunkte der Kegelschnitte

$$(10) \qquad A_2B_3 - A_3B_2 = 0, \quad A_3B_1 - A_1B_3 = 0, \quad A_1B_2 - A_2B_1 = 0,$$

die man auch in der Form

$$(11) \qquad \frac{A_1}{B_1} = \frac{A_2}{B_2} = \frac{A_3}{B_3}$$

schreiben kann. Aus (11) liest man ab, daß jeder Schnittpunkt von zweien dieser Kegelschnitte auch auf dem dritten liegt, wenn nicht

$$(12) \qquad A_1 = B_1 = 0 \quad \text{oder} \quad A_2 = B_2 = 0 \quad \text{oder} \quad A_3 = B_3 = 0$$

ist. Die durch (12) festgelegten Schnittpunkte von je zweien der Kegelschnitte (10) liegen nicht auch auf dem dritten. Ähnliches gilt für die x'-Ebene. Auf Realitätsuntersuchungen und besondere Fälle (Zusammenfallen von Hauptpunkten) soll nicht eingegangen werden.

§ 2.

Wir wollen nun die Fragestellung umkehren: Kann man jede ebene birationale quadratische Verwandtschaft in dieser Weise erzeugen? Eine quadratische Verwandtschaft sei durch die Gleichungen

$$(13) \qquad x_1' : x_2' : x_3' = \varphi_1 : \varphi_2 : \varphi_3$$

gegeben, wobei die φ_ν solche homogene quadratische Polynome in den x_ν sind, daß die Kegelschnitte $\varphi_\nu = 0$ $(\nu = 1,2,3)$ genau drei Schnittpunkte A, B, C gemeinsam haben, die auch ganz oder teilweise zusammenfallen können, und jeweils paarweise noch genau einen vierten Schnittpunkt haben, der nicht auf dem dritten Kegelschnitt liegt (siehe Fig. 1.). Diese Schnittpunkte seien A', B', C', nämlich A' der vierte Schnittpunkt von $\varphi_2 = 0$ und $\varphi_3 = 0$, B' der von $\varphi_3 = 0$ und $\varphi_1 = 0$, C' der von $\varphi_1 = 0$ und $\varphi_2 = 0$. Gemäß (10) haben wir sechs Gerade $A_\nu = 0$, $B_\nu = 0$ $(\nu = 1,2,3)$ zu bestimmen, so daß die Punkte A', B', C' mit den Punkten (12) identisch werden und die Schnittpunkte $A_2 = A_3 = 0$, $A_3 = A_1 = 0$, $A_1 = A_2 = 0$, bzw. $B_2 = B_3 = 0$, $B_3 = B_1 = 0$, $B_1 = B_2 = 0$, der Reihe nach auf den Kegelschnitten $\varphi_1 = 0$, $\varphi_2 = 0$, $\varphi_3 = 0$ liegen. Die Kegelschnitte seien kurz als erster, zweiter, dritter Kegelschnitt bezeichnet.

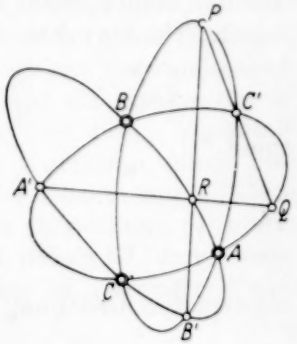


Fig. 1.

Zu diesem Zweck gehen wir von einem Punkt P des ersten Kegelschnittes aus und verbinden ihn mit dem Punkt C'. Die Gerade PC' trifft den zweiten Kegelschnitt in einem zweiten Punkt Q. Diesen verbinden wir mit A'. Die Gerade QA' trifft den dritten Kegelschnitt in einem zweiten Punkt R. Diesen verbinden wir mit B'. Die Gerade RB' trifft den ersten Kegelschnitt in einem zweiten Punkt P'. Wenn wir den Punkt P auf dem ersten Kegelschnitt wandern lassen, wandert auch der Punkt P'. Gemäß dieser Konstruktion bilden die Punkte P und P' zwei projektive Punktreihen auf dem ersten Kegelschnitt. Diese Projektivität hat, wie sich aus der eben vorgenommenen Konstruktion ergibt, die Punkte A, B, C zu Doppelpunkten, also mindestens drei Doppelpunkte, wenn die Punkte A, B, C voneinander verschieden sind. Demnach ist jeder Punkt P Doppelpunkt und fällt daher mit dem Punkt P' zusammen. Durch Grenzübergang ergibt sich die Richtigkeit der letzten Behauptung auch dann, wenn zwei oder alle drei der gemeinsamen Schnittpunkte zusammenfallen.

Gehen wir also von zwei verschiedenen Lagen des Punktes P aus, so erhalten wir jedesmal drei Gerade, die genau die geforderten Eigenschaften der Geraden $A_\nu = 0$ bzw. $B_\nu = 0$ haben. Die linken Seiten ihrer Gleichungen seien $\overline{A}_\nu, \overline{B}_\nu$.

Weil der erste Kegelschnitt durch die Schnittpunkte $\overline{A}_1 = \overline{A}_3 = 0$, $\overline{B}_2 = \overline{B}_3 = 0$, $\overline{A}_2 = \overline{B}_2 = 0$, $\overline{A}_3 = \overline{B}_3 = 0$ geht, hat man

$$(14) \qquad \begin{cases} \varphi_1 = \lambda_1 \overline{A}_2 \overline{B}_3 - \varrho_1 \overline{A}_3 \overline{B}_2 & \text{und ähnlich} \\ \varphi_2 = \lambda_2 \overline{A}_3 \overline{B}_1 - \varrho_2 \overline{A}_1 \overline{B}_3 \\ \varphi_3 = \lambda_3 \overline{A}_1 \overline{B}_2 - \varrho_3 \overline{A}_2 \overline{B}_1 . \end{cases}$$

Aus den beiden ersten Gleichungen (14) ergibt sich für die drei gemeinsamen Schnittpunkte der Kegelschnitte

$$\frac{\overline{A}_3}{\overline{B}_3} = \frac{\lambda_1 \overline{A}_2}{\varrho_1 \overline{B}_2} \quad \text{und} \quad \frac{\overline{A}_3}{\overline{B}_3} = \frac{\varrho_2 \overline{A}_1}{\lambda_2 \overline{B}_1},$$

somit

$$\frac{\lambda_1 \overline{A}_2}{\varrho_1 \overline{B}_2} = \frac{\varrho_2 \overline{A}_1}{\lambda_2 \overline{B}_1},$$

also durch Vergleich mit der aus der dritten der Gleichungen (14) abgeleiteten Gleichung $\frac{\overline{A}_2}{\overline{B}_2} = \frac{\lambda_3 \overline{A}_1}{\varrho_3 \overline{B}_1}$

$$(15) \qquad \lambda_1 \lambda_2 \lambda_3 = \varrho_1 \varrho_2 \varrho_3 .$$

Nun sollen aber die φ_ν den linken Seiten von (10) gleich sein, wobei

$$(16) \qquad A_\nu = \sigma_\nu \overline{A}_\nu, \quad B_\nu = \tau_\nu \overline{B}_\nu \qquad (\nu = 1, 2, 3)$$

ist. Durch Vergleich mit (14) erhält man zur Bestimmung der σ_ν und τ_ν

die Gleichungen

$$\begin{aligned} &\sigma_2\tau_3 = \lambda_1, \quad \sigma_3\tau_2 = \varrho_1, \\ &\sigma_3\tau_1 = \lambda_2, \quad \sigma_1\tau_3 = \varrho_2, \\ &\sigma_1\tau_2 = \lambda_3, \quad \sigma_2\tau_1 = \varrho_3. \end{aligned} \tag{17}$$

Somit folgt aus den Gleichungen (17)

$$\begin{aligned} &\sigma_1 = k\,\varrho_2\varrho_3, \quad \sigma_2 = k\,\lambda_1\varrho_3, \quad \sigma_3 = k\,\lambda_1\lambda_2, \\ &\tau_1 = k'\,\lambda_2\lambda_3, \quad \tau_2 = k'\,\varrho_1\lambda_3, \quad \tau_3 = k'\,\varrho_1\varrho_2, \end{aligned} \tag{18}$$

daher für k und k'

$$k\,k'\,\lambda_1\lambda_2\lambda_3 = 1 \quad \text{und} \quad k\,k'\,\varrho_1\varrho_2\varrho_3 = 1. \tag{19}$$

Diese beiden Gleichungen sagen wegen (15) dasselbe aus. Man erhält daher

$$\begin{aligned} &\sigma_1 = k\,\varrho_2\varrho_3, \quad \sigma_2 = k\,\lambda_1\varrho_3, \quad \sigma_3 = k\,\lambda_1\lambda_2, \\ &\tau_1 = \frac{1}{k\,\lambda_1}, \qquad \tau_2 = \frac{\lambda_3}{k\,\varrho_2\varrho_3}, \qquad \tau_3 = \frac{1}{k\,\varrho_3}, \end{aligned} \tag{20}$$

also z. B. für $k = \dfrac{1}{\varrho_1\varrho_3}$

$$\begin{aligned} &\sigma_1 = \frac{\varrho_2}{\varrho_1}, \qquad \sigma_2 = \frac{\lambda_1}{\varrho_1}, \qquad \sigma_3 = \frac{\varrho_2}{\lambda_3}, \\ &\tau_1 = \frac{\varrho_1\varrho_3}{\lambda_1}, \quad \tau_2 = \frac{\lambda_3\varrho_1}{\varrho_2}, \quad \tau_3 = \varrho_1. \end{aligned} \tag{21}$$

Damit sind die A_ν und B_ν und sonach die beiden Korrelationen (1) und (2) bestimmt, durch welche die gegebene quadratische Verwandtschaft erzeugt wird. Sollten irgend zwei der Kegelschnitte unendlich viele gemeinsame Punkte haben, so wählen wir statt der drei Kegelschnitte $\varphi_\nu = 0$ drei andere linear unabhängige des durch die Kegelschnitte $\varphi_\nu = 0$ gebildeten Netzes mit den oben verlangten Eigenschaften. Damit erhalten wir eine zweite quadratische Verwandtschaft, die aus der ersten dadurch hervorgeht, daß auf die Punkte der x'-Ebene eine Kollineation ausgeübt wird. Die zweite dieser Verwandtschaften können wir nach dem geschilderten Verfahren durch zwei Korrelationen erzeugen. Üben wir dann auf die Punkte der x'-Ebene die inverse Kollineation aus, so erhalten wir die Darstellung der ersten Verwandtschaft durch Korrelationen.

Rechnerisch gestaltet sich diese Überlegung in folgender Weise: Wir üben auf die x'_ν die Kollineation

$$x''_\mu = \sum_{\nu=1}^{3} c_{\mu\nu}\,x'_\nu \qquad (\mu = 1, 2, 3) \text{ mit Det. } |c_{\mu\nu}| \neq 0 \tag{22}$$

aus, so daß die Kegelschnitte $\psi_\mu = 0$ mit $\psi_\mu = \sum_{\nu=1}^{3} c_{\mu\nu}\varphi_\nu$ die gewünschten Eigenschaften haben. Hat man dann für die quadratische Verwandt-

schaft $x_1'' : x_2'' : x_3'' = \psi_1 : \psi_2 : \psi_3$ die beiden erzeugenden Korrelationen

$$(23) \qquad \sum_{\mu,\nu=1}^{3} a'_{\mu\nu} x_\mu x''_\nu = 0 \quad \text{und} \quad \sum_{\mu,\nu=1}^{3} b'_{\mu\nu} x_\mu x''_\nu = 0$$

gefunden, so ergeben sich die Korrelationen für die ursprüngliche Verwandtschaft durch Einsetzen von (22) in (23), d. h. ihre Koeffizienten werden

$$(24) \qquad a_{\mu\nu} = \sum_{\lambda=1}^{3} a'_{\mu\lambda} c_{\lambda\nu}, \quad b_{\mu\nu} = \sum_{\lambda=1}^{3} b'_{\mu\lambda} c_{\lambda\nu}.$$

§ 3.

Nun verläuft der Beweis für den am Anfang dieser Note angegebenen Satz in folgender Weise: Da sich nach § 2 jede quadratische Verwandtschaft in der angegebenen Weise durch Korrelationen erzeugen läßt, haben wir alle Korrelationen zu suchen, für welche die sieben Punktepaare Paare entsprechender Punkte sind, d. h. die Koordinaten der Punkte in die Gleichungen (1) einzusetzen, wodurch wir sieben homogene lineare Gleichungen für die unbekannten Koeffizienten $a_{\mu\nu}$ erhalten. Ist der Rang dieses Gleichungssystems sieben (das ist hier die genaue Fassung des Ausdruckes: Punkte in „allgemeiner" Lage), so ist die allgemeine Lösung eine Linearkombination von zwei linear unabhängigen Lösungen, d. h. wir erhalten ein Büschel solcher Korrelationen, das nach § 1 genau eine quadratische Verwandtschaft erzeugt.

Doehlemann versucht die Eindeutigkeit durch folgenden Gedankengang nachzuweisen: Gäbe es neben der gefundenen Verwandtschaft noch eine zweite, so würde einem Punkt x in der ersten ein Punkt x', in der zweiten ein anderer Punkt x'' entsprechen. Die beiden Korrelationen, welche die Verwandtschaften erzeugen, hätten demnach neun Punktepaare gemeinsam, nämlich die sieben gegebenen und die beiden Paare (x, x') und (x, x''), müßten also zusammenfallen, was nicht möglich ist. Dieser Gedankengang setzt erstens voraus, daß sich jede quadratische Verwandtschaft durch Korrelationen erzeugen läßt, was nicht bewiesen wird. Zweitens haben die beiden Korrelationen nicht nur neun, sondern unendlich viele Punktepaare gemeinsam, nämlich alle Paare entsprechender Punkte der von ihnen erzeugten quadratischen Verwandtschaft, aber nur sieben derartige Paare sind willkürlich. Wie sich aus dem Vorhergehenden ergibt, folgt die Eindeutigkeit unmittelbar aus der Erzeugung durch Korrelationen, sobald überhaupt nachgewiesen ist, daß sich jede quadratische Verwandtschaft so erzeugen läßt, was im § 2 geschehen ist.

(Eingegangen am 7. Oktober 1949.)

Parallelogrammgitter als Modelle pseudosphärischer Flächen.

Herrn Oskar Perron zum 70. Geburtstag am 7. Mai 1950 gewidmet.

Von

Robert Sauer in München.

1. Einleitung.

Vielen differentialgeometrischen Begriffen und Sätzen der Flächentheorie lassen sich mit Hilfe geeignet gewählter elementargeometrischer Modelle analoge „differenzengeometrische" Begriffe und Sätze gegenüberstellen, welche die differentialgeometrischen Beziehungen anschaulich evident machen. Als Beispiel sei die im Grundgedanken auf S. Finsterwalder zurückgehende Darstellung des Gauss'schen Krümmungsmaßes[1]) und des Integralsatzes von Gauss und Bonnet[2]) durch nichtebene Dreiecksnetze erwähnt.

In der vorliegenden Arbeit wird eine solche Gegenüberstellung der differentialgeometrischen Eigenschaften der pseudosphärischen Flächen und der elementargeometrischen Eigenschaften der ebeneckigen Parallelogrammgitter behandelt. Diese Parallelogrammgitter, im Folgenden kurz *P-Gitter* genannt, werden von zwei Scharen von Streckenzügen mit der konstanten Seitenlänge s' bzw. s'' aufgespannt (Fig. 1). Die Maschen des Gitters sind Parallelogramme und zwar im allgemeinen windschiefe Parallelogramme. In jeder inneren Gitterecke stoßen vier Maschen zu-

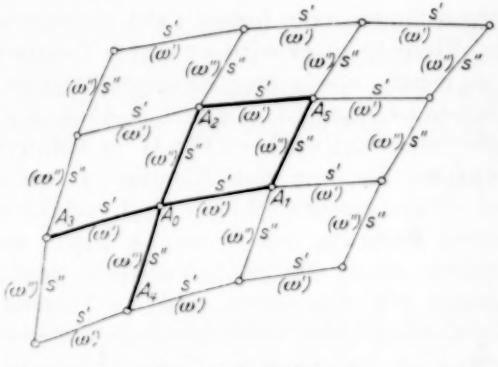


Fig. 1: *P*-Gitter

[1]) S. Finsterwalder: Mechanische Beziehungen bei der Flächenformation. Jahresberichte DMV 6, 1897.

[2]) R. Sauer: Geometrische Überlegungen zu den Grundgleichungen der Flächentheorie. Münchener Akademieberichte 1928, S. 100—103. Vergl. ferner

R. Sauer: Streifen- und Stangenmodelle zur Differentialgeometrie usw. Math. Zeitschrift 48, 1942, S. 455—466.

sammen. Jede innere Gitterecke ist also Mittelpunkt eines Viererkreuzes. Es wird verlangt, daß alle diese Viererkreuze eben sind, d. h. daß die vier von einer inneren Gitterecke ausgehenden Gitterseiten jeweils in einer Ebene liegen. In den Randpunkten mit je drei Gitterseiten sollen diese auch jeweils in einer Ebene liegen.

Daß die elementargeometrischen Eigenschaften der so definierten P-Gitter gewissen differentialgeometrischen Eigenschaften der pseudosphärischen Flächen analog sind, wird durch folgende Überlegung nahegelegt: Die pseudosphärischen Flächen sind dadurch gekennzeichnet, daß die beiden Scharen der Asymptotenlinien $u = \text{const}$, $v = \text{const}$ ein TSCHEBYTSCHEFF-Netz bilden; d. h. die Kurvenfolgen $u = u_0 \pm m\varepsilon$, $v = v_0 \pm n\eta$ (m bzw. $n = 0, 1, 2, \ldots$; ε, η = positive Konstanten) erzeugen auf der Fläche ein i. allg. krummliniges Parallelogrammnetz. Ersetzt man in diesem Kurvennetz die krummlinigen Parallelogrammseiten durch ihre geradlinigen Sehnen, so erhält man ein Vierecksgitter mit i. allg. windschiefen Viereckmaschen und nichtebenen Viererkreuzen. Wir gehen nun durch Verkleinerung der Konstanten ε und η zu immer engmaschigeren Netzen über und betrachten den Grenzprozeß $\varepsilon \to 0$, $\eta \to 0$ unter Festhaltung des Verhältnisses $\varepsilon : \eta = \text{const} \neq 0$. Da die Kurven $u = \text{const}$ und $v = \text{const}$ ein TSCHEBYTSCHEFF-Netz bilden, streben bei diesem Grenzprozeß die durch ε bzw. η dividierten Sehnenlängen zwei festen nicht verschwindenden Grenzwerten zu, d. h. das Vierecksgitter wird zu einem Parallelogrammgitter. Da die Kurven $u = \text{const}$, $v = \text{const}$ Asymptotenlinien sind, werden die von den Ebenen $(A_0A_1A_2)$, $(A_0A_2A_3)$, $(A_0A_3A_4)$ $(A_0A_4A_1)$ der Viererkreuze $A_0A_1A_2A_3A_4$ gebildeten Keilwinkel (Fig 1) in höherer Ordnung als ε und η klein, während die von den Ebenen $(A_0A_1A_2)$, $(A_5A_1A_2)$, $(A_1A_0A_5)$, $(A_2A_0A_5)$ der Gittermaschen $A_0A_1A_5A_2A_0$ gebildeten Keilwinkel i. allg. in derselben Ordnung wie ε und η klein werden, d. h. die Viererkreuze werden, eben, die Gittermaschen dagegen nicht. Zusammenfassend können wir also sagen, daß die Vierecksgitter der Sehnen eines von Asymptotenlinien einer pseudosphärischen Fläche gebildeten Kurvennetzes bei fortgesetzter Verengerung in P-Gitter übergehen.

Wir werden nunmehr die elementargeometrischen Eigenschaften der P-Gitter erörtern und ihnen jeweils die entsprechenden differentialgeometrischen Beziehungen der pseudosphärischen Flächen gegenüberstellen[3]). Zum Schluß werden wir diese Gegenüberstellung nachträglich durch einen Grenzprozeß ergänzen. Bei diesem Grenzprozeß erscheinen die Asymptotenliniennetze der pseudosphärischen Flächen als Limes von Folgen von P-Gittern und die elementargeometrischen Beziehungen der P-Gitter konvergieren gegen differentialgeometrische Beziehungen der pseudosphärischen Flächen.

[3]) Ein kurzer Hinweis auf einige dieser Beziehungen wurde in einem Vortrag des Verfassers bei der Mathematikertagung in Tübingen 1946 gegeben.

2. Bezeichnungen und Definitionen.

Neben den bereits benützten Bezeichnungen s', s'' für die Seitenlängen führen wir folgende weitere Bezeichnungen ein (Fig. 2):

Gitterwinkel α, β = Innenwinkel der Parallelogramme (paarweise gleich),

Krümmungswinkel $\varkappa', \varkappa''$ = Winkel aufeinanderfolgender Seiten eines Streckenzuges (z. B. $\varkappa'_{A_0} = \sphericalangle A_3 A_0 \mid A_0 A_1$, $\varkappa''_{A_0} = \sphericalangle A_4 A_0 \mid A_0 A_2$),

Windungswinkel ω', ω'' = Winkel der Ebenen aufeinanderfolgender Viererkreuze (z. B. $\omega'_{A_0 A_1} = \sphericalangle A_2 A_0 A_1 \mid A_3 A_1 A_0$, $\omega''_{A_0 A_2} = \sphericalangle A_1 A_0 A_2 \mid A_3 A_2 A_0$). Dabei setzen wir voraus, daß das P-Gitter von einem ebenen Gitter kongruenter Parallelogramme so wenig abweicht, daß alle Winkel $\varkappa', \varkappa'', \omega', \omega''$ hinreichend klein sind, etwa < 1. Die Winkel $\varkappa', \varkappa''$ sind ohne Vorzeichen definiert und sollen stets von Null verschieden sein. Die Winkel ω', ω'' sind $\gtrless 0$, je nachdem die Fortschreitungsrichtung (z. B. $A_0 A_1$ oder $A_0 A_2$) mit der zugehörigen Drehung der Viererkreuzebenen eine Rechts- oder Linksschraubung bestimmt.

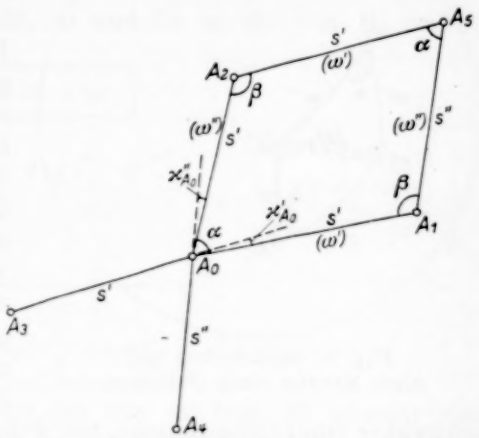


Fig. 2: Seitenlängen und Winkel im P-Gitter.

Die Quotienten

$$k' = \frac{\sin \varkappa'}{s'} \qquad \omega' = \frac{\sin \omega'}{s'}$$

(1) und

$$k'' = \frac{\sin \varkappa''}{s''} \qquad \omega'' = \frac{\sin \omega''}{s''}$$

bezeichnen wir als *Krümmungen* und *Windungen* der Streckenzüge des P-Gitters.

Wir ergänzen das P-Gitter zu einer Haut, indem wir in jeder Gittermasche ein Paraboloid aufspannen, und können dann eine positive und negative Seite des Gitters unterscheiden. Wir bezeichnen die Viererkreuzebenen als *Berührebenen* des Gitters und die zu ihnen senkrechten Einheitsvektoren auf der positiven Gitterseite als *Normalen* des Gitters. Wenn wir außerdem die Ebenen, welche von je zwei aufeinanderfolgenden Seiten der Streckenzüge des Gitters bestimmt werden, als *Schmiegebenen* der Streckenzüge bezeichnen, gilt offenbar:

Die Berührebenen eines ebeneckigen Gitters sind identisch mit den Schmiegebenen der Streckenzüge des Gitters.

Die Berührebenen einer Fläche sind identisch mit den Schmiegebenen der Asymptotenlinien der Fläche.

Der rechts stehende Satz drückt den analogen differentialgeometrischen Sachverhalt aus.

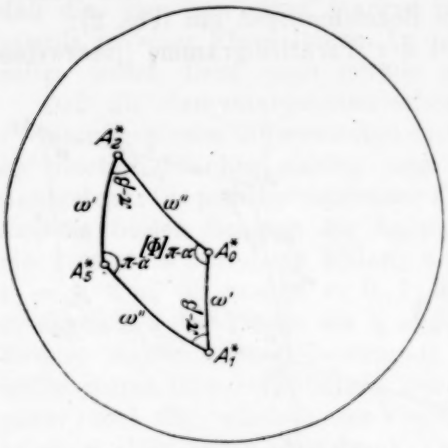


Fig. 3: Sphärisches Bild einer Masche eines P-Gitters.

Schließlich definieren wir ähnlich wie in der Flächentheorie mit Hilfe der Normalen des Gitters ein *sphärisches Bild* (Fig. 3):

Jeder Gitterecke A_ν ist ein Punkt A_ν^* der Einheitskugel zugeordnet. Jeder Gittermasche $A_0 A_1 A_3 A_2$ entspricht ein sphärisches Viereck $A_0^* A_1^* A_3^* A_2^*$ mit den Seiten ω', ω'' und den Innenwinkeln $\pi - \alpha$, $\pi - \beta$. Die Gittermasche und das entsprechende Viereck im sphärische Bild werden in entgegengesetztem Sinn umlaufen (vergl. Ziff. 3). Wir bezeichnen mit $2F$ die Oberfläche des Tetraeders $A_0 A_1 A_3 A_2$ der Eckpunkte einer Gittermasche, mit Φ den Flächeninhalt des entsprechenden sphärischen Vierecks und definieren mittels

$$K = -\frac{2 \sin \Phi/2}{F} \tag{2}$$

das *Krümmungsmaß* der betreffenden Gittermasche.

3. Eigenschaften der P-Gitter.

Aus Symmetriegründen sind in einem windschiefen Parallelogramm ebenso wie in einem ebenen Parallelogramm je 2 Gitterwinkel gleich, z. B. $\sphericalangle A_0 = \sphericalangle A_3 = \alpha$, $\sphericalangle A_1 = \sphericalangle A_2 = \beta$. Ferner sind die Windungswinkel an gegenüberliegenden Parallelogrammseiten gleich, z. B. $\omega'_{A_0 A_1} = \omega'_{A_2 A_3} = \omega'$, $\omega''_{A_0 A_2} = \omega''_{A_1 A_3} = \omega''$. Die beiden Windungswinkel ω', ω'' in einem windschiefen Parallelogramm haben stets entgegengesetztes Vorzeichen, woraus sich die in Ziff. 2 erwähnte Umkehrung des Umlaufsinnes bei der sphärischen Abbildung ergibt. Ebenso wie bei den Maschen des P-Gitters sind auch bei den Maschen des sphärischen Bildes die Seiten sowie die Innenwinkel paarweise gleich, die Maschen des sphärischen Bildes sind also sphärische Parallelogramme.

Die Winkel und Seiten eines windschiefen Parallelogramms sind verknüpft durch die beiden Gleichungen

$$\frac{\sin \omega'}{s'} = -\frac{\sin \omega''}{s''}, \tag{3}$$

$$-\operatorname{tg}\frac{\omega'}{2} \cdot \operatorname{tg}\frac{\omega''}{2} = \frac{\sin(\alpha+\beta)}{\sin\alpha + \sin\beta} = \frac{\cos\dfrac{\alpha+\beta}{2}}{\cos\dfrac{\alpha-\beta}{2}}. \tag{4}$$

Die erste Gleichung ergibt sich aus $h = s' \sin\beta \sin\omega'' = -s'' \sin\beta \sin\omega'$, wobei h den Abstand des Punktes A_3 von der Ebene $A_0 A_1 A_2$ bedeutet. Die zweite Gleichung erhält man aus dem sphärischen Viereck $A_0^* A_1^* A_3^* A_2^*$.

Für die Flächeninhalte F und Φ hat man

$$F = \tfrac{1}{2} s' s'' (\sin\alpha + \sin\beta), \quad \Phi = 2(\pi - \alpha - \beta). \tag{5}$$

Durch Einsetzen der Gln. (3), (4) und (5) in die Gln. (1) und (2) ergibt sich unmittelbar

$$\boxed{w' = -w''} \tag{6}$$

und

$$K = -\frac{2\sin(\alpha+\beta)}{\frac{1}{2}s's''(\sin\alpha+\sin\beta)} = \frac{4\operatorname{tg}\frac{\omega'}{2}\operatorname{tg}\frac{\omega''}{2}}{s's''} = \frac{\sin\omega'\cdot\sin\omega''}{s's''\cos^2\frac{\omega'}{2}\cdot\cos^2\frac{\omega''}{2}}$$

also

$$\boxed{K = \frac{w'w''}{\cos^2\frac{\omega'}{2}\cdot\cos^2\frac{\omega''}{2}}}. \tag{7}$$

Durch wiederholte Anwendung der Gln. (3) bzw. (6) erkennt man, daß die Windungswinkel ω' bzw. ω'' und die Windungen w' bez. w'' nicht nur jeweils in einem Gitterparallelogramm, sondern in dem gesamten P-Gitter (Fig. 1) denselben konstanten Wert haben. Unter Berücksichtigung dieser Tatsache liefern die Gln. (6) und (7) folgenden Satz, dem wir rechts den analogen differentialgeometrischen Satz gegenüberstellen:

In einem P-Gitter haben die Streckenzüge der einen Schar für alle Streckenzugseiten dieselbe konstante Windung w' und die Streckenzüge der anderen Schar die entgegengesetzt gleiche konstante Windung $w'' = -w'$.

Das Krümmungsmaß K hat für alle Gittermaschen denselben konstanten Wert und ist bis auf den konstanten Faktor

$$f = \frac{1}{\cos^2\frac{\omega'}{2}\cos^2\frac{\omega''}{2}}$$

gleich dem Produkt $w'.w''$; für $\omega' \to 0$, $\omega'' \to 0$ wird $f = 1$ (vergl. Ziff. 7).

Wenn die Asymptotenlinien ein Tschebytscheff-Netz bilden, haben die Kurven der einen Schar dieselbe konstante Windung w' und die Kurven der anderen Schar die entgegengesetzt gleiche konstante Windung $w'' = -w'$.

Das Krümmungsmaß der Trägerfläche ist konstant und gleich dem Produkt $w' w''$ der Windungen der Asymptotenlinien; die Trägerfläche ist also eine pseudosphärische Fläche.

Für das sphärische Bild liefern die vorangehenden Überlegungen den weiteren Satz:

Das sphärische Bild eines P-Gitters ist ein sphärisches Parallelogrammgitter mit den konstanten Seitenlängen ω', ω''. Die Gitterseiten des P-Gitters sind senkrecht zu den Sehnen der entsprechenden Seiten des sphärischen Parallelogrammgitters. Der Umlaufsinn im P-Gitter ist dem Umlaufsinn im sphärischen Bild entgegengesetzt.

Bei der sphärischen Abbildung einer pseudosphärischen Fläche entspricht dem TSCHEBYTSCHEFF-Netz der Asymptotenlinien wieder ein TSCHEBYTSCHEFF-Netz. Entsprechende Tangenten beider Netze sind zueinander senkrecht. Der Umlaufsinn ist in den beiden Netzen entgegengesetzt.

4. Deformationen der P-Gitter mit Erhaltung der Streckenzugwindungen und der Gitterseiten.

Wir wenden uns nun zu der Frage, ob es möglich ist, ein vorgegebenes P-Gitter in ein anderes P-Gitter so zu deformieren, daß die Windungen der Streckenzüge ungeändert bleiben und außerdem entweder I) die Längen s', s'' der Gitterseiten oder II) die Gitterwinkel α, β sich nicht ändern.

Bei allgemeinen ebeneckigen Viereckgittern, bei denen die Maschen nicht Parallelogramme, sondern allgemeine windschiefe Vierecke sind, gibt es analoge Deformationen nur in Spezialfällen. Bei den P-Gittern dagegen existieren, wie wir sehen werden, stets sowohl Deformationen (I) als auch Deformationen (II) und zwar kontinuierliche Scharen solcher Deformationen.

Wir betrachten zunächst den Fall (I), d. h. die Deformationen unter Festhaltung der Seitenlängen s', s'', und gehen dabei aus von einem vorgegebenen P-Gitter mit dem Randpolygon $A\,B\,C\,D$ (Fig. 4a,b). Wir

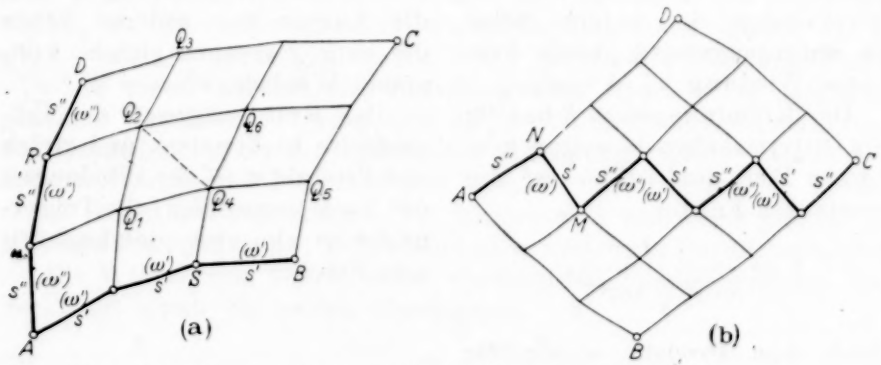


Fig. 4: Festlegung eines P-Gitters mit vorgegebenen Gitterseiten.

erhalten alle durch Deformationen (I) aus dem vorgegebenen Gitter entstehenden P-Gitter, indem wir entweder

a) die Rand-Streckenzüge AB und AD (— in Fig. 4a stark ausgezogen —) oder

b) den diagonalen Zickzackzug AC (— in Fig. 4b stark ausgezogen —) unter Festhaltung der Seitenlängen s', s'' und der Windungswinkel ω', ω'' beliebig deformieren. Man kann dann nämlich ausgehend von den gegebenen Streckenzügen die Gittermaschen Schritt für Schritt folgendermaßen konstruieren:

Wir nehmen an, die Gitterkonstruktion in Fig. 4a sei bereits bis an die Streckenzüge $Q_1Q_2Q_3$, $Q_1Q_4Q_5$ durchgeführt. Um die Ecke Q_6 festzulegen, hat man das Dreieck $Q_2Q_4Q_6$ lediglich um die Seite Q_2Q_4 solange zu drehen, bis die Ecke Q_6 in die Berührebene Q_1Q_2R fällt. Dann hat die neu konstruierte Gittermasche $Q_1Q_4Q_6Q_2$ an der Seite Q_1Q_2 den vorgeschriebenen Windungswinkel ω'' und folglich nach Gl. (3) an der Seite Q_1Q_4 den Windungswinkel ω', d. h. Q_6 liegt auch in der Berührebene Q_1Q_4S. Dieselben Überlegungen gelten für Fig. 4b.

Im Fall (b) sind als bemerkenswerter Sonderfall die P-Gitter mit Drehsymmetrie und Schraubensymmetrie enthalten. Bei diesen gehen die Streckenpaare des diagonalen Streckenzuges aus dem ersten Streckenpaar ANM durch Drehungen bzw. Schraubungen einer diskontinuierlichen Gruppe hervor. Bei entsprechender Fortsetzung wird das gesamte P-Gitter durch diese Drehungen bzw. Schraubungen in sich transformiert.

Wir fassen die Ergebnisse in folgenden Sätzen zusammen unter Gegenüberstellung der analogen differentialgeometrischen Beziehungen:

a) Ein vorgegebenes P-Gitter kann unter Festhaltung der Längen der Gitterseiten und der Windungen der Streckenzüge und demnach auch des Krümmungsmaßes der Gittermaschen kontinuierlich so deformiert werden, daß es dabei stets P-Gitter bleibt. Die sich ergebenden P-Gitter sind jeweils festgelegt durch Vorgabe der Rand-Streckenzüge AB und AD, deren Seitenlängen und Windungswinkel stets dieselben sind wie beim Ausgangsgitter, deren Krümmungswinkel jedoch willkürlich gewählt werden dürfen.

Eine vorgegebene pseudosphärische Fläche kann unter Festhaltung der Längen und Windungen der Asymptotenlinien und demnach auch des Krümmungsmaßes kontinuierlich deformiert werden, wobei die Fläche stets pseudosphärische Fläche bleibt. Die sich ergebenden pseudosphärischen Flächen sind (— in einem Asymptotenlinien-Viereck $ABCD$ —) jeweils festgelegt durch Vorgabe der beiden sich schneidenden Asymptotenlinien AB und AD, deren entgegengesetzt gleiche Windungen durch das Krümmungsmaß der Fläche bestimmt sind und deren Krümmungen willkürlich gewählt werden dürfen.

b) Ein vorgegebenes P-Gitter läßt sich unter Festhaltung der

Eine vorgegebene pseudosphärische Fläche kann unter Fest-

Längen der Gitterseiten und der Windungen der Streckenzüge und demnach auch des Krümmungsmaßes der Gittermaschen in unendlich viele drehsymmetrische und schraubensymmetrische P-Gitter deformieren.

haltung der Längen und Windungen der Asymptotenlinien und demnach auch des Krümmungsmaßes in unendlich viele pseudosphärische Drehflächen und Schraubenflächen deformiert werden.

5. Deformationen der P-Gitter mit Erhaltung der Streckenzugwindungen und der Gitterwinkel.

Wir gehen nun zu den Deformationen des Falles (II) über, bei denen anstelle der Seitenlängen die Gitterwinkel ungeändert bleiben sollen.

Bezeichnet man mit $\bar{\omega}', \bar{\omega}'', \bar{s}', \bar{s}''$ die Windungswinkel und Seitenlängen der deformierten P-Gitter, so liefert die Forderung der Erhaltung der Windungen nach Gl. (3) die Bedingungen

$$\frac{\sin\bar{\omega}'}{\bar{s}'} = \frac{\sin\omega'}{s'} = w = \text{const},$$

(8)

$$\frac{\sin\bar{\omega}''}{\bar{s}''} = \frac{\sin\omega''}{s''} = -w = \text{const}.$$

Die Forderung der Erhaltung der Gitterwinkel führt nach Gl. (4) zur Bedingung

$$\text{(9)} \qquad \operatorname{tg}\frac{\bar{\omega}'}{2}\cdot\operatorname{tg}\frac{\bar{\omega}''}{2} = \operatorname{tg}\frac{\omega'}{2}\cdot\operatorname{tg}\frac{\omega''}{2} = c = \text{const}.$$

Die Bedingungen (8) und (9) werden erfüllt durch den Ansatz

$$\text{(10)} \qquad \boxed{\begin{aligned} &\operatorname{tg}\frac{\bar{\omega}'}{2} = \lambda\cdot\operatorname{tg}\frac{\omega'}{2}, \qquad \operatorname{tg}\frac{\bar{\omega}''}{2} = \frac{1}{\lambda}\operatorname{tg}\cdot\frac{\omega''}{2}, \\ &\bar{s}' = s'\cdot\frac{\sin\bar{\omega}'}{\sin\omega'} = \lambda s'\cdot\frac{1}{\cos^2\dfrac{\omega'}{2}+\lambda^2\sin^2\dfrac{\omega'}{2}}, \\ &\bar{s}'' = s''\cdot\frac{\sin\bar{\omega}''}{\sin\omega''} = \frac{1}{\lambda}s''\cdot\frac{1}{\cos^2\dfrac{\omega''}{2}+\dfrac{1}{\lambda^2}\sin^2\dfrac{\omega''}{2}}. \end{aligned}}$$

Er legt zusammen mit den gegebenen Gitterwinkeln α, β ein P-Gitter fest. Dabei ist $\lambda \neq 0$ ein beliebiger Parameter, $\lambda = 1$ entspricht dem Ausgangsgitter.

Für das Krümmungsmaß der Gittermaschen und die Krümmungen der Streckenzüge folgt aus den Gln. (7) und (1)

$$(11)\quad \bar{K} = K\,\frac{\cos^2\frac{\omega'}{2}\cdot\cos^2\frac{\omega''}{2}}{\cos^2\frac{\bar{\omega}'}{2}\cdot\cos^2\frac{\bar{\omega}''}{2}} = K\left(\cos^2\frac{\omega'}{2}+\lambda^2\sin^2\frac{\omega'}{2}\right)\left(\cos^2\frac{\omega''}{2}+\frac{1}{\lambda^2}\sin^2\frac{\omega''}{2}\right)$$

und

$$(12)\quad \begin{aligned}\bar{k}' &= \frac{\sin\varkappa'}{\bar{s}'} = \frac{1}{\lambda}\,k'\left(\cos^2\frac{\omega'}{2}+\lambda^2\sin^2\frac{\omega'}{2}\right),\\ \bar{k}'' &= \frac{\sin\varkappa''}{\bar{s}''} = \lambda\,k''\left(\cos^2\frac{\omega''}{2}+\frac{1}{\lambda^2}\sin^2\frac{\omega''}{2}\right);\end{aligned}$$

in Gl. (12) ist von der Tatsache Gebrauch gemacht, daß bei ungeänderten Gitterwinkeln α, β auch die Krümmungswinkel $\varkappa'$, $\varkappa''$ ungeändert bleiben.

Wir setzen zur Abkürzung

$$(13)\quad g' = \cos^2\frac{\omega'}{2}+\lambda^2\sin^2\frac{\omega'}{2},\quad g'' = \cos^2\frac{\omega''}{2}+\frac{1}{\lambda^2}\sin^2\frac{\omega''}{2}$$

und fassen die Ergebnisse in folgendem Satz zusammen:

Ein vorgegebenes P-Gitter kann unter Festhaltung der Gitterwinkel und der Windungen der Streckenzüge in eine 1-parametrige Schar (Parameter λ) von P-Gittern deformiert werden. Dabei werden die Seitenlängen und Krümmungen der Streckenzüge und das Krümmungsmaß der Gittermaschen gemäß

$$\bar{s}' = \lambda\,s'\Big/g',\ \bar{s}'' = \frac{1}{\lambda}\,s''\Big/g'',$$

$$\bar{k}' = \frac{1}{\lambda}\,k'\,g',\ \bar{k}'' = \lambda\,k''\,g'',$$

$$\bar{K} = K\,g'\,g''$$

verändert; für $\omega'\to 0$, $\omega''\to 0$ wird $g' = g'' = 1$ (vergl. Ziff. 7).

Eine vorgegebene pseudosphärische Fläche kann unter Festhaltung der Schnittwinkel und Windungen der Asymptotenlinien in eine 1-parametrige Schar von pseudosphärischen Flächen deformiert werden (Parameter λ). Dabei ändern sich die Bogenlängen und Krümmungen der Asymptotenlinien gemäß

$$\bar{s}' = \lambda\,s',\ \bar{s}'' = \frac{1}{\lambda}\,s',$$

$$\bar{k}' = \frac{1}{\lambda}\,k',\ \bar{k}'' = \lambda\,k''.$$

Das Krümmungsmaß der Fläche bleibt ungeändert.

Diese Deformationen werden nach S. Lie[4]) benannt.

6. Parallele P-Gitter und V-Gitter.

Zu jedem P-Gitter lassen sich parallel bezogene sogenannte *V-Gitter* folgendermaßen konstruieren (Fig. 5):

[4]) Vergl. z. B. L. Bianchi: Geometria differenziale 1. 2. Bologna 1927. § 249.

Jeder Seite des P-Gitters entspricht eine parallele Seite des V-Gitters. Den vier Seiten der (i. allg. windschiefen) Parallelogramm-Maschen des P-Gitters (z. B. 2, 8, 5, 11) entsprechen die vier Arme der (i. allg. nicht ebenen) Viererkreuze (z. B. 2*, 8*, 5*, 11*) des V-Gitters und den 4 Armen der stets ebenen Viererkreuze des P-Gitters (z. B. 1, 7, 2, 8) entsprechen die vier Seiten der stets ebenen Gittermaschen (z. B. 1*, 7*, 2*, 8*) des V-Gitters. Während also im P-Gitter die Viererkreuze eben und die Maschen i. allg. windschief sind, hat man im V-Gitter lauter ebene Viereckmaschen und i. allg. nicht ebene

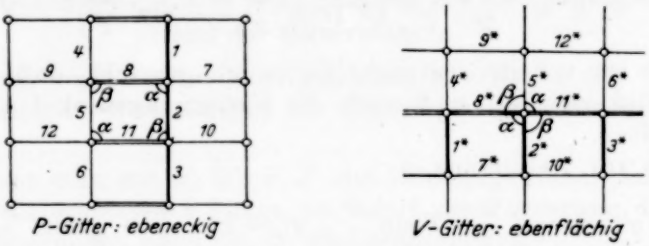


Fig. 5: Schematische Skizze paralleler P-Gitter und V-Gitter.

Viererkreuze. Den Seiten eines Streckenzugs des einen Gitters entsprechen im anderen Gitter Querseitenfolgen und umgekehrt (z. B. 1, 2, 3 und 1*, 2*, 3*).

Die Maschen des V-Gitters sind i. allg. nicht Parallelogramme. Die Viererkreuze der V-Gitter (Fig. 6) haben paarweise gleiche Kantenwinkel α, β, die den Gitterwinkeln des P-Gitters gleich sind, und paarweise gleiche Keilwinkel ω', ω'', welche den Windungswinkeln des P-Gitters gleich sind.

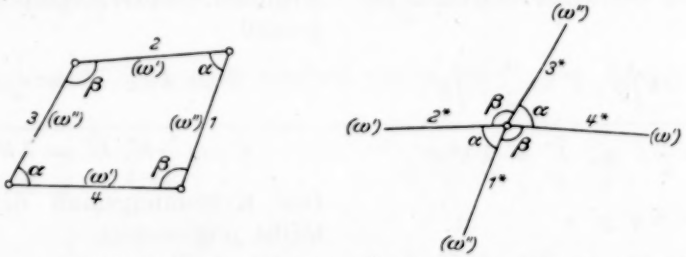


Fig. 6: Windschiefes Parallelogramm und paralleles scheitelwinkelgleiches Vierkant.

Zu einem vorgegebenen P-Gitter gibt es unendlich viele parallele V-Gitter. Eines dieser V-Gitter ist festgelegt, wenn man die Seitenlängen für 2 sich schneidende Streckenzüge vorschreibt. Die Seitenlängen haben nicht wie bei den P-Gittern zwei feste Werte s', s'', sondern sind i. allg. für alle Gitterseiten verschieden.

Die Viererkreuze der V-Gitter haben wegen der Gleichheit der Scheitelwinkel folgende besondere Eigenschaft: Die Schmiegebenen

der beiden sich im Kreuzmittelpunkt schneidenden Streckenzüge (z. B. die Ebenen 1* 3* und 2* 4* in Fig. 6) schneiden sich in der gemeinsamen Winkelhalbierenden der Streckenpaare 1* 3* und 2* 4*. Wir bezeichnen diese gemeinsamen Winkelhalbierenden als *Normalen* des Gitters und stellen einander gegenüber

die *V-Gitter*, beide denen die Gittermaschen ebenflächig sind und die Schmiegebenen der Streckenzüge durch die Normalen des Gitters hindurchgehen.

die *Voss-Flächen*[5]) mit einem konjugierten Kurvennetz, das von zwei Scharen geodätischer Linien (d. h. von Kurven, deren Schmiegebenen durch die Flächennormalen gehen) erzeugt wird.

Zu dieser Gegenüberstellung ist folgendes zu bemerken: In Ziff. 1 hatten wir festgestellt, daß die Sehnenviereckgitter der Asymptotenliniennetze bei unbegrenzter Verengerung gegen Viereckgitter mit ebenen Viererkreuzen (und i. allg. nicht ebenen Vierecken) streben. Die Sehnenviereckgitter der konjugierten Kurvennetze streben umgekehrt gegen Viereckgitter mit ebenen Vierecken (und i. allg. nicht ebenen Viererkreuzen).

Wir betrachten nun ein vorgegebenes *P*-Gitter und unterziehen dieses *P*-Gitter einer kontinuierlichen Deformation im Sinne von Ziff. 5 mit Festhaltung der Gitterwinkel. Zu jedem der bei diesen Deformationen entstehenden *P*-Gitter existieren parallele *V*-Gitter. Alle diese *V*-Gitter stimmen in den Kantenwinkeln überein und bei Festhaltung der Seitenlängen zweier sich schneidender Streckenzüge außerdem in den sämtlichen Seitenlängen. Es bleiben also sämtliche Viereckmaschen des *V*-Gitters nach Gestalt und Größe erhalten, d. h. die den *P*-Gittern parallel entsprechenden *V*-Gitter gehen durch kontinuierliche Verknikkungen auseinander hervor. Wir fassen zusammen:

Zu jeder Schar deformierter *P*-Gitter mit festgehaltenen Gitterwinkeln existiert eine Schar parallel bezogener *V*-Gitter, die durch Verknickung auseinander hervorgehen.

Zu jeder Schar durch Lie-Deformation im Sinne von Ziff. 5 aufeinander bezogener pseudosphärischer Flächen existiert eine Schar parallel bezogener Voss-Flächen, die durch Verbiegung auseinander hervorgehen.

7. Grenzübergang der P-Gitter in pseudosphärische Flächen.

Die in der vorliegenden Arbeit aufgezeigten Analogien zwischen den *P*-Gittern und *V*-Gittern einerseits und den pseudosphärischen

[5]) A. Voss: Über diejenigen Flächen, auf denen geodätische Linien ein konjugiertes System bilden. Münchener Akademieberichte 1888. Vergl. hierzu auch P. Stäckel: Über Biegungen und konjugierte Systeme. Mathem. Annalen 49, 1896, sowie
R. Sauer - H. Graf: Über Flächenverbiegung usw., Math. Ann. 105, 1931, S. 533.

Flächen und Voss'schen Flächen andrerseits sind begründet in der Möglichkeit, die P-Gitter durch einen Grenzprozess in die Asymptotenliniennetze der pseudosphärischen Flächen überzuführen. Wir definieren diesen Grenzprozeß folgendermaßen:

Vorgegeben sind zwei stetige Funktionen $k'(s) \neq 0$ und $k''(s) \neq 0$, eine Konstante $w \neq 0$ und ein Winkel $\alpha \neq 0$. Nach Wahl zweier hinreichend kleiner positiver Zahlen s' und s'' konstruieren wir sodann zwei Streckenzüge AB und AD mit den konstanten Seitenlängen und Windungen s' und w bzw. s'' und $(-w)$ sowie den Krümmungen $k'(s')$, $k'(2s')$, ..., $k'(ms')$ bzw. $k'(s'')$, $k''(2s'')$, ..., $k''(ns'')$. Wir legen diese beiden Streckenzüge (vergl. Fig. 4a) so in den Raum, daß sie den Punkt A gemeinsam haben und dort den Winkel α bilden; außerdem soll die Ebene des Winkels α mit der ersten Schmiegebene eines jeden der beiden Streckenzüge zusammenfallen. Wir konstruieren hierauf nach Ziff. 4 im Anschluß an die Streckenzüge AB und AD das P-Gitter $ABCD$ und wiederholen die ganze Konstruktion unbegrenzt oft mit fortgesetzter Halbierung der Seitenlängen s' und s''.

Bei diesem Grenzprozeß streben die Streckenzüge AB und AD gegen zwei Kurven, welche durch die natürlichen Gleichungen

$$k' = k'(s), \quad w' = w = \text{const} \qquad \text{bzw.} \qquad k'' = k''(s), \quad w'' = -w = \text{const}$$

gegeben sind und sich im gemeinsamen Anfangspunkt A unter dem Winkel α schneiden und in A dieselbe Schmiegebene haben. Ebenso streben alle anderen Streckenzüge der P-Gitter gegen Raumkurven mit stetiger Krümmung und konstanten, entgegengesetzt gleichen Windungen und gemeinsamen Schmiegebenen in den Schnittpunkten und liefern als Erzeugnis dieser Raumkurven eine Fläche.

Die Schmiegebenen, Windungen und Krümmungen der Streckenzüge der P-Gitter des oben angegebenen Grenzprozesses konvergieren gegen die Schmiegebenen, Windungen und Krümmungen der als Limes sich ergebenden Raumkurven, die Normalen und das Krümmungsmaß der P-Gitter konvergieren gegen die Normalen und das Krümmungsmaß der als Limes sich ergebenden Fläche; infolgedessen sind die Raumkurven Asymptotenlinien der Fläche und das Krümmungsmaß der Fläche ist konstant, d. h. die Fläche ist eine pseudosphärische Fläche. Die Windungswinkel ω', ω'' streben (— ebenso wie die Krümmungswinkel —) gegen Null, woraus sofort $f \to 1$ (vergl. Ziff. 3) und $g' \to 1$, $g'' \to 1$ (vergl. Ziff. 5) folgt.

Auf die Wiedergabe der Konvergenzbeweise für den Grenzprozeß, die keinerlei grundsätzliche Schwierigkeiten bieten, soll an dieser Stelle verzichtet werden.

Wenn man bei dem angegebenen Grenzprozeß zu den P-Gittern die parallel bezogenen V-Gitter mit hinzunimmt, erhält man gleichzeitig die Voss'schen Flächen als Limes von Folgen von V-Gittern.

(Eingegangen am 7. Oktober 1949.)

Über das Theorem von F. Schur in der Riemannschen Geometrie.

Herrn Oskar Perron zum 70. Geburtstag am 7. Mai 1950 gewidmet.

Von

E. Bompiani in Rom (Italien).

1. Diese Abhandlung verfolgt den Zweck, einen neuen Beweis des klassischen Theorems von F. Schur über die Riemannschen Mannigfaltigkeiten zu geben: Wenn die Riemannsche Krümmung hinsichtlich einer Ebenenrichtung [1]) in jedem Punkt bei Änderung dieser Richtung konstant bleibt, so geschieht dies auch bei Änderung des Punktes selbst (d. h. die Mannigfaltigkeit hat konstante Krümmung). Die üblichen Beweise beruhen auf den Differentialidentitäten von L. Bianchi (für den Riemannschen Tensor) und beschränken sich im wesentlichen auf eine Probe; der folgende hat mehr geometrischen Charakter und ist hauptsächlich auf dem Parallelismus von T. Levi-Civita begründet.

Ich ergreife die Gelegenheit, auch einen mehr geometrischen Beweis der bekannten Tatsache zu geben, daß eine Hyperfläche eines Euklidischen Raumes nicht eine konstante negative Krümmung haben kann.

2. Es sei

$$ds^2 = g_{ik}(x)\,dx^i\,dx^k \tag{2.1}$$

die nicht entartete quadratische Form, die die Riemannsche Metrik definiert (alle Indizes laufen von 1 bis zur Dimension n der Mannigfaltigkeit).

Mit den üblichen Bezeichnungen seien außerdem

$$\Gamma_{ihk} = \tfrac{1}{2}\,(\partial_k g_{ih} + \partial_h g_{ik} - \partial_i g_{hk}), \tag{2.2}$$

$$\Gamma^i_{hk} = \tfrac{1}{2}\,g^{ri}(\partial_k g_{rh} + \partial_h g_{rk} - \partial_r g_{hk}) \tag{2.3}$$

die Christoffelschen Symbole 1-ter und 2-ter Art und

$$R_{hlk}{}^{i} = \partial_h \Gamma^i_{lk} - \partial_l \Gamma^i_{hk} + \Gamma^i_{ht}\Gamma^t_{lk} - \Gamma^i_{lt}\Gamma^t_{hk}, \tag{2.4}$$

$$R_{hl,ki} = g_{ri} R_{hlk}{}^{r} \tag{2.5}$$

die Komponenten des Riemannschen Tensors.

[1]) Oder Flächenelement, oder „F_2-Richtung". S. Duschek-Mayer, *Lehrbuch der Differentialgeometrie*, Bd. II (Teubner, 1930), S. 127.

Eine aus einem Punkt der Mannigfaltigkeit ausgehende Ebenenrichtung sei durch zwei Geradenrichtungen ξ, η bestimmt, die wir orthogonal annehmen und die durch ihre Parameter ξ^i, η^i dargestellt werden. Es sei außerdem ζ mit den Parametern ζ^i eine beliebige Geradenrichtung, die ebenfalls vom Punkt ausgeht (Zentrum der Ebenenrichtung).

Die Krümmung des Flächenelementes ist bekanntlich

$$K = R_{hk,rs}\,\xi^h \eta^k \xi^r \eta^s. \tag{2. 6}$$

Wir wollen die Variation δK berechnen, wenn sich das Flächenelement mit dem Parallelismus von Levi-Civita in der Richtung ζ verschiebt, im Verhältnis zum Bogenelement δs in dieser Richtung.

Da die Parallelverschiebung einer Richtung ξ längs einer Richtung ζ durch

$$\frac{\delta \xi^h}{\delta s} = -\Gamma^h_{pq}\,\xi^p \zeta^q \tag{2. 7}$$

gegeben wird, so findet man leicht, daß die gesuchte Variation

$$\frac{\delta K}{\delta s} = \Delta_e R_{hk,rs}\,\xi^h \eta^k \xi^r \eta^s \zeta^l \tag{2. 8}$$

beträgt, worin

$$\Delta_l R_{hk,rs} = \partial_l R_{hk,rs} - R_{tk,rs}\Gamma^t_{lh} - R_{ht,rs}\Gamma^t_{lk} - R_{hk,ts}\Gamma^t_{lr} - R_{hk,rt}\Gamma^t_{ls} \tag{2. 9}$$

die kovariante Ableitung von $R_{hk,rs}$ ist.

3. Die Beziehung (2. 8) gibt die Möglichkeit, einige Probleme zu lösen, die sich spontan (für $n \geqq 3$) ergeben.

Wenn man ein Flächenelement (ξ, η) festlegt, so genügen die Richtungen ξ, für die die Variation der Krümmung Null ist, der in ζ^l linearen Gleichung

$$\Delta_l R_{hk\ rs}\,\xi^h \eta^k \xi^r \eta^s \zeta^l = 0. \tag{3. 1}$$

Dies bedeutet:

Die Richtungen, für die die Variation der Krümmung eines bestimmten Flächenelementes Null ist, gehören einer Richtung von $n-1$ Dimensionen an (oder bilden ein lineares System ∞^{n-1}), das durch das Flächenelement bestimmt ist.

Man lege jetzt eine Richtung ξ und eine Richtung ζ fest und man frage, ob unter den Flächenelementen die durch ξ gehen, solche vorhanden sind, die ihre Krümmung bei Verschiebung in der Richtung ξ unverändert behalten.

Es handelt sich im Grunde darum, die η^i aus (3. 1) zu bestimmen. Diese Gleichung ist in den η^i quadratisch; außerdem gehört die Richtung η, die senkrecht auf ξ genommen wurde, der $(n-1)$-dimensionalen Richtung S_{n-1} an, die ihrerseits senkrecht auf ξ ist. Daher beschreiben die gesuchten Richtungen η einen Kegel 2-ter Ordnung im S_{n-1}. Es ergibt sich also:

In einer Riemannschen *Mannigfaltigkeit von $n \geqq 3$ Dimensionen existieren ∞^{n-3} Flächenelemente, die durch eine festgelegte Richtung ξ gehen und die auch bei Parallelverschiebung in einer gegebenen Richtung ζ zu Flächenelementen derselben Krümmung der Anfangselemente Anlaß geben. Diese Flächenelemente bilden einen quadratischen Kegel von der Dimension $n-1$, der ξ als Scheitel besitzt.*

Hieraus folgt sofort das Schursche Theorem. Wenn man in der Tat ein Flächenelement mit dem Zentrum x betrachtet, kann man immer ein Flächenelement bezüglich des Punktes $x + \delta x$ ($\delta x^i / \delta s = \zeta^i$) finden, das dieselbe Krümmung hat (wie wir gesehen haben, existieren ∞^{n-3} solche Flächenelemente). Wenn alle Flächenelemente durch $x + \delta x$ die gleiche Krümmung haben (d. h. wenn die Mannigfaltigkeit isotrop ist), so ist sie notwendigerweise gleich der Krümmung der Flächenelemente durch x. Und dies ist das Schursche Theorem.

5. Bezüglich des Kegels 2-ter Ordnung (Nr. 3) der Flächenelemente, die durch ζ gehen und derart sind, daß sie bei Verschiebung in der Richtung ξ ihre Krümmung unverändert behalten, kann man weitere invariante Begriffe einführen.

Wenn man ξ festlegt, so kann man nach den Richtungen ζ fragen, für die jener Kegel entartet ist (d. h. als Scheitel ein zweidimensionales Flächenelement hat).

Wenn man

$$\Phi_{ks}(\xi, \zeta) = \Phi_{sk}(\xi, \zeta) = \Delta_1 R_{hk,rs} \xi^h \xi^r \zeta^t$$

setzt, genügen die gesuchten Richtungen ζ der Gleichung

$$\text{Det. } \Phi_{ks}(\xi, \zeta) = 0,$$

d. h. ihr geometrischer Ort ist ein Kegel n-ter Ordnung.

Dieser Kegel ist ein geometrisches Gebilde, das an eine Richtung (nämlich ξ) gebunden ist.

Wenn die Richtung ξ *nicht* festgelegt ist, kann man der letzten Gleichung genügen, in dem man $\xi = \zeta$ setzt; man hat einen Kegel der Ordnung $3n$, der nur vom Punkt (und seiner Umgebung 4-ter Ordnung) abhängt.

Jede Erzeugende dieses Kegels ist dadurch gekennzeichnet, daß der Kegel der durch sie gehenden Flächenelemente, die bei Verschiebung in der Richtung der Erzeugenden ihre Krümmung unverändert behalten, entartet ist.

6. Ich benutze die Gelegenheit, um einen geometrischen Beweis der bekannten Tatsache zu geben, daß eine V_n im euklidischen S_{n+1} nicht konstante negative Krümmung haben kann.

Man beachte vor allem, daß eine geodätische Kalotte 2-ter Ordnung mit gegebener Richtung (d. h. der die Elemente 2-ter Ordnung der geodätischen, an jene Ebenen-Richtung tangentialen Linien angehören) in einem S_3 liegt: und zwar dem durch die Richtung und die Normale

auf V im Punkte, dem Zentrum dieser Richtung bestimmten S_3. Diese Kalotte besitzt daher (wie jede Kalotte des S_3) zwei asymptotische Tangenten, die der Schnitt ihrer Tangentialebene mit dem Asymptotenkegel der V_n im Punkt ist.

Diese Tangenten sind reell und verschieden, wenn die Kalotte negative Krümmung hat und umgekehrt; und diese Krümmung ist die Riemannsche Krümmung des V_n nach der Richtung der Kalotte.

Wenn im Punkt eine Richtung mit negativer Krümmung vorhanden ist, so hat jener Asymptotenkegel sicherlich reelle Erzeugende. Dann bestimmt aber ein S_3 durch die Normale der V im Punkt und durch eine Tangentialebene längs einer dieser Erzeugenden an den Asymptotenkegel eine Kalotte verschwindender Krümmung. Und dies schließt die Möglichkeit aus, daß für alle Richtungen die Krümmung negativ ist. Es folgt sogar:

Wenn in einem Punkt einer V_n eines euklidischen S_{n+1} eine Richtung negativer Krümmung vorhanden ist, so existieren sicher auch Richtungen mit verschwindender und mit positiver Krümmung.

(Eingegangen am 18. November 1949.)

Über die Vollständigkeit einer Klasse lokalkonvexer Räume.

Herrn Oskar Perron zum 70. Geburtstag am 7. Mai 1950 gewidmet.

Von

Gottfried Köthe in Mainz.

In einer demnächst erscheinenden Arbeit [2] führen J. Dieudonné und L. Schwartz eine Klasse lokalkonvexer linearer topologischer Räume ein, die sie Räume vom Typus (LF) nennen. Die Vollständigkeit dieser Räume wird unter Heranziehung tiefliegender Sätze aus der Theorie der lokalkonvexen Räume bewiesen. Es ist das Ziel der vorliegenden Note, diesen Satz auf einem einfachen Wege zu beweisen, der es erlaubt, die Frage der Vollständigkeit gleich für eine allgemeinere Klasse lokalkonvexer Räume zu untersuchen. Wir benützen im Wesentlichen die Terminologie von [2].

Es sei $E_1 \subset E_2 \subset \ldots$ eine echt aufsteigende Folge komplexer linearer lokalkonvexer Räume[1]) mit den Topologien $\mathfrak{T}_n$ und es sei die durch $\mathfrak{T}_{n+1}$ in E_n induzierte Topologie nicht feiner als $\mathfrak{T}_n$. Dann läßt sich in der Vereinigungsmenge E der E_n, die wieder ein linearer Raum ist, folgendermaßen eine Topologie $\mathfrak{T}$ einführen. Sind $W_1, W_2, \ldots$ absolutkonvexe Umgebungen der 0 in $E_1, E_2, \ldots$ bezüglich der Topologien $\mathfrak{T}_1, \mathfrak{T}_2, \ldots$, so bilde man die absolutkonvexe Hülle $W = \overset{\infty}{\Gamma}_{n=1} W_n$ der Vereinigungsmenge der W_n. Alle so entstehenden Mengen W werden als Umgebungen der 0 in E eingeführt und bestimmen offenbar in E eine Topologie $\mathfrak{T}$, durch die E lokalkonvex wird.

$\mathfrak{T}$ ist die feinste aller lokalkonvexen Topologien $\mathfrak{T}^*$ von E, die in jedem E_n eine weniger feine Topologie als $\mathfrak{T}_n$ induzieren:

Ist nämlich V eine absolutkonvexe Umgebung der Null in $\mathfrak{T}^*$, so ist $V_n = V \cap E_n$ eine absolutkonvexe Umgebung in $\mathfrak{T}_n$, also $V = \overset{}{\Gamma}_n V_n$. Die durch die Menge *aller* $\overset{}{\Gamma}_n W_n$, W_n eine absolutkonvexe Umgebung der Null in $\mathfrak{T}_n$, erzeugte Topologie $\mathfrak{T}$ ist also feiner als $\mathfrak{T}^*$.

Wir wollen den so definierten lokalkonvexen Raum E als die *lokalkonvexe Hülle* der monoton wachsenden Folge E_n bezeichnen. Diese

[1]) Ein komplexer linearer Raum heißt lokalkonvex, wenn er ein linearer topologischer Raum ist mit einer Umgebungsbasis $\{W\}$ aus absolutkonvexen W (d. h. mit x, y sind auch alle $\alpha x + \beta y$ in W, α, β komplex, $|\alpha| + |\beta| \leq 1$). Die Ergebnisse dieser Note gelten auch für reelle lokalkonvexe Räume, man hat dann stets symmetrische konvexe Umgebungen zu betrachten.

Definition ist eine Verallgemeinerung der Definition der Räume vom Typus (LF), die die lokalkonvexe Hülle einer Folge von lokalkonvexen Räumen E_n vom Typus (F) sind unter der zusätzlichen Voraussetzung, daß $\mathfrak{T}_{n+1}$ in E_n jeweils genau die Topologie $\mathfrak{T}_n$ induziert. Für Räume vom Typus (LF) wird in [2] bewiesen, daß sie separiert sind (prop. 2). Dieser Beweis gilt auch noch für den Fall, daß die E_n nur als separiert und vollständig vorausgesetzt werden und die in E_n durch $\mathfrak{T}_{n+1}$ induzierte Topologie $\mathfrak{T}_n$ ist.

Wann die lokalkonvexe Hülle separierter E_n wieder separiert ist, ist noch ungeklärt. In vielen Fällen ist sie es jedenfalls, so z. B. wenn die E_n vollkommene Räume sind und die Vereinigung in ω vollzogen wird (vgl. etwa [3]).

Wir erinnern daran, daß ein linearer separierter topologischer Raum E vollständig heißt, wenn jeder Cauchyfilter in E einen Limes in E hat (vgl. [1]). Es gilt nun der

Satz. *Ist der separierte lokalkonvexe Raum E die lokalkonvexe Hülle der Folge $E_1 \subset E_2 \subset \ldots$ separierter lokalkonvexer Räume E_n, so ist E dann und nur dann vollständig, wenn für jedes n jeder Cauchyfilter in E mit einer nur aus Teilmengen von E_n bestehenden Filterbasis in einem geeigneten E_{n+k} einen Limes hat.*

Die Bedingung ist offenbar notwendig. Sie sei umgekehrt erfüllt. Ist dann ein Cauchyfilter in E gegeben, so enthält er zu jeder absolutkonvexen Umgebung W der Null wenigstens eine Menge F_W, die klein von der Ordnung W ist, d. h. $x - y \in W$ für alle x, y aus F_W. Zu jeder solchen Menge F_W bilden wir die Menge F'_W aller y mit $y - x \in W$, x irgend ein Element aus F_W. Dann ist F'_W klein von der Ordnung $3W$, denn für y_1, y_2 aus F'_W gilt $y_1 - y_2 = (y_1 - x_1) + (x_1 - x_2) - (y_2 - x_2)$ mit $x_1, x_2 \in F_W$ und jeder der drei Summanden liegt in W. Der Durchschnitt zweier F'_{W_1} und F'_{W_2} enthält die aus $F_{W_1} \cap F_{W_2} = F$, einer Menge des Filters klein von der Ordnung $W_1 \cap W_2$, gebildete Menge $F'_{W_1 \cap W_2}$. Da die Umgebungen $3W$ eine Umgebungsbasis bilden, wenn W alle absolutkonvexen Umgebungen der Null durchläuft, hat der gegebene Filter auch die Menge aller F'_W als Basis.

Wir betrachten die Menge aller $F'_W \cap E_n$ für festes n. Sind alle $F'_W \cap E_n \neq 0$, so bilden sie eine Filterbasis, deren Mengen Teilmengen von E_n sind. Nach Voraussetzung hat dieser Filter einen Limes in einem E_{n+k}. Wir können daher annehmen, daß dies für kein n zutrifft. Dann gibt es also eine Folge $W^{(1)} \supset W^{(2)} \supset \ldots$ von absolutkonvexen Umgebungen der Null in E und dazu Mengen $F^{\circ}_{W^{(i)}}$ mit

$$F^{\circ}_{W^{(i)}} \cap E_i = 0, \quad i = 1, 2, \ldots. \tag{1}$$

Wir setzen $W^{(i)} \cap E_n = W^{(i)}_n$. $W^{(i)}_n$ ist absolutkonvex und ist eine Nullumgebung von E_n bezüglich $\mathfrak{T}_n$. Wir bilden die Umgebungen

$$V^{(i)} = \Gamma\left(\tfrac{1}{2} W^{(1)}_1 \cup \tfrac{1}{2} W^{(2)}_2 \cup \ldots \cup \tfrac{1}{2} W^{(i-1)}_{i-1} \cup W^{(i)}\right),$$

wobei wieder Γ die absolutkonvexe Hülle bedeutet. Wir behaupten, daß für jede Menge $F_{V^{(i)}}$ auch

$$F'_{V^{(i)}} \cap E_i = 0, \quad i = 1, 2, \ldots \tag{2}$$

gilt.

Da $F_{V^{(i)}} \cap F^{(i)}_{W^{(i)}} \neq 0$ ist, liegt in $F_{V^{(i)}}$ ein Element x_0 aus $F^{(i)}_{W^{(i)}}$. Jedes Element aus $F_{V^{(i)}}$ hat also die Form:

$$x_0 + \sum_{k=1} \alpha_k x_k, \; x_k \in \tfrac{1}{2} W^{(k)}_k \text{ für } k < i, \; x_i \in \tfrac{1}{2} W^{(i)}, \; \sum_1^i |\alpha_k| \leqq 1.$$

Also hat jedes Element z aus $F'_{V^{(i)}}$ die Form $z = x_0 + \sum_1^i \alpha_k x_k + \sum_1^i \alpha'_k x'_k$, $\sum_1^i \alpha'_k x'_k$ ebenfalls ein Element aus $V^{(i)}$. Nun ist

$$\alpha_i x_i + \alpha'_i x' \subset \tfrac{1}{2} W^{(i)} + \tfrac{1}{2} W^{(i)} \subset W^{(i)},$$

also ist, da $x_0 \in F^{(i)}_{W^{(i)}}$ ist, wegen (1) das Element $x_0 + \alpha_i x_i + \alpha'_i x'_i$ nicht in E_i. Andererseits liegt $\sum_1^{i-1} \alpha_k x_k + \sum_1^{i-1} \alpha'_k x'_k$ in E_{i-1}, also liegt auch z nicht in E_i, damit ist (2) bewiesen.

Wir bilden nun die absolutkonvexe Umgebung $U = \Gamma \sum_n \frac{1}{2} W^{(n)}_n$. Es ist $U \subset V^{(i)}$ für jedes i. Zu U gibt es eine Filtermenge F_U. Sei z_i aus E_i in F_U. Wir behaupten, daß dann $F_{V^{(i)}} \cap F_U = 0$ ist im Widerspruch zur Filtereigenschaft:

Ist $y \in F_{V^{(i)}}$, so enthält $y + V^{(i)}$ wegen (2) kein Element aus E_i, also ist $z_i - y \notin V^{(i)}$, also $z_i - y \notin U$, $y \notin F_U$, $F_{V^{(i)}} \cap F_U = 0$.

Folgerung. *Jeder Raum vom Typus* $(L\,F)$ *ist vollständig.*

In einem Raum vom Typus $(L\,F)$ induziert nach [2], prop. 2 die Topologie $\mathfrak{T}$ in jedem E_n die Topologie $\mathfrak{T}_n$, jeder Cauchyfilter mit einer Basis, deren Mengen Teilmengen von E_n sind, erzeugt also in E_n einen Cauchyfilter, der wegen der Vollständigkeit des (F)-Raumes E_n einen Limes bereits in E_n hat, aus dem Satz ergibt sich damit die Folgerung.

Dieselbe Schlußweise ergibt allgemeiner, daß die lokalkonvexe Hülle vollständiger $E_1 \subset E_2 \subset \ldots$ vollständig ist, wenn $\mathfrak{T}_{n+1}$ in E_n die Topologie $\mathfrak{T}_n$ induziert.

Nicht jeder separierte lokalkonvexe Raum E, der die lokalkonvexe Hülle einer Folge $E_1 \subset E_2 \subset \ldots$ von Räumen vom Typus (F) ist, ist vollständig, wie das folgende Beispiel zeigt, das in Analogie zu einem Beispiel in [4] § 2 gebildet ist.

Es sei $\mathfrak{d}^{(n)}$ der Vektor $\{1, n, n^2, n^3, \ldots\}$, ferner

$$\mathfrak{b}^{(1)} = \{\mathfrak{d}^{(1)}, \mathfrak{d}^{(1)}, \ldots\}$$
$$\mathfrak{b}^{(2)} = \{\mathfrak{d}^{(2)}, 2\,\mathfrak{d}^{(1)}, 2^2\,\mathfrak{d}^{(1)}, \ldots\}$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$\mathfrak{b}^{(n)} = \{\mathfrak{d}^{(n)}, n\,\mathfrak{d}^{(n-1)}, \ldots, n^{n-1}\,\mathfrak{d}^{(2)}, n^n\,\mathfrak{d}^{(1)}, n^{n+1}\,\mathfrak{d}^{(1)}, \ldots\}.$$

Die k-te Koordinate des i-ten Vektors aus $\mathfrak{b}^{(n)}$ werde mit $\beta^{(n)}_{ik}$ bezeichnet.

E_n sei der Raum aller Vektoren $\mathfrak{x} = \{\xi_{11}, \xi_{12}, \ldots; \xi_{21}, \xi_{22}, \ldots; \ldots\}$ mit konvergentem $\lim_{(i,k)\to\infty} \frac{\xi_{ik}}{\beta_{ik}^{(n)}}$, wobei die (i, k) irgendwie in eine Folge geordnet seien. Durch die Metrik $|\mathfrak{x}| = \sup \frac{|\xi_{ik}|}{\beta_{ik}^{(n)}}$ wird E_n isomorph dem (F)-Raum der konvergenten Folgen. E sei die lokalkonvexe Hülle der E_n, die offenbar separiert ist.

Der Vektor $\mathfrak{f} = \{1, -1, 1, \ldots; 1, -1, 1, \ldots; \ldots\}$ liegt in keinem E_n, wie leicht zu sehen, also nicht in E. Ist N eine endliche Menge von Indizespaaren (i, k), so sei $\mathfrak{f}_N$ der Vektor, der auf den Indizespaaren (i, k) aus N dieselben Koordinaten wie $\mathfrak{f}$ hat, sonst gleich $\tilde{0}$ ist. N_i durchlaufe speziell die Folge der endlichen Abschnitte der in eine Folge geordneten Indizespaare (i, k). Alle $\mathfrak{f}_{N_i}$ liegen als Nullfolgen sogar in E_1.

Wir zeigen, daß die Folge $\mathfrak{f}_{N_i}$ in E konvergent ist. Ist $B_{\varepsilon_n}^{(n)}$ die Menge aller $\mathfrak{x}$ aus E_n mit $|\xi_{ik}| \leqq \varepsilon_n \beta_{ik}^{(n)}$, so bilden alle Mengen $\Gamma_n B_{\varepsilon_n}^{(n)}$ eine Basis der Umgebungen der Null in E. Sei ein festes solches $\Gamma_n B_{\varepsilon_n}^{(n)}$ gegeben. Da die $\mathfrak{f}_{N_i}$ nur $+1$ und -1 als Koordinaten haben, gibt es ein $k > 0$, so daß der k-te Restvektor $\{0, \ldots, 0, \mathfrak{x}_k, \mathfrak{x}_{k+1}, \ldots\}$ jedes Vektors $\mathfrak{f}_{N_i} - \mathfrak{f}_{N_j} = \{\mathfrak{x}_1, \mathfrak{x}_2, \ldots\}$ in $\frac{1}{2} B_{\varepsilon_2}^{(2)}$ liegt. Ferner gibt es dann endlich viele Indizes in den ersten $k-1$ Abteilungen, so daß die $(k-1)$-ten Anfangsvektoren $\{\mathfrak{x}_1, \ldots \mathfrak{x}_{k-1}, 0, 0, \ldots\}$ aller $\mathfrak{f}_{N_i} - \mathfrak{f}_{N_j}$, deren N_i und N_j diese endlich vielen Indizes umfassen, in $\frac{1}{2} B_{\varepsilon_k}^{(k)}$ liegen (denn in den ersten $k-1$ Abteilungen wachsen ja die Koordinaten von $\mathfrak{b}^{(k)}$ jeweils über alle Grenzen). Also ist jedes $\mathfrak{f}_{N_i} - \mathfrak{f}_{N_j}$ von einem i_0 ab Summe zweier Nullfolgen aus $\frac{1}{2} B_{\varepsilon_2}^{(2)}$ bzw. $\frac{1}{2} B_{\varepsilon_k}^{(k)}$, also in $\Gamma_n B_{\varepsilon_n}^{(n)}$ gelegen, d. h. $\mathfrak{f}_{N_i}$ ist konvergent in E.

Eine in E konvergente Folge kann als Limes nur den koordinatenweisen Limes haben, also könnte nur $\mathfrak{f}$ der Limes von $\mathfrak{f}_{N_i}$ sein, E ist also unvollständig.

Literaturverzeichnis.

N. Bourbaki.

[1] Éléments de mathématique II, Actualités sc. et industr. Nr. 858, Paris 1940.

J. Dieudonné und L. Schwartz.

[2] La dualité dans les espaces (F) et (LF), erscheint in den Ann. de l'Université de Grenoble.

G. Köthe und O. Toeplitz.

[3] Lineare Koordinatenräume und Ringe unendlicher Matrizen. Journ. f. reine angew. Math. **171** (1934), S. 193—226.

G. Köthe.

[4] Die Stufenräume, eine einfache Klasse linearer vollkommener Räume. Math. Zeitschrift **51** (1948), S. 317—345.

(Eingegangen am 26. November 1949.)

On a summation method of O. Perron [1]).

OSKAR PERRON to his 70th birthday on May 7, 1950.

By

Otto Szász at Los Angeles (USA.)

Presented to the American Mathem. Society, November 26, 1949.

1. Some thirty years ago O. PERRON [Beitrag zur Theorie der divergenten Reihen, Math. Zeitschrift 6, 1920, pp. 286—310] discussed an important class of summability methods, which contains for a special case the transform

$$(1.1)\qquad a_0+\sum_{\nu=1}^{\infty} a_\nu \frac{x}{x+\lambda}\cdot\frac{x+1}{x+\lambda+1}\cdots\frac{x+\nu-1}{x+\lambda+\nu-1} = \varphi_\lambda(x),\ \lambda>0.$$

The generalized sum of a series $\sum_0^\infty a_\nu$ is $\lim_{x\to\infty}\varphi_\lambda(x)=s$, whenever this limit exists. We may restrict x to positive integral values.

For $\lambda=1$

$$\varphi_1(x) = \sum_{\nu=0}^{\infty} a_\nu \frac{x}{x+\nu},$$

for $\lambda=2$

$$\varphi_2(x) = \sum_{\nu=0}^{\infty} a_\nu \frac{x(x+1)}{(x+\nu)(x+\nu+1)};$$

in general

$$\varphi_\lambda(x) = \sum_0^\infty a_\nu \frac{\Gamma(x+\lambda)\,\Gamma(x+\nu)}{\Gamma(x)\,\Gamma(x+\lambda+\nu)}.$$

We shall call the series $\sum a_\nu$ φ_λ-summable to s, if $\lim_{x\to\infty}\varphi_\lambda(x)=s$. We have for $x>0$

$$(1.2)\qquad \frac{\Gamma(\lambda)\,\Gamma(x)}{\Gamma(x+\lambda)} = B(\lambda,x) = \int_0^\infty \frac{\varrho^{x-1}\,d\varrho}{(1+\varrho)^{x+\lambda}} = \int_0^1 \varrho^{x-1}(1-\varrho)^{\lambda-1}\,d\varrho,$$

hence

$$\varphi_\lambda(x) = \frac{1}{B(\lambda,x)}\sum_0^\infty a_\nu B(\lambda,x+\nu) = \frac{1}{B(\lambda,x)}\sum_0^\infty a_\nu \int_0^1 \varrho^{x+\nu-1}(1-\varrho)^{\lambda-1}\,d\varrho.$$

Lemma 1. If the series $\sum_1^\infty a_\nu B(\lambda,x+\nu)$ converges for some $x=x_0>0$, then it converges uniformly for all $x\geqq 0$.

[1]) The preparation of this paper was sponsored (in part) by the Office of Naval Research.

We have

$$\sum_1^\infty a_\nu B(\lambda, x+\nu) = \sum_1^\infty a_\nu B(\lambda, x_0+\nu) \frac{B(\lambda, x+\nu)}{B(\lambda, x_0+\nu)};$$

let

$$\frac{B(\lambda, x+\nu)}{B(\lambda, x_0+\nu)} = q_\nu(x),$$

then

$$q_n(x) = \frac{\Gamma(\lambda)\Gamma(x+n)}{\Gamma(x+\lambda+n)} \cdot \frac{\Gamma(x_0+\lambda+n)}{\Gamma(x_0+n)\Gamma(\lambda)} = \frac{\Gamma(x+n)}{\Gamma(x_0+n)} \cdot \frac{\Gamma(x_0+\lambda+n)}{\Gamma(x+\lambda+n)},$$

hence

$$q_n(x) - q_{n-1}(x) = q_{n-1}(x)\left\{\frac{x+n}{x_0+n} \cdot \frac{x_0+\lambda+n}{x+\lambda+n} - 1\right\}$$

$$= \lambda(x-x_0)\frac{q_{n-1}(x)}{(x_0+n)(x+\lambda+n)}.$$

It follows that for $x > x_0$ $q_n(x)$ increases and for $0 \leqq x < x_0$ $q_n(x)$ decreases, as n increases.

It is kwown that

$$\Gamma(x+n) \sim n^x \Gamma(n), \qquad (n \to \infty) \tag{1.3}$$

hence $B(\lambda, x+n) \sim \Gamma(\lambda) n^{-\lambda}$, and $q_n(x) \to 1$, as $n \to \infty$. The lemma now follows from a well-known theorem [cf. KNOPP, Theory and application of infinite series, p. 346].

Lemma 2. If (1. 1) converges for some $x = x_0 > 0$ and some $\lambda = \lambda_0 > 0$, then it converges for all $x > 0$ and all $\lambda > \lambda_0$.

For a given $x = x_0$ (1. 1) is a factorial series in λ, hence being convergent for $\lambda = \lambda_0$ it converges for all $\lambda > \lambda_0$. Together with Lemma 1 this proves Lemma 2.

Lemma 3. If (1. 1) converges for $\lambda \geqq \lambda_0$, then

$$\sum_0^\infty a_\nu B(\lambda, x+\nu) = \int_0^1 \varrho^{x-1}(1-\varrho)^{\lambda-1} g(\varrho)\, d\varrho, \qquad \lambda \geqq \lambda_0 \tag{1.4}$$

where

$$\sum_0^\infty a_\nu \varrho^\nu = g(\varrho).$$

Here $a_n n^{-\lambda_0} \to 0$ $(n \to \infty)$ [in view of the convergence of (1. 1 and formula (1. 3)].

For large λ the series $\sum_0^\infty \varrho^{x-1}(1-\varrho)^{\lambda-1} a_\nu \varrho^\nu$ is uniformly convergent in $0 \leqq \varrho \leqq 1$ [2]), hence (1. 4) holds for large λ and represents an analytic function of λ. Hence (1. 4) holds in the entire domain of existence of both sides, in particular for $\lambda \geqq \lambda_0$.

---

[2]) To prove it, replace a_n by n^{λ_0} and calculate the maximum with respect to ϱ of the general term.

If we write

$$\sum_0^\infty a_\nu \left(\frac{\varrho}{1+\varrho}\right)^\nu = f(\varrho), \tag{1.5}$$

then

$$B(\lambda, x)\ \varphi_\lambda(x) = \int_0^\infty \frac{\varrho^{x-1}}{(1+\varrho)^{x+\lambda}}\ f(\varrho)\ d\varrho. \tag{1.6}$$

This expression may exist even if (1. 1) diverges for all x. We shall say that the series $\sum a_\nu$ is φ_λ^* summable to s, if $\varphi_\lambda(x)$ is defined by (1. 6), and if

$$\lim_{x\to\infty} \varphi_\lambda(x) = s.$$

Changing the integration variable we find the LAPLACE integral representations:

$$B(\lambda, x)\ \varphi_\lambda(x) = \int_0^\infty (1-e^{-t})^{\lambda-1}\ g(e^{-t})\ e^{-tx}\ dt$$

$$= \int_0^\infty (1-e^{-u})^{x-1}\ g(1-e^{-u})\ e^{-\lambda u}\ du.$$

2. Theorem 1. *If $\sum a_\nu$ is* ABEL *summable, then it is φ_λ^*-summable for any $\lambda > 0$ to the same value.*

For the proof we employ the following lemma [cf. HARDY, Divergent series 1949, Theorem 6, p. 50]:

Lemma 4. In order that $s(\varrho) \to s$ $(\varrho \to \infty)$ should imply

$$T(x) = \int_0^\infty c(x, \varrho)\ s(\varrho)\ d\varrho \to s \qquad (x \to \infty)$$

for every bounded $s(\varrho)$, it is sufficient that

$$\int_0^\infty |c(x, \varrho)|\ d\varrho < H,$$

where H is independent of x, that

$$\int_0^y |c(x, \varrho)|\ d\varrho \to 0, \quad \text{when } x \to \infty,$$

for every finite y, and that

$$\int_0^\infty c(x, \varrho)\ d\varrho \to 1, \quad \text{when } x \to \infty.$$

In our case the conditions of Lemma 4 are easily verified; this proves Theorem 1.

The following theorem is immediate:

Theorem 2. *If the series* (1. 1) *converges, then* φ_λ^* *summability implies* φ_λ *summability.*

3. In this section we shall prove the theorem:

Theorem 3. *If* $\sum a_\nu$ *is* (C, λ) *summable, then it is* φ_λ *summable.*

Let

$$(1-z)^{-\lambda-1} = \sum_0^\infty \gamma_n^\lambda z^n,$$

so that

$$(3.1)\quad \gamma_n^\lambda = \binom{n+\lambda}{n} = \frac{(\lambda+1)(\lambda+2)\cdots(\lambda+n)}{n!} = \frac{\Gamma(\lambda+n+1)}{\Gamma(\lambda+1)\Gamma(n+1)} \sim \frac{n^\lambda}{\Gamma(\lambda+1)}.$$

We define

$$(3.2)\quad s_n^\lambda = \sum_{\nu=0}^n \gamma_{n-\nu}^\lambda a_\nu,$$

then

$$(C, \lambda) \sum_0^\infty a_\nu = \lim_{n\to\infty} \frac{s_n^\lambda}{\gamma_n^\lambda}.$$

We may assume without loss of generality that $(C, \lambda) \sum a_\nu = 0$, so that

$$(3.3)\quad s_n^\lambda = o(n^\lambda) \quad (n \to \infty).$$

The inversion of formula (3. 2) is

$$(3.4)\quad a_n = \sum_{\nu=0}^n \gamma_{n-\nu}^{-\lambda-2} s_\nu^\lambda.$$

The differences of order k of a sequence B_ν, $B_{\nu+1}, \ldots$ are defined by

$$\Delta^k B_\nu = \sum_{n=\nu}^\infty \gamma_{n-\nu}^{-k-1} B_n = \sum_{p=0}^\infty \gamma_p^{-k-1} B_{p+\nu}.$$

We first show that under the assumption (3. 3) the series (1. 1) converges and

$$(3.5)\quad \sum_0^\infty a_n B(\lambda, x+n) = \sum_0^\infty s_n^\lambda \Delta^{\lambda+1} B(\lambda, x+n).$$

We have, using (3. 4)

$$(3.6)\quad \sum_{n=0}^m a_n B(\lambda, x+n) = \sum_{\nu=0}^m s_\nu^\lambda \sum_{n=\nu}^m \gamma_{n-\nu}^{-\lambda-2} B(\lambda, x+n).$$

If λ is a positive integer, then

$$(3.7)\quad \Delta^{\lambda+1} B(\lambda, x+\nu) = \sum_{p=0}^\infty \gamma_p^{-\lambda-2} B(\lambda, x+p+\nu)$$

reduces to a finite sum. If $\lambda > 0$ is not an integer, then

$$\gamma_p^{-\lambda-2} = 0(p^{-\lambda-2}) \qquad (p \to \infty)$$

and

$$B(\lambda, x+n) = 0(n^{-\lambda}) \qquad (n \to \infty),$$

hence the series in (3. 7) converges absolutely, and

$$\sum_{n=\nu}^{m} \gamma_{n-\nu}^{-\lambda-2} B(\lambda, x+n) = \Delta^{\lambda+1} B(\lambda, x+\nu) - \sum_{m-\nu+1}^{\infty} \gamma_p^{-\lambda-2} B(\lambda, x+p+\nu)$$

$$= \Delta^{\lambda+1} B(\lambda, x+\nu) - R_{m-\nu}, \text{ say.}$$

Thus, from (3. 6)

$$(3.8) \qquad \sum_{n=0}^{m} a_n B(\lambda, x+n) = \sum_{\nu=0}^{m} s \, \Delta^{\lambda+1} B(\lambda, x+\nu) - \sum_{\nu=0}^{m} s_\nu R_{m-\nu}.$$

Now

$$R_{m-\nu} = 0\left(\sum_{m-\nu}^{\infty} p^{-\lambda-2}(p+\nu)^{-\lambda}\right) = 0\left(m^{-\lambda} \sum_{m-\nu}^{\infty} p^{-\lambda-2}\right) = 0\left\{m^{-\lambda}(m-\nu+1)^{-\lambda-1}\right\},$$

hence, in view of (3. 3)

$$\sum_{0}^{m} s_\nu^\lambda R_{m-\nu} = o\left\{\sum_{0}^{m} (\nu+1)^\lambda m^{-\lambda} (m-\nu+1)^{-\lambda-1}\right\}$$

$$(3.9) \qquad = o\left(m^{-\lambda} \sum_{\nu \le \frac{m}{2}} + m^{-\lambda} \sum_{\frac{m}{2} < \nu \le m}\right)$$

$$= o(m^{-\lambda-\lambda-1} m^{\lambda+1} + m^{-\lambda} m^\lambda) = o(1) \qquad (m \to \infty).$$

Furthermore, using (1. 2)

$$\Delta^{\lambda+1} B(\lambda, x+\nu) = \Delta^{\lambda+1} \int_0^\infty \frac{\varrho^{x+\nu-1}}{(1+\varrho)^{x+\nu+\lambda}} \, d\varrho$$

$$= \int_0^\infty \frac{\varrho^{x-1}}{(1+\varrho)^{x+\lambda}} \, \Delta^{\lambda+1} \left(\frac{\varrho}{1+\varrho}\right)^\nu d\varrho = \int_0^\infty \frac{\varrho^{x-1}}{(1+\varrho)^{x+\lambda}} \left(\sum_0^\infty \gamma_p^{-\lambda-2} \left(\frac{\varrho}{1+\varrho}\right)^{p+\nu}\right) d\varrho$$

$$= \int_0^\infty \frac{\varrho^{x-1}}{(1+\varrho)^{x+\lambda}} \left(\frac{\varrho}{1+\varrho}\right)^\nu \left(1 - \frac{\varrho}{1+\varrho}\right)^{\lambda+1} d\varrho = \int_0^\infty \frac{\varrho^{x+\nu-1} \, d\varrho}{(1+\varrho)^{x+2\lambda+\nu+1}}.$$

It follows that

$$\Delta^{\lambda+1} B(\lambda, x+\nu) = B(2\lambda+1, x+\nu) = 0(\nu^{-2\lambda-1}) \qquad (\nu \to \infty),$$

hence $\sum_{n=0}^{\infty'} s_n^\lambda \Delta^{\lambda+1} B(\lambda, x+n)$ is absolutely convergent.

Finally, from (3. 8) and (3. 9) it follows that

$$\sum_0^\infty a_n B(\lambda, x+n) = \sum_0^\infty s_n^\lambda \Delta^{\lambda+1} B(\lambda, x+n),$$

and both series are convergent.

But (C, λ) summability implies ABEL summability, and Theorem 1 and 2 yield φ_λ summability. This completes the proof of Theorem 3.

4. Perron (1. c. Satz 8) proved that the Fourier series of a bounded function is φ_2 summable at each point of continuity. More general results follow from Theorem 3 and the known theorems on (C, λ) summabitity of Fourier series.

The φ_λ-transform of the series $\sum_1^\infty \frac{\sin \nu t}{\nu} = \frac{\pi - t}{2}$ $(0 < t < \pi)$ is

$$\varphi_\lambda(x) = \frac{1}{B(\lambda, x)} \int_0^\infty \frac{\varrho^{x-1}}{(1+\varrho)^{x+\lambda}} \left\{ \sum_1^\infty \frac{\sin \nu t}{\nu} \left(\frac{\varrho}{1+\varrho} \right)^\nu \right\} d\varrho$$

$$= \frac{1}{B(\lambda, x)} \int_0^\infty \frac{\varrho^{x-1}}{(1+\varrho)^{x+\lambda}} \operatorname{arc\,tg} \frac{\varrho \sin t}{1 + \varrho - \varrho \cos t} \, d\varrho$$

$$< \frac{\pi}{2} \frac{1}{B(\lambda, x)} \int_0^\infty \frac{\varrho^{x-1}}{(1+\varrho)^{x+\lambda}} \, d\varrho = \frac{\pi}{2},$$

uniformly for $0 < t < \frac{\pi}{2}$, $x > 0$.

It follows that the φ_λ-transform does not present a Gibbs phenomenon for any $\lambda > 0$. In contrast, H. Cramér and T. H. Gronwall have shown the existence of a constant $\lambda_0 = 0.439\ldots$, so that the (C, λ)-means present a Gibbs phenomenon for $\lambda < \lambda_0$, and for no larger λ.

National Bureau of Standards,
and University of Cincinnati.

(Eingegangen am 15. Oktober 1949.)

Über
die Schnittpunkte zweier ebener stetiger Kurven endlicher Länge in allgemeiner Lage.

Herrn Oskar Perron zum 70. Geburtstag am 7. Mai 1950 gewidmet.

Von

Georg Nöbeling in Erlangen.

Es sei E die Cartesische Ebene mit rechtwinkligen Koordinaten x und y. Ist in E eine starr bewegliche Menge M gegeben, so lassen sich alle Lagen von M folgendermaßen durch Parameter festlegen. Mit M denken wir uns einen Vektor fest verbunden. Die Lage von M ist dann eineindeutig festgelegt durch den Anfangspunkt (x, y) und den Richtungswinkel φ des Vektors, also durch das Tripel (x, y, φ), wobei x und y beliebig reell sind und $0 \leqq \varphi < 2\pi$ gilt. In diesem Sinne sprechen wir kurz von der Lage (x, y, φ) von M, dem Abstand $\sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 + (\varphi_1 - \varphi_2)^2}$ zweier Lagen (x_1, y_1, φ_1) und (x_2, y_2, φ_2), dem Lebesgue-Maß einer Menge von Lagen (= Lebesgue-Maß der Menge der zugehörigen Tripel), einer Nullmenge von Lagen, usw.

Wir behaupten folgenden

Satz 1. *In der Ebene E sei erstens eine (feste) stetige Kurve*[1] *$K_1 = f_1(S_1)$, $S_1 = [0 \leqq s \leqq L_1]$ von endlicher Länge $L_{f_1}(K_1)$ und zweitens eine starr bewegliche stetige Kurve $K_2 = f_2(S_2)$, $S_2 = [0 \leqq s \leqq L_2]$ von endlicher Länge $L_{f_2}(K_2)$ gegeben. Abgesehen von einer Nullmenge $\mathfrak{N}$ von Lagen gilt dann für jede Lage von K_2: Der Durchschnitt $K_1 . K_2$ besteht aus höchstens endlich vielen Punkten $p^1, \ldots, p^n$; für jeden Punkt $p = p^\nu$ $(\nu = 1, \ldots, n)$ und jedes $j = 1, 2$ existieren nur endlich viele Parameterwerte s_j^μ $(\mu = 1, \ldots, m_j)$ derart, daß $f_j(s_j^\mu) = p$ ist; die Kurve $f_j(S_j)$ hat an jeder Stelle s_j^μ $(\mu = 1, \ldots, m_j)$ eine Tangente $T_j^\mu = T_j(s_j^\mu)$; es gilt $|T_1^1| = \ldots = |T_1^{m_1}| \neq |T_2^1| = \ldots = |T_2^{m_2}|$*[2].

Beweis. Wir beginnen mit folgendem

Hilfssatz. Es seien M und N zwei Mengen der Ebene E, deren lineare Carathéodory-Maße $L_C(M)$ und $L_C(N)$ den Bedingungen $L_C(M) = 0$

[1] Eine stetige Kurve ist ein eindeutiges, stetiges Bild $K = f(S)$ einer Strecke S. Die (Durchlaufungs-)Länge $L_f(K)$ dieser Kurve ist wie üblich mittels der Sehnenpolygone definiert.

[2] Ist T eine gerichtete Gerade, so bezeichnen wir mit $|T|$ die mit T zusammenfallende, ungerichtete Gerade. — Die (gerichtete) Tangente $T_j(s)$ ist definiert als Limes der gerichteten Geraden durch $f_j(s)$ und $f_j(s')$ für $\lim s' = s$.

und $L_C(N) < +\infty$ genügen. M sei fest, N in E starr beweglich. Dann ist die Menge $\mathfrak{N}_0$ aller Lagen von N, bei welchen N zu M nicht fremd ist, eine Nullmenge.

Wir überdecken für ein beliebiges $\varepsilon > 0$ die Menge M durch endlich oder abzählbar unendlich viele offene Kreisscheiben $M_1, M_2 \ldots$, deren Durchmesser $d_i = d(M_i)$ der Bedingung $\sum_i d_i < \varepsilon$ genügen[3]). Die Menge N überdecken wir durch endlich oder abzählbar unendlich viele offene Kreisscheiben $N_1, N_2, \ldots$, deren Durchmesser $d_j = d(N_j)$ den Bedingungen $d_j < \varepsilon$ und $\sum_j d_j < 3\, L_C(N)$ genügen[3]). Wir betrachten die Kreisscheiben N_j mit N als starr verbunden. Die Menge $\mathfrak{N}_{ij}$ aller Lagen von N, bei welchen N_j zu M_i nicht fremd ist, hat einen Inhalt $< 2\pi(d_i + d_j)^2$, also die Menge $\mathfrak{N} = \sum \mathfrak{N}_{ij}$ aller Lagen von N, bei welchen $\sum_i M_i$ zu $\sum_j N_j$ nicht fremd ist, ein Maß

$$< 2\pi \sum_{ij} (d_i + d_j)^2 = 2\pi \sum_j d_i^2 + 4\pi \sum_{ij} d_i d_j + 2\pi \sum_j d_j^2$$

$$< 2\pi\varepsilon \sum_i d_i + 4\pi\varepsilon \sum_j d_j + 2\pi\varepsilon \sum_j d_j < 2\pi\varepsilon\,(\varepsilon + 6\, L_C(N) + 3\, L_C(N)).$$

Dieses Maß ist also bei hinreichend kleinem ε beliebig klein. Nun ist $\mathfrak{N}_0$ in $\mathfrak{N}$ enthalten. Also hat $\mathfrak{N}_0$ einen verschwindenden Inhalt. Damit ist der Hilfssatz bewiesen.

Die Darstellung von K_1 als stetige Kurve laute ausführlich geschrieben:

$$x = x_1(s), \quad y = y_1(s); \quad [0 \leqq s \leqq L_1] = S_1; \quad (x, y) = f_1(s);$$

ohne Beschränkung der Allgemeinheit können wir sofort annehmen, daß für jedes s aus S_1 die Länge der dem Intervall $[0 \leqq s' \leqq s]$ entsprechenden Teilkurve von K_1 gleich s ist[4]); die Darstellung von K_2 in der Null-Lage $(0, 0, 0)$ laute

$$x = x_2(s), \quad y = y_2(s); \quad [0 \leqq s \leqq L_2] = S_2; \quad (x, y) = f_2(s);$$

auch hier sei für jedes s aus S_2 die Länge der dem Intervall $[0 \leqq s' \leqq s]$ entsprechenden Teilkurve von K_2 gleich s.

Für jedes $j = 1$ und $j = 2$ existieren die Ableitungen $x_j'(s)$ und $y_j'(s)$, sind meßbar, genügen der Bedingung $(x_j'(s))^2 + (y_j'(s))^2 = 1$ und sind proportional zu den Richtungskosinus der Tangente im zugehörigen Punkt der stetigen Kurve $f_j(S_j)$ auf einer maßgleichen Teilmenge $\tilde{S}_j$ des Intervalls S_j[5]). Die Menge $S_j - \tilde{S}_j = R_j$ ist also eine lineare Nullmenge. Da die Abbildung f_j dehnungslos ist, hat die Menge

[3]) Dies ist möglich, da jede Menge mit einem Durchmesser $d < +\infty$ in einer Kreisscheibe mit einem Durchmesser $2d$ enthalten ist.

[4]) M. a. W. wir wählen als Parameter s die Länge in $f_1(S_1)$.

[5]) Vgl. z. B. O. Haupt und G. Aumann, Differential-und Integralrechnung, Berlin 1938, II. Bd., S. 98.

9254-52 41 B

$f_j(R_j) = B_j$ das lineare Carathéodory-Maß $L_C(B_j) = 0$. Für jeden Punkt p von $K_j - B_j$ liegt jedes s mit $f_j(s) = p$ in $\tilde{S}_j$; an der Stelle s existiert also die Tangente $T_j(s)$ an die Kurve $K_j = f_j(S_j)$.

Für jeden Punkt p aus $K_j - B_j$ besteht die Urbildmenge $f_j^{-1}(p)$ nur aus endlich vielen Punkten s_j^{μ} ($\mu = 1, \ldots, m_j = m_j(p)$). Denn andernfalls enthielte $f_j^{-1}(p)$ einen Häufungswert und in diesem wäre $x_j' = 0 = y_j'$, im Widerspruch zu $x_j'^2 + y_j'^2 = 1$.

Ist p ein Punkt von $K_j - B_j$, so existieren zwar die Tangenten $T_j^1 = T_j(s_j^1), \ldots, T_j^m = T_j(s_j^{m_j})$; es braucht aber nicht $|T_j^1| = \cdots = |T_j^{m_j}|$ zu sein (falls überhaupt $m_j > 1$ ist). Wir behaupten aber, daß dies nur selten eintritt. Da die (Durchlaufungs)-Länge $L_{f_j}(K_j)$ der Kurve $f_j(S_j)$ endlich ist, gilt dasselbe wegen $L(K_j) \leqq L_{f_j}(K_j)$ [6]) auch für die Länge $L(K_j)$ des Kontinuums $K_j = f_j(S_j)$, die man etwa definieren kann als das lineare Carathéodory-Maß $L_C(K_j)$ von K_j. Daher hat die Menge A_j aller Punkte p von K_j, in denen K_j keine direkte Tangente hat, das lineare Carathéodory-Maß $L_C(A_j) = 0$ [7]); dabei ist (im Unterschied von der (gerichteten) Tangente $T_j(s)$ an die Kurve $f_j(S_j)$) die Tangente $T_j(p)$ an das Kontinuum K_j folgendermaßen definiert: Die (ungerichtete) Gerade $T = T_j(p)$ durch den Punkt p von K_j heißt direkte Tangente an K_j in p, wenn jede der beiden Halbgeraden $H \subset T$ mit dem Anfangspunkt p, aber keine weitere Halbgerade H mit dem Anfangspunkt p die folgende Eigenschaft hat: Es existiert in K_j eine Folge $\{p_i\}$ ($i = 1, 2, \ldots$) von Punkten $p_i \neq p$ derart, daß $\lim p_i = p$ ist und die Folge $\{H_i\}$ der Halbgeraden durch p_i mit dem Anfangspunkt p gegen H konvergiert. Wenn nun $T_j(p)$ existiert und wenn für ein $s \in S_j$ mit $f_j(s) = p$ die Tangente $T_j(s)$ an die Kurve $f_j(S_j)$ existiert, so gilt $|T_j(s)| = T_j(p)$, wie unmittelbar aus der Definition der Tangenten folgt. Für jeden Punkt p von $K_j - (A_j + B_j)$ ist also $|T_j^1| = \cdots = |T_j^{m_j}|$, wobei T_j^{μ} die Tangente $T_j(s_j^{\mu})$ an $f_j(S_j)$ an der Stelle s_j^{μ} ist ($s_j^1, \ldots, s_j^{m_j}$ die Urbildpunkte von p in S_j).

Es sei $\mathfrak{R}_1$ die Menge aller Lagen von K_2, bei welchen $A_1 + B_1$ zu K_2 nicht fremd ist, und $\mathfrak{R}_2$ die Menge aller Lagen von K_2, bei welchen $A_2 + B_2$ zu K_1 nicht fremd ist. Da die Mengen A_j und B_j verschwindendes lineares Carathéodory-Maß haben und da wegen $L_C(K_1) \leqq L_{f_1}(K_1)$ und $L_C(K_2) \leqq L_{f_2}(K_2)$ [6]) die Carathéodory-Maße von K_1 und K_2 endlich sind, so sind nach unserem Hilfssatz die Mengen $\mathfrak{R}_1$ und $\mathfrak{R}_2$ Nullmengen. Es sei $\mathfrak{R}_3$ die Nullmenge [8]) aller Lagen von K_2, für welche $K_1 . K_2$ unendlich ist. Für jede Lage von K_2, die nicht in $\mathfrak{R}_1 + \mathfrak{R}_2 + \mathfrak{R}_3$ enthalten ist, gilt nach der Definition der Mengen $\mathfrak{R}_1$ und $\mathfrak{R}_2$ (bzw. der Mengen A_j und B_j): Der Durchschnitt $K_1 . K_2$ besteht aus höchstens endlich vielen Punkten $p^1, \ldots, p^n$; für jeden Punkt $p = p^{\nu}$ ($\nu = 1, \ldots, n$) und jedes

[6]) G. Nöbeling, Jahresber. d. DMV 52, 1942, S. 159.

[7]) G. Nöbeling, diese Zeitschrift erscheint demnächst.

[8]) G. Nöbeling, Hamb. Abh. 15, 1943, S. 120.

9254-52 41 B

$j = 1, 2$ existieren nur endlich viele Parameterwerte s_j^μ $(\mu = 1, \ldots, m_j)$ derart, daß $f_j(s_j) = p$ ist; die Kurve $f_j(S_j)$ hat an jeder Stelle s_j^μ $(\mu = 1, \ldots, m_j)$ eine Tangente $T_j^\mu = T_j(s_j^\mu)$; es gilt $|T_1^1| = \cdots = |T_1^{m_1}|$ und $|T_2^1| = \cdots = |T_2^{m_2}|$. Es bleibt also nur noch zu zeigen, daß fast immer auch die Ungleichung $|T_1^1| = \cdots = |T_1^{m_1}| \neq |T_2^1| = \cdots = |T_2^{m_2}|$ gilt.

Neben dem Cartesischen Raum aller Lagen (x, y, φ) von K_2 betrachten wir den Cartesischen Raum aller Zahlentripel (s_1, s_2, ψ). Es sei Q der Quader $[0 \leqq s_1 \leqq L_1,\ 0 \leqq s_2 \leqq L_2,\ 0 \leqq \varphi < 2\pi]$ dieses Raumes. Wir definieren folgendermaßen eine Abbildung Φ des Quaders Q auf die Menge $\mathfrak{M}$ aller Lagen (x, y, φ), für welche der Durchschnitt $K_1 . K_2$ nicht leer ist. Es sei (s_1, s_2, ψ) ein Punkt aus Q. Dann sei (x, y, φ) diejenige Lage von K_2, die entsteht, wenn wir K_2 aus der Null-Lage $(0, 0, 0)$ durch eine Parallelverschiebung zunächst in diejenige Lage $(\bar{x}, \bar{y}, 0)$ bringen, bei welcher die den Parameterwerten s_1 und s_2 entsprechenden Punkte $f_1(s_1)$ und $f_2(s_2)$ von K_1 und K_2 in einen Punkt p zusammenfallen, und sodann K_2 um den Punkt p um den Winkel ψ drehen. Diese Abbildung Φ ist dehnungsbeschränkt. Es seien nämlich (s_1, s_2, ψ) und (s_1^*, s_2^*, ψ^*) zwei Punkte aus Q, ihr Abstand heiße d. Die diesen Punkten entsprechenden Lagen von K_2 seien (x, y, φ) und (x^*, y^*, φ^*). Dann ist zunächst $\psi = \varphi$ und $\psi^* = \varphi^*$. Wir gehen nun von der Lage (x, y, φ) der Kurve K_2 aus. Wir drehen K_2 um den Punkt p, in welchem die Punkte $f_1(s_1)$ und $f_2(s_2)$ von K_1 und K_2 zusammenfallen, um den Winkel $\varphi^* - \varphi = \psi^* - \psi$. Die so entstehende Lage $(\bar{x}, \bar{y}, \varphi^*)$ von K_2 hat von der Lage (x, y, φ) den Abstand $\sqrt{(x - \bar{x})^2 + (y - \bar{y})^2 + (\varphi - \varphi^*)^2} \leqq \sqrt{(x - \bar{x})^2 + (y - \bar{y})^2} + |\varphi - \varphi^*| \leqq L_2 |\varphi - \varphi^*| + |\varphi - \varphi^*| = (L_2 + 1) . |\psi - \psi^*|$; das zweite $\leqq$-Zeichen folgt daraus, daß das Zentrum p der Drehung und der Anfangspunkt (x, y) bzw. $(\bar{x}, \bar{y})$ des Vektors auf K_2 liegen, also einen Abstand $\leqq L_2$ voneinander haben. Nun bringen wir K_2 aus der Lage $(\bar{x}, \bar{y}, \varphi^*)$ durch eine Parallelverschiebung in die Lage (x^*, y^*, φ^*), bei welcher die den Parameterwerten s_1^* und s_2^* entsprechenden Punkte von K_1 und K_2 in einen Punkt p^* zusammenfallen. Der Abstand der Lagen $(\bar{x}, \bar{y}, \varphi^*)$ und (x^*, y^*, φ^*) ist $\leqq |s_1 - s_1^*| + |s_2 - s_2^*|$, da s_1 bzw. s_2 die Bogenlänge auf K_1 und K_2 bedeuten. Also haben die Lagen (x, y, φ) und (x^*, y^*, φ^*) einen Abstand $\leqq |s_1 - s_1^*| + |s_2 - s_2^*| + (L_2 + 1) . |\psi - \psi^*| \leqq 2(L_2 + 1) . d$. Dies heißt aber, daß die Abbildung Φ dehnungsbeschränkt (mit der Dehnungsschranke $2(L_2 + 1)$) ist, w. z. z. w.

Nun sei $\mathfrak{N}_4$ die Menge aller Lagen von K_2, bei welchen ein Punkt $f_1(s_1)$ $(s_1 \in \tilde{S}_1)$ mit einem Punkt $f_2(s_2)$ $(s_2 \in \tilde{S}_2)$ zusammenfällt und außerdem in diesen Punkten die Tangenten $T_1(s_1)$ und $T_2(s_2)$ (bis ev. auf ihre Richtungen) zusammenfallen: $|T_1(s_1)| = |T_2(s_2)|$; m. a. W. es soll für jede Lage von K_2 aus $\mathfrak{N}_4$ ein $s_1 \in S_1$ und ein $s_2 \in S_2$ existieren derart, daß erstens

$$x_1(s_1) = x_2(s_2), \qquad y_1(s_1) = y_2(s_2)$$

und zweitens

$$x_1'(s_1) = x_2'(s_2), \qquad y_1'(s_1) = y_2'(s_2)$$

oder

$$-x_1'(s_1) = x_2'(s_2), \qquad -y_1'(s_1) = y_2'(s_2)$$

gilt. Bezeichnet allgemein $\chi(s_1, s_2)$ mit $0 \leqq \chi(s_1, s_2) < 2\pi$, $s_1 \in \tilde{S}_1$, $s_2 \in S_2$ den Winkel, um den man die (gerichtete) Tangente $T_1(s_1)$ entgegengesetzt dem Uhrzeigersinn drehen muß, bis sie parallel ist zur (gerichteten) Tangente $T_2(s_2)$, so ist $\mathfrak{R}_4$ das Φ-Bild der Vereinigung der Mengen

$$H_1 = [s_1 \in \tilde{S}_1,\ s_2 \in \tilde{S}_2,\ \psi = \chi(s_1, s_2)], \quad H_2 = [s_1 \in \tilde{S}_1,\ s_2 \in \tilde{S}_2,\ \psi = \chi(s_1, s_2) + \pi],$$

Nun ist $\chi(s_1, s_2)$ kongruent mod π der Funktion

$$\operatorname{arctg} \frac{y_2'(s_2)}{x_2'(s_2)} - \operatorname{arctg} \frac{y_1'(s_1)}{x_1'(s_1)}.$$

Diese Funktion ist aber meßbar auf der Menge $[s_1 \in \tilde{S}_1,\ s_2 \in \tilde{S}_2]$, da $x_1'(s_1)$, $y_1'(s_1)$, $x_2'(s_2)$, $y_2'(s_2)$ auf $\tilde{S}_1$ bzw. $\tilde{S}_2$ meßbar sind. Also sind H_1 und H_2, also auch $H_1 + H_2$ Nullmengen des (s_1, s_2, ψ)-Raumes. Da die Abbildung Φ dehnungsbeschränkt ist, so ist $\mathfrak{R}_4$ eine Nullmenge.

Dann gilt für jede Lage von K_2 aus der Nullmenge $\mathfrak{R} = \mathfrak{R}_1 + \mathfrak{R}_2 + \mathfrak{R}_3 + \mathfrak{R}_4$ neben dem auf S. 640 Gesagten nach der Definition von $\mathfrak{R}_4$ auch $|T_1^1| = \cdots = |T_1^{m_1}| \neq |T_2^1| = \cdots = |T_2^{m_2}|$.

Damit ist der Satz 1 bewiesen.

Nun seien K_1 und K_2 zwei Kontinuen in E mit endlichen Längen $L(K_1)$ und $L(K_2)$; K_2 sei in E starr beweglich. Man kann K_1 und K_2 darstellen als stetige Kurven: $K_1 = f_1(S_1)$ und $K_2 = f_2(S_2)$ mit endlichen (Durchlaufungs-)Längen $L_{f_1}(K_1)$ und $L_{f_2}(K_2)$. Auf diese Kurven wenden wir die Überlegungen des Beweises des Satzes 1 an.

Da nach dem auf S. 639 über die Tangenten $T(p)$ Gesagten in jedem Punkt p von $K_j - (A_j + B_j)$ die Tangente $T_j(p)$ existiert und gleich $|T_j(s)|$ ist $(p = f_j(s))$, da weiter bei jeder Lage von K_2 aus $\mathfrak{R}$ wegen $\mathfrak{R}_1 + \mathfrak{R}_2 \subset \mathfrak{R}$ die Menge $A_1 + B_1$ zu K_2 und die Menge $A_2 + B_2$ zu K_1 fremd ist, so folgt aus dem Satz 1 der

Satz 2. *In der Ebene E sei erstens ein (festes) Kontinuum K_1 von endlicher Länge $L(K_1)$ und zweitens ein starr bewegliches Kontinuum K_2 von endlicher Länge $L(K_2)$ gegeben. Abgesehen von einer Nullmenge $\mathfrak{R}$ von Lagen gilt dann für jede Lage von K_2: Der Durchschnitt $K_1 . K_2$ besteht aus höchstens endlich vielen Punkten $p^1, \ldots, p^n$: für jedes $\nu = 1, \ldots, n$ existiert in p^ν die direkte Tangente $T_j(p^\nu)$ an K_j $(j = 1, 2)$ und es gilt $T_1(p^\nu) \neq T_2(p^\nu)$.*

(Eingegangen am 22. Oktober 1949.)

Unzerlegbare, nicht negative Matrizen.

Herrn Oskar Perron zum 70. Geburtstag am 7. Mai 1950 gewidmet.

Von

Helmut Wielandt in Mainz.

Eine Matrix A mit nicht negativen Elementen $a_{\mu\nu}$ ($\mu, \nu = 1, 2, \ldots, n$; $n \geqq 2$) heißt nach Frobenius[1]) unzerlegbar, wenn sie weder die Gestalt

$$A = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ O & A_{22} \end{pmatrix}$$

(mit quadratischen Teilmatrizen A_{11}, A_{22}) hat, noch durch Umstellung der Zeilen und gleichlautende Umstellung der Spalten auf diese Gestalt gebracht werden kann. Über die Eigenwerte einer solchen Matrix A hat Frobenius[1]), seine an Perron[2]) anknüpfenden Arbeiten über positive Matrizen[3]) fortsetzend, eine Reihe wichtiger Sätze bewiesen. Wir stellen seine wesentlichen Ergebnisse zusammen:

I. *Die charakteristische Gleichung*

$$\Phi(x) \equiv \det(xE - A) = 0 \tag{1}$$

besitzt eine einfache positive Wurzel r, die dem Betrage nach von keiner anderen Wurzel übertroffen wird. Die zu dieser „Maximalwurzel" r gehörige Eigenlösung kann positiv gewählt werden; r ist der einzige Eigenwert, zu dem eine nicht negative Eigenlösung existiert.

II. *Besitzt* (1) *insgesamt k Wurzeln vom Betrage r, so sind diese einfach und haben die Werte $re^{\varkappa 2\pi i/k}$ ($\varkappa = 1, 2, \ldots, k$). Die Gesamtheit der n Wurzeln von* (1) *gestattet die Drehung um den Nullpunkt mit dem Winkel $2\pi/k$, aber nicht mit einem kleineren Winkel*[4]). *A hat die Gestalt*

[1]) G. Frobenius, Über Matrizen aus nicht negativen Elementen. Sitzungsber. Preuß. Akad. Wiss., Berlin **1912**, S. 456—477.

[2]) O. Perron, Zur Theorie der Matrices. Math. Ann. **64**, S. 248—263 (1907).

[3]) G. Frobenius, Über Matrizen aus positiven Elementen. Sitzungsberichte Preuß. Akad. Wiss., Berlin **1908**, S. 471—476; **1909**, S. 514—518.

[4]) Frobenius hat diese Aussage in anderer Form: Treten in $\Phi(x)$ genau die Potenzen x^s, x^m, x^l, ... wirklich auf, so ist k der größte gemeinsame Teiler von $n - m$, $m - l$, ...

$$(2) \qquad A = \begin{pmatrix} 0 & A_{12} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & A_{23} & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \dots & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & \dots & A_{k-1k} \\ A_{k1} & 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}.$$

(mit quadratischen Teilmatrizen in der Diagonale) oder kann durch Umstellung der Zeilen und gleichlautende Umstellung der Spalten auf diese Form gebracht werden.

Im folgenden werden diese Sätze auf einem neuen, erheblich kürzeren Wege bewiesen und z. T. ergänzt (vgl. Satz III). Wir stützen uns auf eine von FROBENIUS nicht erwähnte Maximum-Minimum-Eigenschaft der Maximalwurzel r, die mit einem Einschließungssatz von COLLATZ[5]) zusammenhängt.

Beweis von I. (a) *Definition von r.* Zu jeder Spalte mit nicht negativen Elementen $x_1, x_2, \dots, x_n$ (kurz: zu jedem Vektor $\mathfrak{x} \geqq 0$), die nicht nur Nullen enthält, erklären wir die nicht negative Zahl $r_{\mathfrak{x}}$ durch

$$r_{\mathfrak{x}} = \min_{\mu} \frac{\sum_{\nu} a_{\mu\nu} x_\nu}{x_\mu}.$$

mit der Vereinbarung, den Bruch gleich $+\infty$ zu setzen, falls $x_\mu = 0$ ist. Mit anderen Worten: $r_{\mathfrak{x}}$ ist die größte Zahl, für welche

$$(3) \qquad A\mathfrak{x} - r_{\mathfrak{x}}\mathfrak{x} \geqq 0$$

gilt. Die Zahlen $r_{\mathfrak{x}}$ sind nach oben beschränkt. Denn bezeichnen wir mit $\mathfrak{s}$ die Spalte, deren Elemente sämtlich 1 sind, mit $\mathfrak{s}'$ ihre Transponierte und mit C das größte Element der Zeile $\mathfrak{s}' A$, so ist nach (3)

$$r_{\mathfrak{x}} \leqq \frac{\mathfrak{s}' A \mathfrak{x}}{\mathfrak{s}' \mathfrak{x}} \leqq \frac{C \mathfrak{s}' \mathfrak{x}}{\mathfrak{s}' \mathfrak{x}} = C.$$

Für manche $\mathfrak{x}$ fällt $r_{\mathfrak{x}} > 0$ aus, z. B. für $\mathfrak{x} = \mathfrak{s}$; denn A enthält wegen der Unzerlegbarkeit keine ganz aus Nullen bestehende Zeile. Daher besitzt die Menge aller $r_{\mathfrak{x}}$ eine endliche positive obere Grenze r. Diese wird wirklich erreicht, da man zur Konkurrenz nur die $\mathfrak{x} \geqq 0$ mit $\mathfrak{s}' \mathfrak{x} = 1$ zuzulassen braucht, d. h. eine abgeschlossene beschränkte Menge von Spalten. Es ist also

$$(4) \qquad r = \max_{\mathfrak{x} \geqq 0} \min_{\mu} \frac{\sum_{\nu} a_{\mu\nu} x_\nu}{x_\mu}.$$

(b) Nach Definition von von r gilt: *Es gibt „Extremalvektoren" $\mathfrak{z}$ mit $\mathfrak{z} \neq 0$, $\mathfrak{z} \geqq 0$, $A\mathfrak{z} - r\mathfrak{z} \geqq 0$, aber keinen Vektor $\mathfrak{x} \geqq 0$ mit $A\mathfrak{x} - r\mathfrak{x} > 0$.*

[5]) L. COLLATZ, Einschließungssatz für die charakteristischen Zahlen von Matrizen. Math. Zeitschr. **48**, S. 221—226 (1942).

Dem Nachweis, daß r die in Satz I erklärte Maximalwurzel ist und daß die Extremalvektoren die zugehörigen Eigenvektoren sind, schicken wir die folgende Bemerkung voraus.

(c) *Ist* $\mathfrak{y} \geqq 0$, $\mathfrak{y} \neq 0$, *so ist* $(E+A)^{n-1}\mathfrak{y} > 0$. Zum Beweis setzen wir $(E+A)^{\nu}\mathfrak{y} = \mathfrak{y}_{\nu}$. Dann ist $\mathfrak{y}_{\nu+1} = \mathfrak{y}_{\nu} + A\mathfrak{y}_{\nu} \geqq \mathfrak{y}_{\nu} \geqq 0$. In $\mathfrak{y}_{\nu+1}$ verschwinden also höchstens diejenigen Elemente, die auch in $\mathfrak{y}_{\nu}$ verschwinden. Es kann aber nicht eintreten, daß in $\mathfrak{y}_{\nu}$ und $\mathfrak{y}_{\nu+1}$ genau die gleichen Elemente verschwinden; denn dann wäre bei passender Anordnung der Elemente

$$\mathfrak{y}_{\nu} = \begin{pmatrix} \mathfrak{p} \\ 0 \end{pmatrix} \text{ mit } \mathfrak{p} > 0,$$

$$\mathfrak{y}_{\nu+1} = \mathfrak{y}_{\nu} + A\mathfrak{y}_{\nu} = \begin{pmatrix} \mathfrak{p} \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathfrak{p} \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathfrak{q} \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Hieraus würde $A_{21}\mathfrak{p} = 0$ folgen, daher $A_{21} = 0$, entgegen der Voraussetzung der Unzerlegbarkeit von A. Wenn also $\mathfrak{y}_{\nu}$ überhaupt Nullen enthält, enthält $\mathfrak{y}_{\nu+1}$ weniger; nun enthält aber $\mathfrak{y}_{n} = \mathfrak{y}$ höchstens $n-1$ Nullen, also enthält $\mathfrak{y}_{n-1}$ keine.

(d) *Jeder Extremalvektor* $\mathfrak{z}$ *ist Eigenvektor von* A *zum Eigenwert* r *und ist positiv.* Nach Definition ist

$$\mathfrak{z} \geqq 0, \quad A\mathfrak{z} - r\mathfrak{z} = \mathfrak{y} \geqq 0.$$

Wäre hierin $\mathfrak{y} \neq 0$, so würden wir durch Multiplikation mit $(E+A)^{n-1}$ für die Spalte $\mathfrak{x} = (E+A)^{n-1}\mathfrak{z}$ die Ungleichungen

$$\mathfrak{x} > 0, \qquad A\mathfrak{x} - r\mathfrak{x} = (E+A)^{n-1}\mathfrak{y} > 0$$

erhalten, im Widerspruch zu (b). Wir haben also $\mathfrak{y} = 0$, $A\mathfrak{z} = r\mathfrak{z}$. Daß $\mathfrak{z} > 0$ ist, folgt aus $0 < \mathfrak{x} = (1+r)^{n-1}\mathfrak{z}$.

(e) *Ist* α *ein beliebiger Eigenwert von* A, *so ist* $\alpha \leqq r$. Zur Abkürzung bezeichnen wir hier und im folgenden zu jeder Matrix $(m_{\varrho\sigma}) = M$ die Matrix der absoluten Beträge $(|m_{\varrho\sigma}|) = M^*$. Dann folgt aus $\alpha\mathfrak{x} = A\mathfrak{x}$ nach der Dreiecksungleichung

$$\alpha\,\mathfrak{x}^* \leqq A\mathfrak{x}^*, \qquad \alpha \leqq r_{\mathfrak{x}^*} \leqq r.$$

Hiernach ist r die in Satz I erklärte Maximalwurzel von A.

(f) *Gibt es zu dem Eigenwert* α *von* A *einen nicht negativen Eigenvektor* $\mathfrak{x}$, *so ist* $\alpha = r$. Mit A ist auch die transponierte Matrix A' nicht negativ und unzerlegbar; ihre Maximalwurzel ist ebenfalls r, da A und A' die gleichen Eigenwerte haben. Für einen Extremalvektor $\mathfrak{y}$ von A' gilt daher

$$\alpha\,\mathfrak{y}'\mathfrak{x} = \mathfrak{y}'(A\mathfrak{x}) = (\mathfrak{y}'A)\mathfrak{x} = r\,\mathfrak{y}'\mathfrak{x}.$$

Hieraus folgt $\alpha = r$, da $\mathfrak{y} > 0$, also $\mathfrak{y}'\mathfrak{x} \neq 0$ ist.

Wir haben noch zu zeigen, daß r einfache Nullstelle von $\Phi(x)$ ist. Wir beweisen zunächst etwas weniger:

(g) *A besitzt zum Eigenwert r nur einen linear unabhängigen Eigenvektor; dessen Komponenten haben alle dasselbe Vorzeichen.* Es sei $\mathfrak{x}$ ein beliebiger Eigenvektor von A zu r, $\mathfrak{z}$ ein fest gewählter Extremalvektor. Es genügt zu zeigen, daß $\mathfrak{x}$ und $\mathfrak{z}$ proportional sind. Wir bestimmen die Zahl c so, daß $\mathfrak{x} - c\mathfrak{z} = \mathfrak{y} \geqq 0$ ist und eine Komponente von $\mathfrak{y}$ verschwindet. Wegen der letzten Eigenschaft kann $\mathfrak{y}$ nach (d) kein Extremalvektor sein; andererseits ist $A\mathfrak{y} = r\mathfrak{y}$, daher wäre $\mathfrak{y}$ doch Extremalvektor, wenn nicht $\mathfrak{y} = 0$ wäre. Es ist also $\mathfrak{x} = c\mathfrak{z}$.

(h) *r ist einfache Nullstelle von $\Phi(x)$.* Die Behauptung besagt: $\Phi'(r) \neq 0$. Nach der bekannten Regel über die Differentation einer Determinante ist $\Phi'(r)$ die Spur der zu $rE - A$ adjungierten Matrix P. Zunächst folgt aus (g), daß Rang $(rE - A) = n - 1$, also $P \neq 0$ ist. Ferner genügt P der Gleichung $(rE - A)P = 0$. Nach dieser ist jede nicht verschwindende Spalte von P Eigenlösung von A zu r, enthält also nach (g) nur Elemente einerlei Vorzeichens. Dasselbe gilt für die Zeilen von P, wie man durch Übergang zur Transponierten erkennt. Also haben alle Elemente von P dasselbe Vorzeichen, und es ist $\Phi'(r) = \text{Spur } P \neq 0$. (Da r die größte reelle Nullstelle von $\Phi(x)$ ist, ist $\Phi'(r)$ und damit jedes Element von P *positiv*).

Damit ist der Beweis von Satz I beendet. Den Beweis von Satz II stützen wir auf einen teilweise neuen Satz III (bei FROBENIUS[3]) S. 516 fehlt die für das Folgende wesentliche Diskussion des Falles $|\beta| = r$).

III. *Es sei $A = (a_{\mu\nu})$ eine unzerlegbare Matrix mit nicht negativen Elementen, $B = (b_{\mu\nu})$ eine Matrix mit komplexen Elementen $(\mu, \nu = 1, 2, \ldots, n)$. Es sei $|b_{\mu\nu}| \leqq a_{\mu\nu}$ für alle μ, ν. Ist r die Maximalwurzel von A und β ein beliebiger Eigenwert von B, so ist $|\beta| \leqq r$. Gilt das Gleichheitszeichen, ist also $\beta = re^{i\varphi}$, so hat B die Gestalt*

$$B = e^{i\varphi} \cdot DAD^{-1} \tag{5}$$

mit einer Diagonalmatrix D, deren Diagonalelemente sämtlich den absoluten Betrag 1 haben; insbesondere ist dann stets $|b_{\mu\nu}| = a_{\mu\nu}$. (Daß umgekehrt jede Matrix B der Gestalt (5) den Eigenwert $re^{i\varphi}$ besitzt, ist klar.)

Beweis von III[6]). Aus

$$\beta\mathfrak{x} = B\mathfrak{x} \tag{6}$$

folgt wie unter I e

$$|\beta|\,\mathfrak{x}^* \leqq B^*\mathfrak{x}^* \leqq A\mathfrak{x}^* \tag{7}$$

und hieraus $|\beta| \leqq r_{\mathfrak{x}^*} \leqq r$. Liegt der Grenzfall $|\beta| = r$ vor, so ist $\mathfrak{x}^*$ nach (7) ein Extremalvektor, also haben wir nach I d

[6]) Eine ähnliche Schlußweise findet sich in einem Sonderfall bei V. ROMANOVSKY, Sur les zéros des matrices stocastiques., Comptes rend. Acad. Sci., Paris **192** 266—269 (1931).

$$|\beta|\,\mathfrak{x}^* = A\mathfrak{x}^*, \quad \mathfrak{x}^* > 0 \tag{8}$$

und daher nach (7)

$$B^* = A, \quad |b_{\mu\nu}| = a_{\mu\nu}. \tag{9}$$

Nach Definition von $\mathfrak{x}^*$ ist $\mathfrak{x} = D\mathfrak{x}^*$ mit einer Diagonalmatrix D, deren Diagonalelemente den Betrag 1 haben. Führen wir dies samt $\beta = re^{i\varphi}$ in (6) ein, so ergibt sich

$$|\beta|\,\mathfrak{x}^* = C\mathfrak{x}^* \tag{10}$$

mit

$$C = e^{-i\varphi} D^{-1} B D, \quad C^* = B^* = A. \tag{11}$$

Aus (8), (10) und (11) folgt $C\mathfrak{x}^* = C\overline{\mathfrak{x}}^*$, also wegen $\mathfrak{x}^* > 0$:

$$C = C^*, \quad C = A, \quad B = e^{i\varphi} DAD^{-1}.$$

Beweis von II. (a) *Die Lage der Eigenwerte vom maximalen Betrag.* Es gebe genau k Wurzeln von (1), welche den größten möglichen Betrag r haben, etwa

$$\alpha_\varkappa = re^{i\varphi_\varkappa} \qquad (0 = \varphi_1 < \varphi_2 \leqq \ldots \leqq \varphi_k < 2\pi). \tag{12}$$

Die Voraussetzungen von III werden von $B = A$ zusammen mit $\beta = \alpha_\varkappa$ erfüllt; daher gibt es eine Diagonalmatrix $D_\varkappa$ mit

$$A = e^{i\varphi_\varkappa} D_\varkappa A D_\varkappa^{-1}. \tag{13}$$

Nach I ist r einfacher Eigenwert von A, also $re^{i\varphi_\varkappa}$ einfacher Eigenwert der rechts stehenden Matrix, d. h. von A. Die $\varphi_\varkappa$ sind also alle voneinander verschieden. Wir zeigen, daß sie mod 2π eine additive Gruppe bilden, indem wir (13) mit $D_\lambda^{\pm 1}$ transformieren. Es ergibt sich

$$A = e^{i(\varphi_\varkappa \pm \varphi_\lambda)} TAT^{-1} \qquad (T = D_\varkappa D_\lambda^{\pm 1}).$$

Hiernach ist auch $re^{i(\varphi_\varkappa \pm \varphi_\lambda)}$ ein Eigenwert von A, also unter den Zahlen (12) enthalten. Aus der hiermit bewiesenen Gruppeneigenschaft folgt

$$\varphi_\varkappa = (\varkappa - 1)\frac{2\pi}{k} \qquad (\varkappa = 1, 2, \ldots, k). \tag{14}$$

(b) *Die Drehinvarianz des Spektrums* folgt unmittelbar aus (13) und (14). Die Gesamtheit der Wurzeln von (1) gestattet genau die Drehgruppe des regelmäßigen k-Ecks.

(c) Um A auf die angekündigte Form (2) zu bringen (was nur für $k > 1$ notwendig ist), stellen wir die Zeilen und genau so die Spalten von A derart um, daß die Komponenten eines zu $\alpha_2 = re^{2\pi i/k}$ gehörenden Eigenvektors nach ihren Argumenten geordnet erscheinen. Wir nehmen also ohne Beschränkung der Allgemeinheit D_2 in der Form

$$D_2 = \begin{pmatrix} E_1 e^{i\delta_1} & & & \\ & E_2 e^{i\delta_2} & & \\ & & \ddots & \\ & & & E_g e^{i\delta_g} \end{pmatrix} \qquad (g \geqq 1)$$

an, wobei die δ_γ mod 2π voneinander verschieden sind und die E_γ Einheitsmatrizen (nicht notwendig vom selben Grade) bedeuten. Führen wir die entsprechende Zerlegung von A in g^2 Teilmatrizen $A_{\gamma\varrho}$ in die für $\varkappa = 2$ angeschriebene Gleichung (13) ein, so ergibt sich

$$A_{\gamma\varrho} = e^{i(2\pi/k + \delta_\gamma - \delta_\varrho)} A_{\gamma\varrho} \qquad (1 \leqq \gamma, \varrho \leqq g),$$

also

$$A_{\gamma\varrho} = 0, \text{ wenn } 2\pi/k + \delta_\gamma \not\equiv \delta_\varrho \bmod 2\pi. \tag{15}$$

Hiernach gibt es zu jedem γ höchstens ein ϱ (und zu jedem ϱ höchstens ein γ), für welches $A_{\gamma\varrho} \neq 0$ ist; andererseits gibt es wegen der Unzerlegbarkeit von A mindestens eins; also gibt es genau eins, und es ist $\delta_\varrho \equiv 2\pi/k + \delta_\gamma$. Insbesondere kommen unter den δ_γ die k Werte $\varkappa\, 2\pi/k + \delta_1$ vor. Wir denken uns die Anordnung so gewählt, daß sie an den ersten k Stellen stehen. Dann ist

$$\delta_\varkappa = \delta_1 + (\varkappa - 1)\frac{2\pi}{k} \qquad (\varkappa = 1, 2, \ldots k),$$

und A hat nach (15) die Gestalt

$$\begin{Vmatrix} 0 & A_{12} & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & A_{23} & \ldots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ . & . & . & \ldots & . & . \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & A_{k-1\,k} & 0 \\ A_{k1} & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & B \end{Vmatrix}.$$

Hierin können aber nicht mehr als die ersten k Zeilen und Spalten auftreten, da A unzerlegbar vorausgesetzt ist. Damit ist Satz II bewiesen.

Wir schließen mit zwei ergänzenden Bemerkungen. Die erste betrifft den wichtigen Fall $k = 1$, in welchem r der einzige Eigenwert vom maximalen Betrage ist (die nicht negative unzerlegbare Matrix A heißt in diesem Fall nach Frobenius primitiv). Er tritt, wie schon Perron [2]) bemerkt hat, sicher dann ein, wenn eine Potenz $A^m > 0$ ist; man erkennt nämlich aus der Darstellung (2), daß im Falle $k > 1$ jede Potenz von A Nullen enthält. Von diesem Satz hat Frobenius [1]), S. 463, die folgende Umkehrung bewiesen: Ist A primitiv, so ist von einem ersten Exponenten p an jede Potenz von A positiv:

$$A^m > 0 \text{ für } m \geqq p.$$

Über diese Zahl p macht Frobenius keine näheren Angaben, doch kann man aus seinen Erörterungen die Abschätzung $p \leqq 2n^2 - 2n$ erhalten, wobei n die Zeilenzahl von A bedeutet. Eine eingehendere Untersuchung ergibt, wie hier ohne Beweis mitgeteilt werden soll, die

bestmögliche nur von n abhängige Schranke $p \leqq n^2 - 2n + 2$. Das Gleichheitszeichen steht z. B. für

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \dots & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \\ 1 & 1 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}.$$

Die zweite Bemerkung geht dahin, daß die Maximalwurzel r außer der Maximum-Minimum-Eigenschaft (4) auch eine Minimum-Maximum-Eigenschaft besitzt, nämlich

$$r = \min_{x>0} \max_{\mu} \frac{\sum_{\nu} a_{\mu\nu} x_\nu}{x_\mu}. \tag{16}$$

Sie läuft auf die rechte Seite der COLLATZ'schen Ungleichung

$$\min \frac{\sum_{\nu} a_{\mu\nu} x_\nu}{x_\mu} \leqq r \leqq \max \frac{\sum_{\nu} a_{\mu\nu} x_\nu}{x_\mu} \qquad (x_\nu > 0) \tag{17}$$

hinaus, wie (4) auf die linke. (COLLATZ[5]) beweist (17) nur für $A > 0$, doch gilt der einfache Beweis, der ähnlich wie I f verläuft, auch für unzerlegbare $A \geqq 0$.) Die Symmetrie von (4) und (16) legt den Gedanken nahe, daß man auch (16) zur Grundlage der ganzen Theorie hätte machen können, wie dies hier mit (4) geschehen ist. In der Tat kann man ein Stück weit ganz entsprechend vorgehen. Jedoch wird die zu dem Nachweis, daß r ein größter Eigenwert ist, verwendete einfache Schlußweise von I e unbrauchbar, weil die von der Dreiecksungleichung gelieferte Abschätzung jetzt in der falschen Richtung liegt.

(Eingegangen am 2. 11. 1949.)

Über Landau's Beweis des Primzahlsatzes.

Herrn Oskar Perron zum 70. Geburtstag am 7. Mai 1950 gewidmet.

Von

B. L. van der Waerden in Laren N-H.

In seinem Handbuch der Lehre von der Verteilung der Primzahlen I, § 65 hat E. Landau die Formel

$$\pi(x) = \int_2^x \frac{du}{\ln u} + O(x e^{-\gamma\sqrt{\ln x}}) \tag{1}$$

für $\gamma > 10$ bewiesen. Er bemerkt dazu, daß mit derselben Beweismethode der Wurzelexponent γ zu 8, aber nicht zu 7 reduziert werden kann. Im Beweis wird ein Cosinuspolynom benutzt:

$$g(\varphi) = a_0 + a_1 \cos\varphi + a_2 \cos 2\varphi + \cdots + a_n \cos n\varphi, \tag{2}$$

das nur den folgenden Bedingungen genügen muß:

$$g(\varphi) \geqq 0 \quad \text{für} \quad 0 \leqq \varphi \leqq \pi \tag{3}$$

$$a_k \geqq 0 \quad \text{für} \quad k = 0, 1, 2, \ldots \tag{4}$$

$$a_0 < a_1. \tag{5}$$

Um einen möglichst kleinen Wert von γ zu erhalten, muß man $g(\varphi)$ so wählen, daß der Quotient

$$\frac{g(0)}{a_1 - a_0} = \frac{a_0 + a_1 + \cdots + a_n}{a_1 - a_0} = u \tag{6}$$

möglichst klein wird. Landau's Beweis ergibt nämlich bei beliebiger Wahl von $g(\varphi)$ die Gültigkeit von (1) für alle $\gamma > u + 2$. Anders ausgedrückt: Ist U die untere Grenze aller Quotienten u für alle Polynome $g(\varphi)$, so gilt (1) für alle $\gamma > U + 2$.

Beschränkt man sich auf Polynome $g(\varphi)$ vom Grade 2, so wird das Minimum $u = P_2 = 7$ nach Landau [1]) geliefert durch

$$g(\varphi) = (3 + 4\cos\varphi)^2 = 17 + 24\cos\varphi + 8\cos 2\varphi.$$

Denn für jedes Polynom 2. Grades

$$g(\varphi) = a_0 + a_1 \cos\varphi + a_2 \cos 2\varphi,$$

[1]) E. Landau, Annali R. Scuola Normale Pisa (Fis.-Mat.) Serie 2, Vol. 2 (1933) p. 200.

das auch nur der Bedingung (3) genügt, gilt

$$8a_0 - 6a_1 + a_2 = 8g(\arccos -\tfrac{3}{4}) \geqq 0,$$

also

$$7(a_0 - a_1) + a_0 + a_1 + a_2 \geqq 0$$

oder

$$a_0 + a_1 + a_2 \geqq 7(a_0 - a_1). \tag{7}$$

Mit derselben Methode beweist LANDAU [1]) noch, daß bei Beschränkung auf Polynome vom Grade 3, 4 oder 5 das Minimum $P_3 = P_4 = P_5 = 6$ geliefert wird durch das Polynom 3. Grades

$$g(\varphi) = (1 + 2\cos\varphi)^2(1 + \cos\varphi) = 5 + 8\cos\varphi + 4\cos 2\varphi + \cos 3\varphi.$$

Denn für jedes Polynom (2) mit $n = 5$, das Bedingung (3) erfüllt, gilt

$$7a_0 - 5a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5 = 3g(\pi) + g\left(\frac{2\pi}{3}\right) \geqq 0,$$

also

$$a_0 + a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5 \geqq 6(a_1 - a_0). \tag{8}$$

Für Polynome der Grade 6, 7, 8, 9 hat L. TSCHAKALOFF [2]) mit einer Verfeinerung derselben Methode die Minima von u bestimmt:

$$P_6 = 5{,}9298\ldots, \qquad P_7 = P_8 = P_9 = 5{,}90529\ldots.$$

Uns interessiert hier die untere Grenze U aller u, ohne Beschränkung der Gradzahl n:

$$U = \lim P_n = \text{fin inf } u. \tag{9}$$

Nach LANDAU, Handbuch § 65, ist jedenfalls $U \geqq 5$. Denn aus

$$\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} g(\varphi)(3 - 4\cos\varphi + \cos 2\varphi)\,d\varphi \geqq 0$$

folgt unmittelbar

$$6a_0 - 4a_1 + a_2 \geqq 0$$

oder

$$a_0 + a_1 + a_2 \geqq 5(a_1 - a_0),$$

also, da $g(0) = a_0 + a_1 + a_2 + \ldots$ ist,

$$g(0) \geqq 5(a_1 - a_0). \tag{10}$$

In analoger Weise beweist LANDAU sogar $U > 5{,}224$, indem er von

$$\int_{\frac{\pi}{3}}^{\pi} g(\varphi)(2\cos\varphi - 1) \geqq 0 \tag{11}$$

[2]) L. TSCHAKALOFF, Annali R. Scuola Normale Pisa, Serie 2, Vol. 9 (1940) p. 13. Schon früher hatte I. SCHUR $P_6 < 6$ bewiesen.

und

$$g(\pi) = a_0 - a_1 + a_2 - a_3 + \ldots \geqq 0 \tag{12}$$

ausgeht.

Mit derselben Methode soll nun gezeigt werden:

$$U > 5{,}864. \tag{13}$$

Wir gehen von der Ungleichung

$$\int^{x} g(\varphi)\, d\varphi \geqq 0 \tag{14}$$

aus und wählen α etwas größer als $\frac{\pi}{2}$:

$$\alpha = \frac{\pi}{2} + \varepsilon.$$

Setzt man (2) in (14) ein und führt die Integration aus, so erhält man

$$(\pi - \alpha)\, a_0 - \sum_1^n \frac{\sin k\alpha}{k}\, a_k \geqq 0. \tag{15}$$

Multipliziert man (15) mit p und (12) mit q und addiert, wobei p und q beliebige positive Zahlen sind, so erhält man eine Ungleichung der Form

$$b_0 a_0 + b_1 a_1 + \cdots + b_n a_n \geqq 0 \tag{16}$$

mit

$$\begin{aligned}
b_0 &= p(\pi - \alpha) + q = p\left(\frac{\pi}{2} - \varepsilon\right) + q \\
b_1 &= -p \sin\alpha - q = -p\cos\varepsilon - q \\
b_2 &= -\tfrac{1}{2} p \sin 2\alpha + q = \tfrac{1}{2} p \sin 2\varepsilon + q \\
b_3 &= -\tfrac{1}{3} p \sin 3\alpha - q = \tfrac{1}{3} p \cos 3\varepsilon - q \\
b_4 &= -\tfrac{1}{4} p \sin 4\alpha - q = -\tfrac{1}{4} p \sin 4\varepsilon + q \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots
\end{aligned}$$

Zu (16) addieren wir noch

$$g(0) = \sum_0^n a_k$$

und erhalten

$$g(0) + \sum_0^n (b_k - 1)\, a_k \geqq 0. \tag{17}$$

Wenn wir nun p und q so wählen, daß für $k \geqq 2$ alle Koeffizienten $(b_k - 1)$ negativ oder Null sind, so können wir wegen (4) alle negativen Glieder in (17) weglassen und erhalten

$$g(0) + (b_0 - 1)\, a_0 + (b_1 - 1)\, a_1 \geqq 0. \tag{18}$$

Wenn wir nun auch noch dafür sorgen, daß die Summe der beiden Koeffizienten (b_0-1) und (b_1-1) negativ oder Null ist:

$$b_0+b_1-2\leqq 0, \tag{19}$$

so können wir in (18) den Koeffizienten b_0-1 durch den mindestens ebenso großen $1-b_1$ ersetzen und finden

$$g(0)+(1-b_1)a_0+(b_1-1)a_1\geqq 0$$

$$g(0)\geqq(1-b_1)(a_1-a_0). \tag{20}$$

Aus (20) folgt dann, daß $(1-b_1)$ eine untere Schranke für alle Quotienten (6) ist, woraus ohne weiteres

$$U\geqq 1-b_1$$

folgt.

Es handelt sich also nur noch darum, p und q so zu wählen, daß $(1-b_1)$ möglichst groß ausfällt.

Die Bedingungen, die p und q zu erfüllen haben, lauteten:

$$b_0+b_1\leqq 2$$

$$b_k\leqq 1 \quad \text{für} \quad k=2,3,\ldots.$$

Setzt man für die b_k ihre Werte ein, so bedeutet das

$$p\left(\frac{\pi}{2}-\varepsilon-\cos\varepsilon\right)\leqq 2 \tag{21}$$

$$\tfrac{1}{2}p\sin 2\varepsilon+q\leqq 1 \tag{22}$$

$$\tfrac{1}{3}p\cos 3\varepsilon-q\leqq 1 \tag{23}$$

$$-\tfrac{1}{4}p\sin 4\varepsilon+q\leqq 1 \tag{24}$$

$$-\tfrac{1}{5}p\cos 5\varepsilon-q\leqq 1 \tag{25}$$

$$\tfrac{1}{6}p\cos 6\varepsilon+q\leqq 1 \tag{26}$$

$$\ldots\ldots\ldots$$

Wir wollen es so einrichten, daß in (21), (22) und (23) das Gleichheitszeichen steht. Addition von (22) und (23) und Vergleich mit (21) ergibt dann

$$\frac{\pi}{2}-\varepsilon-\cos\varepsilon=\frac{1}{2}\sin 2\varepsilon+\frac{1}{3}\cos 3\varepsilon$$

oder

$$\varepsilon+\cos\varepsilon+\frac{1}{2}\sin 2\varepsilon+\frac{1}{3}\cos 3\varepsilon=\frac{\pi}{2}. \tag{A}$$

Diese transzendente Gleichung hat eine kleinste Wurzel $\varepsilon=0{,}1386\ldots$. Die zugehörigen Werte von p und q sind

$$p=4{,}527\ldots$$

$$q=0{,}380\ldots.$$

Die Ungleichungen (21), (22), (23) sind nun also mit dem Zeichen $=$ erfüllt. (24) und (25) sind erfüllt, weil der erste Term links negativ und der zweite < 1 ist. Ungleichung (26) ist auch erfüllt, wie man durch Ausrechnen oder grobes Schätzen bestätigt. Die nächstfolgende Ungleichung ist erfüllt, weil das Glied $-q$ das Minuszeichen hat. In allen weiteren Ungleichungen hat das erste Glied höchstens den Betrag $\frac{1}{8}p < 0{,}6$, das zweite den Betrag $q < 0{,}4$, die Summe ist also sicher < 1. Somit sind alle Bedingungen erfüllt, und die Schranke für U wird

$$1 - b_1 = 1 + p\cos\varepsilon + q > 5{,}8642.$$

Kombiniert man dieses Ergebnis mit dem von TSCHAKALOFF, so ergibt sich:

Die untere Grenze U aller Quotienten (6) *liegt zwischen* 5,8642 *und* 5,9053.

Unsere recht grobe Methode ließe sich mit der nötigen Geduld vermutlich noch verfeinern. Die wahre Grenze wird sicher ganz nahe bei 5,9 liegen.

(Eingegangen am 7. Dezember 1949.)

Die Potenzreihe der reziproken Gammafunktion.

Herrn Oskar Perron zum 70. Geburtstag am 7. Mai 1950 gewidmet.

Von

Hellmuth Kneser in Tübingen.

Die Haupteigenschaften der Gammafunktion, ihre Differenzengleichung, Ergänzungs- und Produktformel sowie ihre Darstellung durch ein unendliches Produkt, haben keinen engen Zusammenhang mit ihrer Darstellung durch Potenzreihen. Immerhin ist aber der Kehrwert der Gammafunktion eine der grundlegenden ganzen Funktionen der Analysis, und so mag es lohnen, ihre — überall konvergente — Potenzreihe zu untersuchen. Wir setzen sie in der Form

$$\frac{1}{\Gamma(1-s)} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{c_n}{n!} s^n \tag{1}$$

an. Natürlich kann man jeden einzelnen Beiwert c_n aus dem Produkt

$$\begin{aligned}\frac{1}{\Gamma(1-s)} &= e^{-Cs} \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{s}{n}\right) e^{s/n} \\ &= \exp\left(-Cs - \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=2}^{\infty} \frac{s^m}{m\, n^m}\right) \\ &= \exp\left(-Cs - \sum_{m=2}^{\infty} \frac{\zeta(m)}{m} s^m\right)\end{aligned}$$

durch die Eulersche Konstante C und die Werte $\zeta(2), \zeta(3), \ldots$ der Riemannschen Zetafunktion ausdrücken; aber diese Ausdrücke geben keine Auskunft über die Größe und das Vorzeichen von c_n bei großem n. Wir greifen deshalb zu der additiven Darstellung der Funktion (1) durch das Hankelsche Integral

$$\frac{1}{\Gamma(1-s)} = \frac{1}{2\pi i} \int w^{s-1} e^w \, dw. \tag{2}$$

Entwickelt man in ihm den Integranden nach Potenzen von s und integriert man nach Gliedern, so ergibt sich für c_n ein Integral, das zur Paßintegration einlädt. Wir werden diese durchführen bis zu dem folgenden Ergebnis:

Die Gleichung

$$z e^z = -n \quad (z = x + yi) \tag{3}$$

hat für $n \geqq 1$ *genau eine Wurzel* p *im Streifen* $0 < y < \pi$. *Mit ihr gilt*

$$\begin{aligned} c_n &= \sqrt{\frac{2 \mathfrak{l} n}{\pi n}}\, \mathrm{Im}\,[p^n e^{-n/p}(1 + o(1))] \\ &= \sqrt{\frac{2 \mathfrak{l} n}{\pi n}}\, |p|^n \exp(-n \,\mathrm{Re}\,(p^{-1}))\,\{\sin n(\arg p - \mathrm{Im}\,(p^{-1})) + o(1)\}\,^{1}). \end{aligned} \tag{4}$$

Was dies Hauptergebnis bedeutet, wird erst klar durch die folgende Aussage über die Abhängigkeit der komplexen Funktion p von n:

Bei hinreichend großem n *konvergiert und gilt eine Reihendarstellung*

$$\begin{aligned} p = {} & \mathfrak{l} n - \mathfrak{ll} n + \frac{\mathfrak{ll} n}{\mathfrak{l} n} + \frac{1}{\mathfrak{l} n^2}\left(\frac{1}{2}\mathfrak{ll} n^2 - \mathfrak{ll} n - \frac{1}{2}\pi^2\right) + \\ & + \frac{1}{\mathfrak{l} n^3}\left(\frac{1}{3}\mathfrak{ll} n^3 - \frac{3}{2}\mathfrak{ll} n^2 + (1 - \pi^2)\mathfrak{ll} n + \frac{3}{2}\pi^2\right) + \cdots \\ & + \pi i\Big[1 - \frac{1}{\mathfrak{l} n} + \frac{1}{\mathfrak{l} n^2}(-\mathfrak{ll} n + 1) + \\ & + \frac{1}{\mathfrak{l} n^3}\left(-\mathfrak{ll} n^2 + 3\mathfrak{ll} n + \frac{1}{3}\pi^2 - 1\right) + \cdots\Big]. \end{aligned} \tag{5}$$

Sie ist bis auf die ersten beiden Glieder eine Doppelpotenzreihe in den Größen $\mathfrak{ll} n/\mathfrak{l} n$ *und* $1/\mathfrak{l} n$, *so daß man die weggelassenen Glieder in ein* $O(\mathfrak{ll} n^4/\mathfrak{l} n^4)$ *zusammenfassen oder bei früherem Abbrechen entsprechend verfahren kann.*

Man sieht hieraus, daß man nicht ohne Verlust an Gehalt der Aussage in (4) für p einen festen Abschnitt der Reihe (5), ergänzt durch ein O-Glied einsetzen kann; denn das O-Glied würde immer etwa $O(\mathfrak{l} z^{-k})$ lauten und könnte nie auf die Größenordnung $o(1/n)$ gebracht werden, während die p enthaltenden Teile von (4) immer den Faktor oder Exponenten n mit sich führen.

Durch (4) werden anscheinend der Folge (c_n) dauernde Vorzeichenwechsel beigelegt. Auch über diese werden wir genauen Aufschluß bekommen; wir beweisen:

Das Argument des Sinus in (4) *nimmt bei jedem genügend großen* k *Werte aus der Strecke* $(k + \frac{1}{2})\pi < \varphi < (k + \frac{3}{2})\pi$ *an. Zwischen diesen und den in derselben Weise zu* $k + 1$ *statt* k *gehörenden Werten von* n *wechselt die Folge* (c_n) *genau einmal das Vorzeichen.*

---

[1]) Um die Formeln mit gehäuften Logarithmenzeichen etwas zu kürzen, sei die folgende Verabredung getroffen: $\mathfrak{l} z$ bezeichnet den durch $-\pi < \mathrm{Im}\,(\mathfrak{l} z) \leqq \pi$ festgelegten Wert des natürlichen Logarithmus; ferner sei $\mathfrak{l} z^{-1} = (\mathfrak{l} z)^{-1}$ und entsprechend in ähnlichen Fällen. Z. B. würde $3\,\mathfrak{ll} z^2$ ausführlich geschrieben so lauten: $3(\log\log z)^2$.

Die Abschätzungen werden im folgenden ohne viel Rücksicht auf ihre zahlenmäßige Brauchbarkeit vorgenommen. Bei etwas sparsamerem Verfahren werden sie aber auch zur Zahlenrechnung brauchbar. Frl. A. Wiedersheim hat in ihrer Tübinger Prüfungsarbeit die Probe darauf gemacht: eines ihrer Ergebnisse ist $c_n > 0$ für $n = 1000001$.

§ 1.

Ansatz zur Paßintegration.

In (2) kann der Integrationsweg folgendermaßen gewählt werden: sei $\frac{1}{2}\pi < \beta < \pi$ und $r > 0$; dann führe der Weg längs der Graden $\arg w = -\beta$ aus dem Unendlichen nach $re^{-\beta i}$, von da längs des Kreises $|w| = r$ im positiven Sinne nach $re^{\beta i}$, von da längs der Graden $\arg w = \beta$ ins Unendliche. Setzen wir $w = e^z$, $z = x + yi$, so erhalten wir den folgenden Weg: von rechts aus dem Unendlichen wagerecht nach $\ln r - \beta i$, von da senkrecht nach $\ln r + \beta i$, von da wagerecht nach rechts ins Unendliche. Wir wollen gleich, weil es später bequem ist, $r = e^\pi$, $\ln r = \pi$ setzen, bezeichnen den Weg mit L und haben dann

$$\frac{1}{\Gamma(1-s)} = \frac{1}{2\pi i}\int_L e^{sz}\exp(e^z)\,dz.$$

Entwickeln wir den Faktor e^{sz} in die Exponentialreihe und integrieren wir gliedweise, so wird

$$\frac{1}{\Gamma(1-s)} = \frac{1}{2\pi i}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{s^n}{n!}\int_L z^n\exp(e^z)\,dz,$$

und durch Vergleich mit (1) erhalten wir

$$2\pi i\, c_n = \int_L z^n\exp(e^z)\,dz. \tag{6}$$

Die Integration nach Gliedern bei der Reihe

$$\sum_{n=0}^{\infty}\exp(e^z)\,s^n z^n/n! \tag{7}$$

ist auf dem senkrechten Teil von L wegen ihrer gleichmäßigen Konvergenz zulässig. Auf den wagerechten Teilen ist $|y| = \beta < \pi \leqq x$, $|z| < x\sqrt{2}$; also ist

$$\sum_{n=0}^{\infty}|\exp(e^z)|\,(x|s|\sqrt{2})^n/n! = \exp(e^x\cos\beta + x|s|\sqrt{2})$$

eine konvergente Majorante von (7). Da die rechte Seite wegen $\cos\beta < 0$ ein konvergentes Integral von $x = \pi$ bis $x = \infty$ liefert, war die Integration nach Gliedern auch auf den wagerechten Teilen von L zulässig.

Die obere Hälfte des Weges L, also der Weg von π über $\pi+\beta i$ nach $\beta i+\infty$ heiße H; die untere ist das Spiegelbild von H an der reellen Achse, in umgekehrter Richtung durchlaufen. Statt (6) können wir also

$$2\pi i c_n = \int_{\dot{H}} z^n \exp(e^z)\, dz - \int_{\dot{\bar{H}}} z^n \exp(e^z)\, dz$$

schreiben. Da der Integrand bei konjugierten Werten von z selbstkonjugierte Werte annimmt, ist das zweite Integral konjugiert zum ersten, und wir haben

$$\pi c_n = \operatorname{Im} \int_{\dot{H}} z^n \exp(e^z)\, dz. \tag{8}$$

§ 2.

Der Paß.

Die Betragsfläche des Integranden über der z-Ebene hat, wenn $n > 0$ ist, eine Mulde bei $z = 0$ und ein Tal, das sich in der Breite $\frac{1}{2}\pi < y < \frac{3}{2}\pi$ wagerecht nach rechts ins Unendliche erstreckt. Mulde und Tal werden — so vermutet man — durch einen Paß getrennt, und über diesen wird man den Integrationsweg legen. Wir schreiben den Integranden als $e^{f(z)}$, setzen also

$$f(z) = n \ln z + e^z;$$

dann muß der Paß eine Nullstelle von $f'(z) = nz^{-1} + e^z$, d. h. eine von 0 verschiedene Lösung der Gleichung (3) sein.

Wir beschränken uns von vornherein auf den Streifen $0 < y < \pi$. Bei jedem reellen n muß am Paß der imaginäre Teil $e^x(x \sin y + y \cos y)$ von $z e^z$ verschwinden, d. h. der Paß liegt allemal auf der Kurve

$$x = -y \operatorname{ctg} y. \tag{9}$$

Sie beginnt bei $z = -1$ und führt über $z = \frac{1}{2}\pi i$ mit $y \to \pi$ nach rechts ins Unendliche. Auf ihr geht der Realteil von $z e^z$ stetig von $-e^{-1}$ nach $-\infty$ und zwar monoton; denn an einer Umkehrstelle müßte, da auf (9) der Imaginärteil den festen Wert 0 hat, die Ableitung von $z e^z$ verschwinden, und das tut sie nur bei $z = -1$. Wir finden also bei jedem $n > e^{-1}$ genau einen Paß im Streifen $0 < y < \pi$; er heiße $z = p = \alpha + \beta i$. Damit ist zugleich gesagt, wie wir den bisher unbestimmten Wert β festlegen. Die Bedingung $\beta > \frac{1}{2}\pi$ ist dabei für $n > \frac{1}{2}\pi$ erfüllt. Dann führt der Weg H über p, sofern $\alpha \geqq \pi$ ist. Später werden wir noch verlangen, daß auch der Wert $p - n^{-2/5}$ auf H liegt, d. h. daß $\alpha - n^{-2/5} \geqq \pi$ ist. Auch dies ist für hinreichend große n der Fall, weil p mit wachsendem n nach rechts ins Unendliche rückt. Es genügt $n \geqq 120$, wie eine Überschlagsrechnung zeigt.

Um genauer zu ermitteln, wie sich p bei großem n verhält, setzen wir

$$p = (1+q)\,\mathrm{l}(-n). \tag{10}$$

Von den Logarithmen gilt

$$\mathrm{l}\,p - \mathrm{ll}(-n) = \mathrm{l}(1+q) \tag{11}$$

ohne Zusatz eines Vielfachen von $2\pi i$, weil der Imaginärteil der linken Seite zwischen $-\frac{1}{2}\pi$ und $\frac{1}{2}\pi$ liegt. Da p die Gleichung (3) erfüllt, ist

$$p + \mathrm{l}\,p = \mathrm{l}(-n), \tag{12}$$

ebenfalls ohne Zusatz eines Vielfachen von $2\pi i$.

Wir schließen jetzt p in ein Rechteck ein. Ist $x \geqq \mathrm{l}\,n$, so ist $|z\,e^z| \geqq n\,\mathrm{l}\,n > n$. Ist aber $0 < y < \pi$, $0 < x \leqq \mathrm{l}\,n - \mathrm{ll}\,n$, so folgt

$$|z\,e^z| = |z|\,n/\mathrm{l}\,n < (x+\pi)\,n/\mathrm{l}\,n \leqq n - (\mathrm{ll}\,n - \pi)\,n/\mathrm{l}\,n \leqq n,$$

sobald $\mathrm{ll}\,n \geqq \pi$ ist. Da aber p die Gleichung (3) erfüllt und daher $|p\,e^p| = n$ ist, gehört p bei hinreichend großem n dem Rechteck

$$\mathrm{l}\,n - \mathrm{ll}\,n < x < \mathrm{l}\,n, \quad 0 < y < \pi$$

an. Nach (10) folgt daraus

$$|q| < \frac{\pi + \mathrm{ll}\,n}{\mathrm{l}(-n)} < \frac{\pi + \mathrm{ll}\,n}{\mathrm{l}\,n} \to 0 \qquad (n \to \infty). \tag{13}$$

Aus (10), (11) und (12) folgt

$$q\,\mathrm{l}(-n) + \mathrm{ll}(-n) + \mathrm{l}(1+q) = 0.$$

Setzen wir in dieser Gleichung

$$u = -\mathrm{ll}(-n)/\mathrm{l}(-n), \quad v = -1/\mathrm{l}(-n),$$

so schreibt sie sich

$$q = u + v\,\mathrm{l}(1+q). \tag{14}$$

Da $\mathrm{l}(1+q)$ bei $q = 0$ regulär ist, läßt sich (14) durch eine bei $u = v = 0$ reguläre Funktion von u und v auflösen. Genauer: es gibt einen Wert $r > 0$ derart, daß jede dem Bereich $|u| < r$, $|v| < r$, $|q| < r$ angehörende Lösung von (14) durch die Lagrangesche Umkehrreihe

$$\begin{aligned} q &= u + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{v^k}{k!} \frac{d^{k-1}\,\mathrm{l}(1+u)^k}{d\,u^{k-1}} \\ &= u + v\left(u - \frac{u^2}{2} + \frac{u^3}{3} - \cdots\right) + v^2\left(u - \frac{3\,u^2}{2} + \cdots\right) + v^3(u + \cdots) + \cdots \end{aligned} \tag{15}$$

dargestellt wird. Da u und v mit $n \to \infty$ gegen Null gehen — denn es ist ja $|\mathrm{l}(-n)| > |\mathrm{l}\,n|$ und $|\mathrm{ll}(-n)| \leqq \pi + \mathrm{l}(\pi + \mathrm{l}\,n)$ — und von q nach (13) dasselbe gilt, wird also die durch (10) erklärte Größe q bei hinreichend großem n durch die Reihe (15) dargestellt. Wir können den Gültigkeitsbereich der Reihe (15) noch genauer angeben. Sie stellt

eine analytische Funktion von u und v, und damit von n dar, wenn n solche positiven Werte annimmt, daß das Wertpaar (u, v) dem Gebiet der absoluten Konvergenz der Doppelreihe (15) angehört. Da aber, wie wir im Anhang feststellen werden, für $n \geqq 1$ die Beträge $|u|$ und $|v|$ mit wachsendem n abnehmen, ist das von einer Stelle an, etwa für $n > n_0$ der Fall. Für $n > n_0$ stellt also die Reihe in (15) eine analytische Funktion von n dar, und ebenso ist q eine dort analytische Funktion von n. Für genügend große n stimmen beide überein; also stimmen sie als analytische Funktionen bei allen $n > n_0$ überein. Das genaue Gebiet der absoluten Konvergenz der Reihe wird ebenfalls im Anhang ermittelt werden.

Eine Entwicklung von p nach steigenden Potenzen von u und v bekommen wir, indem wir (15) in (10) einsetzen. Dabei ordnen wir gleich nach dem Gesamtgrad:

$$p = \mathfrak{l}(-n) - q/v$$
$$= \mathfrak{l}(-n) - uv^{-1} - u + (\tfrac{1}{2}u^2 - uv) + (-\tfrac{1}{3}u^3 + \tfrac{3}{2}u^2 v - uv^2) + \cdots.$$

Um hieraus Real- und Imaginärteil von p kennen zu lernen, setzen wir ein

$$\mathfrak{l}(-n) = \mathfrak{l}n + \pi i,$$
$$uv^{-1} = \mathfrak{l}\mathfrak{l}(-n) = \mathfrak{l}\mathfrak{l}n + \mathfrak{l}(1 + \pi i/\mathfrak{l}n) =$$
$$= \mathfrak{l}\mathfrak{l}n + \frac{\pi i}{\mathfrak{l}n} + \frac{\pi^2}{2\,\mathfrak{l}n^2} - \frac{\pi^3 i}{3\,\mathfrak{l}n^3} + \cdots,$$
$$v = -\frac{1}{\mathfrak{l}(-n)} = -\frac{1}{\mathfrak{l}n} + \frac{\pi i}{\mathfrak{l}n^2} + \frac{\pi^2}{\mathfrak{l}n^3} + \cdots,$$
$$u = uv^{-1}\cdot v = -\frac{\mathfrak{l}\mathfrak{l}n}{\mathfrak{l}n} + \pi i\frac{\mathfrak{l}\mathfrak{l}n}{\mathfrak{l}n^2} - \frac{\pi i}{\mathfrak{l}n^2} + \pi^2\frac{\mathfrak{l}\mathfrak{l}n}{\mathfrak{l}n^3} - \frac{3\pi^2}{2\,\mathfrak{l}n^3} + \cdots,$$
$$\frac{1}{2}u^2 = \frac{\mathfrak{l}\mathfrak{l}n^2}{2\,\mathfrak{l}n^2} - \pi i\frac{\mathfrak{l}\mathfrak{l}n^2}{\mathfrak{l}n^3} + \pi i\frac{\mathfrak{l}\mathfrak{l}n}{\mathfrak{l}n^3} + \cdots,$$
$$-uv = -\frac{\mathfrak{l}\mathfrak{l}n}{\mathfrak{l}n^2} + 2\pi i\frac{\mathfrak{l}\mathfrak{l}n}{\mathfrak{l}n^3} - \frac{\pi i}{\mathfrak{l}n^3} + \cdots,$$
$$-\frac{1}{3}u^3 = \frac{\mathfrak{l}\mathfrak{l}n^3}{3\,\mathfrak{l}n^3} + \cdots,\quad \frac{3}{2}u^2 v = -\frac{3\,\mathfrak{l}\mathfrak{l}n^2}{2\,\mathfrak{l}n^3} + \cdots,\quad -uv^2 = \frac{\mathfrak{l}\mathfrak{l}n}{\mathfrak{l}n^3} + \cdots$$

und erhalten

$$p = \alpha + \beta i$$
$$= \mathfrak{l}n - \mathfrak{l}\mathfrak{l}n + \frac{\mathfrak{l}\mathfrak{l}n}{\mathfrak{l}n} + \frac{1}{\mathfrak{l}n^2}\left(\frac{1}{2}\mathfrak{l}\mathfrak{l}n^2 - \mathfrak{l}\mathfrak{l}n - \frac{1}{2}\pi^2\right) +$$
$$+ \frac{1}{\mathfrak{l}n^3}\left(\frac{1}{3}\mathfrak{l}\mathfrak{l}n^3 - \frac{3}{2}\mathfrak{l}\mathfrak{l}n^2 + (1 - \pi^2)\mathfrak{l}\mathfrak{l}n + \frac{3}{2}\pi^2\right) + \cdots$$
$$+ \pi i\left[1 - \frac{1}{\mathfrak{l}n} + \frac{1}{\mathfrak{l}n^2}(-\mathfrak{l}\mathfrak{l}n + 1) + \frac{1}{\mathfrak{l}n^3}\left(-\mathfrak{l}\mathfrak{l}n^2 + 3\mathfrak{l}\mathfrak{l}n + \frac{1}{3}\pi^2 - 1\right) + \cdots\right];$$

das ist grade die Reihe (4) aus der Einleitung. Der Konvergenzbereich dieser Reihe ist weniger übersichtlich als der der nach Potenzen von

u und v fortschreitenden Reihen, umfaßt aber jedenfalls ein Gebiet ($|1/\mathrm{l}\, n| < r_1$, $|\mathrm{ll}\, n/\mathrm{l}\, n| < r_1$) mit $r_1 > 0$; denn wir haben ja nur für u und v die sie darstellenden konvergenten Potenzreihen ohne absolutes Glied eingesetzt, die nach Potenzen von $1/\mathrm{l}\, n$ und $\mathrm{ll}\, n/\mathrm{l}\, n$ fortschreiten.

§ 3.

Integralauswertung.

Wir haben jetzt das in (8) stehende Integral

$$H = \int_{\mathfrak{H}} z^n \exp(e^z)\, dz$$

asymptotisch auszuwerten. Um aber die in der Einleitung gemachten Aussagen über die Zeichenwechsel der Beiwerte c_n zu begründen, ziehen wir auch das Integral

$$H_1 = \int_{\mathfrak{H}} \mathrm{l}(z/p)\, z^n \exp(e^z)\, dz = d\, H_0/d\, n - \mathrm{l}\, p \cdot H_0$$

heran. Den Hauptbeitrag zu H_0 wird die Umgebung des Passes p liefern. Wir trennen daher eine Strecke der Länge $2a$ mit dem Mittelpunkt p von H ab und teilen überhaupt H in die folgenden gradlinigen Teile:

$$\begin{aligned} A &\text{ von } \pi \text{ bis } \pi + \beta i, \\ B^- &\text{ von } \pi + \beta i \text{ bis } p - a, \\ C &\text{ von } p - a \text{ bis } p + a, \\ B^+ &\text{ von } p + a \text{ bis } \beta i + \infty. \end{aligned}$$

Von vornherein wollen wir

$$0 < a \to 0 \qquad (n \to \infty) \tag{16}$$

annehmen; dann liegt bei genügend großem n der Teilpunkt $p - a$ sicher auf H. Die von den Teilen A bis B^+ herrührenden Beiträge zu den Integralen H_0 und H_1 bezeichnen wir mit A_0 bis B_0^+, A_1 bis B_1^+.

Für die Integrale A_0 und A_1 genügt eine grobe Schätzung. Auf A ist $\exp(e^z)$ beschränkt, $x = \pi$, $0 \leqq y < \pi$ und daher $|z| < \pi\sqrt{2}$. Da die Länge von A kleiner als π ist, haben wir

$$A = O((\pi\sqrt{2})^n). \tag{17}$$

Da auf A ferner $0 \leqq \arg z < \pi/4$, also $\mathrm{l}\, z$ beschränkt und $p \sim \mathrm{l}\, n$, $\mathrm{l}\, p \sim \mathrm{ll}\, n$ ist, wird

$$A_1 = O\left((\pi\sqrt{2})^n\, \mathrm{ll}\, n\right). \tag{18}$$

Für die anderen Integrale brauchen wir vor allem einige Kenntnis des Verhaltens der Funktion $f(z)$ und ihrer Ableitungen auf der Strecke C.

Es ist

$$f(z) = n \log z + e^z, \quad f'(z) = \frac{n}{z} + e^z, \quad f''(z) = -\frac{n}{z^2} + e^z, \quad f'''(z) = \frac{2n}{z^3} + e^z,$$

$$f'(p) = 0, \quad f''(p) = -\frac{n}{p^2} - \frac{n}{p} \sim -\frac{n}{\log n} \tag{19}$$

und daher auch

$$\operatorname{Re} f''(p) \sim -n/\log n. \tag{20}$$

Auf der ganzen Strecke C ist [2])

$$f'''(z) = \frac{2n}{z^3} + e^p e^{z-p} = O\left(\frac{n}{\log n^3}\right) - \frac{n}{p} O(1) = O\left(\frac{n}{\log n}\right). \tag{21}$$

Durch mehrfache Integration und mit Rücksicht auf die gleichmäßige Gültigkeit der O-Aussagen folgt daraus

$$f'(p \pm a) = \pm a f''(p) + O\left(\frac{a^2 n}{\log n}\right) \sim \mp \frac{a n}{\log n}, \tag{22}$$

$$f(z) = f(p) + \tfrac{1}{2} f''(p)(z-p)^2 + O(a^3 n/\log n), \tag{23}$$

dies letzte natürlich nur für z auf C.

Jetzt können wir C_0 und C_1 abschätzen. Auf C ist

$$\exp(f(z) - f(p)) = \exp[\tfrac{1}{2} f''(p)(z-p)^2 + O(a^3 n/\log n)].$$

Setzen wir von jetzt an

$$a^3 n/\log n \to 0 \tag{24}$$

voraus, so erhalten wir

$$\exp(f(z) - f(p)) = \exp[\tfrac{1}{2} f''(p)(z-p)^2] + \exp[\tfrac{1}{2} \operatorname{Re} f''(p)(z-p)^2] \, O(a^3 n/\log n).$$

Setzen wir $z = p + t$ und integrieren wir von $-a$ bis a, so folgt

$$e^{-f(p)} C_0 = \int_{-a}^{a} \exp(\tfrac{1}{2} f''(p) t^2)\, dt + \int_{-a}^{a} \exp(\tfrac{1}{2} \operatorname{Re} f''(p) t^2)\, dt \; O(a^3 n/\log n). \tag{25}$$

Wegen (19) und (20) konvergieren bei großem n die beiden Integrale, wenn wir sie von $-\infty$ bis ∞ statt von $-a$ bis a erstrecken. Dabei wird das zweite, das einen positiven Integranden hat, vergrößert zu

$$\sqrt{-2\pi/\operatorname{Re} f''(p)} = O(\sqrt{\log n/n}).$$

Im ersten setzen wir

$$t \sqrt{-\tfrac{1}{2} f''(p)} = u$$

und erhalten, mit dem Faktor $\sqrt{-2/f''(p)}$ versehen, das Fehlerintegral

[2]) Alle Grenzwert- oder Beschränkungsaussagen, also Formeln mit den Zeichen O, o oder $\sim$ in denen von n unabhängige Veränderliche vorkommen, sollen gleichmäßig in diesen Veränderlichen gelten, natürlich soweit diese Werte aus den ihnen zugewiesenen, häufig von n abhängigen Bereichen annehmen, so wie hier z auf der von n abhängigen Strecke C beliebig ist.

$\int e^{-uu}\,du$, erstreckt von $-b$ bis b, worin $b = a\sqrt{-\frac{1}{2}f''(p)}$ gesetzt ist. Für die Quadratwurzel nehmen wir den Wert (oder einen der beiden Werte) mit nicht negativem Realteil. Nach (19) gilt dann

$$\operatorname{Re} b \to +\infty, \quad \arg b \to 0,$$

wenn wir an die Größe a die weitere Anforderung

$$a\sqrt{n/\mathrm{l}\, n} \to \infty \tag{26}$$

stellen. Damit wird dann

$$\int_{-b}^{b} e^{-uu}\,du \to \sqrt{\pi},$$

$$\int_{-a}^{a} \exp\left(\tfrac{1}{2}f''(p)\,t^2\right)dt \sim \sqrt{-2\pi/f''(p)} \sim \sqrt{2\pi\,\mathrm{l}\, n/n},$$

und aus (25) folgt

$$e^{-f(p)}C_0 = (1+o(1))\sqrt{2\pi\,\mathrm{l}\, n/n} + O\left(\sqrt{\mathrm{l}\, n/n}\right)O(a^3 n/\mathrm{l}\, n) \sim \sqrt{2\pi\,\mathrm{l}\, n/n}. \tag{27}$$

Zur Abschätzung von C_1 genügt es, die für alle z auf C gültige Beziehung

$$\mathrm{l}\,(z/p) = O(a/|p|) = O(a/\mathrm{l}\, n)$$

heranzuziehen; mit (20) ergibt sie

$$\begin{aligned} e^{-f(p)}C_1 &= O(a/\mathrm{l}\, n)\int_{-a}^{a}\exp\left(\tfrac{1}{2}\operatorname{Re} f''(p)\,t^2\right)dt \\ &= O\left(\frac{a}{\mathrm{l}\, n\sqrt{-\operatorname{Re} f''(p)}}\right) = O\left(\frac{a}{\sqrt{n\,\mathrm{l}\, n}}\right). \end{aligned} \tag{28}$$

Auf den Strecken $B^{\pm}$ betrachten wir den Realteil von $f''(z)$. Es ist dort $x \geqq \pi > y$, $\cos y = \cos\beta < 0$; daraus folgt

$$\operatorname{Re} f''(z) = -n\,|z|^{-4}\operatorname{Re}(z^2) + e^x\cos\beta < 0.$$

Setzen wir

$$z = p \pm a \pm t, \quad \varphi(t) = \operatorname{Re} f(z), \quad b^+ = +\infty, \quad b^- = \alpha - a - \pi,$$

so durchläuft z die Strecke $B^{\pm}$, wenn t von 0 bis $b^{\pm}$ geht, und es ist

$$\varphi(0) = \operatorname{Re} f(p \pm a), \quad \varphi'(0) = \pm \operatorname{Re} f'(p \pm a), \quad \varphi''(t) = \operatorname{Re} f''(z) \leqq 0,$$
$$\varphi(t) \leqq \varphi(0) + t\,\varphi'(0) = \operatorname{Re} f(p \pm a) \pm t \operatorname{Re} f'(p \pm a).$$

(In jeder Formel ist durchweg das obere oder durchweg das untere Vorzeichen zu lesen.) Wegen (22) ist nun $\pm \operatorname{Re} f'(p \pm a) < 0$ bei hinreichend großem n und daher

$$\begin{aligned} |B_0^+| &\leqq \int_0^{b^{\pm}} e^{\varphi(t)}\,dt \leqq \int_0^{\infty}\exp\left(\varphi(0) + t\,\varphi'(0)\right)dt \\ &= \mp \exp\left(\operatorname{Re} f(p \pm a)\right)/\operatorname{Re} f'(p \pm a). \end{aligned} \tag{29}$$

Bei den Integralen B_1^+ kommt der Faktor $1(z/p)$ hinzu. Auf der Strecke B^- ist

$$1 < |z| \leqq p, \quad 0 < \arg z < \pi/4, \quad 0 < \arg p < \pi/4,$$
$$|1(z/p)| \leqq |1|z/p|| + |\arg(z/p)| < 1|p| + \pi/4 = O(11n);$$

das gibt

$$B_1^- = O(11n) \exp(\operatorname{Re} f(p-a))/\operatorname{Re} f'(p-a). \tag{30}$$

Auf der Strecke B^+ ist $\operatorname{Re}(z/p) \geqq 1$, also $|w| \geqq 1$, wenn w die grade Strecke von 1 bis z/p durchläuft; auf B^+ gilt daher

$$|1(z/p)| = \left| \int_1^{z/p} w^{-1}\, dw \right| \leqq |z/p - 1| = (a+t)/|p|.$$

So bekommen wir

$$|B_1^+| \leqq |p|^{-1} \exp \operatorname{Re} f(p+a) \int_0^\infty (a+t) \exp(t \operatorname{Re} f'(p+a))\, dt$$
$$= |p|^{-1} \exp \operatorname{Re} f(p+a) \left(\frac{a}{-\operatorname{Re} f'(p+a)} + \frac{1}{(\operatorname{Re} f'(p+a))^2} \right). \tag{31}$$

§ 4.

Schlußfolgerungen.

Aus den Ergebnissen (17), (18) und (27) bis (31) werden wir die in der Einleitung behaupteten Sätze ableiten. Zunächst können wir die in § 3 über a gemachten Voraussetzungen (16), (24) und (26) erfüllen, indem wir

$$a = n^{-2/5}$$

setzen. Dann vergleichen wir alle behandelten Integrale mit C_0. Dazu stellen wir fest

$$f(p) = n\,1p + e^p = n\,1(1n + O(11n)) - n/p \sim n\,11n.$$

Mit (27) zusammen gibt das

$$1|C_0| \sim n\,11n. \tag{32}$$

Aus (17) und (18) entnehmen wir

$$1|A_\nu 1n| < kn \qquad (\nu = 0, 1)$$

mit festem k, so daß sich

$$1|A_\nu 1n/C_0| \to -\infty,$$
$$A_0 = o(C_0), \quad A_1 1n = o(C_0) \tag{33}$$

ergibt. Der Vergleich von (27) und (28) ergibt

$$C_1/C_0 = O(a/1n) = o(1/1n),$$
$$C_1 1n = o(C_0). \tag{34}$$

Um die Abschätzungen (29) bis (31) entsprechend auszuwerten, ziehen wir aus (22) die Folgerung

$$\mp f'(p \pm a) \sim n^{3/5}/\mathrm{l}\, n.$$

Sie zeigt, daß der Faktor, mit dem $\exp \mathrm{Re}\, f(p \pm a)$ in (29) bis (31) versehen ist, allemal mit $n \to \infty$ gegen Null geht, sogar wenn ihm noch ein Faktor $\mathrm{l}\, n$ hinzugesetzt wird. Es ist also

$$B_\nu^+ \mathrm{l}\, n = o(\exp \mathrm{Re}\, f(p \pm a)). \tag{35}$$

Aus (23) folgt aber, wenn man (20) heranzieht,

$$\begin{aligned} \mathrm{Re}\, f(p \pm a) - \mathrm{Re}\, f(p) &= \tfrac{1}{2} a^2 \mathrm{Re}\, f''(p) + O(n^{-1/5}/\mathrm{l}\, n) \\ &= -(1 + o(1))\, n^{1/5}/2\,\mathrm{l}\, n + O(n^{-1/5}/\mathrm{l}\, n) \sim -n^{1/5}/2\,\mathrm{l}\, n. \end{aligned}$$

Bei genügend großem n ist also

$$\mathrm{Re}\, f(p \pm a) - \mathrm{Re}\, f(p) < -n^{1/5}/3\,\mathrm{l}\, n.$$

Mit (27) und (35) folgt daraus

$$\mathrm{l}\,|B_\nu^+ \mathrm{l}\, n/C_0| < -n^{1/5}/3\,\mathrm{l}\, n + O(\mathrm{l}\, n) \to -\infty,$$

$$B_\nu^+ \mathrm{l}\, n = o(C_0). \tag{36}$$

Nach der Zerlegung des Integrationsweges zu Anfang des § 3 ist

$$H_\nu = A_\nu + B_\nu^- + C_\nu + B_\nu^+ \qquad (\nu = 0, 1);$$

nach (33), (34) und (36) gilt daher

$$H_0 \sim C \sim e^{f(p)} \Big/ 2\pi\, \mathrm{l}\, n/n, \tag{37}$$

$$H_1 \mathrm{l}\, n = o(C_0) = o(H_0). \tag{38}$$

Nun ist H_0 das Integral auf der rechten Seite von (8), und es ist

$$f(p) = n\,\mathrm{l}\, p + e^p = n\,\mathrm{l}\, p - n/p.$$

Setzen wir dies in (37) ein, so haben wir die Behauptung (4) der Einleitung. Die andere Behauptung, die über die Zeichenwechsel, folgt aus (38). Es ist ja

$$\begin{aligned} H_1 &= \frac{d\, H_0}{d\, n} - H_0 \mathrm{l}\, p = o(H_0/\mathrm{l}\, n), \\ \frac{d \arg H_0}{d\, n} &= \mathrm{Im}\left(\frac{1}{H_0} \frac{d\, H_0}{d\, n}\right) = \mathrm{Im}\,(\mathrm{l}\, p + H/H_0) \\ &= \mathrm{Im}\, \mathrm{l}\, p + o(1/\mathrm{l}\, n) \sim \pi/\mathrm{l}\, n, \end{aligned}$$

wobei der letzte Schritt ohne weiteres aus (5) folgt. Das Argument von H_0 wächst also über alle Grenzen und nimmt bei hinreichend großem n dauernd zu, aber beliebig langsam. Daraus folgt die Behauptung der Einleitung über die Zeichenwechsel der Folge (c_n).

Anhang.

Wie in § 2 angekündigt, wollen wir hier bestätigen, daß die Größen $|u|$ und $|v|$ mit wachsendem $n > 1$ monoton gegen Null streben. Dabei war

$$u = -\mathfrak{l}(-n)/\mathfrak{l}(-n), \quad v = -1/\mathfrak{l}(-n).$$

Bei v erkennt man sofort: mit $n \to \infty$ wächst $|\mathfrak{l}(-n)|^2 = \mathfrak{l} n^2 + \pi^2$ monoton ins Unendliche, nimmt also $|v|$ monoton gegen Null ab. Um bei u dasselbe zu erkennen, bilden wir

$$\mathfrak{l}|u| = \operatorname{Re}(\mathfrak{l}\mathfrak{l}(-n) - \mathfrak{l}(-n)),$$

$$\frac{d\,\mathfrak{l}|u|}{dn} = \operatorname{Re}\left(\frac{1}{n\,\mathfrak{l}(-n)\mathfrak{l}(-n)} - \frac{1}{n\,\mathfrak{l}(-n)}\right) \tag{39}$$

$$= -\operatorname{Re}\frac{1-\mathfrak{l}(-n)^{-1}}{n\,\mathfrak{l}(-n)} \sim \frac{-1}{n\,\mathfrak{l} n}.$$

Das Schlußglied ist die Ableitung von $-\mathfrak{l}\mathfrak{l} n$; aus $-\mathfrak{l}\mathfrak{l} n \to -\infty$ folgt daher $\mathfrak{l}|u| \to -\infty$. Die Monotonie wird erwiesen, indem wir uns davon überzeugen, daß das vorletzte Glied in (39) für $n \geqq 1$ negativ ist, und dies wiederum ist gesichert, wenn wir sehen, daß Zähler und Nenner des Bruches beide in der rechten oberen Viertelebene liegen. Beim Nenner $n(\mathfrak{l} n + \pi i)$ ist das klar. Um den Zähler zu behandeln, setzen wir für den Augenblick $\mathfrak{l}\mathfrak{l}(-n) = \gamma + \delta i$; dann ist

$$\gamma = \mathfrak{l}|\mathfrak{l}(-n)| \geqq \mathfrak{l}\pi > 1, \quad \delta = \arg \mathfrak{l}(-n) > 0.$$

Daraus folgt

$$\operatorname{Re}(\mathfrak{l}\mathfrak{l}(-n)^{-1}) = \frac{\gamma}{\gamma^2+\delta^2} < \frac{\gamma^2}{\gamma^2+\delta^2} < 1,$$

$$\operatorname{Re}(1-\mathfrak{l}\mathfrak{l}(-n)^{-1}) > 0,$$

$$\operatorname{Im}(1-\mathfrak{l}\mathfrak{l}(-n)^{-1}) = \frac{\delta}{\gamma^2+\delta^2} > 0,$$

wie behauptet war.

Die zweite Aufgabe dieses Anhangs ist es, den genauen Bereich der (absoluten) Konvergenz der Doppelpotenzreihe (15) festzustellen. Dieser hat bekanntlich, abgesehen von Randpunkten, die Gestalt $|u| < \varphi(|v|)$, worin $\varphi(s)$ bei nicht negativem s der größte derjenigen Werte r ist, für die die durch (15) dargestellte Funktion in dem ganzen Doppelzylinder $|u| < r$, $|v| < s$ bzw. für $|u| < r$, $v = 0$ regulär ist.

Um die Profilfunktion $\varphi(s)$ zu ermitteln, greifen wir auf die Erklärung der Funktion $q(u, v)$ zurück. Setzen wir

$$F(q, u, v) = u + v\,\mathfrak{l}(1+q) - q,$$

so ist q diejenige analytische Funktion von u und v, die im Nullpunkt regulär ist und den Wert 0 hat und die in ihrem ganzen Verlauf die

Gleichung $F = 0$ — gegebenenfalls mit einem anderen Wert des Logarithmus — erfüllt. Wir stellen zunächst fest, wie weit sie auf den Achsen $u = 0$ und $v = 0$ regulär ist. Für $u = 0$, $|v| < 1$ löst $q = 0$ die Gleichung $F = 0$, und es ist $F_q = v/(1+q) - 1 \neq 0$; also ist q dort regulär. Für $v = 1$, $q = u = 0$ dagegen ist $F_q = 0$, $F_u = 1 \neq 0$; also ist dort q singulär. Für $v = 0$ haben wir die Lösung $q = u$; und solange $|u| < 1$ bleibt, ist F regulär und $F_q \neq 0$, so daß wieder q regulär ist.

Weiter betrachten wir reelle Werte q, u und v. Die Gleichung $F = 0$ verlangt, in der reellen q-t-Ebene einen Schnittpunkt der Kurven

$$t = q - u, \quad t = v\,l(1+q)$$

zu finden. Ist $v \leqq 0$, so gibt es genau einen; ist $0 < v < 1$, so sind es genau zwei, solange u nicht unter den — negativen — Wert sinkt, bei dem Berührung zwischen den beiden Kurven eintritt. Der rechts gelegene geht für $u = 0$ in den Nullpunkt über. All das erkennt man sofort aus der Monotonie der beiden Kurven und der Konvexität der zweiten. Berührung tritt ein, wenn außer $F = 0$ noch

$$1 = \frac{d(q-u)}{dq} = \frac{d}{dq}\,(v\,l(1+q)) = \frac{v}{1+q}$$

gilt, d. h. wenn

$$-u = 1 - v - v\,l\,v = \psi(v)$$

ist. Dann fallen zwei Wurzeln der Gleichung $F = 0$ zusammen; die Funktion $q(u, v)$ verzweigt sich, ist also singulär. Die Funktion $\psi(v)$ nimmt stetig von 1 zu 0 ab, wenn v von 0 bis 1 geht. Wir fassen zusammen:

Die durch die Reihe (15) *dargestellte Funktion* $q(u, v)$ *ist regulär für* $0 \leqq v < 1$, $0 \leqq -u < \psi(v)$, *dagegen singulär bei den Stellen* $0 < v < 1$, $u = -\psi(v)$.

Von der Profilfunktion $\varphi(s)$ wissen wir hiernach das folgende. Weil q für $v = 0$, $|u| < 1$ regulär ist, ist $\varphi(0) \geqq 1$. Weil q regulär ist für $u = 0$, $|v| < 1$, aber nicht für $u = 0$, $v = 1$, ist $\varphi(s) > 0$ für $0 < s < 1$, aber $\varphi(1) = 0$. Ferner ist $\varphi(s) \leqq \psi(s)$, weil q für $v = s$, $u = -\psi(s)$ singulär ist. Schließlich weiß man allgemein, daß $l\,\varphi(s)$, soweit $\varphi > 0$ ist, eine nach oben konvexe nicht zunehmende Funktion von $l\,s$ ist. Aus all dem folgt, daß $\varphi(s)$ für $0 \leqq s \leqq 1$ eine abnehmende stetige Funktion ist. Nun sei $0 < s_0 < 1$; dann ist q jedenfalls regulär für $|u| < \varphi(s)$, $|v| < s$. Ist $|u| < \varphi(s_0)$, aber $|v| = s_0$, so wählen wir $s' > s_0$ so nahe bei s_0, daß noch $|u| < \varphi(s')$ gilt. Dann ist $|u| < \varphi(s')$, $|v| < s'$ und daher q an der Stelle (u, v) regulär. Ist $|u| = \varphi(s_0)$, $|v| < s_0$, so wählen wir s'' zwischen $|v|$ und s_0. Dann ist $|u| < \varphi(s'')$, $|v| < s''$ und daher wieder q an der Stelle (u, v) regulär. Damit erfüllt die Funktion $f(w, z) = -q(-w, z)$ die Voraussetzungen des Singularitätensatzes über

Potenzreihen mit positiven Beiwerten, den wir in der folgenden Form anwenden[3]):

Sei $r_0 > 0$, $s_0 > 0$. Die Funktion $f(w, z)$ sei regulär, wenn die Ungleichungen $|w| \leqq r_0$, $|z| \leqq s_0$ gelten und in mindestens einer von ihnen die Gleichheit nicht besteht. Sie sei aber nicht in allen Punkten mit $|w| = r_0$, $|z| = s_0$ regulär. Die Beiwerte in ihrer Potenzreihe seien reell und nicht negativ. Dann ist $w = r_0$, $z = s_0$ ein singulärer Punkt für $f(w, z)$.

In der Tat sieht man an (15), daß die Voraussetzung über die Beiwerte erfüllt ist; die anderen Voraussetzungen — mit $r_0 = \varphi(s_0)$ — waren grade bestätigt worden. Danach ist $u = -\varphi(s_0)$, $v = s_0$ eine singuläre Stelle für $q(u, v)$. Es muß daher $\varphi(s_0) \geqq \psi(s_0)$ sein. Da wir schon früher $\varphi(s_0) \leqq \psi(s_0)$ festgestellt haben, ist $\varphi(s_0) = \psi(s_0)$ für jedes s_0 zwischen 0 und 1. Unser Ergebnis ist daher:

Der Bereich der absoluten Konvergenz der Reihe (15) *besteht abgesehen von Randpunkten, aus den Punkten (u, v) mit*

$$|v| < 1, \quad |u| < 1 - |v| + |v| \, l \, |v|.$$

Eine Überschlagsrechnung zeigt, daß die Reihe (15) etwa für $n = 100$ konvergiert, allerdings noch nicht so schnell, daß sie zur Zahlenrechnung brauchbar wäre.

[3]) Bei Funktionen einer Veränderlichen ist dies der früher sogenannte Satz von Vivanti. Der hier ausgesprochene Satz wird genau so bewiesen. Nimmt man an, $f(w, z)$ sei regulär bei $z = r_0$, $w = s_0$ und setzt man $w = \frac{1}{2} r_0 + u$, $z = \frac{1}{2} s_0 + v$, so erhält man eine Funktion von u und v, die für $|u| \leqq \frac{1}{2} r_0$, $|v| \leqq \frac{1}{2} s_0$ regulär ist. Ihre Potenzreihe konvergiert daher bei geeignetem $\delta > 0$ für $u = \frac{1}{2} r_0 + \delta$, $v = \frac{1}{2} s_0 + \delta$. Sie entsteht aber aus der Potenzreihe für $f(w, z)$ durch Zerlegen der positiven Glieder in positive Teile und Zusammenfassen der Teile. Daher konvergiert die Reihe der Funktion $f(w, z)$ für $w = r_0 + \delta$, $z = s_0 + \delta$ und die Funktion $f(w, z)$ ist regulär für $|w| = r_0$, $|z| = s_0$, entgegen der Voraussetzung.

(Eingegangen am 6. Juli 1949.)

Über die Abzählung der Nullstellen der konfluenten hypergeometrischen Funktionen.

Herrn Oskar Perron zum 70. Geburtstag am 7. Mai 1950 gewidmet.

Von

F. G. Tricomi z. Zt. in Pasadena, California.

1. Eine der schönsten Formeln für die konfluente hypergeometrische Funktion

$$(1) \qquad {}_1F_1(a;\, c;\, x) \equiv \Phi(a,\, c;\, x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a(a+1)\dots(a+n-1)}{c(c+1)\dots(c+n-1)} \frac{x^n}{n!}$$

ist eine wohlbekannte asymptotische Formel von Herrn Perron [1]). Bei anderen Gelegenheiten [2]) habe ich gezeigt, wie diese Formel — oder genauer, eine asymptotische Entwicklung, deren erstes Glied der Perron'schen Formel äquivalent ist — nützliche Angaben über die Lage der reellen Nullstellen der Φ-Funktion liefert. Aber wieviele dieser Nullstellen gibt es?

Manche behaupten, daß solange a oder $c-a$ keine negativen ganzen Zahlen sind [3]), die Anzahl dieser Nullstellen unendlich sei, was für die reellen und komplexen Nullstellen zusammen im allgemeinen sicher zutrifft [4]), aber nicht für die reellen Nullstellen allein, wenigstens solange a und c beide reell sind, wie wir hier stets voraussetzen werden.

Freilich gibt es in der Literatur genügend Ansätze für eine lückenlose Abzählung der reellen Nullstellen von Φ, wie auch der reellen und sogar der komplexen Nullstellen der zweiten Lösung

$$(2) \qquad \Psi(a,\, c;\, x) = \frac{\Gamma(1-a)}{2\pi i}\, e^{-a\pi i} \int_{\infty e^{i\varphi}}^{(0+)} e^{-xt}\, t^{a-1}\, (1+t)^{c-a-1}\, dt,$$

$$\left(-\frac{\pi}{2} \leqq \varphi < \frac{\pi}{2}\right)$$

---

[1]) Journ. f. reine angew. Math. (Crelle) **151** (1921), 63—78.

[2]) Siehe insbesondere Annali di Matem. pura appl. (4) **26** (1947), 283—300.

[3]) In diesen Fällen reduziert sich bekanntlich die Funktion Φ auf ein Laguerre'sches Polynom.

[4]) Man beweist, daß solange keine der Zahlen a, c und $c-a$ eine nicht positive ganze Zahl ist, die Funktion Φ eine transzendente ganze Funktion von Rang und Geschlecht 1 ist.

der zugehörigen Differentialgleichung; aber meistens sind sie in einer so verzwickten Form dargestellt (und teilweise ohne jeden Beweis angegeben), daß sie öfters übersehen worden sind. Dabei ist zu bemerken, daß infolge der Gleichungen

$$(3)\quad \begin{cases} M_{\varkappa,\mu}(x) = e^{-x/2}\, x^{\mu+1/2}\, \Phi(a, c; x) \\ W_{\varkappa,\mu}(x) = e^{-x/2}\, x^{\mu+1/2}\, \Psi(a, c; x) \end{cases} \quad (a = \mu - \varkappa + 1/2,\ \ c = 2\mu + 1)$$

das Studium der Nullstellen von Φ und Ψ im wesentlichen dasselbe ist wie das Studium der Nullstellen der WHITTAKER'schen Funktionen M und W. Das bescheidene Ziel dieser Mitteilung ist, zu zeigen wie

i) die erschöpfenden aber sehr kompliziert dargestellten Resultate von Herrn KIENAST[5]) über die reellen Nullstellen der Φ-Funktion durch eine passende graphische Darstellung einfach und elegant dargestellt werden können;

ii) die wichtigen aber (meines Wissens) bisher nicht geprüften Resultate von Herrn TSVETTKOFF[6]) über die Nullstellen der Ψ-Funktion bewiesen werden können, und sie auch graphisch darzustellen.

Bei der Redaktion eines Berichtes über die konfluente hypergeometrische Funktion für das „Bateman Manuscript Project" (ein vom *Office of Naval Research* der *USA* unterstütztes Unternehmen des California Institute of Technology) wurde meine Aufmerksamkeit auf diese Fragen gelenkt.

2. Wie schon gesagt, sind die Resultate der KIENAST'schen Abzählung der reellen Nullstellen von Φ in einer sehr komplizierten Form dargestellt (mehr als zwölf verschiedene Sätze!), aber die Mittel, mit denen sie erreicht werden können, sind verhältnismäßig einfach. Im Grunde reduziert sich alles auf die Tatsache, daß kraft der Rekursionsformel

$$(c-a)\ \Phi(a-1, c; x) + (2a - c + x)\ \Phi(a, c; x) - a\,\Phi(a+1, c; x) = 0,$$

die Funktionen

$$\Phi(a, c; x),\ \ \Phi(a+1, c; x),\ \ \Phi(a+2, c; x), \ldots$$

unter gewissen Bedingungen eine STURM'sche Kette bilden.

Ferner spielen bei der Bestimmung der Vorzeichen dieser Funktionen folgende Formeln

$$\Phi(a, c; 0) = 1,\ \ \Phi(a, c; x) = \begin{cases} \dfrac{\Gamma(c)}{\Gamma(a)}\, e^x\, x^{a-c}\,[1 + O(1/x)], & (x > 0) \\ \dfrac{\Gamma(c)}{\Gamma(c-a)}\,(-x)^{-a}\,[1 + O(1/x)], & (x < 0) \end{cases}$$

eine wichtige Rolle.

[5]) Denkschr. der Schweiz. Naturforsch. Gesell. **57** (1921), 247—325.

[6]) Comptes Rendus (Doklady) Acad. Sci. U. R. S. S. **32** (1941), 10—12 und **33** (1941), 290—291.

Hauptsächlich handelt es sich um die Bestimmung der Anzahl $p(a, c)$ der *positiven* Nullstellen von $\Phi(a, c; x)$, weil der KUMMER'schen Formel

$$\Phi(a, c; x) = e^x \Phi(c-a, c; -x)$$

zufolge die Anzahl $n(a, c)$ der *negativen* Nullstellen durch die einfache Formel

$$(4) \quad n(a, c) = p(c-a, c)$$

ermittelt werden kann.

Ist die diskontinuierliche Funktion $G(x)$ durch die Gleichungen

$$(5) \quad \begin{aligned} G(x) &= 0, \quad (x \geqq 0); \\ G(x) &= -[x], \quad (x < 0) \end{aligned}$$

erklärt, (wo, wie üblich, $[x]$ den *ganzen Teil* von x bedeutet), dann läßt sich, solange $c \geqq 0$, auch $p(a, c)$ durch eine sehr einfache Formel ausdrücken. Es ist nämlich

$$(6) \quad p(c, a) = G(a). \qquad (c \geqq 0)$$

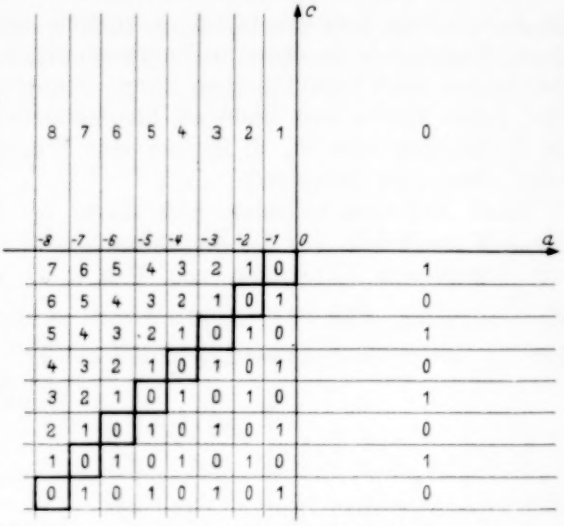


Fig. 1. Anzahl der positiven Nullstellen von $\Phi(a, c; x)$.

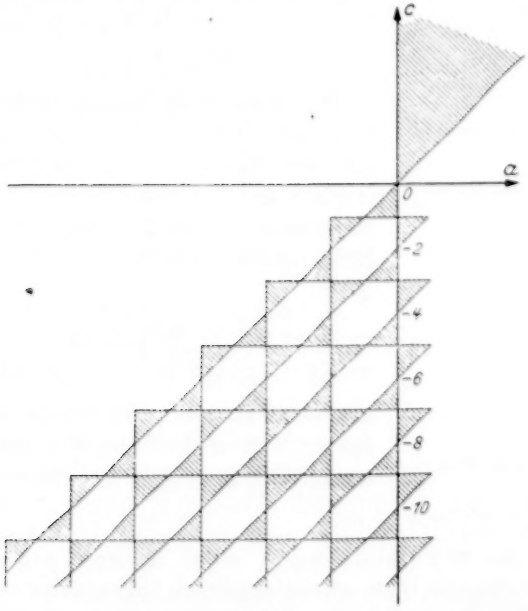


Fig. 2.
Gebiete, wo $\Phi(a, c; x)$ keine reelle Nullstelle besitzt.

Dagegen scheint es für $c < 0$ schwer zu sein, einen ähnlichen, nicht zu komplizierten Ausdruck für $p(a, c)$ zu finden. Aber die Funktion $p(a, c)$ kann lückenlos in einfacherer und eleganterer Weise graphisch dargestellt werden wie Fig. 1 zeigt. Dort geben die Zahlen die Anzahl der positiven Nullstellen in den verschiedenen Teilen der (a, c)-Ebene. Dazu ist nur noch hinzuzufügen, daß die *vertikalen* Grenzgeraden zu den Gebieten *rechts* von ihnen gehören.

Unter den zahlreichen Folgerungen wollen wir nur auf das eigenartige Bild von Fig. 2 hinweisen, wo die

schraffierten Gebiete der (a, c)-Ebene die sind, wo $\Phi(a, c; x)$ keine reelle Nullstelle besitzt.

3. In den beiden kurzen Mitteilungen des Herrn TSVETTKOFF (welcher die Arbeit von KIENAST nicht zu kennen scheint) werden zuerst die obigen Ergebnisse (in einer im Vergleich mit KIENAST etwas einfacheren, aber immer noch komplizierten Form) wiedergefunden, aber dazu noch eine ganze Reihe von anderen interessanten Resultaten, auch über die Nullstellen von Ψ, d. h. von der WHITTAKER'schen Funktion W. Alles aber ohne Beweise[7]).

Unter anderem befinden sich darin (in leicht geänderter Form) folgende Ausdrücke für die Anzahlen $P(a, c)$ und $K(a, c)$ der *positiven* bzw. *komplexen* Nullstellen von $\Psi(a, c; x)$, wenn $c \geqq 1$:

$$P(a, c) = G(a), \tag{9}$$

$$K(a, c) = 2\left[\tfrac{1}{2}\{G(a-c+1) - G(a)\}\right], \qquad (c \geqq 1). \tag{10}$$

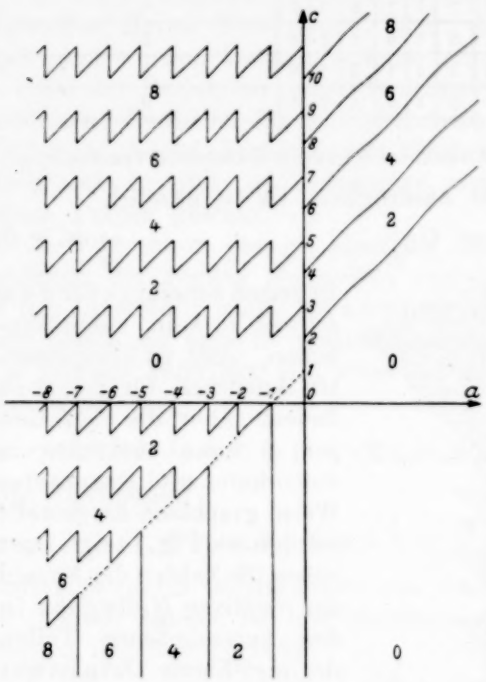


Fig. 3.
Anzahl der komplexen Nullstellen von $\Psi(a, c; z)$.

Dank der Grundgleichung

$$\Psi(a, c; x) = x^{1-c}\,\Psi(a-c+1, 2-c; x) \tag{11}$$

können wir hinzufügen, daß für $c \leqq 1$ gilt:

$$P(a, c) = G(a-c+1), \tag{9'}$$

$$K(a, c) = 2\left[\tfrac{1}{2}\{G(a) - G(a-c+1)\}\right], \qquad (c \leqq 1). \tag{10'}$$

Fig. 3 stellt die Resultate der Formeln (10)—(10') graphisch dar. Der Beweis von (9) ist sehr leicht. Im Grunde genügt es zu bemerken, daß (infolge der Rekursionsformel

$$\Psi(a-1, c; x) - (2a-c+x)\,\Psi(a, c; x) + a(a-c+1)\,\Psi(a+1, c; x) = 0$$

und der Tatsache, daß $\Psi(a, c; x)$ für $x > 0$ sicher *positiv* ist, wenn $a \geqq 0$, $c \geqq 1$ ist) für

$$n - 1 < -a \leqq n, \qquad (n = 1, 2, 3, \ldots)$$

[7]) Die positiven Nullstellen der W-Funktion waren schon in einer Arbeit aus dem Jahr 1915 von A. MILNE (On the roots of the confluent hypergeometric function, Proc. Edinburgh Math. Soc. **33**, 48—64) abgezählt worden, wo die Resultate auch graphisch dargestellt sind.

die $n+1$ Funktionen

$$\Psi(a, c; x),\ \Psi(a+1, c; x),\ \ldots,\ \Psi(a+n, c; x)$$

eine STURM'sche Kette bilden. Außerdem benutzt man zur Bestimmung des Vorzeichens dieser Funktionen bei $x=0$ und $x \to +\infty$, die Formeln

$$(12)\quad \begin{cases} \Psi(a, c; x) = x^{-a}[1 + O(1/x)], & (x \to +\infty) \\ \lim\limits_{x \to +0} \Psi(a, c; x) = \dfrac{\Gamma(1-c)}{\Gamma(a-c+1)}, & (c<1) \\ \lim\limits_{x \to +0} x^{c-1}\Psi(a, c; x) = \dfrac{\Gamma(c-1)}{\Gamma(a)}. & (c>1) \end{cases}$$

Für den weniger leichten Beweis von (10′) (die Einschränkung auf den Fall $c \leqq 1$ ist wegen der Gleichung (11) zulässig) benutzt man die wohlbekannte Formel

$$2\pi N = [\arg f(z)]_C$$

wo N die Anzahl der innerhalb der geschlossenen Kurve C gelegenen Nullstellen der regulär-analytischen Funktion $f(z)$ bezeichnet, während das Symbol rechts die „gesamte Variation" des stetig fortgesetzten Argumentes von $f(z)$ bedeutet, wenn z die ganze Kurve C im positiven Sinne durchläuft. Genauer können wir in unserem Fall

$$(13)\quad 2\pi \tfrac{1}{2} K(a, c) = [\arg \Psi(a, c; z)]_{ABCDA}$$

schreiben, wo $ABCDA$ die in dem oberen Teil der Fig. 4 dargestellte geschlossene Kurve bedeutet, welche aus den beiden Halbkreisen AB und CD mit dem sehr großen bzw. sehr kleinen Radius ω und ε und aus den beiden Segmenten BC und DA des „oberen Randes" der reellen Achse [8]) zusammengesetzt ist.

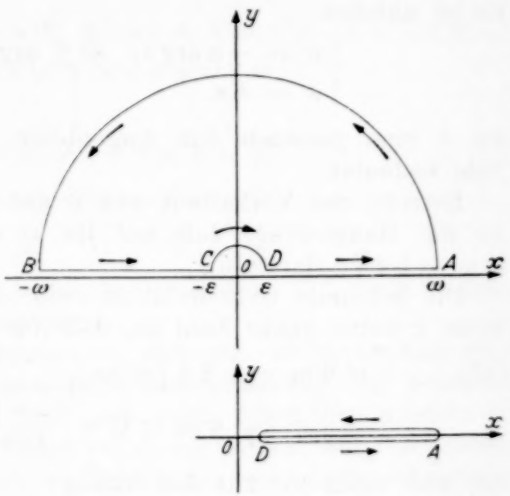


Fig. 4.

Aber wenn wir auch die andere, auf die Ränder der Strecke ADA zusammengezogene geschlossene Kurve des unteren Teiles der Fig. 4

[8]) Man beachte, daß die negative reelle Halbachse ein Schnitt der mehrdeutigen Funktion Ψ ist, während die positive Halbachse im allgemeinen eine Diskontinuitätslinie ihres Arguments darstellt.

betrachten, können wir andrerseits schreiben (mit selbstverständlichen Bezeichnungen), daß

$$\begin{aligned} 2\pi P(a, c) &= [\arg \Psi(a, c; x - i0)]_D^A - [\arg \Psi(a, c; x + i0)]_D^A \\ &= -2[\arg \Psi(a, c; x + i0)]_D^A \end{aligned}$$

ist, also die Gleichung (13) auch in der Form

$$\pi K(a, c) = [\arg \Psi(a, c; z)]_{ABCD} - \pi P(a, c)$$

geschrieben werden darf oder noch einfacher:

$$T(a, c) = \frac{1}{\pi} [\arg \Psi(a, c; z)]_{ABCD}, \tag{14}$$

wo $T = K + P$ die „totale" Anzahl der Nullstellen auf der entlang der negativen reellen Achse aufgeschnittenen z-Ebene (mit Ausschluß der Punkte $z = 0$ und $z = \infty$) bedeutet.

4. Um die Formel (14) zu verwerten, wollen wir nun die (nicht endgültige) Annahme machen, daß keine der Zahlen a, c und $c - a$ eine ganze Zahl sei, und *Null* als Anfangswert von $\psi = \arg \Psi(a, c; z)$ bei A annehmen.

Die früheren Formeln (12) bestimmen ohne weiteres das Grenzverhalten von ψ auf beiden Halbkreisen AB und CD für $\varepsilon \to 0$, $\omega \to \infty$. Es ist nämlich

$$\begin{cases} \psi = -a \arg z, & (0 \leqq \arg z \leqq \pi), \text{ (auf } AB) \\ \psi = h\pi, & \text{(auf } CD) \end{cases}$$

wo h eine passende (im Augenblick unbekannte) konstante ganze Zahl bedeutet.

Betreffs des Verhaltens von ψ auf der geradlinigen Strecke BC ist die Hauptsache, daß auf ihr ψ eine *monotone* Funktion von $z = -\xi + i0$ darstellt.

Die bekannte Grundrelation zwischen Φ und Ψ zeigt in der Tat, wenn c keine ganze Zahl ist, daß (für $\xi > 0$)

$$\begin{aligned} &e^{\xi} \Psi(a, c; -\xi + i0) = \\ &\frac{\Gamma(1-c)}{\Gamma(a-c+1)} \Phi(a, c; \xi) - \frac{\Gamma(c-1)}{\Gamma(a)} \xi^{1-c} \Phi(1-a, 2-c; \xi)\, e^{-c\pi i} \end{aligned} \tag{15}$$

ist, und wenn wir zur Abkürzung

$$\frac{\xi^{1-c} \Phi(1-a, 2-c; \xi)}{\Phi(a, c; \xi)} = R(\xi)$$

setzen, haben wir infolgedessen

$$\tan \psi = \frac{\dfrac{\Gamma(c-1)}{\Gamma(a)} R(\xi) \sin(c\pi)}{\dfrac{\Gamma(1-c)}{\Gamma(a-c+1)} + \dfrac{\Gamma(c-1)}{\Gamma(a)} R(\xi) \cos(c\pi)} \tag{16}$$

woraus nach einer kurzen Zwischenrechnung folgt, daß

$$\operatorname{sgn}\left(\frac{d\psi}{d\xi}\right) = \operatorname{sgn}[(c-1)\,\Gamma(a)\,\Gamma(a-c+1)]\cdot\operatorname{sgn}\left(\frac{dR}{d\xi}\right)$$

ist. Nach einer bekannten Formel über die WRONSKI'sche Determinante von zwei Lösungen der „konfluenten" Differentialgleichung haben wir aber

$$\frac{dR}{d\xi} = \frac{1-c}{[\Phi(c-a,\,c;\,\xi)]^2}\,e^{\xi}\,\xi^{-c};$$

also ist

$$\operatorname{sgn}\left(\frac{d\psi}{d\xi}\right) = -\operatorname{sgn}[\Gamma(a)\,\Gamma(a-c+1)],\ (\text{auf } BC), \tag{17}$$

was das monotone Verhalten von ψ auf BC in Evidenz setzt.

Dabei kommt uns noch die Tatsache zu Hilfe, daß es nicht schwer ist, die Anzahl der „Touren" von ψ zu zählen, weil infolge von (15) ψ dann und nur dann ein Vielfaches von π durchläuft, wenn[9])

$$\Phi(1-a,\,2-c;\,\xi) = 0,$$

d. h. wenn ξ eine der $p(1-a,\,2-c)$ positiven Nullstellen von diesem Φ durchläuft, deren Anzahl, da $2-c>1$ ist, durch $G(1-a)$ gegeben ist.

Nun haben wir alle die Elemente zur Verfügung, die nötig sind, um das Verhalten von ψ auf der ganzen Strecke $ABCD$ zu beherrschen. So kommen wir bei Unterscheidung der folgenden drei[10]) Fälle

$$\text{(i) } a<0,\ \Gamma(a)\,\Gamma(a-c+1)>0;\quad \text{(ii) } a<0,\ \Gamma(a)\,\Gamma(a-c+1)<0;$$
$$\text{(iii) } a>0,\ \Gamma(a)\,\Gamma(a-c+1)>0$$

leicht auf die Endformeln

$$T(a,\,c) = \begin{cases} [-a]+G(1-a)+1, & \text{(i)} \\ [-a]-G(1-a), & \text{(ii)} \\ -[a]+G(1-a), & \text{(iii)}. \end{cases} \tag{18}$$

Am schnellsten zeigt eine graphische Diskussion, daß diese Formeln mit (10′) vollkommen äquivalent sind.

Zum Schluß wollen wir bemerken, daß aus selbstverständlichen Stetigkeitsgründen die ziemlich scharfe Einschränkung, daß keine der Zahlen a, c, $c-a$ eine ganze Zahl sein darf, durch die mildere ersetzt werden kann, daß der Punkt $(a,\,c)$ auf keiner der Grenzlinien der Fig. 3 liegen darf. Dies ist wirklich keine wesentliche Einschränkung, weil auf allen diesen Grenzlinien entweder a oder $a-c+1$ eine nicht positive ganze Zahl ist, und dann reduziert sich Ψ bekanntlich auf ein LAGUERRE'sches Polynom.

[9]) Man vergesse nicht, daß c keine ganze Zahl ist!

[10]) Da $1-c>0$ ist, ist der Fall $a>0$, $\Gamma(a)\,\Gamma(a-c+1)<0$ offenbar unmöglich.

(Eingegangen am 10. Oktober 1949).

Über eine Verallgemeinerung des Dirichletschen Integrals.

Herrn Oskar Perron zum 70. Geburtstag am 7. Mai 1950 gewidmet.

Von

G. Szegö (Stanford University, Calif., USA.).

I. Einleitung.

1. Zahlreiche Fragen der mathematischen Physik führen auf das Problem, das Integral

$$\iint \{|\operatorname{grad} u|^2 + p(x, y)\, u^2\}\, dx\, dy \tag{1}$$

zu einem Minimum zu machen. Hierbei ist die Integration über einen gegebenen Bereich B der x, y-Ebene zu erstrecken, $p(x, y)$ ist eine in dem Bereiche B definierte feste Funktion und die zulässigen Funktionen u haben vorgeschriebene Werte auf dem Rande von B. Die entsprechende Euler-Lagrange'sche Differentialgleichung ist (siehe die Arbeiten von S. Bergmann und M. Schiffer, die in dem Literaturverzeichnis am Ende dieser Arbeit angeführt sind)

$$\Delta u = p(x, y)\, u. \tag{2}$$

Das klassische Dirichlet'sche Problem liegt vor, wenn $p(x, y) = 0$.

2. Der letztgenannte Spezialfall hängt in einer wohlbekannten Weise mit der Verteilung der Elektrizität auf einem zylindrischen Kondensator zusammen. Der Bereich B ist in diesem Falle ringförmig, d. h. er ist von zwei Kurven K_0 und K_1 begrenzt, wobei K_0 gänzlich innerhalb K_1 verläuft. Die Randwerte sind: $u = 0$ auf K_0 und $u = 1$ auf K_1. Wenn wir das Minimum von (1) mit $2\pi C$ bezeichnen, so heißt C die *Kapazität* des Kondensators. Wenn u die Lösung der Laplace'schen Differentialgleichung $\Delta u = 0$ in B unter den erwähnten Randbedingungen bedeutet, so kann C auch in der Form

$$-\frac{1}{2\pi} \int \frac{\partial u}{\partial n}\, ds \tag{3}$$

dargestellt werden, wobei die Integration über eine beliebige Kurve innerhalb von B erstreckt ist, welche K_0 gänzlich in ihrem Innern enthält (n ist die innere Normale).

Eine andere Interpretation von C ist die *Leitfähigkeit* einer die Wärme leitenden Platte, welche die Form von B hat.

3. Diese wichtige Konstante C ist vielfach studiert worden. CARLEMAN (4) hat insbesondere gezeigt, daß für alle Kondensatoren, für welche die Begrenzungskurven K_0 und K_1 gegebene Flächeninhalte haben, die Kapazität C ein *Minimum* wird, wenn die Kurven K_0 und K_1 konzentrische Kreise (von dem gegebenen Inhalte) sind.

Der Beweis von CARLEMAN stützt sich auf die konforme Abbildung, insbesondere auf die Tatsache, daß C eine konforme Invariante ist. Das Resultat stellt eine Erweiterung der Flächensätze der Theorie der konformen Abbildung dar. Andere Beweise beruhen auf der Idee der Symmetrisierung (vgl. FABER **5**, und in schärferer Form PÓLYA-SZEGÖ **6**, **7**).

4. Das Ziel dieser Note ist, den CARLEMAN'schen Satz in der Richtung des DIRICHLET'schen Integrals (1) zu verallgemeinern. Wir betrachten einen interessanten Spezialfall von (1), nämlich den Fall, wo die gegebene Funktion $p(x, y)$ *kreissymmetrisch* ist, d. h. nur von dem Abstande r von einem festen Punkte im Innern von K_0 abhängt. Wir können annehmen, daß dieser Punkt der Anfangspunkt ist. Wir beweisen sodann das folgende Theorem:

Es sei B ein ringförmiger Bereich, berandet durch die beiden Kurven K_0 und K_1, wobei K_0 im Innern von K_1 verläuft. Außerdem soll K_0 den Anfangspunkt enthalten.

Es sei $r > 0$ der Abstand vom Anfangspunkte und $p(r)$ eine für alle $r > 0$ definierte monoton abnehmende Funktion, für welche das Integral von $r\,p(r)$ in einer Umgebung von $r = 0$ existiert. Wir bilden den verallgemeinerten DIRICHLET'schen Ausdruck

$$D(u) = \int_B \int \{ |\operatorname{grad} u|^2 + p(r)\, u^2 \}\, d\sigma - \int_G \int p(r)\, d\sigma. \tag{4}$$

Das erste Integral ist über den Bereich B mit dem Flächenelement $d\sigma$ zwischen K_0 und K_1, das zweite über das ganze Innere G von K_1 zu erstrecken. Es sei $u = 0$ auf K_0 und $u = 1$ auf K_1.

Wir bezeichnen mit $2\pi C$ das Minimum des ersten Gliedes in $D(u)$ für alle u; d. h.

$$\min D(u) = 2\pi C - \int_G \int p(r)\, d\sigma. \tag{5}$$

Für alle Ringgebiete B, deren Begrenzungskurven K_0 und K_1 gegebene Inhalte haben, wird der Ausdruck (5) ein Minimum, wenn die Kurven K_0 und K_1 konzentrische Kreise um den Nullpunkt sind.

5. Wir bemerken, daß zu dem verallgemeinerten DIRICHLET'schen Integral $D(u)$ dieselbe EULER-LAGRANGE'sche Differentialgleichung $\Delta u = p(r)\, u$ gehört, wie zu dem ersten Integral ohne das zusätzliche Glied. Es ist auch klar, daß im Falle $p(r) =$ konst. dieses Zusatzglied dem Inhalte von K proportional ist, somit für alle betrachteten Kondensatoren den selben Wert besitzt.

Eine andere Form unserer Behauptung ist die folgende: Wir bezeichnen mit u die Lösung der Gleichung $\Delta u = p(r)u$ in B, welche die Bedingungen $u = 0$ auf K_0 und $u = 1$ auf K_1 erfüllt. Wir betrachten die Größe

$$-\int_{K_1} \frac{\partial u}{\partial n}\, ds - \iint_G p(r)\, d\sigma, \tag{6}$$

wobei das erste Integral über K_1, das zweite über G zu erstrecken ist (n ist die innere Normale). Dieser Ausdruck (6) ist größer (nicht kleiner) als der entsprechende Ausdruck für den Kreiskondensator, dessen Kreise denselben Inhalt wie die Kurven K_0 und K_1 haben und deren Mittelpunkt im Anfangspunkte liegt.

II. Symmetrisierung.

1. Der Beweis des oben genannten Theorems beruht auf dem Vorgange der Symmetrisierung. (Vgl. Faber 5, Pólya-Szegö 6, 7.) Dabei können wir $p(r) > 0$ voraussetzen. In der Tat wird dies der Fall, wenn zu $p(r)$ eine passende Konstante addiert wird; das Integral von $u^2\, d\sigma$ über B erfährt aber keine Änderung durch Symmetrisierung.

Es sei u die minimisierende Funktion von $D(u)$, $u = 0$ auf K_0 und $u = 1$ auf K_1. Wir bezeichnen die Niveaumengen $u = \lambda$ mit K_λ und nehmen zunächst an, daß sie Jordankurven sind, die wie im Falle $\Delta u = 0$ verlaufen; d. h. $0 \leqq \lambda \leqq 1$ und K_λ ist in $K_{\lambda'}$ enthalten, wenn $\lambda < \lambda'$. Es sei $A(\lambda) = \pi\varrho^2$ der Inhalt von K_λ.

Wir „symmetrisieren" die vollständige Situation, d. h. die Schar K_λ und die Funktion u, in der folgenden Weise. Wir ersetzen K_λ durch den Kreis $\overline{K}_\lambda$ vom Radius ϱ um den Anfangspunkt und definieren $\bar{u}$ durch die Bedingung, daß $\bar{u} = \lambda$ auf dem Kreise $\overline{K}_\lambda$. Die Kurve K_λ und der Kreis $\overline{K}_\lambda$ begrenzen den gleichen Inhalt. Offenbar wird $\bar{u}$ eine zulässige Funktion in dem Kreisbereiche, dessen Berandungskurven die konzentrischen Kreise $\overline{K}_0$ und $\overline{K}_1$ sind.

Wir zeigen nun, daß bei dem geschilderten Vorgange der verallgemeinerte Dirichlet'sche Ausdruck $D(u)$ verkleinert (nicht vergrößert) wird.

2. Für das erste Glied

$$\iint_B |\operatorname{grad} u|^2\, d\sigma \tag{1}$$

ist diese Behauptung mit dem Carleman'schen Satze identisch. Der Vollständigkeit halber wiederholen wir hier einen Beweis für diese Tatsache, die (statt der konformen Abbildung) auf der Idee der Symmetrisierung beruht. Wir zeigen, daß bei dem obigen Vorgange nicht nur das Integral (1), sondern sogar sein Element, das dem infinitesimalen Ring zwischen K_λ und $K_{\lambda+d\lambda}$ entspricht, verkleinert wird.

In der Tat kann das entsprechende Flächenelement in der Form $d\sigma = ds \cdot dn = ds \cdot \frac{d\lambda}{|\text{grad } u|}$ geschrieben werden, wobei ds das Bogenelement von K_λ bedeutet und $d\lambda > 0$. Daher wird der Beitrag des genannten Ringgebietes gleich

$$d\lambda \int_{K_\lambda} |\text{grad } u| \, ds. \tag{2}$$

Dies ist zu vergleichen mit

$$d\lambda \int_{K_\lambda} |\text{grad } u| \, ds = d\lambda \, . \, |\text{grad } \bar{u}| \, . \, 2\pi\varrho. \tag{3}$$

Nun ist $|\text{grad } \bar{u}| = \left|\frac{d\bar{u}}{d\varrho}\right| = \frac{d\lambda}{d\varrho}$, so daß (3) mit

$$d\lambda \cdot \frac{d\lambda}{d\varrho} \cdot 2\pi\varrho = d\lambda \cdot \frac{d\lambda}{d(\varrho^2)} \cdot 4\pi\varrho^2 = d\lambda \cdot \frac{4\pi A(\lambda)}{A'(\lambda)} \tag{4}$$

identisch ist. Nun haben wir für den Inhalt des Ringes $A(\lambda + d\lambda) - A(\lambda) = A'(\lambda)\, d\lambda$, oder

$$A'(\lambda)\, d\lambda = \int ds \, . \, dn = d\lambda \int_{K_\lambda} \frac{ds}{|\text{grad } u|} \, . \tag{5}$$

Nach der Ungleichung von Schwarz ist dann

$$\int_{K_\lambda} |\text{grad } u| \, ds \int_{K_\lambda} \frac{ds}{|\text{grad } u|} \geqq \left(\int_{K_\lambda} ds \right)^2 = (L(\lambda))^2, \tag{6}$$

wobei $L(\lambda)$ die Länge von K_λ bezeichnet. Nach der isoperimetrischen Ungleichung $(L(\lambda))^2 \geqq 4\pi A(\lambda)$ ist also in der Tat

$$\int_{K_\lambda} |\text{grad } u| \, ds \geqq \frac{4\pi A(\lambda)}{A'(\lambda)} = \int_{K_\lambda} |\text{grad } u| \, ds. \tag{7}$$

III. Fortsetzung.

1. Wir kommen jetzt zu dem zweiten Teile von $D(u)$:

$$\int_B \int p(r)\, u^2 \, d\sigma - \int_G \int p(r)\, d\sigma, \tag{1}$$

der von der Funktion $p(r)$ abhängt. Unter der Voraussetzung $p(r) > 0$ ist diese Differenz negativ. Wir führen eine neue Funktion q ein, definiert durch die Bedingungen:

$$q'(\pi r^2) = p(r), \qquad q(0) = 0. \tag{2}$$

(Hier ist die Integrabilität von $rp(r)$ benutzt worden.) Dann ist q eine *von oben konvexe Funktion*. Wir nehmen zunächst an, daß sämtliche

Kurven K_λ, einschließlich K_0 und K_1, sternförmig in Bezug auf den Nullpunkt sind.

In dem zweiten Integral (1) benutzen wir Polarkoordinaten r, φ, in dem ersten die Koordinaten λ, φ, definiert durch

$$u = u(r, \varphi) = \lambda. \tag{3}$$

Es sei $r = r(\lambda, \varphi)$ die Gleichung von K_λ in Polarkoordinaten. Wir definieren die Funktion

$$Q(\lambda) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} q\{\pi (r(\lambda, \varphi))^2\}\, d\varphi, \tag{4}$$

so daß

$$Q'(\lambda) = \int_{-\pi}^{\pi} q'(\pi r^2)\, r\, r_\lambda\, d\varphi = \int_{-\pi}^{\pi} p(r)\, r\, r_\lambda\, d\varphi. \tag{5}$$

Nun ist, da $r_\lambda > 0$,

$$d\sigma = r\, dr\, d\varphi = r\, r_\lambda\, d\lambda\, d\varphi, \tag{6}$$

so daß der Ausdruck (1) in der folgenden Form geschrieben werden kann:

$$\int_{-\pi}^{\pi} \int_{\lambda=0}^{1} p(r)\, \lambda^2\, r\, r_\lambda\, d\lambda\, d\varphi - \int_{-\pi}^{\pi} \int_{r=0}^{r(1,\varphi)} p(r)\, r\, dr\, d\varphi. \tag{1'}$$

Mit Rücksicht auf

$$\int_{r=0}^{r(1,\varphi)} p(r)\, r\, dr = \int_{r=0}^{r(1,\varphi)} q'(\pi r^2)\, r\, dr = \frac{1}{2\pi} q\{\pi (r(1, \varphi))^2\}, \tag{7}$$

können wir (1) die folgende Form geben:

$$\int_0^1 \lambda^2\, Q'(\lambda)\, d\lambda - Q(1) = -2 \int_0^1 \lambda\, Q(\lambda)\, d\lambda. \tag{1''}$$

2. Die Gleichung des Kreises $\bar{K}_\lambda$ ist einfach $r = \varrho$, so daß wir für die Funktion $\bar{Q}(\lambda)$, welche der Funktion $Q(\lambda)$ in der symmetrisierten Situation entspricht, den folgenden Ausdruck erhalten:

$$\bar{Q}(\lambda) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} q(\pi \varrho^2)\, d\varphi = q(\pi \varrho^2) = q(A(\lambda)). \tag{8}$$

Nun können wir auf die konvexe Funktion q die Jensen'sche Ungleichung anwenden, $r = r(\lambda, \varphi)$:

$$\bar{Q}(\lambda) = q(A(\lambda)) = q\left(\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \pi r^2\, d\varphi\right) \leqq \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} q(\pi r^2)\, d\varphi = Q(\lambda). \tag{9}$$

Folglich

$$-2\int_0^1 \lambda\, Q(\lambda)\, d\lambda \geqq -2\int_0^1 \lambda\, \bar{Q}(\lambda)\, d\lambda. \tag{10}$$

Damit ist unsere Behauptung bewiesen.

Dieser Schluß zeigt, daß das zweite Integral in (1) durch Symmetrisierung vergrößert (nicht verkleinert) wird. In dem Spezialfalle, wo die äußere Kurve K_1 ein Kreis ist, haben wir $Q(1) = q(A(1)) = \bar{Q}(1)$, so daß das zweite Integral unverändert bleibt. In diesem Falle wird bereits das erste Glied in (1) verkleinert.

IV. Beseitigung der Einschränkungen.

1. Der obige Beweis beruht auf den folgenden beiden wesentlichen Einschränkungen:

a) Die Niveaumengen K_λ sind JORDAN-Kurven, die wie im Falle $\Delta u = 0$ verlaufen.

b) Die Niveaukurven K_λ sind sternförmig in Bezug auf den Anfangspunkt.

Wir haben auch angenommen — und dies war eine unwesentliche Einschränkung — daß $p(t) > 0$ ist.

Die Minimalfunktion u genügt der Differentialgleichung I (2). Daraus folgt nach bekannten Resultaten[1]), daß $0 \leqq u \leqq 1$ in dem Ringbereiche B. Es ist jedoch denkbar, daß die Menge $u = \lambda$ aus mehreren Kurven $K'_\lambda, K''_\lambda, \ldots$ besteht; eine von diesen, etwa K'_λ, enthält K_0, während die anderen außerhalb von K'_λ und in dem ringförmigen Bereiche zwischen K'_λ und K_1 liegen. In dem Innern der letztgenannten Kurven gilt $u < \lambda$, so daß diese Kurven einander gegenseitig ausschließen müssen[2]).

2. Betrachten wir zunächst das Integral II (1). Die einzige Folge der in 1 beschriebenen allgemeinen Situation ist, daß wir die isoperimetrische Ungleichung auf ein System von gegenseitig sich ausschließenden Kurven anzuwenden haben. Wenn $L_1, L_2, \ldots$ die Längen und $A_1, A_2, \ldots$ die Inhalte der eingeschlossenen Bereiche bezeichnen, so haben wir

$$\begin{aligned}(L_1 + L_2 + \ldots)^2 &\geqq L_1^2 + L_2^2 + \ldots \\ &\geqq 4\pi A_1 + 4\pi A_2 + \ldots \\ &= 4\pi\,(A_1 + A_2 + \ldots)\end{aligned} \tag{1}$$

und dies liefert unsere Behauptung.

[1]) Wenn $p > 0$, so kann keine Lösung der Differentialgleichung $\Delta u - p u = 0$ in einem inneren Punkte ein positives Maximum oder ein negatives Minimum haben.

[2]) In der Tat, $\Delta u > 0$, d. h. u ist subharmonisch, so daß es in jedem Bereiche sein Maximum auf dem Rande annimmt. Daher gilt $u < \lambda$ zwischen K_0 und K'_λ und auch innerhalb von $K''_\lambda, K'''_\lambda, \ldots$.

3. Was nun den Ausdruck III (1) anbetrifft, so kann die Einschränkung bezüglich der Sternformigkeit von K_λ leicht aufgehoben werden. Wir nehmen zunächst an, daß die Menge $u = \lambda$ aus einer einzigen Kurve K_λ besteht. Im allgemeinen entspricht dann jedem Winkel φ eine *ungerade* Anzahl von Werten

$$r_1(\varphi) \leqq r_2(\varphi) \leqq \ldots \leqq r_{2m-1}(\varphi), \tag{2}$$

definiert durch die Punkte r, φ auf K_λ; die ganze Zahl $m = m(\varphi)$ ist streckenweise konstant. Wir verallgemeinern III (4) in der folgenden Weise:

$$Q(\lambda) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \sum_{\mu=1}^{2m-1} (-1)^{\mu-1} q(\pi r_\mu^2)\, d\varphi, \tag{3}$$

so daß, da $\operatorname{sgn} \frac{\partial r_\mu}{\partial \lambda} = (-1)^{\mu-1}$,

$$Q'(\lambda) = \int_{-\pi}^{\pi} \sum_{\mu=1}^{2m-1} (-1)^{\mu-1} p(r_\mu)\, r_\mu \frac{\partial r_\mu}{\partial \lambda}\, d\varphi = \int_{-\pi}^{\pi} \sum_{\mu=1}^{2m-1} p(r_\mu)\, r_\mu \left|\frac{\partial r_\mu}{\partial \lambda}\right| d\varphi \tag{4}$$

ist. Nun hat man $d\sigma = r\, dr\, d\varphi = r \left|\frac{\partial r}{\partial \lambda}\right| d\lambda\, d\varphi$, so daß wir für das erste Integral in III (1) wiederum den selben Ausdruck finden wie in III (1″).

Was das zweite Integral in III (1) anbetrifft, so haben wir jetzt statt III (7), $r_0 = 0$,

$$\sum_{\mu=1}^{m} \int_{r=r_{2\mu-2}}^{r=r_{2\mu-1}} p(r)\, r\, dr = \frac{1}{2\pi} \sum_{\mu=1}^{m} (q(\pi r_{2\mu-1}^2) - q(\pi r_{2\mu-2}^2)) \tag{5}$$

$$= \frac{1}{2\pi} \sum_{\mu=1}^{2m-1} (-1)^{\mu-1} q(\pi r_\mu^2),$$

so daß wir für das zweite Integral in III (1) wieder $Q(1)$ erhalten. (Hier entsprechen r_μ und m dem Parameter $\lambda = 1$.)

Um dann III (1″) mit dem entsprechenden Ausdruck für den Kreiskondensator zu vergleichen, definieren wir $\bar{Q}(\lambda)$ wieder durch III (8). Wir haben jetzt

$$\bar{Q}(\lambda) = q(A(\lambda)) = q\left\{\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \sum_{\mu=1}^{m} (\pi r_{2\mu-1}^2 - \pi r_{2\mu-2}^2)\, d\varphi\right\}$$

$$\geqq \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} q\left\{\sum_{\mu=1}^{m} (\pi r_{2\mu-1}^2 - \pi r_{2\mu-2}^2)\right\} d\varphi \geqq \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \sum_{\mu=1}^{2m-1} (-1)^{\mu-1} q(\pi r_\mu^2)\, d\varphi \tag{6}$$

$$= Q(\lambda).$$

Hier ist die folgende für eine beliebige, von oben konvexe Funktion gültige Ungleichung benutzt worden:

$$q\left(\sum_{\mu=1}^{2m-1}(-1)^{\mu-1}a_\mu\right) \geqq \sum_{\mu=1}^{2m-1}(-1)^{\mu-1}q(a_\mu), \tag{7}$$

$$0 < a_1 < a_2 < \ldots < a_{2m-1}.$$

Sie folgt z. B. durch Induktion. Wir halten die Länge des Intervalles a_{2m-2}, a_{2m-1} fest und verschieben es nach links, bis a_{2m-2} und a_{2m-3} zur Deckung gebracht werden. Bei diesem Vorgange nimmt die rechte Seite von (7) zu, während die linke sich nicht ändert. Das Resultat ist die (7) entsprechende Ungleichung, in der m durch $m-1$ ersetzt wird.

Damit ist das Theorem bewiesen.

4. Wir nehmen nun an, daß die Menge $u = \lambda$ aus zwei Kurven besteht. Die erste möge die Radien (2) definieren; der zweiten entsprechen gewisse Werte

$$s_1(\varphi) \leqq s_2(\varphi) \leqq \cdots \leqq s_{2n}(\varphi), \tag{8}$$

deren Anzahl *gerade* ist. Wir definieren sodann

$$Q(\lambda) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\left\{\sum_{\mu=1}^{2m-1}(-1)^{\mu-1}q(\pi r_\mu^2) + \sum_{\nu=1}^{2n}(-1)^\nu q(\pi s_\nu^2)\right\}d\varphi, \tag{9}$$

$$Q'(\lambda) = \int_{-\pi}^{\pi}\left\{\sum_{\mu=1}^{2m-1}p(r_\mu)r_\mu\left|\frac{\partial r_\mu}{\partial\lambda}\right| + \sum_{\nu=1}^{2n}p(s_\nu)s_\nu\left|\frac{\partial s_\nu}{\partial\lambda}\right|\right\}d\varphi, \tag{10}$$

da $\operatorname{sgn}\frac{\partial s_\nu}{\partial\lambda} = (-1)^\nu$. Keine Änderung von (5) ist nötig und wir erhalten III (1″).

Nun finden wir

$$\bar{Q}(\lambda) = q(A(\lambda)) = q\left\{\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\left\{\sum_{\mu=1}^{m}(\pi r_{2\mu-1}^2 - \pi r_{2\mu-2}^2) + \sum_{\nu=1}^{n}(\pi s_{2\nu}^2 - \pi s_{2\nu-1}^2)\right\}d\varphi\right\}$$

$$\geqq \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}q\left\{\sum_{\mu=1}^{m}(\pi r_{2\mu-1}^2 - \pi r_{2\mu-2}^2) + \sum_{\nu=1}^{n}(\pi s_{2\nu}^2 - \pi s_{2\nu-1}^2)\right\}d\varphi \tag{11}$$

$$\geqq \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\left\{\sum_{\mu=1}^{2m-1}(-1)^{\mu-1}q(\pi r_\mu^2) + \sum_{\nu=1}^{2n}(-1)^\nu q(\pi s_\nu^2)\right\}d\varphi = Q(\lambda).$$

Wir benutzen hier die folgende Ungleichung:

$$q\left(\sum_{\mu=1}^{2m-1}(-1)^{\mu-1}a_\mu + \sum_{\nu=1}^{2n}(-1)^\nu b_\nu\right) \geqq \sum_{\mu=1}^{2m-1}(-1)^{\mu-1}q(a_\mu) + \sum_{\nu=1}^{2n}(-1)^\nu q(b_\nu), \tag{12}$$

wo die Größen a_μ und b_ν den folgenden Bedingungen unterworfen sind:

(1) $0 < a_1 < a_2 < \cdots < a_{2m-1}$,

(2) $0 < b_1 < b_2 < \cdots < b_{2n}$,

(3) jedes Intervall a_{2l-1}, a_{2l} (einschließlich a_{2m-1}, ∞) enthält eine gerade Anzahl von b_ν, während die Intervalle a_{2l}, a_{2l+1} kein b_ν enthalten.

Der Beweis ist einfach. Verschieben wir das Intervall b_{2k-1}, b_{2k} nach links, so daß es stets im Innern des Intervalles a_{2l-1}, a_{2l} bleibt, so wird die rechte Seite von (12) vergrößert. Folglich können wir voraussetzen, daß jedes Intervall a_{2l-1}, a_{2l} genau ein Intervall b_{2k-1}, b_{2k} (vielleicht der Länge 0) enthält und $a_{2l-1} = b_{2k-1}$ ist. Dies reduziert die Summe in dem Argument von q auf der linken Seite zu

$$b_2 - a_2 + b_4 - a_4 + \cdots + b_{2m-2} - a_{2m-2} + b_{2m}, \tag{13}$$

womit die Behauptung auf (7) zurückgeführt ist.

IV. Der Grundton einer inhomogenen Membrane.

1. Wir betrachten eine Membrane, deren Dichte eine kreissymmetrische Funktion ist. Die Randkurve dieser Membrane bezeichnen wir mit K und D sei das abgeschlossene Innere von K. Wir nehmen an, daß die Kurve K den Anfangspunkt enthält. Es sei $p(r)$ eine positive und monoton abnehmende Funktion, für welche $r\,p(r)$ in einer Umgebung des Anfangspunktes integrabel ist.

Wir betrachten alle Funktionen u, welche in D definiert sind und die Randbedingung $u = 0$ auf K erfüllen. Es sei λ^2 das Minimum von

$$\frac{\iint_D |\operatorname{grad} u|^2 \, d\sigma}{\iint_D p(r)\, u^2 \, d\sigma}. \tag{1}$$

Die Größe λ, $\lambda > 0$, kann auch als der kleinste Eigenwert der Differentialgleichung

$$\Delta u + \lambda^2 u = 0 \tag{2}$$

unter der erwähnten Randbedingung definiert werden (Bergmann-Schiffer **1, 2, 3**).

Wir zeigen, daß *für alle Bereiche D vom gegebenen Flächeninhalt, die Größe λ ein Minimum wird, wenn D ein Kreis ist, dessen Mittelpunkt mit dem Anfangspunkte zusammenfällt.*

2. Zum Beweis betrachten wir wieder die minimisierende Funktion u (es sei $0 \leqq u \leqq 1$) und ihre Niveaukurven K_λ, $0 \leqq \lambda \leqq 1$, wobei jetzt $u = 1 - \lambda$ auf K_λ gilt. Folglich wird K_1 mit K und K_0 mit dem Maximumspunkte $u = 1$ identisch. Wir führen dann die Symmetrisierung in einer ähnlichen Weise durch wie in II. Dabei wird der Zähler von (1) sicherlich kleiner (nicht größer). Nun zeigen wir, daß der Nenner größer (nicht kleiner) wird.

Wir definieren die Größen $A(\lambda)$ und q wie früher. Weiter sei λ_0 der Wert von λ, der dem Anfangspunkt entspricht. Für $\lambda < \lambda_0$ haben wir sodann

$$Q(\lambda) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} (q(\pi r_1^2) - q(\pi r_2^2))\, d\varphi, \tag{3}$$

wobei $r_1(\lambda, \varphi)$ und $r_2(\lambda, \varphi)$ die Radien bezeichnen, welche K_λ definieren, $r_1 > r_2$. Für $\lambda > \lambda_0$ wird dagegen $Q(\lambda)$ von derselben Form sein wie in III (4). Wir machen hier die vereinfachende Voraussetzung, das K_λ aus einer einzigen Kurve besteht, die den fraglichen Radius in zwei Punkten oder in keinem Punkte trifft, wenn $\lambda < \lambda_0$ und in einem einzigen Punkte, wenn $\lambda > \lambda_0$. Die Berechnung von $\bar{Q}(\lambda)$ verursacht keine Schwierigkeit. Wir haben $A(0) = Q(0) = \bar{Q}(0) = 0$, und III (9) gilt wieder.

Nun ist

$$\begin{aligned} \iint_D p(r)\, u^2\, d\sigma &= \int_0^1 (1-\lambda)^2\, Q'(\lambda)\, d\lambda \\ &= 2\int_0^1 (1-\lambda)\, Q(\lambda)\, d\lambda \leqq 2\int_0^1 (1-\lambda)\, \bar{Q}(\lambda)\, d\lambda, \end{aligned} \tag{4}$$

womit die Behauptung bewiesen ist.

Literaturverzeichnis.

S. Bergmann and M. Schiffer.

[1] A representation of Green's and Neumann's functions in the theory of partial differential equations of second order, Duke Mathematical Journal Bd. **14**, 1947, S. 609—638.

S. Bergmann and M. Schiffer.

[2] On Green's and Neumann's functions in the theory of partial differential equations, Bulletin of the American Math. Soc., Bd. **53**, 1947, S. 1141—1151.

S. Bergmann and M. Schiffer.

[3] Kernel functions in the theory of partial differential equations of elliptic type, Duke Mathematical Journal, Bd. **15**, 1948, S. 535—566.

T. Carleman.

[4] Über ein Minimalproblem der mathematischen Physik, Mathematische Zeitschrift. Bd. **1**, 1918, S. 208—212.

G. Faber.

[5] Beweis, daß unter allen homogenen Membranen von gleicher Fläche und gleicher Spannung die kreisförmige den tiefsten Grundton gibt, Sitzungsberichte der Bayerischen Akademie, 1923, S. 169—172.

G. Pólya and G. Szegö.

[6] Inequalities for the capacity of a condenser, American Journal of Math., Bd. **67**, 1945, S. 1—32.

G. Pólya and G. Szegö.

[7] Approximations and bounds for the electrostatic capacity and similar physical quantities; unter Veröffentlichung in den Memoirs of the American Math. Soc.

(Eingegangen am 27. November 1949.)

Über die Perioden regelmäßiger Kettenbrüche für Quadratwurzeln aus ganzen Zahlen.

Herrn Oskar Perron zum 70. Geburtstag am 7. Mai 1950 gewidmet.

Von

Rudolf Steuerwald in München.

§ 1.

Problemstellung.

Diese Arbeit befaßt sich mit einer Verallgemeinerung der Frage nach den kulminierenden und fastkulminierenden Perioden.

„Ganze Zahl" heißt hier: Ganze rationale Zahl. Alle lateinischen Buchstaben bedeuten ganze Zahlen.

Es sei D eine positive ganze Zahl, aber nicht das Quadrat einer solchen, und, in einen regelmäßigen Kettenbruch entwickelt,

$$(1) \qquad \xi_0 = \sqrt{D} = [b_0, \overline{b_1, \ldots, b_{r-1}, b_r, b_{r-1}, \ldots, b_1, 2b_0}].$$

Ferner seien

$$(2) \qquad \xi_\nu = \frac{\sqrt{D} + P_\nu}{Q_\nu} = [b_\nu, b_{\nu+1}, \ldots] \qquad (\nu = 0, 1, \ldots)$$

die vollständigen Quotienten des Kettenbruches (1), $A_{\mu,\nu}$ und $B_{\mu,\nu}$ der μ-te Näherungszähler und -Nenner von ξ_ν, außerdem $A_{-1,\nu} = B_{-2,\nu} = 1$, $A_{-2,\nu} = B_{-1,\nu} = 0$ und $A_{\mu,0} = A_\mu$, $B_{\mu,0} = B_\mu$. Die in (1) angeschriebene Periode von gerader Gliederzahl $2r$ braucht nicht primitiv zu sein.

Für $\nu = r$ gelten die Beziehungen

$$(3) \qquad 2P_r = b_r Q_r = 2(b_0 - c_r); \qquad Q_r \geqq 1,\ 0 \leqq c_r \leqq Q_r - 1.$$

Nun kann man umgekehrt drei ganze Zahlen r, Q, c vorgeben, welche den Bedingungen

$$(4) \qquad r \geqq 1, \qquad Q \geqq 1, \qquad 0 \leqq c \leqq Q - 1$$

genügen, und versuchen, positive ganze Zahlen b_ν $(\nu = 0, 1, \ldots, r)$ und D so zu bestimmen, daß die Gleichungen (1) bis (3) mit $Q_r = Q$ und $c_r = c$ gelten. Diese Aufgabe ist im allgemeinen Fall genau so anzupacken wie in den geläufigen Fällen $Q = 1$ und $Q = 2$, die z. B. in dem Perron'schen Lehrbuch[1]) eingehend behandelt sind. Daher soll

[1]) O. Perron, Die Lehre von den Kettenbrüchen, 2. Aufl. Leipzig und Berlin 1929 (künftig zitiert: P.), S. 96 ff. und S. 110 ff.

das Verfahren unter Verweisung auf die dortige Darstellung hier nur kurz skizziert werden.

Die Ausgangsgleichungen

$$2A_{r-1} = Q(b_r B_{r-1} + 2B_{r-2}), \qquad 2DB_{r-1} = Q(b_r A_{r-1} + 2A_{r-2})$$

ziehen die Gleichung

$$DB_{2r-1} = b_0 A_{2r-1} + A_{2r-2}$$

nach sich. Die Teilnenner $b_1, \ldots, b_{r-1}$ müssen der Gleichung

$$cA_{r-2,1} + B_{r-2,1} = QA_{r-3,1} \tag{5}$$

genügen. Es werde hiermit vereinbart, unter einer „Lösung" dieser Gleichung immer nur eine solche zu verstehen, welche aus positiven ganzen Zahlen $b_1, \ldots, b_{r-1}$ besteht.

Zu einer Lösung von (5) erhält man b_0 und D aus der diophantischen Gleichung

$$(D - b_0^2)A_{r-2,1} - (2b_0 - c)B_{r-2,1} = QB_{r-3,1}. \tag{6}$$

Mittels

$$A_{r-2,1}B_{r-3,1} - B_{r-2,1}A_{r-3,1} = (-1)^{r-1} \tag{7}$$

findet man als allgemeinste Lösung der Gl. (6)

$$2b_0 - c = (-1)^{r-1}QA_{r-3,1}B_{r-3,1} + mA_{r-2,1}, \tag{8}$$

$$D - b_0^2 = (-1)^{r-1}QB_{r-3,1}B_{r-3,1} + mB_{r-2,1}. \tag{9}$$

Für m ist jede ganze Zahl zulässig, die folgenden Bedingungen genügt:

1. m muß so groß sein, daß $b_0 > c$ wird. Das ist immer erfüllbar. Nach (6) wird dann auch $D > b_0^2$.

2. Es muß $2(b_0 - c)$ durch Q teilbar sein, also

$$mA_{r-2,1} \equiv c \pmod{Q}. \tag{10}$$

Auch das läßt sich immer erreichen. Denn da zufolge (7) $A_{r-2,1}$ und $B_{r-2,1}$ teilerfremd sind, folgt aus (5) das gleiche für $A_{r-2,1}$ und Q.

3. Die durch (8) bestimmte Zahl $2b_0$ muß gerade sein. Hier sind verschiedene Fälle zu unterscheiden.

I. Ist Q gerade, so ist (10) hinreichend.

II. Ist Q ungerade, so sind folgende zusätzliche Forderungen notwendig und hinreichend:

a) wenn $A_{r-3,1}$ gerade ist,

$$m \equiv c \pmod{2}; \tag{11a}$$

b) wenn $A_{r-3,1}$ und $A_{r-2,1}$ ungerade sind,

$$m \equiv 0 \pmod{2}; \tag{11b}$$

c) wenn $A_{r-2,1}$ gerade (also nach (7) $A_{r-3,1}$ ungerade) ist,

$$B_{r-3,1} \equiv c \pmod{2}. \tag{11c}$$

Damit nimmt der letzte Fall eine ausgesprochene Sonderstellung ein. Während durch (10), (11a), (11b) jede Lösung der Gl. (5) zugelassen und nur die Wahl von m in erfüllbarer Weise eingeengt wird, schließt (11c) gewisse Lösungen ganz aus. Eine Lösung von (5), welche unter IIc fällt und der Bedingung (11c) nicht genügt, heiße unbrauchbar, jede andere brauchbar. Daß es wirklich unbrauchbare Lösungen gibt, wird sich in § 2 zeigen.

Von den drei sich nunmehr abzeichnenden Aufgaben,

A) Bedingungen für die Lösbarkeit der Gl. (5),

B) Eigenschaften ihrer Lösungen,

C) Bedingungen für deren Brauchbarkeit

anzugeben, wird in der vorliegenden Arbeit C) nur gelegentlich gestreift. Zu A) wird sich ergeben, daß für $r \geqq 3$ jedenfalls dann Lösungen existieren, wenn $c = 0$ oder Teiler von $Q-1$ ist. Den wesentlichen Inhalt bilden Aussagen zu B), vor allem in den eben genannten Sonderfällen.

§ 2.

Beispiele.

Ist $Q = 1$, so setzt sich die $2r$-gliedrige Periode aus einer geraden Anzahl primitiver Perioden zusammen, und (5) besagt einfach $b_\lambda = b_{r-\lambda}$ $(1 \leqq \lambda \leqq r-1)$. Dieser Fall bietet nichts Neues und werde daher künftig ausgeschlossen.

Für $Q \geqq 2$, was von jetzt ab immer vorausgesetzt wird, umfaßt die $2r$-gliedrige Periode eine ungerade Anzahl primitiver Perioden von gerader Gliederzahl.

Zwecks späterer Verwendung ist zunächst einiges über $r = 1, 2, 3, 4$ vorauszuschicken. Es lautet

für $r =$	Gleichung (5)	Kongruenz (11c) (mod 2)
1	$c = 0$	$c \equiv 1$
2	$c b_1 + 1 = Q$	$c \equiv 0$
3	$c(b_1 b_2 + 1) + b_2 = Q b_1$	$c \equiv 1$
4	$c(b_1 b_2 b_3 + b_1 + b_3) + b_2 b_3 + 1 = Q(b_1 b_2 + 1)$	$c \equiv b_2$

$r = 1$: Die Menge $\{b_\nu\}$ $(0 < \nu < r)$ ist leer; Fall IIc kann nicht eintreten [2].

$r = 2$: $c = 0$ führt auf $Q = 1$. $Q \geqq 2$ erfordert, daß $c > 0$ Teiler von $Q-1$ sei, und liefert dann die Lösung $b_1 = \frac{Q-1}{c}$. Diese ist unbrauchbar, wenn $Q \equiv c \equiv 1 \pmod 2$ ist [3].

---

[2] Vgl. P. S. 99, 2. Beispiel.

[3] Vgl. P. S. 100, 4. Beispiel. Die hiesigen Formeln gehen in die dortigen über, wenn man $Q = m b_1^2 - b_1 b_2 + 1$, $c = m b_1 - b_2$ setzt.

$r = 3$: a) $c = 0$ führt auf $b_2 = Q b_1$. Diese Lösung ist unbrauchbar, wenn $b_1 \equiv Q \equiv 1 \pmod 2$ ist.

b) Ist $c > 0$, so folgt aus (5) durch leichte Umformung

$$(Q - c b_2)(c b_1 + 1) = Q + c^2 .$$

Diese Gleichung ist dann und nur dann lösbar, wenn $Q + c^2$ einen Teiler $p > 1$ hat, der $\equiv 1 \pmod c$ ist. Sei $Q + c^2 = pq$; dann lautet die Lösung

$$b_1 = \frac{p-1}{c}, \qquad b_2 = \frac{Q-q}{c} = q b_1 - c .$$

Wegen $q = \frac{Q + c^2}{p} < \frac{Q + cQ}{c+1} = Q$ wird b_2 von selbst positiv. Unbrauchbar sind die Lösungen mit $b_1 \equiv b_2 \equiv Q \equiv c + 1 \equiv 1 \pmod 2$. Folgende Sonderfälle sind für später von Interesse:

$$p = Q + c^2, \qquad b_1 = \frac{Q-1}{c} + c, \qquad b_2 = \frac{Q-1}{c},$$

$$p = c + 1, \qquad b_1 = 1, \qquad b_2 = \frac{Q-c}{c+1} .$$

Das Beispiel $Q = 5$, $c = 1$ zeigt, daß diese beiden Lösungen gleichzeitig auftreten und brauchbar sein können.

$r = 4$: Hier sollen nur zwei Sonderfälle ohne Diskussion der Brauchbarkeit erwähnt werden.

a) $c = 0$ ergibt $b_2(b_3 - Q b_1) = Q - 1$.

Lösung: $$b_2 = \frac{Q-1}{c^*}, \qquad b_3 = Q b_1 + c^*,$$

wobei $b_1 > 0$ sein muß und c^* jeden positiven Teiler von $Q - 1$ bedeuten kann.

b) Ist $c > 0$ Teiler von $Q - 1$, so existieren Lösungen mit $b_3 = \frac{Q-1}{c}$. Unter dieser Annahme geht nämlich (5) über in

$$\left(b_1 - \frac{Q-1}{c}\right)(b_2 - c) = Q - 1 ;$$

und man erhält

$$b_1 = \frac{Q-1}{c} + c', \qquad b_2 = \frac{Q-1}{c'} + c,$$

wobei c' jeden positiven Teiler von $Q - 1$ bedeuten kann.

§ 3.

Hilfsformeln.

I. Von jetzt ab sollen die Lösungen der Gl. (5) ohne Rücksicht auf ihre Brauchbarkeit näher untersucht werden. Dazu sind zunächst einige Formeln bereitzustellen. Dabei ist es zweckmäßig, die bisher

aus Symmetriegründen geübte Bezeichnungsweise aufzugeben und anstatt $A_{\mu,\nu}$ $(\nu \geqq 1)$ durchweg $B_{\mu+1,\nu-1}$ zu schreiben. Dann lauten die „Fundamentalformeln“ [4]) in geeigneter Spezialisierung

$$B_{\mu,\nu} = b_{\mu+\nu} B_{\mu-1,\nu} + B_{\mu-2,\nu} \qquad (\mu \geqq 0), \tag{12}$$

$$B_{\mu,\nu} = b_{\nu+1} B_{\mu-1,\nu+1} + B_{\mu-2,\nu+2} \qquad (\mu \geqq 0). \tag{13}$$

Aus ihnen folgen für $\mu \geqq 0$ die Ungleichungen

$$B_{\mu,\nu} \geqq B_{\mu-1,\nu}, \qquad B_{\mu,\nu} \geqq B_{\mu-1,\nu+1}, \tag{14}$$

in denen dann und nur dann das Gleichheitszeichen gilt, wenn $\mu = b_{\nu+1} = 1$ ist.

Die Problemgleichung (5) lautet jetzt

$$c B_{r-1} + B_{r-2,1} - Q B_{r-2} = 0. \tag{15}$$

Sie wird noch in einigen anderen Gestalten benötigt. Durch Anwendung von (12) auf B_{r-1} und $B_{r-2,1}$, und mit Verwendung der Abkürzung

$$Q - c b_{r-1} = q \tag{16}$$

geht (15) über in

$$c B_{r-3} + b_{r-1} B_{r-3,1} + B_{r-4,1} - q B_{r-2} = 0 \qquad (r \geqq 2). \tag{17}$$

Wendet man hierin (13) auf B_{r-2} und B_{r-3} an, so erhält man

$$(b_{r-1} - q b_1) B_{r-3,1} + (c b_1 + 1) B_{r-4,1} + c B_{r-5,2} - q B_{r-4,2} = 0 \quad (r \geqq 3). \tag{18}$$

Wendet man aber (12) auf $B_{r-3,1}$ und B_{r-2} an, so folgt aus (17)

$$\begin{aligned}(c - q b_{r-2}) B_{r-3} + (b_{r-1} b_{r-2} + 1) B_{r-4,1} \\ + b_{r-1} B_{r-5,1} - q B_{r-4} = 0 \qquad (r \geqq 3).\end{aligned} \tag{19}$$

Endlich erhält man aus (18) durch Anwendung von (12) auf $B_{r-3,1}$ und $B_{r-4,2}$

$$\begin{aligned}(b_{r-1} b_{r-2} - q b_1 b_{r-2} + c b_1 + 1) B_{r-4,1} + (b_{r-1} - q b_1) B_{r-5,1} \\ + (c - q b_{r-2}) B_{r-5,2} - q B_{r-6,2} = 0 \qquad (r \geqq 4).\end{aligned} \tag{20}$$

Der Weg, der mittels der Fundamentalformeln von (15) zu (17) bis (20) führte, läßt sich aber auch in umgekehrter Richtung durchlaufen. Jede dieser Gleichungen ist also mit (15) gleichwertig, sofern nur r die jeweils angegebene Schranke nicht unterschreitet.

II. Nun seien b_s, b_{s+1}, ..., b_{r-t-1}, b_{r-t} $(1 \leqq s \leqq r-t \leqq r-1)$ lückenlos aufeinanderfolgende Teilnenner des Kettenbruches (1). Mit der Abkürzung

$$r - t - s + 1 = h$$

werde

$$b_{\varkappa+s-1} = b'_\varkappa \ (\varkappa = 1, \ldots, h), \qquad b_{r-t+1-\lambda} = b^*_\lambda \ (\lambda = 1, \ldots, h)$$

[4]) P. S. 14. Gln. (24).

gesetzt; und $B'_{\mu,\nu}$ bzw. $B^*_{\mu,\nu}$ sollen für die Kettenbrüche

$$\xi'_0 = [0, b'_1, \ldots, b'_h] = [0, b_s, b_{s+1}, \ldots, b_{r-t}],$$
$$\xi^*_0 = [0, b^*_1, \ldots, b^*_h] = [0, b_{r-t}, b_{r-t-1}, \ldots, b_s]$$

die analoge Bedeutung haben wie $B_{\mu,\nu}$ für ξ_0. Dann gelten für $-2 \leqq \mu \leqq h$ die Gleichungen [5])

$$B_{\mu,\nu} = B'_{\mu,\nu-s+1} = B^*_{\mu,r-t-\mu-\nu} \qquad (s-1 \leqq \nu \leqq r-t-\mu). \tag{21}$$

§ 4.

Eigenschaften der Lösungen.

I. Definition 1. *Eine (verabredungsgemäß aus positiven ganzen Zahlen bestehende) Lösung $b_1, \ldots, b_{r-1}$ der Gl. (15) mit $r \geqq 2$, $Q \geqq 2$ heiße in dieser Anordnung (nach wachsenden Indizes) eine Q, c-Folge r-ter Ordnung, die Folge $b_{r-1}, \ldots, b_1$ (nach fallenden Indizes geordnet) deren Inverse. Dem Wert $r = 1$ werde eine „leere", zu sich selbst inverse Q, 0-Folge zugesprochen. Der Zusatz „r-ter Ordnung" unterbleibt, wo er evident ist.*

Definition 2. *Eine Q, c-Folge r-ter Ordnung, bei der $c > 0$ Teiler von $Q-1$, und $b_{r-1} = \frac{Q-1}{c}$ ist, heiße eine ausgezeichnete Q, c-Folge.*

Daß es, falls $c > 0$ ist, sowohl ausgezeichnete als auch andere Q, c-Folgen geben kann, zeigt das Beispiel $r = 3$ des § 2.

Hilfssatz. *Eine notwendige Bedingung für die Existenz von Q, c-Folgen ist $0 \leqq c \leqq Q-1$.*

(Daher wurde diese Bedingung in die Definition nicht aufgenommen.)

Beweis: Hat Gl. (15) eine Lösung, so folgt nach deren Einsetzen aus (14) $B_{r-1} \geqq B_{r-2}$, $B_{r-1} \geqq B_{r-2,1}$; und damit, da c eine ganze Zahl sein soll, aus (15) $0 \leqq c \leqq Q-1$. Für $r = 1$ ist $c = 0$.

Satz 1. *In jeder Q, c-Folge r-ter Ordnung ($r \geqq 2$) ist*

$$c\,b_{r-1} < Q < (c+1)(b_{r-1}+1),$$

also

$$b_{r-1} \geqq Q, \quad \text{wenn} \quad c = 0,$$

und

$$\frac{Q-c}{c+1} \leqq b_{r-1} \leqq \frac{Q-1}{c}, \quad \text{wenn} \quad c > 0.$$

Daß b_{r-1} alle angegebenen Schranken wirklich erreichen kann, zeigt das Beispiel $r = 3$ des § 2.

Beweis des Satzes: Nach Einsetzen der Lösung in (17) schließt man mittels (14) auf die Ungleichung

$$1 \leqq q \leqq c + b_{r-1}.$$

Daraus folgt durch Umformung mittels (16) die Behauptung.

---

[5]) Hier wird die durch $B_{\mu,\nu} = K(b_{1+\nu}, \ldots, b_{\mu+\nu}) = K(b_{\mu+\nu}, \ldots, b_{1+\nu})$ ausgedrückte Eigenschaft des Muirschen Symbols K verwendet.

Satz 2. *Ist* $r \geqq 3$, $c > 0$ *und* $b_1, \ldots, b_{r-2}, b_{r-1} = c^*$ *eine* Q, c*-Folge, so ist* $b_{r-2}, b_{r-3}, \ldots, b_1, c$ *eine* Q, c^**-Folge.*

Zusatz. *Der Satz gilt auch noch für* $r = 2$, *wenn man unter* $b_1, \ldots, b_{r-2}$ *die leere Folge versteht.*

Beweis: Setzt man

$$b_{r-1-\lambda} = b_\lambda^* \ (1 \leqq \lambda \leqq r-2), \qquad c = b_{r-1}^*, \qquad Q - c^* b_{r-1}^* = q^*,$$

so wird $q = q^*$. Außerdem ergibt Gl. (21) mit $t = 2$:

$$B_{r-3} = B_{r-3,1}^*, \quad B_{r-3,1} = B_{r-3}^*, \quad B_{r-4,1} = B_{r-4,1}^*, \quad B_{r-2} = B_{r-2}^*.$$

Setzt man dies alles in Gl. (17) ein, so erhält man

$$c^* B_{r-3}^* + b_{r-1}^* B_{r-3,1}^* + B_{r-4,1}^* - q^* B_{r-2}^* = 0.$$

Zufolge (17) ist also $b_1^*, \ldots, b_{r-1}^*$ eine Q, c^*-Folge. Der Zusatz ist hier, wie bei den folgenden Sätzen, aus §2 abzulesen.

II. Satz 3. *Eine Folge* $b_1, \ldots, b_{r-1}$ $(r \geqq 4)$ *ist dann und nur dann eine* Q, 0*-Folge, wenn* $b_{r-2}, \ldots, b_2$ *eine* Q, c^**-Folge und* $b_{r-1} = Q b_1 + c^*$ *mit* $b_1 > 0$ *ist.*

Zusatz. *Der Satz gilt auch noch für* $r = 3$, *wenn man* $b_2, \ldots, b_{r-2}$ *als leere* Q, 0*-Folge deutet.*

Beweis: Es sei $b_1, \ldots, b_{r-1}$ eine Q, 0-Folge. Dann folgt aus (18)

$$(b_{r-1} - Q b_1) B_{r-3,1} + B_{r-4,1} - Q B_{r-4,2} = 0. \tag{22}$$

Setzt man

$$b_{r-1} - Q b_1 = c^*, \qquad b_{r-1-\lambda} = b_\lambda^* \ (1 \leqq \lambda \leqq r-3),$$

so folgt aus (21) mit $t = 2$

$$B_{r-3,1} = B_{r-3}^*, \qquad B_{r-4,1} = B_{r-4,1}^*, \qquad B_{r-4,2} = B_{r-4}^*,$$

und (22) geht über in

$$c^* B_{r-3}^* + B_{r-4,1}^* - Q B_{r-4}^* = 0. \tag{23}$$

Zufolge (15) ist also $b_1^*, \ldots, b_{r-3}^*$ eine Q, c^*-Folge. Die Umkehrung folgt daraus, daß der Übergang von (22) zu (23) reversibel ist und mit b_1 auch b_{r-1} positiv wird.

III. Der Hilfssatz und die Sätze 1 und 3 gelten sinngemäß auch noch für $Q = 1$. Dagegen konnte unter der Voraussetzung $c > 0$ ein Analogon zu Satz 3 nur für die ausgezeichneten Q, c-Folgen, nicht für die allgemeinsten, gefunden werden. Daher wird die weitere Untersuchung auf die ausgezeichneten Folgen beschränkt.

Satz 4. *In jeder ausgezeichneten* Q, c*-Folge* r*-ter Ordnung* $(r \geqq 3)$ *ist*

$$b_1 - b_{r-1} \geqq 0, \qquad b_{r-2} - c \geqq 0,$$

$$(b_1 - b_{r-1})(b_{r-2} - c) < Q < (b_1 - b_{r-1} + 1)(b_{r-2} - c + 1).$$

Insbesondere gilt also: Wenn von den beiden nicht negativen Differenzen $b_1 - b_{r-1}$, $b_{r-2} - c$ *die eine nicht verschwindet, ist die andere* $\leqq Q - 1$; *wenn die eine verschwindet, ist die andere* $\geqq Q$.

Beweis: Für $r = 3$ liest man den Satz aus §2 ab. Sei also $r \geqq 4$. Für eine ausgezeichnete Q, c-Folge gehen (18), (19), (20) über in

$$(24) \quad (b_{r-1} - b_1) B_{r-3,1} + (c b_1 + 1) B_{r-4,1} + c B_{r-5,2} - B_{r-4,2} = 0,$$

$$(25) \quad (c - b_{r-2}) B_{r-3} + (b_{r-1} b_{r-2} + 1) B_{r-4,1} + b_{r-1} B_{r-5,1} - B_{r-4} = 0,$$

$$(26) \quad [Q - (b_{r-1} - b_1)(c - b_{r-2})] B_{r-4,1} + (b_{r-1} - b_1) B_{r-5,1} + (c - b_{r-2}) B_{r-5,2} - B_{r-6,2} = 0.$$

Mittels (14) schließt man aus (24) und (25) auf die beiden ersten Ungleichungen des Satzes, und mit deren Benützung aus (26) auf die dritte.

Satz 5. *Eine Folge* $b_1, \ldots, b_{r-1} = \frac{Q-1}{c}$ $(r \geqq 5)$ *ist dann und nur dann eine ausgezeichnete* Q, c*-Folge, wenn* $b_2, \ldots, b_{r-3}, c^*$ *eine* Q, c'*-Folge oder* $b_{r-3}, \ldots, b_2, c'$ *eine* Q, c^**-Folge, und* $b_1 = b_{r-1} + c'$, $b_{r-2} = c + c^*$ *ist.*

Zusatz. *Der Satz gilt auch noch für* $r = 4$, *wenn man* $b_2, \ldots, b_{r-3}$ *als leere Folge deutet, und liefert dann die Bedingung* $c' c^* = Q - 1$ *(vgl. §2).*

Anmerkung. Von den beiden Bedingungen des Satzes 5 kommt, falls $c' = 0$, nur die erste; falls $c^* = 0$, nur die zweite in Frage. Ist $c' > 0$ und $c^* > 0$, so sind sie nach Satz 2 äquivalent; $c' = c^* = 0$ ist durch Satz 4 ausgeschlossen.

Beweis des Satzes: Es sei $b_1, \ldots, b_{r-1}$ eine ausgezeichnete Q, c-Folge und $b_1 - b_{r-1} = c'$, $b_{r-2} - c = c^*$.

a) Ist $c^* > 0$, so werde gesetzt

$$b_{\varkappa+1} = b'_\varkappa \; (1 \leqq \varkappa \leqq r-4), \qquad c^* = b'_{r-3}, \qquad Q - c' b'_{r-3} = q'.$$

Dann folgt aus (21) mit $s = 2$

$$B_{r-4,1} = B'_{r-4}, \quad B_{r-5,1} = B'_{r-5}, \quad B_{r-5,2} = B'_{r-5,1}, \quad B_{r-6,2} = B'_{r-6,1}.$$

Setzt man das alles in (26) ein, so erhält man

$$(27) \qquad c' B'_{r-5} + b'_{r-3} B'_{r-5,1} + B'_{r-6,1} - q' B'_{r-4} = 0.$$

Zufolge (17) ist also $b'_1, \ldots, b'_{r-3}$ eine Q, c'-Folge.

b) Ist $c' > 0$, so werde gesetzt

$$b_{r-2-\lambda} = b^*_\lambda \; (1 \leqq \lambda \leqq r-4), \qquad c' = b^*_{r-3}, \qquad Q - c^* b^*_{r-3} = q^*.$$

Dann ergibt (21) mit $t = 3$

$$B_{r-4,1} = B^*_{r-4}, \quad B_{r-5,1} = B^*_{r-5,1}, \quad B_{r-5,2} = B^*_{r-5}, \quad B_{r-6,2} = B^*_{r-6,1},$$

und (26) geht über in

$$(28) \qquad c^* B^*_{r-5} + b^*_{r-3} B^*_{r-5,1} + B^*_{r-6,1} - q^* B^*_{r-4} = 0.$$

Zufolge (17) ist also $b^*_1, \ldots, b^*_{r-3}$ eine Q, c^*-Folge.

Wegen Satz 4 ist mindestens eine der Voraussetzungen a), b) erfüllt.

Daß die hiermit als notwendig erwiesenen Bedingungen auch hinreichend sind, folgt wieder daraus, daß der Übergang von (26) zu (27) und (28) umkehrbar ist.

IV. Die Sätze 3 und 5 erlauben, für $r \geqq 3$ zu jedem Q wirklich Q, 0-Folgen und ausgezeichnete Q, c-Folgen anzugeben. Zur Erzeugung von Q, 0-Folgen kann man z. B. Satz 3 mit $c^* = 0$ wiederholt anwenden. Geht man dabei von der leeren Q, 0-Folge ($r = 1$) aus, so ergibt sich

r	b_1	b_2	b_3	b_4	b_5	b_6
3	b_1	Qb_1				
5	b_1	Qb_3	b_3	Qb_1		
7	b_1	Qb_5	b_3	Qb_3	b_5	Qb_1

usw. Geht man aber von $r = 2$ mit einem beliebigen Teiler $c > 0$ von $Q-1$ aus, so erhält man

r	b_1	b_2	b_3	b_4	b_5	b_6	b_7
4	b_1	$\frac{Q-1}{c}$	$Qb_1 + c$				
6	b_1	$Qb_1 + c$	$\frac{Q-1}{c}$	b_4	Qb_1		
8	b_1	Qb_1	b_3	$\frac{Q-1}{c}$	$Qb_3 + c$	b_6	Qb_1

usw. In ähnlicher Weise kann man ausgezeichnete Q, c-Folgen konstruieren. So ergibt z. B. wiederholte Anwendung von Satz 5 mit $c' = c$ für $r \geqq 3$ die Folge

$$b_1 = \cdots = b_{r-2} = \frac{Q-1}{c} + c, \qquad b_{r-1} = \frac{Q-1}{c},$$

von der man leicht nachweist, daß sie dann und nur dann unbrauchbar ist, wenn bei ungeradem Q

entweder $r \equiv 2 \pmod 3$ und c ungerade,

oder $r \equiv 0 \pmod 3$, c gerade und $\frac{Q-1}{c}$ ungerade ist.

Ihr entspricht wieder nach Satz 3 für $r \geqq 5$ die Q, 0-Folge

$$b_1, \quad b_2 = \frac{Q-1}{c}, \quad b_3 = \cdots = b_{r-2} = \frac{Q-1}{c} + c, \quad b_{r-1} = Qb_1 + c.$$

Andererseits erlauben die gewonnenen Sätze nicht, die Gesamtheit der Q, c-Folgen zu überblicken, außer im Falle $Q = 2$, der daher jetzt noch behandelt werden soll.

§ 5.

Der Fall $Q = 2$.

Mit $Q = 2$ ergibt $c = 0$ die kulminierenden, $c = 1$ die fastkulminierenden Perioden, letztere unter Ausschluß von $D = 8, 12$. Daher möge kurz jede 2, 0-Folge als k-Folge, jede 2, 1-Folge als f-Folge bezeichnet werden. Dann nehmen die Sätze des § 4 folgende spezielle Form an.

Satz 1*. *In jeder k-Folge r-ter Ordnung ist $b_{r-1} \geqq 2$. In jeder f-Folge r-ter Ordnung ist $b_{r-1} = 1$.*

Satz 2*. *Ist $b_1, \ldots, b_{r-2}, 1$ eine f-Folge, dann ist auch $b_{r-2}, \ldots, b_1, 1$ eine solche.*

Satz 3*. *Für $r = 2$ existiert keine, für $r = 1$ nur die leere k-Folge. Für $r \geqq 3$ ist $b_1, \ldots, b_{r-1}$ dann und nur dann eine k-Folge, wenn*

a) *entweder $b_{r-1} = 2b_1$ und $b_{r-2}, \ldots, b_2$ eine k-Folge*[6])

b) *oder $r \geqq 4$, $b_{r-1} = 2b_1 + 1$ und $b_{r-2}, \ldots, b_2$ eine f-Folge ist.*

Je nachdem Fall a) oder b) vorliegt, heiße die k-Folge eine solche erster oder zweiter Art.

Satz 4*. *In jeder f-Folge r-ter Ordnung ($r \geqq 3$) ist*

$$(b_1 - 1)(b_{r-2} - 1) \leqq 1, \qquad b_1 b_{r-2} \geqq 3,$$

also entweder $b_1 = b_{r-2} = 2$

oder $b_1 = 1, \quad b_{r-2} > 2$

oder $b_1 > 2, \quad b_{r-2} = 1$.

Satz 5*. *Für $r = 1$ existiert keine f-Folge, für $r = 2$ nur die eine $b_1 = 1$. Für $r \geqq 3$ gilt: Eine Folge $b_1, \ldots, b_{r-2}, 1$ ist dann und nur dann eine f-Folge, wenn*

a) *entweder $b_1 = b_{r-2} = 2$ und (falls $r > 3$) $b_2, \ldots, b_{r-3}, 1$ (also nach Satz 2* auch $b_{r-3}, \ldots, b_2, 1$) eine f-Folge*[7])

b) *oder $r \geqq 5$, $b_1 = 1$ und $b_2, \ldots, b_{r-3}, b_{r-2} - 1$ eine k-Folge*

c) *oder $r \geqq 5$, $b_{r-2} = 1$ und $b_{r-3}, \ldots, b_2, b_1 - 1$ eine k-Folge ist.*

Je nachdem Fall a), b) oder c) vorliegt, möge die f-Folge eine solche erster, zweiter oder dritter Art heißen. Außerdem werde die aus einer f-Folge durch Weglassung von $b_{r-1} = 1$ entstehende Folge eine f-Kurzfolge genannt. Dann liegt nach dem Vorangehenden folgender Sachverhalt vor:

Die Inverse einer f-Kurzfolge ist auch eine f-Kurzfolge. Für $r = 1$ existiert keine, für $r = 2$ nur die leere f-Kurzfolge. Ist $r \geqq 3$, so gibt es unter den f-Kurzfolgen 1. Art genau eine symmetrische (d. h. mit ihrer Inversen identische), nämlich die aus lauter Zweiern bestehende. Ist $r \geqq 5$, so kommen dazu noch Paare unsymmetrischer, aber gegenseitig inverser Kurzfolgen 1. Art. Die Kurzfolgen 2. und 3. Art sind durchwegs unsymmetrisch. Die Kurzfolgen 3. Art sind gerade die Inversen der Kurzfolgen 2. Art.

[6]) Für $r = 3$ ist $b_{r-2}, \ldots, b_2$ als leere Folge zu deuten.

[7]) Für $r = 4$ ist $b_2, \ldots, b_{r-3}$ als leere Folge zu deuten.

§ 6.

k- und *f*-Klassen.

Durch die Bedingungen a), b) des Satzes 3* und a), b), c) des Satzes 5* wird jede k- und f-Folge r-ter Ordnung zu genau einer k- oder f-Folge $(r-2)$-ter Ordnung in Beziehung gesetzt. Diese letztere möge jeweils kurz als die Erzeugende der ersteren bezeichnet werden.

Dieser Zusammenhang läßt sich folgendermaßen ausnützen, um die k-Folgen und die f-Folgen in Klassen einzuteilen: Unter der Annahme, daß für die k- und f-Folgen $(r-2)$-ter Ordnung schon eine Klasseneinteilung vorliege, werde eine k-Klasse r-ter Ordnung definiert als Gesamtheit der k-Folgen r-ter Ordnung gleicher Art, deren Erzeugende zur nämlichen k- bzw. f-Klasse $(r-2)$-ter Ordnung gehören; analog eine f-Klasse r-ter Ordnung. Diese Rekursion funktioniert, weil für $r=1$ nur eine (die leere) k-Folge, für $r=2$ und $r=3$ nur je eine f-Folge, also auch nur je eine Klasse existiert.

Auch die Anzahlen $n_k(r)$ der k-Klassen und $n_f(r)$ der f-Klassen r-ter Ordnung lassen sich leicht angeben. Man verifiziert zunächst direkt

$$n_k(1)=1, \qquad n_k(2)=0, \qquad n_f(1)=0, \qquad n_f(2)=n_f(3)=n_f(4)=1.$$

Aus Satz 3* und Satz 5* folgt

für $r \geqq 3$: $\quad n_k(r)=n_k(r-2)+n_f(r-2)$.

für $r \geqq 5$: $\quad n_f(r)=n_f(r-2)+2\,n_k(r-2)$.

Daraus ergibt sich für $r \geqq 6$

$$n_k(r)=2\,n_k(r-2)+n_k(r-4), \quad n_f(r)=2\,n_f(r-2)+n_f(r-4).$$

Mit Rücksicht auf die Anfangswerte erhält man schließlich:

Satz 6. *Bedeuten $n_k(r)$, $n_f(r)$ die Anzahlen der k- bzw. f-Klassen r-ter Ordnung, so ist*

$$n_k(1)=1, \qquad n_k(2)=0, \qquad n_f(1)=0, \qquad n_f(2)=1,$$

und für $j \geqq 2$

$$n_k(2j-1)=n_k(2j)=B_{j-2}(\sqrt{2}), \qquad n_f(2j-1)=n_f(2j)=A_{j-2}(\sqrt{2}),$$

wobei unter $A_\mu(\sqrt{2})$ und $B_\mu(\sqrt{2})$ der μ-te Näherungszähler und -nenner des regelmäßigen Kettenbruches für $\sqrt{2}$ zu verstehen sind; also

$$A_\mu(\sqrt{2})=\frac{1}{2}\left[(1+\sqrt{2})^{\mu+1}+(1-\sqrt{2})^{\mu+1}\right],$$

$$B_\mu(\sqrt{2})=\frac{1}{2\sqrt{2}}\left[(1+\sqrt{2})^{\mu+1}-(1-\sqrt{2})^{\mu+1}\right].$$

Zu der folgenden Tabelle, welche die Ergebnisse für $1 \leqq r \leqq 8$ veranschaulicht, ist nur noch zu bemerken, daß sich bei ungünstiger Wahl der Konstante m in Gl. (8) auch imprimitive $2r$-gliedrige Perioden ergeben können. Andererseits erhält man sicher primitive Perioden, wenn man z. B. m jeweils so groß wählt, daß $2b_0 > \max b_\nu$ $(\nu=1,\ldots,r-1)$ wird.

k-Klassen								f-Klassen							
r	b_1	b_2	b_3	b_4	b_5	b_6	b_7	r	b_1	b_2	b_3	b_4	b_5	b_6	b_7
1	Die Klasse besteht aus der leeren Folge							1	leere Klasse						
2	leere Klasse							2	1						
3	b_1	$2b_1$						3	2	1					
4	b_1	1	$2b_1+1$					4	2	2	1				
5	b_1	$2b_3$	b_3	$2b_1$				5	2	2	2	1			
	b_1	1	2	$2b_1+1$					1	b_2	$2b_2+1$	1			
									$2b_2+1$	b_2	1	1			
6	b_1	$2b_4+1$	1	b_4	$2b_1$			6	2	2	2	2	1		
	b_1	1	2	2	$2b_1+1$				1	b_2	1	$2b_2+2$	1		
									$2b_3+2$	1	b_3	1	1		
7	b_1	$2b_5$	b_3	$2b_3$	b_5	$2b_1$		7	2	2	2	2	2	1	
	b_1	$2b_5+1$	2	1	b_5	$2b_1$			2	1	b_3	$2b_3+1$	2	1	
	b_1	1	2	2	2	$2b_1+1$			2	$2b_3+1$	b_3	1	2	1	
	b_1	1	$2b_4+1$	b_4	1	$2b_1+1$			1	b_2	$2b_4$	b_4	$2b_2+1$	1	
	b_1	1	1	b_4	$2b_4+1$	$2b_1+1$			1	b_2	1	2	$2b_2+2$	1	
									$2b_4+1$	b_2	$2b_2$	b_4	1	1	
									$2b_4+2$	2	1	b_4	1	1	
8	b_1	$2b_6$	b_3	1	$2b_3+1$	b_6	$2b_1$	8	2	2	2	2	2	2	1
	b_1	$2b_6+1$	2	2	1	b_6	$2b_1$		2	1	b_3	1	$2b_3+2$	2	1
	b_1	1	2	2	2	2	$2b_1+1$		2	$2b_4+2$	1	b_4	1	2	1
	b_1	1	$2b_5+2$	1	b_5	1	$2b_1+1$		1	b_2	$2b_2+1$	1	b_5	$2b_2+1$	1
	b_1	1	1	b_4	1	$2b_4+2$	$2b_1+1$		1	b_2	1	2	2	$2b_2+2$	1
									$2b_5+1$	b_2	1	$2b_2+1$	b_5	1	1
									$2b_5+2$	2	2	1	b_5	1	1

(Eingegangen am 6. Dezember 1949.)

Ein affines Analogon zur Bestimmung einer Fläche aus einer Grundform und einer Krümmungsfunktion durch W. Scherrer.

Herrn Oskar Perron zum 70. Geburtstag am 7. Mai 1950 gewidmet.

Von

Wilhelm Süss in Freiburg i. Br.

W. Scherrer[1]) hat den Satz ausgesprochen, daß eine Fläche durch einen Streifen aus einer der drei Grundformen und einer zugeordneten Krümmungsfunktion eindeutig bestimmt werden kann. Für die dritte Grundform läßt sich hierfür ein besonders durchsichtiger und kurzer Beweis angeben, wenn man mit ihr z. B. die Summe der Hauptkrümmungsradien als Funktion der Parameter vorgibt[2]). Wir wollen hier einen entsprechenden Satz für die affine Differentialgeometrie beweisen. Der Gedankengang wird besonders durchsichtig, wenn man dabei den Weg über eine geeignete relative Differentialgeometrie wählt (§ 2). Wir legen der Theorie zwei polar-reziproke Eichflächen zu Grunde, für die der Formelapparat der Differentialgeometrie der homogenen Affinitäten entwickelt wird (§ 1), wie er sich etwa auch in der Darstellung von E. Salkowski[3]) findet. Der allgemeine relativgeometrische Bestimmungssatz (§ 3) enthält die gesuchten Analoga des Satzes von W. Scherrer sowohl für die Flächentheorie der homogenen wie für diejenige der raumtreuen Affinitäten, für die wir uns auf das bekannte Buch von W. Blaschke[4]) beziehen. Er ist eine unmittelbar erkennbare Erweiterung des a. a. O.[2]) behandelten Satzes.

§ 1.

Flächentheorie der homogenen Affinitäten.

Wir gehen aus von zwei zueinander polar-reziproken Flächen $\mathfrak{e}(u^1, u^2)$ und $\mathfrak{E}(u^1, u^2)$, für die also die folgenden Beziehungen bestehen:

$$(1) \qquad \mathfrak{e}\mathfrak{E} = 1, \qquad \mathfrak{e}\mathfrak{E}_i = \mathfrak{e}_i\mathfrak{E} = 0 \quad \left(\text{hierin ist z. B. } \mathfrak{e}_i = \frac{\partial \mathfrak{e}}{\partial u^i}\right).$$

[1]) Stützfunktion und Radius I, Comm. Math. Helv. 22, 366—381 (1947).

[2]) Bestimmung einer Fläche durch die dritte Grundform und die Summe der Hauptkrümmungsradien, Arch. d. Math. 2, 103—104 (1950).

[3]) Affine Differentialgeometrie, Leipzig u. Berlin 1934.

[4]) Vorlesungen über Differentialgeometrie II, Berlin 1923.

Die für beide Flächen symmetrische quadratische Differentialform mit den Koeffizienten

$$\gamma_{ik} = \mathfrak{e}_{ik}\mathfrak{E} = -\mathfrak{e}_i\mathfrak{E}_k = \mathfrak{e}\,\mathfrak{E}_{ik} = \gamma_{ki} \tag{2}$$

benutzen wir als quadratische Grundform unserer Theorie. Wir nehmen an, daß die beiden Determinanten

$$(\mathfrak{e}_1\mathfrak{e}_2\mathfrak{e}) = d\,, \qquad (\mathfrak{E}_1\mathfrak{E}_2\mathfrak{E}) = D \tag{3}$$

im allgemeinen nicht verschwinden, daß also auch

$$d\,D = |\gamma_{ik}| = \gamma \neq 0 \tag{3'}$$

ist. Die beiden Flächen gehen übrigens durch die Gleichungen

$$\mathfrak{E} = \frac{\mathfrak{e}_1 \times \mathfrak{e}_2}{d}\,, \qquad \mathfrak{e} = \frac{\mathfrak{E}_1 \times \mathfrak{E}_2}{D} \tag{1'}$$

auseinander hervor.

Die Ableitungsgleichungen unserer Flächentheorie haben bei kovarianter Ableitung bezüglich (2) die Gestalt [siehe [3]) p. 130]

$$\mathfrak{e}_{ik} = \alpha'_{ik}\mathfrak{e}_l + \gamma_{ik}\mathfrak{e}\,, \qquad \mathfrak{E}_{ik} = -\alpha'_{ik}\mathfrak{E}_l + \gamma_{ik}\mathfrak{E}\,, \tag{4}$$

wobei die Größen

$$\alpha_{ikl} = \mathfrak{e}_{ikl}\mathfrak{E} = -\mathfrak{e}_{ik}\mathfrak{E}_l = \mathfrak{e}_i\mathfrak{E}_{kl} = -\mathfrak{e}\,\mathfrak{E}_{ikl} = \alpha_{kil} = \alpha_{ilk} \tag{4'}$$

in den Indizes symmetrisch und die Koeffizienten einer invarianten kubischen Grundform der Theorie sind. Man errechnet noch [siehe [3]) p. 132 (31)]:

$$\alpha^k_{ik} = \tau_i = \frac{\partial}{\partial u^i}\ln\left|\frac{d}{\sqrt{\gamma}}\right| = \frac{\partial}{\partial u^i}\ln\left|\frac{\sqrt{\gamma}}{D}\right| = \frac{1}{2}\,\frac{\partial}{\partial u^i}\ln\left|\frac{d}{D}\right|. \tag{5}$$

Der Quotient der beiden Determinanten d und D hat übrigens die Bedeutung der 4. Potenz der sogenannten affinen Entfernung des Ursprungs von der Fläche $\mathfrak{e}$. Aus den Ableitungsgleichungen (4) und aus (5) gehen die homogenen Differentialgleichungen

$$\mathfrak{e}^k_k = \tau^l\mathfrak{e}_l + 2\mathfrak{e}\,, \qquad \mathfrak{E}^k_k = -\tau^l\mathfrak{E}_l + 2\mathfrak{E} \tag{6}$$

für $\mathfrak{e}$ und $\mathfrak{E}$ hervor.

Als Integrierbarkeitsbedingungen der Ableitungsgleichungen erhält man aus dem Ansatz

$$\mathfrak{e}_{ikl} - \mathfrak{e}_{ilk} = R^r_{i,lk}\mathfrak{e}_r\,,$$

wobei $R_{ir,lk}$ der Riemann'sche Krümmungstensor bezüglich (2) ist, die beiden Aussagen

$$\begin{cases} R_{ir,lk} = \alpha^s_{ik}\alpha_{slr} - \alpha^s_{il}\alpha_{skr} + \gamma_{ik}\gamma_{lr} - \gamma_{il}\gamma_{kr} \\ \alpha_{ikr,l} = \alpha_{ilr,k} = \cdots \quad \text{(symmetrischer Tensor)}\,^5). \end{cases} \tag{7}$$

[5]) Hieraus folgt nebenbei für die simultanen Invarianten der quadratischen und der kubischen Grundform

$$I = \tfrac{1}{2}\,\alpha_{ikl}\alpha^{ikl}\,, \qquad L = \tfrac{1}{2}\,\tau^l\tau_l = \tfrac{1}{2}\,\alpha^{kl}_k\alpha^i_{il}$$

und für die Gauss'sche Krümmung R der Form (2) die Gleichung

$$R + L + 1 = I\,.$$

§ 2.

Relative Flächentheorie bei Zuordnung durch parallele Normalen.

Die beiden in § 1 gleichzeitig betrachteten Flächen seien jetzt als Eichflächen benutzt. Der Fläche $\mathfrak{e}$ sei durch Parallelismus entsprechender Tangentenebenen eine Fläche $\mathfrak{x}$ zugeordnet, so daß Gleichungen der Gestalt bestehen

$$\mathfrak{x}_i = p_i^l \mathfrak{e}_l, \qquad \mathfrak{x}_i \mathfrak{E} = 0. \tag{8}$$

Für die Fläche $\mathfrak{x}$ sind die Vektoren $\mathfrak{E}$ normierte Vektoren der gewöhnlichen Flächennormalen. Wenn man die Gleichungen (8) als verallgemeinerte Weingarten'sche Ableitungsgleichungen ansieht, in der die Vektoren $\mathfrak{e}$ als solche der Relativnormalen einer relativen Flächentheorie aufgefaßt werden, so sind die Größen

$$p_k^k = \sigma = r_1 + r_2 \tag{9}$$

die Verallgemeinerungen der Summe der Hauptkrümmungsradien der üblichen Flächentheorie, die hier Relativkrümmungsradien heißen. Die Koeffizienten der Gleichungen (8) gestatten die Darstellung

$$p_{ik} = -\mathfrak{x}_i \mathfrak{E}_k = \mathfrak{x}_{ik} \mathfrak{E} = p_{ki}. \tag{9'}$$

Als Integrierbarkeitsbedingungen der Weingarten'schen Gleichungen (8) erhält man aus

$$\mathfrak{x}_{ik} = \mathfrak{x}_{ki} = p_{i,k}^{\ l} \mathfrak{e}_l + p_i^r (\alpha_{rk}^l \mathfrak{e}_l + \gamma_{rk} \mathfrak{e})$$

die Gleichung

$$p_{il,k} + p_i^r \alpha_{rkl} = p_{kl,i} + p_k^r \alpha_{ril}. \tag{10}$$

Führt man als Relativentfernung des Ursprungs von der Fläche $\mathfrak{x}$ die Funktion

$$A = -\mathfrak{x} \mathfrak{E} \tag{11}$$

ein, so wird nach (4) und (8)

$$A_{ik} = p_{ki} - \alpha_{ik}^l A_l + \gamma_{ik} A \tag{12a}$$

und hieraus durch Überschiebung mit (2) nach (5) und (9)

$$A_k^k = \sigma - \tau^l A_l + 2A. \tag{12}$$

§ 3.

Bestimmung von Flächen durch vorgegebene Streifen.

Zunächst beweisen wir einen allgemeinen Bestimmungssatz unserer relativen Flächentheorie, aus dem dann die in der Einleitung genannten Sätze für die affine Flächentheorie gefolgert werden.

Satz 1. *Die Koeffizienten γ_{ik} der quadratischen Grundform* (2) *sowie die Größen σ und τ seien als Funktionen der Parameter u^1 und u^2 bekannt; ferner seien zwei durch parallele Normalen in entsprechenden Punkten zugeordnete nicht-asymptotische Flächenstreifen $S_{\mathfrak{e}}$ und $S_{\mathfrak{x}}$ gegeben. Dann gibt es stets zwei durch $S_{\mathfrak{e}}$ und $S_{\mathfrak{x}}$ gehende Flächen $\mathfrak{e}$ bzw. $\mathfrak{x}$, deren Tangentenebenen in entsprechenden Punkten einander parallel sind, mit folgenden Eigenschaften:*

a) *Die Fläche $\mathfrak{e}$ und die zu ihr polar-reziproke $\mathfrak{E}$ haben die gegebenen Größen γ_{ik} zu Koeffizienten der quadratischen Grundform der homogen-affinen Flächentheorie von* § 1;

b) *die gegebene Funktion τ genügt den Gleichungen* (5) *dieser Theorie;*

c) *die gegebene Funktion σ ist die in* (9) *eingeführte Summe der Relativkrümmungsradien der Fläche $\mathfrak{x}$ bezüglich $\mathfrak{e}$ als Eichfläche.*

Beweis. Durch $S_{\mathfrak{e}}$ läßt sich eindeutig eine Lösung der ersten der beiden Differentialgleichungen (6) legen. Aus (1) und (1′) gewinnt man danach die Fläche $\mathfrak{E}$. Jetzt läßt sich die Relativentfernung A nach (11) zunächst längs des Streifens $S_{\mathfrak{x}}$ bestimmen. Aus diesen Randwerten gewinnt man dann aus der Differentialgleichung (12) diese Relativentfernung überhaupt. Die Ableitungsgleichungen (4) für $\mathfrak{e}$ liefern die Koeffizienten der kubischen Grundform (4′). Für die Fläche $\mathfrak{E}$ sind die Ableitungsgleichungen (4) gleichzeitig miterfüllt. Für die beiden Ableitungsgleichungen (4) erhält man die Integrierbarkeitsbedingungen (7). Nun errechnet man für die aus (12a) bestimmten Größen p_{ik}, daß auch die Gleichungen (10) erfüllt sind, daß somit unsere verallgemeinerten Weingarten'schen Gleichungen (8) integrierbar sind, d. h. daß die Fläche $\mathfrak{x}$ durch den Streifen $S_{\mathfrak{x}}$ eindeutig bestimmbar ist. Es ist nämlich nach (12a) und (7)

$$\begin{aligned} A_{ikl} - A_{ilk} &= R_{i.,lk}^{t} A_t = A_t[\alpha_{ik}^s \alpha_{sl}^t - \alpha_{il}^s \alpha_{sk}^t + \gamma_{ik}\gamma_l^t - \gamma_{il}\gamma_k^t] \\ &= p_{ki,l} - p_{li,k} - \alpha_{iks,l} A^s + \alpha_{ils,k} A^s - \alpha_{ik}^s (p_{ls} - \alpha_{sl}^t A_t + \gamma_{sl} A) \\ &\quad + \alpha_{il}^s (p_{ks} - \alpha_{sk}^t A_t + \gamma_{sk} A) + \gamma_{ik} A_l - \gamma_{il} A_k , \end{aligned}$$

so daß die Gleichungen (10) folgen, w. z. b. w.

Bei Identifizierung der beiden Flächen $\mathfrak{e}$ und $\mathfrak{x}$ erhält man aus Satz 1 sofort das entsprechende Ergebnis für die Flächentheorie der homogenen Affinitäten. Dabei ist also neben der Grundform (2) nur die Affinentfernung des Ursprungs von der Fläche (die Funktion τ) als vorgegeben anzusetzen. Bei der Flächentheorie der raumtreuen Affinitäten dagegen gelingt auf folgende Weise die Rückführung auf die homogene Affingeometrie. Betrachten wir nach der Darstellung von W. Blaschke[4]) die quadratische Grundform (G_{ik}) und die mittlere Affinkrümmung H als Funktionen der Parameter gegeben, so bestimmt sich die Affinentfernung P des Ursprungs von der Fläche $\mathfrak{e}$ bei vorgegebenen Flächenstreifen aus der Differentialgleichung ([4]) p. 156)

$$G^{ik} P_{ik} + 2HP + 2 = 0 .$$

Zwischen den quadratischen Grundformen der raumtreuen und der homogenen Affinitäten besteht nun die Beziehung ([3] p. 141)

$$G_{ik} = P\gamma_{ik}.$$

Wegen der in § 1 genannten Bedeutung der Funktion τ in Satz 1 ist damit die Frage der raumtreuen affinen Geometrie bereits auf den gerade besprochenen Fall der homogenen Affingeometrie zurückgeführt. Es gilt also

Satz 2. *Durch einen vorgegebenen Streifen läßt sich eine Fläche dadurch eindeutig bestimmen, daß man für sie entweder die quadratische Grundform der homogenen Affingeometrie und die Affinentfernung des Ursprungs von der Fläche als Funktionen der Parameter vorgibt, oder dadurch, daß man außer der quadratischen Grundform der raumtreuen Affingeometrie die mittlere Affinkrümmung als Funktionen der Parameter festlegt.*

(Eingegangen am 10. Dezember 1949.)

Bemerkung über die Definition der Riemannschen Flächen*).

Herrn Oskar Perron zum 70. Geburtstag am 7. Mai 1950 gewidmet.

Von

C. Carathéodory †.

1. Vor einigen Jahren hat Herr van der Waerden eine außerordentlich einfache, schöne und sachgemäße Darstellung des Hauptsatzes der Uniformisierung veröffentlicht[1]). Als ich nun kürzlich eine Neuauflage meines kleinen Buches „Conformal Representation“[2]) vorbereitete und insbesondere ein letztes Kapitel über Uniformisierung hinzufügen wollte, bemerkte ich, daß es notwendig ist, die übliche auf H. Weyl zurückgehende Definition einer abstrakten Riemannschen Fläche zu modifizieren, wenn man alle Vorteile ausnützen will, welche die wunderbar klare und doch so kurze Behandlung der topologischen Seite des Problems durch van der Waerden bietet.

2. Zunächst einige Bemerkungen über kombinatorische Topologie! Van der Waerden drückt sich auf S. 149 folgendermaßen aus:

„Eine Fläche ist eine Gesamtheit von endlich oder unendlich vielen elementargeometrischen Dreiecken, deren Kanten nach einer bestimmten Heftungsvorschrift paarweise aufeinander geheftet werden. Dieses Zusammenheften besteht darin, daß die betreffenden zwei Kanten topologisch (z. B. affin) abgebildet, und entsprechende Punkte identifiziert werden, ...“.

Wenn man nun die darauf folgenden Ausführungen van der Waerdens aufmerksam liest, so sieht man, daß darin weder die inneren Punkte der Dreiecke noch die inneren Punkte ihrer Seiten benutzt werden. Die einzigen Punkte der Fläche S, die in seinen Beweisen vorkommen, sind die Ecken der Triangulation. Die Kanten der Triangulation können aber durch das geordnete Paar ihrer Endpunkte, ihre Dreiecke durch gewisse Punkttripel in bestimmter Reihenfolge bezeichnet werden. Man findet weiter, daß die gerade zitierte Heftungsvorschrift nicht beschrieben zu werden braucht: Sie kann durch die einfache Zuordnung von bestimmten Dreiecksseiten ersetzt werden.

*) Der Verfasser verstarb am 2. Februar 1950. Die beiden Korrekturen wurden von der Schriftleitung an Hand des Manuskriptes mit möglichster Sorgfalt gelesen.

[1]) B. L. van der Waerden. Topologie und Uniformisierung der Riemannschen Flächen (Leipz. Sitzungsber. Bd. 93, S. 147—160, Sitzung vom 8. 12. 1941).

[2]) Cambridge tracts in Mathematics. Nr. 28 (1932).

So umständlich eine solche Bezeichnungsweise und nichtssagend eine solche Deutung der Zusammenhänge erscheint, sie reicht vollkommen aus, um alle weiteren Schritte zu vollziehen. Insbesondere können die Kantenwege, die Wegeklassen usw. beschrieben oder der einfache Zusammenhang einer Fläche S und die universelle Überlagerungsfläche $\bar{S}$ von S definiert werden. Auch der Begriff des Randes eines Flächenstückes, den VAN DER WAERDEN durch Summenoperationen modulo 2 erklärt, behält bei dieser Auffassung einer abstrakten Fläche seinen guten Sinn.

Sogar das folgende, grundlegende Theorem von VAN DER WAERDEN*) kann ebenso bewiesen werden: *Ist S eine einfachzusammenhängende offene Fläche, so ist es immer möglich ihre unendlich vielen Dreiecke T_j so anzuordnen, daß jedes der Flächenstücke*

$$\Sigma_n = T_1 + T_2 + \cdots + T_n \qquad (n = 1, 2, 3, \ldots)$$

von einem einzigen Polygon berandet wird.

Ist diese Bedingung für die n ersten Flächenstücke $\Sigma_1, \Sigma_2, \ldots, \Sigma_n$ erfüllt, so gibt VAN DER WAERDEN ein Verfahren an, um ein Dreieck T_{n+1} zu finden, welches mit dem Rande R_n von Σ_n entweder zwei Seiten oder eine Seite gemeinsam hat, aber nicht eine Seite und den gegenüberliegenden Eckpunkt, und zeigt außerdem, daß bei Iteration dieses Verfahrens alle Dreiecke von S ausgeschöpft werden.

3. Aus diesem Gerippe entsteht nun eine RIEMANNsche Fläche, indem man es durch weitere Festsetzungen in einen Umgebungsraum verwandelt, der in jedem seiner Punkte die Winkelmetrik der komplexen Ebene trägt.

Dazu werden wir jedem Dreieck T_j der Triangulation eine (geschlossene) JORDANsche Kurve α_j zuordnen, die auf der Ebene einer komplexen Variablen t_j gezeichnet ist, und auf welcher drei Punkte P_j, Q_j, R_j markiert sind. Das beschränkte Gebiet, welches durch α_j berandet wird, soll dann als eine konforme Abbildung von T_j angesehen werden.

Aus der Tatsache, daß man irgend zwei JORDANsche Gebiete konform aufeinander abbilden kann, wobei die Abbildung auch auf den Rändern stetig ist, folgt unmittelbar, daß weder die Gestalt noch die Größe der Kurven α_j und auch nicht die Lage der drei Eckpunkte bei dieser „Abbildung" in Betracht kommt. Dagegen können jetzt die einzelnen Punkte von T_j identifiziert werden.

Hat man nämlich α_j auf die Gestalt eines Kreises gebracht, so wird jeder Punkt von T_j auf einen Punkt A_j der durch α_j berandeten Kreisscheibe abgebildet und durch das Doppelverhältnis (P_j, Q_j, R_j, A_j)

*) Dies Theorem wurde von VAN DER WAERDEN in Aufgabe 274 im Jahresber. d. DMV **49** (1939), *S. 1* aufgestellt. Den Beweis gab H. REICHARDT, Lösung der Aufgabe 274, Jahresber. d. DMV **51** (1941), *S 23*. Die Schriftleitung.

charakterisiert. In den inneren Punkten von T_j, d. h. in den Punkten, für welche (P_j, Q_j, R_j, A_j) nicht reell ist, ist gleichzeitig die gewünschte Winkelmetrik festgelegt.

4. Nun müssen wir das Zusammenschweißen von benachbarten Dreiecken T_j und T_k unserer Fläche und zugleich auch die Winkelmetrik in den zu identifizierenden Punkten ihres Randes realisieren. D. h. wir müssen gleichzeitig die beiden Dreiecke auf eine und dieselbe komplexe t-Ebene konform abbilden, so daß sie sich längs einer ihrer Seiten berühren.

Man könnte glauben, daß es dazu notwendig ist, von vorn herein solche konforme Abbildungen zu kennen, bei welchen eine ganze Umgebung der verschiedenen Dreiecke mit abgebildet wird. Dann

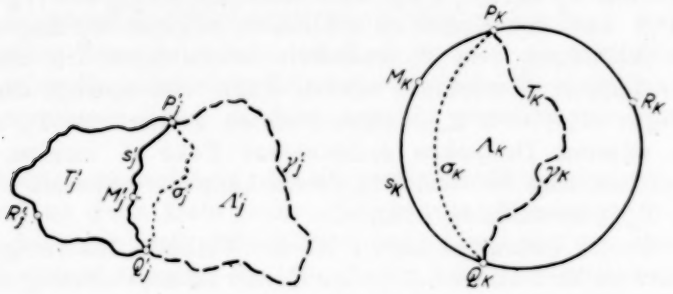


Fig. 1.

würde die Winkelmetrik auch für den ganzen Rand eines jeden einzelnen Dreiecks feststehen. Es wäre aber sehr umständlich, diese verschiedenen konformen Abbildungen so aufeinander abzustimmen, daß sie ein Zusammenheften der Dreiecke überhaupt vertragen.

Glücklicherweise kann man die Voraussetzungen so einschränken, daß nirgends Widersprüche entstehen. Es genügt nämlich, an einer Seite des Dreiecks T_j einen Lappen anzubringen, den man auf einen Teil von T_k konform aufzukleben hat. Zu diesem Zweck gibt man sich in einer t_j'-Ebene eine konforme Abbildung T_j' des Dreiecks T_j mit dem anhängenden Lappen A_j' und zeichnet im Dreieck T_k der t_k-Ebene den Rand γ_k von A_k ein.

Man hat dann in der t_j'-Ebene zwei von Jordanschen Kurven begrenzte Gebiete T_j' und A_j', die sich längs der Jordanschen Kurve s_j' berühren, und in der t_k-Ebene einen Kreis $P_k Q_k R_k$ mit dem Querschnitt γ_k (Fig. 1). Das Bild A_k von A_j' wird durch den Kreisbogen s_k und durch γ_k begrenzt. Die konforme Abbildung von A_j' auf A_k ist eindeutig bestimmt, wenn man noch auf den sich entsprechenden Kurvenbögen s_j' und s_k zwei Punkte M_j' und M_k vorgibt, die identifiziert werden sollen.

Um dann die beiden Dreiecke T_j und T_k zusammenzufügen, bedient man sich einer Methode, die ich wiederholt beschrieben habe[3]). Diese Methode ist besonders einfach, wenn man wie in der Fig. 1 die Punkte P_k und Q_k durch einen Kreisbogen σ_k innerhalb A_k miteinander verbinden, kann, aber sie kann mit Hilfe eines naheliegenden Grenzprozesses auch auf die Fälle erweitert werden, bei welchen kein derartiger Kreisbogen existiert.

5. Wir wollen noch verlangen, daß die Ecken der Triangulation innere Punkte unserer Riemannschen Fläche sein sollen. Dann sind neue Voraussetzungen über das Anhängen von Dreiecken erforderlich.

Es seien also A eine Ecke der Triangulation und $T_1, T_2, \ldots, T_p$ die aufeinanderfolgenden Dreiecke, die in einem geschlossenen Kranz um A herum gelagert sind. Dann können wir T_2 mit T_1 zusammenheften, hierauf T_3 mit $(T_1 + T_2)$ und schließlich T_{p-1} mit $(T_1 + T_2 + \cdots + T_{p-2})$. Um nun den Kranz zu schließen, nehmen wir an, daß eine konforme Abbildung von T_p existiert, bei welcher ein an T_p anhängender Lappen gezeichnet werden kann, der sowohl die beiden an die Figur $(T_1 + \cdots + T_{p-1})$ angrenzenden Seiten von T_p als auch die allen unseren Dreiecken gemeinsame Ecke A umgibt. Ferner nehmen wir an, daß wir das Bild dieses Lappens innerhalb der Figur $T_1 + \cdots + T_{p-1}$) einzeichnen können.

Unter diesen Voraussetzungen ist die Methode des vorigen Paragraphen anwendbar; außerdem ist die Konstruktion eindeutig bestimmt, weil jetzt der Punkt A die Rolle der früher benutzten Punkte M_k und M_j' übernimmt.

6. Die Ausführungen der zwei letzten Paragraphen sind direkt auf den Satz von van der Waerden (§ 2) abgestimmt. Unsere Überlegungen zeigen nämlich, daß ein Dreieck, welches mit zwei seiner Seiten an ein Flächenstück angrenzt, dessen Rand ein einfaches Polygon ist, mit diesem Flächenstück verschmolzen werden kann.

Durch Kombination unserer Resultate mit dem Konvergenzsatz des § 125 meiner „Conformal Representation", können wir die ganze universelle Überlagerungsfläche $\bar{S}$ einer beliebigen Riemannschen Fläche S ausschöpfen und gleichzeitig das Grenzkreistheorem beweisen. Nur für den Fall, daß S eine geschlossene Fläche vom Zusammenhang der Kugel ist, muß man den Beweis ein wenig umändern. In jedem anderen Fall ist $\bar{S}$ eine offene Fläche, welche (außer im Fall des einfachen Zusammenhanges von S) die Fläche S unendlich oft überdeckt. Dann muß man immer für je zwei Paare benachbarter Dreiecke von $\bar{S}$, welche einem und demselben Paar von Dreiecken aus S überlagert sind, dieselben Jordanschen Bögen γ_j' und γ_k und dieselben Punkte M_j' und M_k (vgl. Fig. 1) bei unserer Konstruktion benutzen.

[3]) Schwarz-Festschrift (Berlin, Springer 1914), S. 36. Conformal Representation, S. 98.

Wir erhalten auf der Ebene der uniformisierenden Variablen ein vollständiges konformes Muster der Triangulation von S. Man beachte übrigens, daß die Kanten der Triangulation auf Jordansche Kurvenbögen abgebildet werden, die keine Tangenten zu besitzen brauchen, so daß im Allgemeinen die Dreieckswinkel nicht existieren.

Freilich kann man die ursprüngliche Triangulierung mit Beibehaltung der Ecken durch eine äquivalente ersetzen, deren Kanten analytisch sind oder sogar mit den geodätischen Linien einer sphärischen, Euklidischen oder Nichteuklidischen Geometrie zusammenfallen.

7. Die zusätzlichen Voraussetzungen, die wir im § 5 betrachtet haben, sind keineswegs befriedigend. Man kann versuchen, von diesen Voraussetzungen abzusehen. Aber dann zeigen schon die einfachsten Beispiele, daß es unter Umständen unmöglich ist, die gemeinsame Ecke A eines Kranzes von Dreiecken auf einen Punkt des Gebietes der uniformisierenden Variablen abzubilden. Man kann zwar immer die Dreiecke eines geschlossenen Kranzes auf ein schlichtes Gebiet abbilden, aber die aufeinanderfolgenden Dreiecke dieses Bildes brauchen keine gemeinsame Ecke, sondern nur ein gemeinsames Primende zu besitzen.

Das Gebiet, in welchem die allgemeine uniformisierende Variable erklärt ist, ist dann nicht mehr einfach zusammenhängend. Es kann endlich oder unendlich viele Löcher aufweisen, die von analytischen Kurven begrenzt werden. Da jede dieser analytischen Kurven isoliert liegt, kann man erzwingen, daß alle diese Löcher kreisförmig werden, wodurch der Unitätssatz gesichert wird.

Aber die Darstellung aller dieser Erscheinungen, die eine sorgfältige Vorbereitung benötigen, kann nicht in den Rahmen dieser kurzen Notiz eingepaßt und nicht einmal skizziert werden. Sie muß für eine andere Gelegenheit aufbewahrt werden.

8. Der erste, der die abstrakten Riemannschen Flächen streng definiert und behandelt hat, war H. Weyl[4]). Will man, wie es van der Waerden getan hat, von der Weylschen Definition ausgehen, und den Anschluß an unsere Überlegungen herstellen, so hat man zu zeigen, daß alle unsere Operationen für mindestens eine Unterteilung einer Weylschen Triangulation ausführbar sind, und dies gelingt ohne weiteres.

Einen Schritt weiter als Weyl ist T. Radó gegangen[5]). Er benutzt nämlich eine topologische Definition einer zwei-dimensionalen Mannigfaltigkeit, aus welcher das zweite Hausdorffsche Abzählbarkeitsaxiom nicht folgt, so daß unter Umständen eine Triangulation nicht existiert. Daß letzteres möglich ist, zeigt er an einem besonders lehrreichen Beispiel von Heinz Prüfer. Dann definiert Radó für diese Flächen eine „kon-

[4]) H. Weyl, Die Idee der Riemannschen Fläche (Leipzig u. Berlin, 1913), S. 34.

[5]) T. Radó, Über den Begriff der Riemannschen Fläche (Acta Szeged, Bd. 2, 1925) S. 101—121.

forme Abbildung im Kleinen" und bezeichnet mit dem Worte „Riemannsche Fläche" jede zweidimensionale Mannigfaltigkeit, die eine solche konforme Abbildung zuläßt. Geht man von einer solchen Radóschen Fläche R aus, so kann man Stücke von gewöhnlichen Riemannschen Flächen, die einen Punkt O von R enthalten, auf R ausbreiten und mit Hilfe des Grenzkreistheorems schließen, daß auf diese Weise die ganze Mannigfaltigkeit R überdeckt werden kann[6]).

Dieser Beweis zeigt, daß die Radósche Definition mit der obigen gleichwertig ist, und auch gleichzeitig, daß unsere Überlegungen nicht überflüssig sind.

[6]) Vgl. auch M. Heins, Annals of mathematics, Vol. 50, 1949, S. 686—690.

(Eingegangen am 13. Dezember 1949.)

Zur Theorie der Dirichletschen Reihen.

Herrn Oskar Perron zum 70. Geburtstag am 7. Mai 1950 gewidmet.

Von

Harald Bohr in Kopenhagen.

Einleitung.

Von wesentlichem Einfluß auf das Studium der Dirichletschen Reihen einer komplexen Veränderlichen $s = \sigma + it$, sowohl im eigentlichen Sinne d. h. vom Typus

$$(1) \qquad f(s) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n n^{-s} = \sum_{n=1}^{\infty} a_n e^{-s \log n}$$

als auch vom verallgemeinerten Typus

$$(2) \qquad f(s) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n e^{-\lambda_n s} \quad (0 \leqq \lambda_1 < \lambda_2 < \cdots; \ \lambda_n \to \infty)$$

war eine große Abhandlung des französischen Mathematikers Cahen aus dem Jahre 1894, in welcher zuerst eine umfassende und vielseitige Untersuchung dieses interessanten Reihentypus vorgenommen wurde. Schon vorher war übrigens von dem dänischen Mathematiker Jensen in einer unbeachtet gebliebenen kleineren Arbeit im Jahre 1884 die wesentliche Tatsache erkannt worden, daß das Konvergenzgebiet einer jeden Dirichletschen Reihe eine Halbebene $\sigma > A_0$ ist. Bei Cahen waren aber die Beweismethoden, was ihre Genauigkeit anbelangt, meistenteils sehr unvollkommen, und es war deshalb eine Zeitlang zweifelhaft, welche von seinen vielen angegebenen Resultaten tatsächlich allgemein gültig waren. Es war daher von der größten Bedeutung für die Weiterentwicklung der Theorie, daß Perron in einer durch die Klarheit, Sinngemäßheit und Strenge der Methoden klassischen Arbeit in Crelles Journal 1908 die gesamten Fragestellungen von Cahen und einige weitere darüber hinausgehende Probleme wieder in Angriff nahm. In dieser Arbeit fanden u. a. alle im Zusammenhang mit der Cahenschen Arbeit offen gebliebenen Fragen ihre endgültige Lösung bis auf eine einzige, die die Multiplikation Dirichletscher Reihen betrifft. Indem wir uns auf Dirichletsche Reihen im eigentlichen Sinne beschränken, hatte Stieltjes im Jahre 1887 u. a. bewiesen, daß die Produktreihe $\sum A_n n^{-s}$ $(A_n = \sum a'_m a''_l, \ m\,l = n)$ von zwei Dirichletschen Reihen $\sum a'_n n^{-s}$ und $\sum a''_n n^{-s}$, die beide etwa für $\sigma > 0$ konvergieren, jedenfalls für $\sigma > \frac{1}{2}$ konvergiert. Die Frage, ob der von Cahen mit vermeintlichem

Beweis aufgestellte Satz, daß die Produktreihe sogar immer für $\sigma > 0$ konvergiert, richtig oder falsch ist, wurde von Perron offen gelassen, und erst Landau gelang es, durch Heranziehung speziellerer Eigenschaften der Riemannschen ζ-Funktion zu beweisen, daß dies nicht der Fall zu sein braucht. Abschließend wurde dann vom Verf. durch ein zu diesem Zweck besonders konstruiertes Gegenbeispiel gezeigt, daß die von Stieltjes angegebene Zahl $\frac{1}{2}$ tatsächlich die bestmögliche ist. Angeregt vor allem von Landau wurde ferner eine Reihe von neuen bedeutsamen Fragestellungen in Angriff genommen, von denen mehrere, u. a. von Schnee und Landau selbst, vollständig gelöst wurden.

Zu den vielen verschiedenartigen Problemen, die sich mit den Konvergenzeigenschaften von Dirichletschen Reihen befaßten, trat dann später ein umfassender neuer Problemkreis die Summierbarkeit der Dirichletschen Reihen außerhalb ihres Konvergenzgebietes betreffend hinzu. Zunächst wurde vom Verf. erkannt, daß die einfachste aller Summierbarkeitsmethoden, die Cesàro-Summierbarkeit zur analytischen Fortsetzung der durch eine Dirichletsche Reihe $\sum a_n n^{-s}$ in ihrer Konvergenzhalbebene dargestellten Funktion mit Erfolg verwendet werden konnte; so wurde z. B. gezeigt, daß die ζ-Reihe mit abwechselnden Vorzeichen $\sum (-1)^n n^{-s}$, die für $\sigma > 0$ konvergiert, in der ganzen Ebene C-summierbar ist, und zwar bei jedem ganzzahligen $r \geqq 0$ genau in der Halbebene $\sigma > -r$ von der r-ten Ordnung. Allgemein gilt, daß jede Dirichletsche Reihe $\sum a_n n^{-s}$ eine Summierbarkeitshalbebene $\sigma > \Lambda_r (r = 0, 1, 2, \ldots)$ besitzt, wo sie von der r-ten Ordnung C-summierbar ist; ferner wurde bewiesen, daß die Summierbarkeitsabszissen Λ_r (wo speziell Λ_0 die Konvergenzabszisse bezeichnet) die beiden Relationen

$$0 \leqq \Lambda_r - \Lambda_{r+1} \leqq 1 \quad \text{und} \quad \Lambda_r - \Lambda_{r+1} \geqq \Lambda_{r+1} - \Lambda_{r+2}$$

erfüllen (und daß diese sogar die „bestmöglichen" sind). Wie M. Riesz etwas später mitteilte, hatte er unabhängig vom Verf. die Cesàro-Summierbarkeit der Dirichletschen Reihen $\sum a_n n^{-s}$ untersucht, und dabei auch diese Summationsmethode sinngemäß verallgemeinert, so daß sie auch auf die Dirichletschen Reihen vom allgemeinen Typus $\sum a_n e^{-\lambda_n s}$ angewendet werden konnte. Solche erweiterten Summationsmethoden (die mit den Rieszschen inhaltlich übereinstimmten) waren auch vom Verf. entwickelt und eine Arbeit darüber schon in meiner ersten Mitteilung angekündigt worden. Die Rieszschen Methoden waren aber in ihrer technischen Ausbildung den meinigen wesentlich überlegen, und in meinen weiteren Publikationen beschränkte ich mich deshalb auf die Dirichletschen Reihen im eigentlichen Sinne. Auch wurde von Riesz Summierbarkeit nicht nur ganzzahliger, sondern auch beliebiger nicht negativer Ordnung herangezogen und u. a. gezeigt, daß bei jedem reellen (und nicht nur ganzzahligen) $r \geqq 0$ eine Summierbarkeitshalbebene $\sigma > \Lambda_r$ existiert. Die vom Verf. gewonnenen Resultate

wurden in meiner Habilitationsschrift „Bidrag til de Dirichletske Rækkers Theori“ 1910, im folgenden mit B zitiert, veröffentlicht, während die in gewissen Hinsichten wesentlich weitergehenden Resultate von Riesz in dem schönen Cambridge tract von Hardy und Riesz „The general theory of Dirichlet series“ 1915, im folgenden mit HR zitiert, eine zusammenfassende Darstellung fanden.

In den letzten Jahren habe ich meine alten Untersuchungen über die Summierbarkeit Dirichletscher Reihen wieder aufgenommen. In der vorliegenden Abhandlung, in welcher ich mich durchweg auf die eigentlichen Dirichletschen Reihen $\sum a_n n^{-s}$ beschränken werde, soll ein Teilergebnis, das, besonders in methodischer Hinsicht, vielleicht an sich von Interesse ist, mitgeteilt werden.

Eines der Hauptresultate von Riesz und dem Verf. besagt, daß die Lage der „Summierbarkeitsgrenzgeraden“ $\sigma = A$ ($A = \lim A_r$) einer Dirichletschen Reihe (1), im Gegensatz z. B. zu der Lage der Konvergenzgeraden $\sigma = A_0$, in einfachster Weise von den analytischen Eigenschaften der durch die Reihe dargestellten analytischen Funktion $f(s)$ abhängt. Die Zahl A fällt nämlich mit der „Ordnungsabszisse“ Ω der Funktion $f(s)$ zusammen, welche als die untere Grenze derjenigen Abszissen σ_0 definiert ist, für welche die Funktion $f(s)$ in der Halbebene $\sigma > \sigma_0$ regulär und von endlicher Ordnung in bezug auf die Ordinate ist, d. h. gleich $O(|t|^k)$, wo $k = k(\sigma_0) < \infty$ ist. In den folgenden Ausführungen, die wie gesagt, einen fragmentarischen Charakter haben, werde ich mich ausschließlich auf den Fall beschränken, wo $-\infty < A_0 < \infty$ und die Ordnungsabszisse $\Omega = -\infty$ ist, d. h. wo die dargestellte Funktion $f(s)$ eine ganze transzendente Funktion ist, die in jeder Halbebene $\sigma > \sigma_0$ von endlicher Ordnung ist, was also nach dem eben genannten Satz auf dasselbe hinauskommt, daß die Reihe $\sum a_n n^{-s}$ in der ganzen Ebene C-summierbar ist. In diesem Fall ist bei jedem $r \geqq 0$ die Reihe in einer gewissen Halbebene $\sigma > A_r$ von der r-ten Ordnung summierbar, wobei A_r mit wachsendem r ständig abnimmt und für $r \to \infty$ gegen $-\infty$ strebt. Mit einer solchen Funktion $f(s)$ mit $\Omega = -\infty$ wird bekanntlich eine im ganzen Intervall $-\infty < \sigma < \infty$ definierte, sogenannte Lindelöfsche μ-Funktion $\mu(\sigma)$ verknüpft, die die Größenordnung der Funktion $f(s)$ auf vertikalen Geraden charakterisiert, d. h. wo $\mu(\sigma_0)$ für jedes σ_0 die untere Grenze aller Konstanten $k = k(\sigma_0)$ angibt, für welche $f(\sigma_0 + it) = O(|t|^k)$ ist. Diese Funktion $\mu(\sigma)$ ist bekanntlich eine stetige konvexe Funktion von σ, welche in einem gewissen Intervall $M \leqq \sigma < \infty$ gleich null ist — wobei übrigens nach einem bekannten Satz von Schnee der Intervallendpunkt M jedenfalls $\geqq$ der Konvergenzabszisse A_0 ist — und welche links von M positiv ist und mit abnehmendem σ ständig wächst. Während diese Funktion $\mu(\sigma)$, die wir als die „Ordnungsfunktion“ von $f(s) = \sum a_n n^{-s}$ bezeichnen werden, von dem funktionentheoretischen Charakter unseres Objektes $f(s) = \sum a_n n^{-s}$ abhängt, gibt es eine andere für alle σ definierte

Funktion $\psi(\sigma)$, welche wir als die „Summierbarkeitsfunktion" bezeichnen werden, und die von Eigenschaften der Reihe als solcher abhängt. Diese Funktion $\psi(\sigma)$ ist folgendermaßen definiert. Sie ist gleich null für $\sigma \geqq A_0$ und bei jedem reellen $r > 0$ im Punkte A_r gleich r, wo A_r die r-te Summierbarkeitsabszisse unserer Reihe angibt. In Verallgemeinerung der oben für ganzzahlige Werte von r angegebenen Ungleichungen für die Abszissen A_r hat Riesz (vgl. HR, S. 60) einige Sätze bewiesen, die sich folgendermaßen aussprechen lassen. Die Funktion $\psi(\sigma)$ ist eine stetige konvexe Funktion von σ, welche in dem Intervall $-\infty < \sigma < A_0$, wo sie positiv ist, mit abnehmendem σ ständig wächst und zwar so, daß ihr Steigungswinkel von Anfang an (d. h. schon im Punkte A_0 von links) $\geqq 45°$ ist. Zwischen den beiden soeben eingeführten konvexen Funktionen $\mu(\sigma)$ und $\psi(\sigma)$ bestehen ferner (vgl. HR, S. 49 und 53) die Ungleichungen

$$\psi(\sigma) \leqq \mu(\sigma) \leqq \psi(\sigma) + 1 .$$

Eines der Probleme, das ich zur Untersuchung aufgenommen habe, betrifft den genaueren Zusammenhang zwischen diesen beiden mit $f(s) = \sum a_n n^{-s}$ verknüpften Funktionen $\mu(\sigma)$ und $\psi(\sigma)$, wobei sogleich hervorgehoben werden soll, daß es keineswegs so ist, daß die eine dieser Funktionen etwa die andere eindeutig bestimmt; in der Tat wurde schon in B bewiesen, daß nicht einmal die Konvergenzabszisse A_0, d. h. der Punkt, wo die ψ-Kurve die Abszissenachse verläßt, durch die Kenntnis des Gesamtverlaufes der Funktion $\mu(\sigma)$ eindeutig festgelegt wird.

Im folgenden soll nur der extreme Spezialfall betrachtet werden, wo die ψ-Kurve einfach aus zwei Halbgeraden besteht, von denen die eine mit der reellen Achse zusammenfällt und die andere unter 45° steigt, d. h. wo die Funktion $\psi(\sigma)$ (wobei A_0 etwa gleich 0 gewählt wird) durch die Gleichung

$$\psi(\sigma) = \begin{cases} 0 \text{ für } \sigma \geqq 0 \\ -\sigma \text{ für } \sigma \leqq 0 \end{cases}$$

bestimmt ist. Nach den obigen Ungleichungen (in Verbindung mit der trivialen Ungleichung $\mu(\sigma) = 0$ für $\sigma > A_0 + 1 = 1$) sind dann unter den Möglichkeiten, die für die μ-Kurve überhaupt in Frage kommen, die beiden extremen Möglichkeiten offenbar durch

$$\mu(\sigma) = \psi(\sigma) = \begin{cases} 0 \text{ für } \sigma \geqq 0 \\ -\sigma \text{ für } \sigma \leqq 0 \end{cases}$$

bzw.

$$\mu(\sigma) = \begin{cases} 0 \text{ für } \sigma \geqq 1 \\ 1 - \sigma \text{ für } \sigma \leqq 1 \end{cases}$$

gegeben. Daß die erste dieser Möglichkeiten wirklich auftreten kann, ist speziell in einer kleinen Arbeit des Verf. „On the convergence

problem for Dirichlet series" in den Mitteilungen der Dänischen Akademie 1949 enthalten. In § 1 der vorliegenden Arbeit soll nunmehr der wesentlich schwierigere Existensbeweis gegeben werden, daß auch die zweitgenannte Möglichkeit tatsächlich vorkommen kann. Dies gelingt durch ein Konstruktionsverfahren, dessen Elemente — z. B. die Heranziehung von Differenzen immer höherer Ordnung — schon in B benutzt worden waren. Abgesehen von dem methodischen Interesse, das diese Konstruktion an sich aufweist, läßt sich das somit gewonnene „Gegenbeispiel" zur Aufklärung verschiedener Fragen bezüglich Dirichletscher Reihen verwenden. Bei dieser Gelegenheit soll dies nur in § 2 an einem kleineren Beispiel gezeigt werden und zwar, in Verallgemeinerung eines oben erwähnten Resultates des Verf. bezüglich der Multiplikation zweier konvergenter Dirichletscher Reihen, an der Frage der Lage der Konvergenzabszisse A_0 einer Dirichletschen Reihe $\sum A_n n^{-s}$, welche durch Multiplikation zweier Dirichletscher Reihen $\sum a'_n n^{-s}$ und $\sum a''_n n^{-s}$ entsteht, die beide in einer gewissen Halbebene C-summierbar sind und zwar die eine von der α_1-ten Ordnung, die andere von der α_2-ten Ordnung.

§ 1.

Konstruktion einer Dirichletschen Reihe von besonderem Typus.

In diesem Paragraphen soll der folgende Existenzsatz bewiesen werden:

Hauptsatz. *Es existiert eine Dirichletsche Reihe* $\sum a_n n^{-s}$ *mit der Konvergenzabszisse* $A_0 = 0$, *für welche die durch die Reihe dargestellte Funktion* $f(s)$ *eine ganze transzendente Funktion mit der Ordnungsabszisse* $\Omega = -\infty$ *ist, die also auch die Summierbarkeitsgrenzabszisse* $A = -\infty$ *besitzt, und deren Ordnungsfunktion* $\mu(\sigma)$ *und Summierbarkeitsfunktion* $\psi(\sigma)$ *durch*

$$\mu(\sigma) = \begin{cases} 0 & \text{für } \sigma \geqq 1 \\ 1-\sigma & \text{für } \sigma \leqq 1 \end{cases} \quad \text{bzw.} \quad \psi(\sigma) = \begin{cases} 0 & \text{für } \sigma \geqq 0 \\ -\sigma & \text{für } \sigma \leqq 0 \end{cases}$$

gegeben sind.

Vorbemerkung. Es genügt bei der Konstruktion unserer Reihe $\sum a_n n^{-s}$ dafür Sorge zu tragen, daß sie die Konvergenzabszisse A_0 gleich 0 erhält, und daß die dargestellte Funktion $f(s)$ eine ganze transzendente Funktion mit der Ordnungsabszisse $\Omega = -\infty$ und mit der im Satze angegebenen μ-Funktion wird. In der Tat wird die Reihe dann von selbst die gewünschte ψ-Funktion besitzen; denn eo ipso wird ja $\psi(0) = \psi(A_0) = 0$ (also auch $\psi(\sigma) = 0$ für $\sigma \geqq 0$), und ferner wird einerseits $\psi(\sigma) \geqq -\sigma$ für $\sigma < 0$ sein (wegen $\psi(\sigma) \geqq \mu(\sigma) - 1$), während andererseits bei keinem $\sigma_0 < 0$ die Ungleichung $\psi(\sigma_0) > -\sigma_0$ bestehen kann (da sonst, wegen

der Konvexität von $\psi(\sigma)$ in Verbindung mit $\psi(0) = 0$, die Ordinate $\psi(\sigma)$ für hinreichend große negative Werte von σ beliebig viel größer als $-\sigma$ ausfallen würde, im Widerspruch zur Ungleichung $\psi(\sigma) \leqq \mu(\sigma) = -\sigma + 1$).

Beweis. Wie in der Einleitung erwähnt, werden bei unserem Konstruktionsverfahren Differenzenbildungen beliebig hoher Ordnung verwendet. In Verallgemeinerung der beiden für die Differenz erster Ordnung üblichen, verschiedenartigen Abschätzungen

$$|n^{-s} - (n+1)^{-s}| \leqq 2n^{-\sigma} \text{ (für } \sigma > 0),$$
$$|n^{-s} - (n+1)^{-s}| \leqq |s| \cdot n^{-(\sigma+1)} \text{ (für } \sigma > -1)$$

treten bei der Differenz m-ter Ordnung

$$\Delta^m(n^{-s}) = n^{-s} - \binom{m}{1}(n+1)^{-s} + \binom{m}{2}(n+2)^{-s} - \cdots + (-1)^m (n+m)^{-s}$$

insgesamt $m+1$ solche Ungleichungen auf (vgl. Bohr, l. c. S. 13), nämlich für jedes $h = 0, 1, \ldots, m$ eine Ungleichung der Form

$$|\Delta^m(n^{-s})| \leqq 2^{m-h} |s| \cdot |s+1| \ldots |s+h-1| \, n^{-(\sigma+h)} \text{ (für } \sigma > -h), \tag{3}$$

wo natürlich für $h = 0$ die rechte Seite einfach $2^m n^{-\sigma}$ bedeutet.

Bei der Konstruktion gehen wir von einer Folge positiver ganzer Zahlen $p_1 < p_2 < p_3 \ldots$ aus, die so stark ins Unendliche wachsen, daß die Reihe $\sum 2^m p_m^{-\varepsilon}$ für jedes $\varepsilon > 0$ konvergiert, und daß überdies für jedes $\varepsilon > 0$ für $M \to \infty$ die beiden Abschätzungen

$$\sum_{m=M+1}^{\infty} 2^m p_m^{-\varepsilon} = o(p_M^{-\varepsilon}) \quad \text{und} \quad 2^{M-1} p_{M-1}^{\varepsilon} = o(p_M^{\varepsilon})$$

gelten (von welchen die letzte übrigens eine unmittelbare Folge der ersten ist). Ferner sollen die Zahlen p_m schon von Anfang an so schnell wachsen, daß gewisse einfache Ungleichungen (wir werden sie nicht explizite aufschreiben) für alle p_m und nicht nur für alle p_m von einer gewissen Stelle an (wo sie nach den obigen an die p_m gestellten Forderungen von selbst erfüllt sein werden) gültig sind; diese unwesentlichen Zusatzforderungen sollen nur dem Zweck dienen zu verhindern, daß bei den unten anzugebenden Gliedergruppierungen Überdeckungen bei den Anfangsgruppen auftreten.

Ferner sei eine Folge positiver ganzer Zahlen $q_1 < q_2 < q_3 \ldots$ festgelegt, welche „fast" so schnell, aber nicht „ganz" so schnell, wie die Folge der p_m ins Unendliche wachsen; es wird bequem sein, etwa

$$q_m = [\tfrac{1}{6} p_m m^{-2}] \qquad (m = 1, 2, \ldots)$$

zu wählen.

Schließlich wird eine Ordinatenfolge $t_1 < t_2 < t_3 \ldots$ einfach durch

$$t_m = \pi p_m \qquad (m = 1, 2, \ldots)$$

festgelegt.

Unsere Dirichletsche Reihe $f(s) = \sum a_n n^{-s}$ wird nunmehr durch Zusammenfassung von (nicht übereinander greifenden) „größeren" Gliedergruppen $\{\ldots\}_m$ $(m = 1, 2, \ldots)$ aufgebaut — von denen die m-te aus insgesamt $(q_m + 1)\cdot(m+1)$ aufeinander folgenden Einzelgliedern $a_n n^{-s}$ besteht — die sich wiederum auf $q_m + 1$ „kleinere" Gliedergruppen $[\ldots]_{m,\nu}$ $(\nu = 0, 1, \ldots, q_m)$ verteilen und zwar so, daß jede dieser kleineren Gliedergruppen $[\ldots]_{m,\nu}$ bis auf ein komplexes Vorzeichen einfach eine Differenzenbildung m-ter Ordnung ist und also $m+1$ Einzelglieder enthält; genau angegeben ist unsere Reihe folgendermaßen definiert: Es ist

$$f(s) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n n^{-s} = \sum_{m=1}^{\infty} \{\ldots\}_m = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{\nu=0}^{q_m} [\ldots]_{m,\nu},$$

wobei für $m \geqq 1$, $0 \leqq \nu \leqq q_m$ die eckige Klammer $[\ldots]_{m,\nu}$ die Bedeutung

$$[\ldots]_{m,\nu} = (p_m + \nu(m+1))^{it_m} \cdot \Delta^m (p_m + \nu(m+1))^{-s}$$

hat.

Den Beweis, daß die somit konstruierte Reihe $\sum a_n n^{-s}$ den sämtlichen aufgestellten Forderungen unseres Satzes genügt, teilen wir in drei Schritte ein.

1°. Zunächst zeigen wir, daß $\sum a_n n^{-s}$ die Konvergenzabszisse $\Lambda_0 = 0$ besitzt. Es ist klar, z. B. wegen $|a_{p_m}| = |p_m^{it_m}| = 1$ für alle m, daß die Reihe im Punkte $s = 0$ divergiert, es handelt sich also darum zu zeigen, daß die Reihe für $\sigma > 0$ konvergiert. Zu diesem Zwecke zeigen wir zunächst, daß die Reihe unter Beibehaltung der eckigen Klammern für $\sigma > 0$ konvergiert, ja sogar absolut konvergiert; mit Hinblick auf eine spätere Anwendung werden wir sogar beweisen, daß die Reihe unter Beibehaltung der eckigen Klammern nicht nur für $\sigma > 0$, sondern in der ganzen Ebene absolut konvergiert. Um bei beliebig gegebenem ganzzahligem $h > 0$ die absolute Konvergenz in der Halbebene $\sigma > -h + 1$ nachzuweisen, schreiben wir

$$f(s) = \sum_{m=1}^{\infty} \{\ldots\}_m = \sum_{m=1}^{h} \{\ldots\}_m + \sum_{m=h+1}^{\infty} \{\ldots\}.$$

wo die erste Summe nur endlich viele Glieder $a_n n^{-s}$ enthält. In der zweiten Summe können wir wegen $m > h$ und $\sigma > -h$ jede der in das Glied $\{\ldots\}_m$ eingehenden $q_m + 1$ Klammern $[\ldots]_{m,\nu}$ mit Hilfe der Ungleichung (3) abschätzen und erhalten unmittelbar

$$\begin{aligned} |[\ldots]_{m,\nu}| &= |(p_m + \nu(m+1))^{it_m} \cdot \Delta^m (p_m + \nu(m+1))^{-s}| \\ &\leqq 1 \cdot |s| \ldots |s+h-1|\, 2^{m-h}\, p_m^{-\sigma-h}; \end{aligned}$$

für die Summe der absoluten Beträge der genannten $q_m + 1$ Klammern $[\ldots]_{m,\nu}$ von $\{\ldots\}_m$ gilt also die Ungleichung

$$\sum_{\nu=0}^{q_m} |[\ldots]_{m,\nu}| \leqq (q_m + 1) \cdot |s| \ldots |s+h-1|\, 2^{m-h}\, p_m^{-\sigma-h}$$

und somit wegen $q_m < p_m$ a fortiori die Ungleichung

$$(4) \qquad \sum_{\nu=0}^{q_m} |[\ldots]_{m,\nu}| \leqq 2^{-h}\,|s|\ldots|s+h-1|\,2^m\,p_m^{-\sigma-h+1},$$

woraus die behauptete absolute Konvergenz in der Halbebene $\sigma > -h+1$ sofort ersichtlich ist, da die Reihe $\sum 2^m p_m^{-\sigma-h+1}$ ja nach Voraussetzung für $\sigma + h - 1 > 0$ konvergiert. Es ist nunmehr leicht zu beweisen, daß die Reihe $\sum a_n n^{-s}$ selbst (also ohne irgendwelche Klammerbildungen) für $\sigma > 0$ konvergiert; es genügt ja zu zeigen, daß für $\sigma > 0$ die „Abschnitte“ in $[\ldots]_{m,\nu}$ für $m \to \infty$ gegen 0 streben, und dies ist klar, weil ja für $\sigma > 0$ die Summe der absoluten Beträge sämtlicher Glieder $a_n n^{-s}$ in einer eckigen Klammer $[\ldots]_{m,\nu}$ offenbar

$$\leqq \sum_{l=0}^{m} \binom{m}{l} p_m^{-\sigma} = 2^m p_m^{-\sigma}$$

ist, welche letztere Größe für $m \to \infty$ gegen 0 strebt.

2°. Demnächst werden wir zeigen, daß $f(s)$ eine ganze transzendente Funktion mit $\Omega = -\infty$ ist, und daß ihre μ-Funktion, die ja für $\sigma > \Delta_0 + 1 = 1$ (wo die Reihe absolut konvergiert) eo ipso gleich 0 ist, die Ungleichung

$$\mu(\sigma) \leqq 1 - \sigma \quad \text{für} \quad \sigma \leqq 1$$

erfüllt. Zu diesem Zwecke genügt es nachzuweisen, daß die Funktion $f(s)$, für jedes ganzzahlige $h > 0$, für $\sigma > -h+1$ regulär ist und für jedes $\varepsilon > 0$ die Ungleichung

$$f(s) = O(|t|^h) \quad \text{für} \quad \sigma \geqq -h+1+\varepsilon$$

erfüllt. Denn dann wird ja einerseits $f(s)$ eine ganze transzendente Funktion mit $\Omega = -\infty$ sein, und andererseits wird ja ihre μ-Funktion für jedes $h = 1, 2, \ldots$ und $\varepsilon > 0$ die Ungleichung $\mu(-h+1+\varepsilon) \leqq h$ und damit auch (wegen der Stetigkeit von $\mu(\sigma)$) die Ungleichung $\mu(-h+1) \leqq h$ erfüllen, und hieraus folgt sofort weiter (wegen der Konvexität von $\mu(\sigma)$ in Verbindung mit der aus Stetigkeitsgründen gültigen Gleichung $\mu(1) = 0$), daß die gewünschte Ungleichung $\mu(\sigma) \leqq 1 - \sigma$ für alle $\sigma \leqq 1$ besteht. Wie in 1°. teilen wir die Reihe in die zwei Summanden

$$f(s) = \sum_{m=1}^{h} \{\ldots\}_m + \sum_{m=h+1}^{\infty} \{\ldots\}_m = f_1(s) + f_2(s)$$

ein, wo die erste Summe mit nur endlich vielen Gliedern $a_n n^{-s}$ natürlich eine ganze transzendente Funktion $f_1(s)$ darstellt, die in jeder Halbebene $\sigma > \sigma_0$ beschränkt ist, so daß es nur darauf ankommt zu zeigen, daß die zweite Summe eine in der Halbebene $\sigma > -h+1$ reguläre Funktion darstellt, die für $\sigma \geqq -h+1+\varepsilon$ gleich $O(|t|^h)$ ist. Indem wir für jedes $m > h$ die oben gefundene, sogar für $\sigma > -h$

gültige, Ungleichung (4) verwenden, erhalten wir für $\sigma \geqq -h+1+\varepsilon$ die Ungleichung

$$|\{\ldots\}_m| \leqq \sum_{\nu=0}^{q_m} |[\ldots]_{m,\nu}| \leqq 2^{-h}|s|\ldots|s+h-1|\,2^m p_m^{-\varepsilon},$$

woraus sich auf Grund der Konvergenz von $\sum 2^m p_m^{-\varepsilon}$ sofort ergibt, sowohl daß die Reihe $\sum_{h+1}^{\infty}\{\ldots\}_m$ in jedem beschränkten Teil der Halbebene $\sigma \geqq -h+1+\varepsilon$ gleichmäßig konvergiert und somit eine für $\sigma > -h+1$ reguläre Funktion $f_2(s)$ darstellt, als auch daß diese Funktion etwa für $-h+1+\varepsilon \leqq \sigma \leqq 2$ (und damit natürlich von selbst in der ganzen Halbebene $\sigma \geqq -h+1+\varepsilon$) der gewünschten Ungleichung

$$|f_2(s)| \leqq |s|\ldots|s+h-1|\,2^{-h}\sum_{m=h+1}^{\infty} 2^m p_m^{-\varepsilon} = O(|t|^h)$$

genügt.

3°. Es fehlt aber noch die Hauptsache, nämlich der Nachweis, daß

$$\mu(\sigma) \geqq 1-\sigma \quad \text{für} \quad \sigma < 1.$$

Es sei σ_0 eine beliebige feste Abszisse <1; wir betrachten das Verhalten von $f(s)$ in den Punkten $s_M = \sigma_0 + i t_M$, wo t_M die oben genannte Ordinate πp_M bedeutet, und werden beweisen, daß für alle hinreichend großen M sogar die Ungleichung

$$|f(s_M)| > t_M^{1-\sigma_0} \tag{5}$$

besteht. Zu diesem Zwecke bestimmen wir zunächst — indem wir von der in der ganzen Ebene gültigen Darstellung $f(s) = \sum\{\ldots\}_m$ ausgehen — ein positives ganzes h, so daß $1-h < \sigma_0 < 1$, und schreiben für $M > h$

$$f(s_M) = \sum_{m=1}^{M-1}\{\ldots\}_m + \{\ldots\}_M + \sum_{m=M+1}^{\infty}\{\ldots\}_m = A_M(s_M) + G_M(s_M) + R_M(s_M);$$

wir werden nun zeigen, daß sowohl der „Anfang" $A_M(s_M)$ als auch der „Rest" $R_M(s_M)$ für $M \to \infty$ gleich $o(t_M^{1-\sigma_0})$ ist, während das M-te „Glied" $G_M(s_M)$ für hinreichend großes M absolut genommen größer als $2t_M^{1-\sigma_0}$ ausfällt, womit natürlich die gewünschte Ungleichung (5) dargetan ist.

1) Für den „Anfang" $A_M(s_M)$ ergibt sich bei einer groben Abschätzung, da der absolute Betrag jedes darin vorkommenden Koeffizienten $a_n \neq 0$ gleich einem Binomialkoeffizienten $\binom{m}{l}$ mit $m \leqq M-1$ und daher $\leqq 2^{M-1}$ ist,

$$A_M(s_M) \leqq 2^{M-1}\sum_{n=1}^{p_{M-1}+Mq_{M-1}+M-1} n^{-\sigma_0}$$

und hieraus weiter, da für hinreichend großes M die obere Summationsschranke $p_{M-1} + M q_{M-1} + M - 1$ kleiner als z. B. $2 p_{M-1}$ ist,

$$|A_M(s_M)| \leqq 2^{M-1} \sum_{n=1}^{2 p_{M-1}} n^{-\sigma_0}$$

also wegen $\sigma_0 < 1$

$$A_M(s_M) = O(2^{M-1} p_{M-1}^{1-\sigma_0}) = o(p_M^{1-\sigma_0}) = o(t_M^{1-\sigma_0}).$$

2) Für den „Rest" $R_M(s_M)$ erhalten wir, wiederum unter Benutzung der für $m > h$ und $\sigma > -h+1$ (sogar $\sigma > -h$) gültigen Ungleichung (4), die Abschätzung

$$|R_M(s_M)| \leqq \sum_{m=M+1}^{\infty} \sum_{\nu=0}^{q_m} |[\ldots]_{m,\nu}| \leqq \sum_{m=M+1}^{\infty} 2^{-h} |s_M \ldots |s_M + h - 1|\, 2^m p_m^{-\sigma_0 - h + 1}$$

$$= 2^{-h} |s_M \ldots |s_M + h - 1| \sum_{m=M+1}^{\infty} 2^m p_m^{-\sigma_0 - h + 1}$$

also

$$R_M(s_M) = O(t_M^h) \cdot o(p_M^{-\sigma_0 - h + 1}) = o(t_M^h \cdot t_M^{-\sigma_0 - h + 1}) = o(t_M^{1-\sigma_0}).$$

3) Alles kommt also darauf an zu zeigen, daß für hinreichend großes M die Ungleichung

$$|G_M(s_M)| > 2 t_M^{1-\sigma_0}$$

besteht. Der Grund für das Bestehen dieser Ungleichung liegt darin, daß die sämtlichen (nach der Wahl von q_m relativ vielen) in $G_M(s_M)$ auftretenden Glieder $a_n n^{-s}$, nämlich insgesamt $(q_M + 1)(M + 1)$ verteilt in $q_M + 1$ Klammern $[\ldots]_{M,\nu}$ mit $M + 1$ Gliedern in jeder Klammer, für ein hinreichend großes M alle „fast gleichgerichtet" sind; genau gesprochen liegen sie alle in dem Winkelraum $-\frac{\pi}{3} < v < \frac{\pi}{3}$. Indem wir einen Augenblick damit warten, diese letzte Behauptung zu beweisen, wollen wir zunächst zeigen, daß wir mit dem Beweise fertig sind, falls sie dargetan ist. In der Tat ergibt sich daraus für hinreichend großes M, weil die Summe der in jeder der $q_M + 1$ eckigen Klammern auftretenden Binomialkoeffizienten gleich 2^M ist, und jedes auftretende n dem Intervall $p_M \leqq n \leqq p_M + (M+1) q_M + M$, also a fortiori dem Intervall $p_M \leqq n \leqq 2 p_M$ angehört,

$$|G_M(s_M)| \geqq \Re G_M(s_M) \geqq \cos \frac{\pi}{3} \cdot \{(q_M + 1) 2^M\} \cdot \min_{p_M \leqq n \leqq 2 p_M} n^{-\sigma_0}$$

$$\geqq \frac{1}{2}(q_M + 1) 2^M \cdot \frac{1}{2} p_M^{-\sigma_0} \geqq \frac{1}{4} 2^M \left(\frac{1}{6} p_M M^{-2}\right) p_M^{-\sigma_0} = \frac{1}{24} 2^M M^{-2} \left(\frac{t_M}{\pi}\right)^{1-\sigma_0}$$

welche letztere Größe ja für große M (reichlich) größer als $2 t_M^{1-\sigma_0}$ ist.

Es bleibt übrig, die — entscheidende — Tatsache zu beweisen, daß die sämtlichen in $G_M(s_M)$ auftretenden Glieder $a_n n^{-s_M}$ in dem

Winkelraum $-\frac{\pi}{3} < v < \frac{\pi}{3}$ gelegen sind. Daß dies der Fall ist, rührt natürlich von den getroffenen Festlegungen der komplexen Vorzeichen der auftretenden Koeffizienten a_n her. Wir betrachten eine beliebige der $q_M + 1$ Klammern $[\ldots]_{M,\nu}$

$$(p_M + \nu(M+1))^{it_M} \cdot \Delta^M (p_M + \nu(M+1))^{-s_M} \qquad (\nu = 0, 1, \ldots, q_M).$$

Indem wir zur Abkürzung die Zahl $p_M + \nu(M+1)$ mit $r = r(M, \nu)$ bezeichnen, erhalten wir

$$[\ldots]_{M,\nu} = r^{it_M}\left(r^{-s_M} - \binom{M}{1}(r+1)^{-s_M} + \cdots + (-1)^M \binom{M}{M}(r+M)^{-s_M}\right).$$

Das Winkelargument des einzelnen Gliedes

$$r^{it_M}(-1)^\lambda \binom{M}{\lambda}(r+\lambda)^{-(\sigma_0 + it_M)} \qquad (\lambda = 0, 1, \ldots, M)$$

ist, wenn wir es der Bequemlichkeit halber mit entgegengesetztem Vorzeichen nehmen, mod 2π durch

$$t_M \log(r+\lambda) - t_M \log r - \lambda\pi = t_M \log\left(1 + \frac{\lambda}{r}\right) - \lambda\pi$$

gegeben. Wir werden zeigen, daß diese letzte Größe sogar selbst (und nicht nur mod 2π betrachtet) zwischen $-\frac{\pi}{3}$ und $\frac{\pi}{3}$ liegt, also daß

$$\lambda\pi - \frac{\pi}{3} < t_M \log\left(1 + \frac{\lambda}{r}\right) < \lambda\pi + \frac{\pi}{3} \qquad (\lambda = 0, 1, \ldots, M)$$

oder, was auf dasselbe hinauskommt (da ja die Ungleichungen für $\lambda = 0$ trivialerweise erfüllt sind), daß

$$\lambda\pi\left(1 - \frac{1}{3\lambda}\right) < t_M \log\left(1 + \frac{\lambda}{r}\right) < \lambda\pi\left(1 + \frac{1}{3\lambda}\right) \qquad (\lambda = 1, \ldots, M);$$

etwas schärfer wollen wir zeigen, daß

$$\lambda\pi\left(1 - \frac{1}{3M}\right) < t_M \log\left(1 + \frac{\lambda}{r}\right) < \lambda\pi \qquad (\lambda = 1, \ldots, M).$$

Was die Ungleichung rechts anbelangt, so sind wir sofort fertig; denn wegen $\log(1+x) < x$ für $0 < x < 1$ und $r \geqq p_M$ haben wir ja

$$t_M \log\left(1 + \frac{\lambda}{r}\right) < t_M \frac{\lambda}{r} = \pi p_M \frac{\lambda}{r} \leqq \pi p_M \frac{\lambda}{p_M} = \lambda\pi.$$

Um die Ungleichung links, d. h.

$$t_M \log\left(1 + \frac{\lambda}{r}\right) > \lambda\pi\left(1 - \frac{1}{3M}\right) \tag{6}$$

darzutun, müssen wir etwas vorsichtiger rechnen. Wegen

$\log(1+x) > x - x^2 = x(1-x)$ für $0 < x < 1$ und $p_M \leqq r \leqq p_M + (M+1)q_M$

finden wir hier für hinreichend großes M

$$t_M \log\left(1+\frac{\lambda}{r}\right) > t_M \frac{\lambda}{r}\left(1-\frac{\lambda}{r}\right) = \pi\lambda \frac{p_M}{r}\left(1-\frac{\lambda}{r}\right)$$

$$\geqq \pi\lambda \frac{p_M}{p_M+(M+1)q_M}\cdot\left(1-\frac{M}{p_M}\right) = \pi\lambda\left(1-\frac{(M+1)q_M}{p_M+(M+1)q_M}\right)\cdot\left(1-\frac{M}{p_M}\right)$$

$$> \pi\lambda\left(1-\frac{(M+1)q_M}{p_M}\right)\left(1-\frac{M}{p_M}\right) > \pi\lambda\left(1-\frac{(M+1)q_M+M}{p_M}\right) > \pi\lambda\left(1-\frac{2Mq_M}{p_M}\right),$$

welche letzte Größe wegen $q_M \leqq \frac{1}{6} p_M M^{-2}$ wiederum größer als

$$\pi\lambda\left(1-\frac{2M}{6M^2}\right) = \pi\lambda\left(1-\frac{1}{3M}\right)$$

ist. Hiermit ist die obige Ungleichung (6) und damit unser Satz bewiesen.

§ 2.

Eine Anwendung auf die Multiplikation Dirichletscher Reihen.

Wie in der Einleitung erwähnt, gilt für zwei für $\sigma > 0$ konvergente Dirichletsche Reihen, daß ihre Produktreihe jedenfalls für $\sigma > \frac{1}{2}$ konvergiert, und daß diese Zahl $\frac{1}{2}$ die bestmögliche (d. h. die kleinstmögliche) ist. Ein entsprechendes allgemeines Problem läßt sich natürlich statt für Konvergenz für Summierbarkeit beliebiger Ordnung aufstellen. Es soll hier nur ein charakteristischer Spezialfall dieses allgemeinen Problems behandelt werden.

Aus bekannten Resultaten läßt sich leicht der folgende Satz ableiten:

Satz A. *Es sei* $0 \leqq \alpha_1 \leqq \alpha_2$, *und es seien* $\sum a'_n n^{-s}$ *und* $\sum a''_n n^{-s}$ *zwei Dirichletsche Reihen, von denen die erste für* $\sigma > 0$ *von der* α_1*-ten Ordnung, die zweite für* $\sigma > 0$ *von der* α_2*-ten Ordnung C-summierbar ist. Dann ist die Produktreihe* $\sum A_n n^{-s}$ $(A_n = \sum a'_m a''_l$ *für* $ml = n)$ *jedenfalls für*

$$\sigma > \begin{cases} \frac{1}{2}(\alpha_1+\alpha_2+1) & \text{im Falle } \alpha_1 \leqq \alpha_2 \leqq \alpha_1+1 \\ \alpha_2 & \text{im Falle } \alpha_2 \geqq \alpha_1+1 \end{cases}$$

konvergent.

Beweis. Aus den Voraussetzungen über die Summierbarkeit von $\sum a'_n n^{-s}$ und $\sum a''_n n^{-s}$ folgt (vgl. HR, S. 57), daß $\sum a'_n n^{-s}$ jedenfalls für $\sigma > \alpha_1$ und $\sum a''_n n^{-s}$ für $\sigma > \alpha_2$ konvergieren. Wir unterscheiden nunmehr zwei Fälle.

1°. Es ist $\alpha_1 \leqq \alpha_2 \leqq \alpha_1 + 1$. In diesem Falle gilt nach Stieltjes-Landau (vgl. HR, S. 66), daß die Produktreihe $\sum A_n n^{-s}$ für $\sigma > \frac{1}{2}(\alpha_1+\alpha_2+1)$ konvergiert.

2°. Es ist $\alpha_2 \geqq \alpha_1 + 1$. Da hier die eine Reihe $\sum a''_n n^{-s}$ für $\sigma > \alpha_2$ konvergiert, die andere $\sum a'_n n^{-s}$ für $\sigma > \alpha_2 (\geqq \alpha_1 + 1)$ sogar absolut

konvergiert, gilt (nach MERTENS, vgl. HR, S. 63), daß die Produktreihe $\sum A_n n^{-s}$ gewiß für $\sigma > \alpha_2$ konvergiert.

Damit ist der Satz bewiesen.

Durch Heranziehung des in § 1 konstruierten Beispiels soll nunmehr — in Verallgemeinerung des oben erwähnten Falles $\alpha_1 = \alpha_2 = 0$, wo von Konvergenz die Rede ist — gezeigt werden, daß die in Satz A angegebene obere Schranke für die Konvergenzabszisse der Produktreihe tatsächlich die bestmögliche ist.

Satz B. *Es seien die beiden nicht negativen Zahlen* α_1 *und* $\alpha_2 \geqq \alpha_1$ *beliebig gegeben, und es sei*

$$\Phi(\alpha_1, \alpha_2) = \begin{cases} \frac{1}{2}(\alpha_1 + \alpha_2 + 1) & \text{im Falle} \quad \alpha_1 \leqq \alpha_2 \leqq \alpha_1 + 1 \\ \alpha_2 & \text{im Falle} \quad \alpha_2 \geqq \alpha_1 + 1 \end{cases}$$

gesetzt. Dann gibt es dazu zwei DIRICHLETsche *Reihen* $\sum a'_n n^{-s}$ *und* $\sum a''_n n^{-s}$, *von denen die erste für* $\sigma > 0$ *von der* α_1*-ten, die zweite für* $\sigma > 0$ *von der* α_2*-ten Ordnung C-summierbar ist, derart daß die Konvergenzabszisse* A_0 *der Produktreihe* $\sum A_n n^{-s}$ *genau durch die Gleichung* $A_0 = \Phi(\alpha_1, \alpha_2)$ *gegeben ist.*

Beweis. Es sei $f(s) = \sum a_n n^{-s}$ die DIRICHLETsche Reihe aus § 1, eventuell nach Hinzufügung eines (siehe unten) passend gewählten konstanten Gliedes a_1. Da $\sum a_n n^{-s}$ für $\sigma > -\alpha_1$ und $\sigma > -\alpha_2$ von der α_1-ten bzw. α_2-ten Ordnung summierbar ist, werden die beiden, durch einfache Verschiebungen der Abszissenachse entstandenen, DIRICHLETschen Reihen

$$f_1(s) = f(s - \alpha_1) = \sum a'_n n^{-s} \quad \text{und} \quad f_2(s) = f(s - \alpha_2) = \sum a''_n n^{-s}$$

für $\sigma > 0$ von der α_1-ten bzw. α_2-ten Ordnung summierbar sein. Ferner ergibt sich sofort, daß die μ-Funktionen dieser beiden ganzen transzendenten Funktionen $f_1(s)$ und $f_2(s)$ durch

$$\mu_1(\sigma) = \begin{cases} 0 \text{ für } \sigma \geqq \alpha_1 + 1 \\ \alpha_1 + 1 - \sigma \text{ für } \sigma \leqq \alpha_1 + 1 \end{cases} \text{ und } \mu_2(\sigma) = \begin{cases} 0 \text{ für } \sigma \geqq \alpha_2 + 1 \\ \alpha_2 + 1 - \sigma \text{ für } \sigma \leqq \alpha_2 + 1 \end{cases}$$

gegeben sind. Wir bilden die Produktreihe $\sum A_n n^{-s}$ der beiden Reihen $\sum a'_n n^{-s}$ und $\sum a''_n n^{-s}$. Für die μ-Funktion $M(\sigma)$ der durch die Produktreihe dargestellten ganzen transzendenten Funktion $F(s) = f(s - \alpha_1) \cdot f(s - \alpha_2)$ gilt offenbar die Ungleichung $M(\sigma) \leqq \mu_1(\sigma) + \mu_2(\sigma)$. Wir werden zeigen, daß — wenigstens bei passender Wahl des oben erwähnten konstanten Gliedes a_1 — die μ-Funktion $M(\sigma)$ von $F(s)$ durch die Gleichung

$$M(\sigma) = \mu_1(\sigma) + \mu_2(\sigma)$$

bestimmt wird. Für $\sigma \geqq \alpha_2 + 1$, wo sowohl $\mu_1(\sigma)$ als auch $\mu_2(\sigma)$ gleich 0 sind, ist dies klar. Für jedes $\sigma < \alpha_1 + 1$ (und daher aus Stetigkeitsgründen auch für $\sigma = \alpha_1 + 1$), wo sowohl $\mu_1(\sigma)$ als auch $\mu_2(\sigma)$ positiv sind, folgt es daraus, daß wir Ordinaten $t = t_m \to \infty$ finden können

(nämlich die in § 1 betrachteten von der Abszisse unabhängigen Zahlen $t_m = \pi p_m$), für welche die beiden Funktionen $f_1(\sigma + it)$ und $f_2(\sigma + it)$ gleichzeitig „groß" werden, d. h. von der Ordnung $t^{\mu_1(\sigma)}$ bzw. $t^{\mu_2(\sigma)}$. Um schließlich (falls $\alpha_1 < \alpha_2$ ist) die Gültigkeit der Gleichung $M(\sigma) = \mu_1(\sigma) + \mu_2(\sigma)$ im Zwischenintervall $\alpha_1 + 1 < \sigma < \alpha_2 + 1$, wo $\mu_1(\sigma) = 0$, $\mu_2(\sigma) > 0$ ist, darzutun, wenden wir folgenden kleinen Kunstgriff an. Zunächst sei bemerkt, daß es wegen der Konvexität von $M(\sigma)$ und der Linearität von $\mu_2(\sigma)$ offenbar genügt, die Relation $M(\sigma) = \mu_1(\sigma) + \mu_2(\sigma) = \mu_2(\sigma)$ nur für ein einziges σ_0 des Intervalles $\alpha_1 + 1 < \sigma < \alpha_2 + 1$ zu beweisen. Eine Ungleichung $M(\sigma_0) < \mu_2(\sigma_0)$ könnte aber nur dann eintreffen, wenn — grob ausgedrückt — für alle Werte von t, für welche $f_2(\sigma_0 + it)$ „groß" ist, zugleich $f_1(\sigma + it)$ „klein" wäre. Da aber die Reihe $\sum a_n' n^{-s}$ für $\sigma = \sigma_0 (> \alpha_1 + 1)$ absolut konvergiert, können wir dies sofort verhindern, da wir ja durch Wahl eines hinreichend großen konstanten Gliedes $a_1 (= a_1')$ dafür sorgen können, daß der absolute Betrag der Funktion $f_1(\sigma_0 + it)$ auf der ganzen Geraden $\sigma = \sigma_0$ etwa > 1 ist.

Es ist nunmehr unmittelbar zu beweisen, daß die Konvergenzabszisse A_0 der Produktreihe $\sum A_n n^{-s}$ gleich der im Satze angegebenen Zahl $\Phi(\alpha_1, \alpha_2)$ ist, oder — was ja nach dem Satze A genügt — daß $A_0 \geqq \Phi(\alpha_1, \alpha_2)$ ist. Denn die Reihe $\sum A_n n^{-s}$ kann ja gewiß nicht weiter nach links konvergieren, als die μ-Funktion $M(\sigma) \leqq 1$ bleibt, und die Zahl $\Phi(\alpha_1, \alpha_2)$ gibt gerade die Abszisse desjenigen Punktes an, in welchem der durch die M-Kurve

$$M(\sigma) = \mu_1(\sigma) + \mu_2(\sigma) = \begin{cases} 0 & \text{für } \sigma \geqq \alpha_2 + 1 \\ \alpha_2 + 1 - \sigma & \text{für } \alpha_1 + 1 \leqq \sigma \leqq \alpha_2 + 1 \\ \alpha_1 + \alpha_2 + 2 - 2\sigma & \text{für } \sigma \leqq \alpha_1 + 1 \end{cases}$$

dargestellte gebrochene Streckenzug von einer horizontalen Geraden von der Höhe 1 über der σ-Achse geschnitten wird.

(Eingegangen am 14. Dezember 1949.)

Generalized Determinants of Vandermonde.

Oskar Perron to his 70th birthday on May 7, 1950.

By

I. A. Barnett in Cincinnati (Ohio, USA)

and

C. W. Mendel in Urbana (Illinois, USA).

This paper is concerned with properties of determinants whose elements consist of certain of the elements of powers of a given square matrix A. When A is a diagonal matrix, one of these determinants reduces to the classical Vandermonde.

The paper is divided into two parts. In Part I some simple factorizations of such generalized Vandermondes are derived by means of the Hamilton-Cayley equation for the matrix A. We next point out some relations between the determinants here considered and certain Jacobians. In particular, we prove that the Jacobian of the coefficients of the characteristic equation of A with respect to any set of n elements is, apart from sign, one of the generalized Vandermondes.

The main problem of this paper is considered in Part II. The result proved there we shall call the functional independence theorem which we now state explicitly.

If A is a square matrix of order n, the Jacobian of the n traces of $A, A^2, \ldots, A^n$, with respect to each set of n distinct elements of A, at least one of which is a diagonal element, is never identically zero in the n^2 elements of A.

This theorem tells us that the traces of the powers of a square matrix are functionally independent with respect to every distinct set of n elements of the matrix, provided at least one of these elements is a diagonal element. It is believed that this is the first time that such a strong type of functional independence has been stated.

The proof of this theorem as originally given by Barnett and Mendel is quite long and requires a reduction of the sets of elements of A involved to certain types for each of which a matrix can be exhibited to show that the corresponding Jacobian is different from zero. When Barnett was in Munich in 1946, he proposed this problem to Professor Perron who devised a proof by induction which was considerably shorter and more elegant than the one originally given. We have decided to incorporate this latter proof in this paper.

PART I.

Simple Properties of Vandermondes.

1. Generalized determinants of Vandermonde. Let $A = \|a_{ij}\|$, $(i, j = 1, 2, \ldots, n)$ be a square matrix whose elements are independent real variables. We shall denote its determinant by $D(A)$. As usual, let $a_{ij}^{(m)}$ stand for the element in the i-th row and j-th column of the m-th power of the matrix A.

Consider next the determinant

$$(1) \qquad \begin{vmatrix} a_{r_1 s_1}^{(m_1)} & a_{r_2 s_2}^{(m_1)} & \ldots & a_{r_n s_n}^{(m_1)} \\ a_{r_1 s_1}^{(m_2)} & a_{r_2 s_2}^{(m_2)} & \ldots & a_{r_n s_n}^{(m_2)} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{r_1 s_1}^{(m_n)} & a_{r_2 s_2}^{(m_n)} & \ldots & a_{r_n s_n}^{(m_n)} \end{vmatrix},$$

where $r_1, r_2, \ldots, r_n$ and $s_1, s_2, \ldots, s_n$ are arbitrary integers on the range 1 to n, equal or unequal, and where $0 \leqq m_1 < m_2 < \cdots < m_n$ are arbitrary integers. Such a determinant will be called a *generalized determinant of* VANDERMONDE and will be denoted by $V_s^r(A; m_1, m_2, \ldots, m_n)$, where the indices r and s stand for the two sets of integers above. We shall always suppose that the n pairs (r_i, s_i) are all distinct since otherwise the determinant (1) would have duplicate columns and would therefore be identically zero.

An immediate property of such determinants is that

$$V_s^r(A; m_1, m_2, \ldots, m_n) = V_r^s(A'; m_1, m_2, \ldots, m_n)$$

where A' is the transpose of A. This follows from the fact that the transpose of a power of a matrix is equal to the same power of the transpose matrix.

The determinant $V_s^r(A; 0, 1, \ldots, n-1)$ which will be denoted simply by $V_s^r(A)$, will be called a *principal* generalized VANDERMONDE. It is with these latter that we shall concern ourselves almost exclusively in the later sections. In particular, if A is a diagonal matrix, $V_s^r(A)$ reduces at once to the classical determinant of VANDERMONDE in the elements of the diagonal of A.

2. Some factorizations of the Vandermonde. From the HAMILTON-CAYLEY equation which a square matrix satisfies, there follow some simple factorizations of the generalized VANDERMONDE, and these will now be given.

Theorem 1. *If* $m \geqq 0$ *the equation*

$$V_s^r(A; m+1, m+2, \ldots, m+n) = D(A)\, V_s^r(A; m, m+1, \ldots, m+n-1)$$

holds identically in the elements of A.

If $m = 0$ this reduces to

$$V_s^r(A; 1, 2, \ldots, n) = D(A)\, V_s^r(A).$$

Proof. If we denote by $f(\lambda)$ the function $D(\lambda I - A)$ we know that

$$f(A) \equiv A^n + c_1 A^{n-1} + \cdots + c_n I = 0, \tag{2}$$

where $c_n = (-1)^n D(A)$. From equation (2) we have

$$A^{m+n} + c_1 A^{m+n-1} + \cdots + c_n A^m = 0, \tag{3}$$

or

$$a_{ij}^{(m+n)} + c_1 a_{ij}^{(m+n-1)} + \cdots + c_n a_{ij}^{(m)} = 0 \quad (i, j = 1, 2, \ldots, n). \tag{3a}$$

If to the last row of $V_s^r(A;\ m+1, m+2, \ldots, m+n)$ we add c_{n-1} times the first row, c_{n-2} times the second row, ..., c_1 times the $(n-1)$st row, then, by means of equations (3a) and $(n-1)$ interchanges of adjacent rows, we find

$$V_s^r(A;\ m+1, m+2, \ldots, m+n) = (-1)^n c_n V_s^r(A;\ m, m+1, \ldots, m+n-1),$$

which proves Theorem 1.

By means of Theorem 1 we can prove the following extension:

Theorem 2. *If* $0 < m_1 < m_2 < \cdots < m_n$ *the equation*

$$V_s^r(A;\ m_1, m_2, \ldots, m_n) = D(A)\, V_s^r(A;\ m_1 - 1, m_2 - 1, \ldots, m_n - 1)$$

is an identity in the elements of A.

Proof. If a certain m_i is less than $m_1 + n$ then A^{m_i} occurring in the set $A^{m_1}, A^{m_1+1}, \ldots, A^{m_1+n-1}$ is obviously a linear combination of these matrices. If $m_i \geqq m_1 + n$ we consider equations (3) with $m = m_1$, $m = m_1 + 1$, ..., $m = m_i - n$. By means of these equations we can express A^{m_i} as a linear combination of the above set $A^{m_1}, A^{m_1+1}, \ldots, A^{m_1+n-1}$. The coefficients entering in this linear combination are polynomials in $c_1, c_2, \ldots, c_n$ whose numerical coefficients depend only on the difference $m_i - m_1$. Making use of these linear relationships for $i = 1, 2, \ldots, n$ together with elementary operations on determinants, we see that

$$V_s^r(A;\ m_1, m_2, \ldots, m_n) = f(c_1, c_2, \ldots, c_n)\, V_s^r(A;\ m_1, m_1 + 1, \ldots, m_1 + n - 1),$$

where we emphasize again that $f(c_1, c_2, \ldots, c_n)$ is a polynomial in $c_1, c_2, \ldots, c_n$ with numerical coefficients depending only on the differences $m_2 - m_1, m_3 - m_1, \ldots, m_n - m_1$. Then by repeated use of Theorem 1 we have at once

$$V_s^r(A;\ m_1, m_2, \ldots, m_n) = f(c_1, c_2, \ldots, c_n)\, [D(A)]^{m_1} V_s^r(A). \tag{4}$$

Also by the same procedure, we obtain

$$V_s^r(A;\ m_1 - 1, m_2 - 1, \ldots, m_n - 1) = f(c_1, c_2, \ldots, c_n)\, [D(A)]^{m_1 - 1} V_s^r(A), \tag{5}$$

where $f(c_1, c_2, \ldots, c_n)$ is exactly the same polynomial as in equation (4), since $(m_i - 1) - (m_1 - 1) = m_i - m_1$. Hence, multiplying (5) by $D(A)$ and subtracting from (4), we obtain Theorem 2.

From equation (4) we deduce at once the additional result: *If* $r_1 \neq s_1, r_2 \neq s_2, \ldots, r_n \neq s_n$, *simultaneously, then* $V_s^r(A; m_1, m_2, \ldots, m_n)$ *is identically zero in the* n^2 *elements of* A. This follows from (4) because, under the hypotheses, the elements of the first row of the principal VANDERMONDE $V_s^r(A)$ are all zero.

It would not be of interest to consider a determinant of the form (1) with more rows and columns than the order of the matrix A since, in this case, the determinant would vanish identically, as is seen at once by the use of the HAMILTON-CAYLEY equation.

As another immediate consequence of Theorem 2, we have the result that *the* VANDERMONDE (1) *for a skew-symmetric matrix* A *of odd order, for which* $m_1 \geqq 1$, *is identically zero in the elements of* A.

We shall conclude this section with a proof of the factorization theorem 2 by an alternate method which depends on certain formulas to be found in *WEDDERBURN's Lectures on Matrices* (1930).

We have denoted by $f(\lambda)$ the characteristic function $D(\lambda I - A)$ for the matrix A. Let $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ be the zeros[1]) of $f(\lambda)$ and define the n functions

$$f_i(\lambda) = f(\lambda)/(\lambda - \lambda_i) f'(\lambda_i) \qquad (i = 1, 2, \ldots, n),$$

where $f'(\lambda)$ is the derivative of $f(\lambda)$. Then by formula (14) page 26 of WEDDERBURN

$$A^m = \lambda_1^m f_1(A) + \lambda_2^m f_2(A) + \cdots + \lambda_n^m f_n(A) \quad (m = 0, 1, 2, \ldots),$$

Let f_{ijk} denote the element in the i-th row and j-th column of the matrix $f_k(A)$ so that we may write the last equation in the form

$$a_{ij}^{(m)} = \lambda_1^m f_{ij1} + \lambda_2^m f_{ij2} + \cdots + \lambda_n^m f_{ijn}.$$

Using these expressions for $a_{ij}^{(m)}$ and the usual rule for matrix multiplication, we obtain

$$V_s^r(A; m_1, m_2, \ldots, m_n) = \Delta(m_1, m_2, \ldots, m_n) F,$$

where

$$\Delta(m_1, m_2, \ldots, m_n) = \begin{vmatrix} \lambda_1^{m_1} & \lambda_2^{m_1} & \ldots & \lambda_n^{m_1} \\ \lambda_1^{m_2} & \lambda_2^{m_2} & \ldots & \lambda_n^{m_2} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \lambda_1^{m_n} & \lambda_2^{m_n} & \ldots & \lambda_n^{m_n} \end{vmatrix}, \qquad F = \begin{vmatrix} f_{r_1 s_1 1} & f_{r_1 s_2 1} & \ldots & f_{r_1 s_n 1} \\ f_{r_2 s_1 2} & f_{r_2 s_2 2} & \ldots & f_{r_2 s_n 2} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ f_{r_n s_1 n} & f_{r_n s_2 n} & \ldots & f_{r_n s_n n} \end{vmatrix}.$$

The determinant $\Delta(m_1, m_2, \ldots, m_n)$ is *HEINEMAN's generalization of the classical* VANDERMONDE (Generalized VANDERMONDE Determinants, Trans., Amer. Math. Soc., vol. 31 (1929), p. 464) and, in our notation would be given by $V_s^r(A; m_1, m_2, \ldots, m_n)$ with A a diagonal matrix and $r = s = (1, 2, \ldots, n)$.

[1]) The requirement that the roots $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ be distinct causes no difficulty here since our matrix A has n^2 indeterminates for elements.

For theorem 2 we had the restrictions $0 < m_1 < m_2 < \cdots < m_n$ so that we may write the above equation in the form

$$V_s^r(A;\, m_1, m_2, \ldots, m_n) = \lambda_1 \lambda_2 \ldots \lambda_n \Delta(m_1 - 1, m_2 - 1, \ldots, m_n - 1)\, F$$

Recalling that $\lambda_1 \lambda_2 \ldots \lambda_n = D(A)$ and using row by column multiplication on $\Delta(m_1 - 1, m_2 - 1, \ldots, m_n - 1)$ and F, we obtain theorem 2.

From the formula $V_s^r(A;\, m_1, m_2, \ldots, m_n) = \Delta(m_1, m_2, \ldots, m_n) F$ we also find

$$\begin{aligned} V_s^r(A;\, m_1, m_2, \ldots, m_n) &= (\lambda_1 \lambda_2 \ldots \lambda_n)^{m_1} \Delta(0, m_2 - m_1, \ldots, m_n - m_1) \cdot F \\ &= \{D(A)\}^{m_1} \Delta(0, m_2 - m_1, \ldots, m_n - m_1)\, \Delta_0^{-1} \Delta_0 \cdot F \\ &= \{D(A)\}^{m_1} \{\Delta(0, m_2 - m_1, \ldots, m_n - m_1)\}\, V_s^r(A), \end{aligned}$$

where $\Delta_0 = \Delta(0, 1, 2, \ldots, n-1)$, Δ_0^{-1} is the inverse of Δ_0 and where, on the right, we have again used row by column multiplication on Δ_0 and F to obtain $V_s^r(A)$. We observe that $\Delta(0, m_2 - m_1, \ldots, m_n - m_1)/\Delta_0$ is a symmetric function of $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ since both numerator and denominator are alternating functions of these variables. Besides, each of the $C(n, 2)$ distinct factors $\lambda_i - \lambda_j$ whose product is, of course, the determinant Δ_0, is also a factor of the numerator and, hence this quotient is a symmetric polynomial in $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$. It follows then by a well known result on symmetric functions that the quotient $\Delta(0, m_2 - m_1, \ldots, m_n - m_1)/\Delta_0$ is a polynomial in the coefficients $c_1, c_2, \ldots, c_n$ of the characteristic equation for A. Thus, we have another proof of the formula (4) of this section.

3. Some further properties of Vandermonde. In this section we shall point out that certain JACOBIANS and related determinants may be written as generalized VANDERMONDES.

We shall first introduce some formulas on the derivatives of the elements of the powers of a matrix. Unless otherwise specified, let us agree that all indices shall have the range 1 to n. For the rest of this section we shall employ the usual summation convention on repeated Roman indices.

For all positive integers m we have $a_{ij}^{(m)} = a_{iu_1} a_{u_1 u_2} \ldots a_{u_{m-1} j}$ from which formula is obtained

$$\frac{\partial a_{ij}^{(m)}}{\partial a_{uv}} = \sum_{\alpha=0}^{m-1} a_{iu}^{(m-1-\alpha)} a_{vj}^{(\alpha)}. \tag{6}$$

It is also readily seen that for any pair of non-negative integers α, β, we have $a_{ij}^{(\alpha+\beta)} = a_{iu}^{(\alpha)} a_{uj}^{(\beta)}$.

If we define the linear operator Ω_k by means of

$$\Omega_k f \equiv a_{uv}^{(k)} \frac{\partial f}{\partial a_{uv}},$$

then, on multiplying (6) by $a_{uv}^{(k)}$ and summing on u and v we obtain

$$\Omega_k a_{ij}^{(m)} = m\, a_{ij}^{(k+m-1)}.$$

In particular, if we apply the operators Ω_0 and Ω_1 to $V_s^r(A)$ we find

$$\Omega_0 V_s^r(A) = 0, \quad \Omega_1 V_s^r(A) = \frac{n(n-1)}{2} V_s^r(A). \tag{7}$$

The second equation is merely EULER's relation for the homogeneous function $V_s^r(A)$. If in equation (6) we set $i = j$ and sum, we obtain

$$\frac{\partial t_m}{\partial a_{uv}} = m a_{vu}^{(m-1)}, \tag{8}$$

where, as usual, t_m denotes the trace of the matrix A^m.

We now prove the following

Theorem 3. *A principal* VANDERMONDE *with respect to a matrix A is identically equal to the corresponding* VANDERMONDE *with respect to the characteristic matrix* i. e.,

$$V_s^r(A) \equiv V_s^r(A - \lambda I)$$

for all values of λ and the elements a_{ij} of the matrix A.

Proof. The equation

$$\Omega_0 f \equiv \frac{\partial f}{\partial a_{11}} + \frac{\partial f}{\partial a_{22}} + \cdots + \frac{\partial f}{\partial a_{nn}} = 0$$

is a partial differential equation having for the general solution an arbitrary function of the differences $a_{11} - a_{22}, a_{11} - a_{33}, \ldots, a_{11} - a_{nn}$. This fact, togehter with the first of (7), viz., $\Omega_0 V_s^r(A) = 0$ tells us that the diagonal elements of A enter into $V_s^r(A)$ only in the combinations $a_{11} - a_{22}, a_{11} - a_{33}, \ldots, a_{11} - a_{nn}$. But these differences are unchanged if each element of A is replaced by the corresponding element of $A - \lambda I$. Thus the theorem is proved.

Perhaps the most striking result of the type discussed in this section is given by the following

Theorem 4. *The* JACOBIAN *of the coefficients of the characteristic equation with respect to the set of elements $a_{s_1 r_1}, a_{s_2 r_2}, \ldots, a_{s_n r_n}$ is, except possibly for sign, equal to the principal* VANDERMONDE *$V_s^r(A)$ where $r = (r_1, r_2, \ldots, r_n)$, $s = (s_1, s_2, \ldots, s_n)$.*

Proof. Consider again the matrix A with its characteristic equation written in the form

$$x^n + c_1 x^{n-1} + c_2 x^{n-2} + \cdots + c_n = 0.$$

As is known, the coefficients c_m may be expressed in terms of the traces t_m of A^m by means of the formulas

$$c_m = \frac{(-1)^m}{m!} \begin{vmatrix} t_1 & 1 & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ t_2 & t_1 & 2 & \ldots & 0 & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ t_{m-1} & t_{m-2} & t_{m-3} & \ldots & t_1 & m-1 \\ t_m & t_{m-1} & t_{m-2} & \ldots & t_2 & t_1 \end{vmatrix}. \tag{11}$$

By a familiar property of JACOBIANS, we have

$$(12)\qquad \frac{\partial(c_1, c_2, \ldots, c_n)}{\partial(a_{s_1 r_1}, a_{s_2 r_2}, \ldots, a_{s_n r_n})} = \frac{\partial(c_1, c_2, \ldots, c_n)}{\partial(t_1, t_2, \ldots, t_n)} \cdot \frac{\partial(t_1, t_2, \ldots, t_n)}{\partial(a_{s_1 r_1}, a_{s_2 r_2}, \ldots, a_{s_n r_n})}.$$

Using (8) we observe that

$$(13)\qquad \frac{\partial(t_1, t_2, \ldots, t_n)}{\partial(a_{s_1 r_1}, a_{s_2 r_2}, \ldots, a_{s_n r_n})} = n!\, V_s^r(A).$$

Also, after a computation, we find from (11) that

$$\frac{\partial(c_1, c_2, \ldots, c_n)}{\partial(t_1, t_2, \ldots, t_n)} = \frac{1}{n!}(-1)^n$$

so that by (12) we finally obtain

$$(14)\qquad \frac{\partial(c_1, c_2, \ldots, c_n)}{\partial(a_{s_1 r_1}, a_{s_2 r_2}, \ldots, a_{s_n r_n})} = (-1)^n V_s^r(A)$$

which proves the theorem.

In particular, when A is a diagonal matrix with diagonal elements $x_1, x_2, \ldots, x_n$ the coefficients of the characteristic equation become, apart from sign, the elementary symmetric functions $E_1, E_2, \ldots, E_n$ and Theorem 5 yields the classical result

$$\frac{\partial(E_1, E_2, \ldots, E_n)}{\partial(x_1, x_2, \ldots, x_n)} = (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} \begin{vmatrix} 1 & 1 & \ldots & 1 \\ x_1 & x_2 & \ldots & x_n \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ x_1^{n-1} & x_2^{n-1} & \ldots & x_n^{n-1} \end{vmatrix}.$$

From equations (13) and (14) we also observe that *the JACOBIAN of the traces of the first n powers of a matrix A with respect to any n elements of A is identical with the JACOBIAN of the coefficients of the characteristic equation of A, except for a numerical factor depending only on n.*

PART II.

The independence theorem.

1. Notations. We shall now give a proof of the independence theorem. In view of the last statement in Section 3, the result may be stated as follows:

Theorem I. *If A is a square matrix of order n, the JACOBIAN of the coefficients of the characteristic function of A with respect to each set of n distinct elements of A, at least one of which is a diagonal element, is never identically zero in the n^2 variables of A.*

Let the n^2 elements $a_{\lambda\mu}$ of A be variables and let us write

$$(1)\qquad \begin{vmatrix} a_{11}+x & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22}+x & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn}+x \end{vmatrix} \equiv x^n + \varphi_1 x^{n-1} + \cdots + \varphi_n,$$

$$(2)\qquad \begin{vmatrix} a_{22}+x & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n2} & a_{n3} & \dots & a_{nn}+x \end{vmatrix} \equiv x^{n-1} + \psi_1 x^{n-2} + \dots + \psi_{n-1}.$$

Then the $\varphi_\varkappa$, $\psi_\varkappa$ are polynomials of the variables $a_{\lambda\mu}$. We denote the partial derivatives of the first and second orders, as follows:

$$(3)\qquad \frac{\partial \varphi_\varkappa}{\partial a_{\lambda\mu}} = \frac{\varphi_\varkappa}{\lambda\,\mu}, \quad \frac{\partial^2 \varphi_\varkappa}{\partial a_{\lambda\mu}\,\partial a_{\varrho\sigma}} = \frac{\varphi_\varkappa}{\substack{\lambda\,\mu \\ \varrho\,\sigma}}.$$

Since the determinant (2) is the partial derivative of the determinant (1) with respect to a_{11} we have

$$(4)\qquad \frac{\varphi_1}{11} = 1, \quad \frac{\varphi_2}{11} = \psi_1, \quad \frac{\varphi_3}{11} = \psi_2, \quad \dots, \quad \frac{\varphi_n}{11} = \psi_{n-1}.$$

The $\varphi_\varkappa$ are *linear* functions of the $a_{\lambda\mu}$ of the λ-th row or of the μ-th column, and hence, the second derivatives vanish, i. e.

$$(5)\qquad \frac{\varphi_\varkappa}{\substack{\lambda\,\mu \\ \lambda\,\sigma}} = 0, \quad \frac{\varphi_\varkappa}{\substack{\lambda\,\mu \\ \varrho\,\mu}} = 0.$$

Besides the trivial formula $\dfrac{\varphi_\varkappa}{\substack{\lambda\,\mu \\ \varrho\,\sigma}} = \dfrac{\varphi_\varkappa}{\substack{\varrho\,\sigma \\ \lambda\,\mu}}$ (interchange of the order of differentiation), we note also

$$(6)\qquad \frac{\varphi_\varkappa}{\substack{\lambda\,\mu \\ \varrho\,\sigma}} = -\frac{\varphi_\varkappa}{\substack{\lambda\,\sigma \\ \varrho\,\mu}}, \quad \frac{\varphi_\varkappa}{\substack{\lambda\,\mu \\ \varrho\,\sigma}} = -\frac{\varphi_\varkappa}{\substack{\varrho\,\mu \\ \lambda\,\sigma}}.$$

If $\varkappa = 1$ or $\varkappa = 2$ the formulas (6) are trivial. If $\lambda = \varrho$ or $\sigma = \mu$ formulas (6) follow from (5). Otherwise $\dfrac{\varphi_\varkappa}{\substack{\lambda\,\mu \\ \varrho\,\sigma}}$ is the sum of all principal minors of order $n-2$ in the algebraic complement in A of the determinant

$$\begin{vmatrix} a_{\lambda\mu} & a_{\lambda\sigma} \\ a_{\varrho\mu} & a_{\varrho\sigma} \end{vmatrix}.$$

Likewise $\dfrac{\varphi_\varkappa}{\substack{\lambda\,\sigma \\ \varrho\,\mu}}$ is the sume of the same determinants, each with opposite sign.

We now write the JACOBIAN

$$\Delta = \frac{\partial(\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n)}{\partial(a_{\lambda_1\mu_1}, a_{\lambda_2\mu_2}, \dots, a_{\lambda_n\mu_n})},$$

where the $a_{\lambda\mu}$ denote any n different elements, in the form

$$(7)\qquad \Delta = \left| \frac{\varphi_\varkappa}{\lambda_1\,\mu_1}, \frac{\varphi_\varkappa}{\lambda_2\,\mu_2}, \dots, \frac{\varphi_\varkappa}{\lambda_n\,\mu_n} \right|_{\varkappa = 1, 2, \dots, n}.$$

Here we have exhibited only the $\varkappa$-th row of the whole determinant. We shall have proved the independence theorem if we can show that *the* JACOBIAN (7) *considered as a polynomial of the* n^2 *variables* $a_{\lambda\mu}$ *does not vanish identically provided there is at least one diagonal element in the* n *denominators* (*i. e.* $\lambda_\tau = \mu_\tau$).

2. The proof of the case where there is more than one diagonal element. The theorem is obviously true for $n = 1$. We shall prove it by induction by assuming that it holds for the $n-1$ functions $\psi_\varkappa$ defined by (2) and then showing that (7) does not vanish identically.

Consider first the case where there are at least two diagonal elements in the denominators of (7). Without loss of generality, we may suppose that among the denominators of the JACOBIAN (7) there is the element a_{11}. Then we write (7) in the form

$$(8)\qquad \Delta = \left| \frac{\varphi_\varkappa}{1\,1}, \frac{\varphi_\varkappa}{\lambda_1\,1}, \ldots, \frac{\varphi_\varkappa}{\lambda_r\,1}, \frac{\varphi_\varkappa}{1\,\mu_1}, \ldots, \frac{\varphi_\varkappa}{1\,\mu_s}, \frac{\varphi_\varkappa}{\varrho_1\,\sigma_1}, \ldots, \frac{\varphi_\varkappa}{\varrho_k\,\sigma_k} \right|_{\varkappa=1,\ldots,n},$$

where $\lambda_1, \ldots, \lambda_r, \mu_1, \ldots, \mu_s, \varrho_1, \sigma_1, \ldots, \varrho_k, \sigma_k$ are greater than 1. The r elements $\lambda_1\,1, \ldots, \lambda_r\,1$ may be absent, in which case we set $r = 0$. Likewise the s elements $1\,\mu_1, \ldots, 1\,\mu_s$ may be absent, in which case we set $s = 0$. But k is greater than zero and among the last k denominators there is at least one diagonal element. Obviously, we have $1 + r + s + k = n$.

Let us now compute the k-th partial derivative of Δ with respect to a_{11}. This is a sum of determinants each multiplied by a numerical coefficient and each formed from (8) by differentiating k columns, not necessarily distinct. But we observe by (5) that after differentiating a column twice, we obtain a column of zeros and hence, the determinant vanishes. The same is true of those determinants in which we differentiate one of the first $1 + r + s$ columns. Hence there remains only the determinant in which each of the last k columns is differentiated exactly once and we get

$$\frac{\partial^k \Delta}{\partial a_{11}^k} = k! \left| \frac{\varphi_\varkappa}{1\,1}, \frac{\varphi_\varkappa}{\lambda_1\,1}, \ldots, \frac{\varphi_\varkappa}{\lambda_r\,1}, \frac{\varphi_\varkappa}{1\,\mu_1}, \ldots, \frac{\varphi_\varkappa}{1\,\mu_s}, \frac{\varphi_\varkappa}{\varrho_1\,\sigma_1}, \ldots, \frac{\varphi_\varkappa}{\varrho_k\,\sigma_k} \right|_{\varkappa=1,\ldots,n}.$$

Now, if $r > 0$ we take the r-th partial derivative of this last expression with respect to $a_{1\mu}$ where we choose $\mu \neq 1, \mu_1, \ldots, \mu_s, \sigma_1, \ldots, \sigma_k$. Thus at most $1 + s + k$ values are excluded for μ so that at least r values are admissible and hence such a choice is possible. By using the same procedure as in the k-th partial darivative of Δ we find

$$\frac{\partial^{k+r} \Delta}{\partial a_{11}^k \, \partial a_{1\mu}^r} = k!\, r! \left| \frac{\varphi_\varkappa}{1\,1}, \frac{\varphi_\varkappa}{\substack{\lambda_1\,1 \\ 1\,\mu}}, \ldots, \frac{\varphi_\varkappa}{\substack{\lambda_r\,1 \\ 1\,\mu}}, \frac{\varphi_\varkappa}{1\,\mu_1}, \ldots, \frac{\varphi_\varkappa}{1\,\mu_s}, \frac{\varphi_\varkappa}{\substack{\varrho_1\,\sigma_1 \\ 1\,1}}, \ldots, \frac{\varphi_\varkappa}{\substack{\varrho_k\,\sigma_k \\ 1\,1}} \right|_{\varkappa=1,\ldots,n}.$$

If now, $s>0$ we form the s-th partial derivative of the determinant in the right member of the preceding formula with respect to $a_{\lambda 1}$ where we choose $\lambda \neq 1, \lambda_1, \ldots, \lambda_r, \varrho_1, \ldots, \varrho_k$. This choice is possible because at most $1+r+k$ values are excluded and consequently at least s values are admissible. We get

$$\frac{\partial^{k+r+s} \Delta}{\partial a_{11}^{k} \partial a_{1\mu}^{r} \partial a_{\lambda 1}^{s}} = k!\, r!\, s! \left| \frac{\varphi_\varkappa}{1\,1}, \frac{\varphi_\varkappa}{\lambda_1 1\ 1\mu}, \ldots, \frac{\varphi_\varkappa}{\lambda_r 1\ 1\mu}, \frac{\varphi_\varkappa}{1\mu_1\ \lambda 1}, \ldots, \frac{\varphi_\varkappa}{1\mu_s\ \lambda 1}, \frac{\varphi_\varkappa}{\varrho_1\sigma_1\ 1\,1}, \ldots, \frac{\varphi_\varkappa}{\varrho_k\sigma_k\ 1\,1} \right|_{\varkappa=1,\ldots,n}.$$

The first row of this determinant is $1, 0, \ldots, 0$. Expanding by the first row and using the formulas (6), we find that the right member of the preceding equation reduces to

$$\pm \left| \frac{\varphi_\varkappa}{1\,1\ \lambda_1\mu}, \ldots, \frac{\varphi_\varkappa}{1\,1\ \lambda_r\mu}, \frac{\varphi_\varkappa}{1\,1\ \lambda\mu_1}, \ldots, \frac{\varphi_\varkappa}{1\,1\ \lambda\mu_s}, \frac{\varphi_\varkappa}{1\,1\ \varrho_1\sigma_1}, \ldots, \frac{\varphi_\varkappa}{1\,1\ \varrho_k\sigma_k} \right|_{\varkappa=2,\ldots,n}.$$

But, by use of the relations (4), this becomes

$$\pm \left| \frac{\psi_{\varkappa-1}}{\lambda_1\mu}, \ldots, \frac{\psi_{\varkappa-1}}{\lambda_r\mu}, \frac{\psi_{\varkappa-1}}{\lambda\mu_1}, \ldots, \frac{\psi_{\varkappa-1}}{\lambda\mu_s}, \frac{\psi_{\varkappa-1}}{\varrho_1\sigma_1}, \ldots, \frac{\psi_{\varkappa-1}}{\varrho_k\sigma_k} \right|_{\varkappa=2,\ldots,n}.$$

Finally, by an obvious change of notation, we have

$$\frac{\partial^{k+r+s} \Delta}{\partial a_{11}^{k} \partial a_{1\mu}^{r} \partial a_{\lambda 1}^{s}} = k!\, r!\, s! \left| \frac{\psi_\varkappa}{\lambda_1\mu}, \ldots, \frac{\psi_\varkappa}{\lambda_r\mu}, \frac{\psi_\varkappa}{\lambda\mu_1}, \ldots, \frac{\psi_\varkappa}{\lambda\mu_s}, \frac{\psi_\varkappa}{\varrho_1\sigma_1}, \ldots, \frac{\psi_\varkappa}{\varrho_k\sigma_k} \right|_{\varkappa=1,\ldots,n-1}.$$

Here the $n-1$ denominators are all different from each other in view of the choice of λ and μ. Hence we have a JACOBIAN of $n-1$ rows and among the denominators there is at least one diagonal element; in fact, it lies in the last k denominators, as originally assumed. For such a JACOBIAN the theorem was assumed to be true and hence Δ does not vanish identically.

3. The proof of the case where there is only a single diagonal element. Here the first row of the JACOBIAN (7) consists of a 1 and $n-1$ zeros, so that (7) reduces to a determinant of order $n-1$. Without loss of generality, we may assume that among the denominators there occurs the element a_{12} so that we may write this determinant of order $n-1$ as

$$\Delta = \left| \frac{\varphi_\varkappa}{1\,2}, \frac{\varphi_\varkappa}{\lambda_1 1}, \ldots, \frac{\varphi_\varkappa}{\lambda_r 1}, \frac{\varphi_\varkappa}{1\mu_1}, \ldots, \frac{\varphi_\varkappa}{1\mu_s}, \frac{\varphi_\varkappa}{1\nu_1}, \ldots, \frac{\varphi_\varkappa}{1\nu_t}, \frac{\varphi_\varkappa}{\varrho_1\sigma_1}, \ldots, \frac{\varphi_\varkappa}{\varrho_k\sigma_k} \right|_{\varkappa=2,\ldots,n},$$

where $\lambda_1, \ldots, \lambda_r, \varrho_1, \sigma_1, \ldots, \varrho_k, \sigma_k$ are greater than 1 and $\mu_1, \ldots, \mu_s$, $\nu_1, \ldots, \nu_t$ are greater than 2. Since no diagonal element occurs in the right member of Δ we have

$$\varrho_1 \neq \sigma_1, \ \ldots, \ \varrho_k \neq \sigma_k, \tag{9}$$

The denominators in the right member of the preceding determinant having the first figure 1 are divided into two classes. The first class $1\mu_1, \ldots, 1\mu_s$ consists of those for which the symbols $2\mu_1, \ldots, 2\mu_s$ are contained in the last k symbols $\varrho_1\sigma_1, \ldots, \varrho_k\sigma_k$; the second class $1\nu_1, \ldots, 1\nu_t$ consists of those for which $2\nu_1, \ldots, 2\nu_t$ are not contained in the last k symbols. Clearly $1 + r + s + t + k = n - 1$. Each of the numbers r, s, t, k may be zero, in which case the corresponding elements are missing.

Now, if $k > 0$ we form the k-th partial derivative of Δ with respect to a_{11}. This yields, apart from the factor $k!$

$$\left| \frac{\varphi_\varkappa}{1\,2}, \frac{\varphi_\varkappa}{\lambda_1\,1}, \ldots, \frac{\varphi_\varkappa}{\lambda_r\,1}, \frac{\varphi_\varkappa}{1\,\mu_1}, \ldots, \frac{\varphi_\varkappa}{1\,\mu_s}, \frac{\varphi_\varkappa}{1\,\nu_1}, \ldots, \frac{\varphi_\varkappa}{1\,\nu_t}, \frac{\varphi_\varkappa}{\varrho_1\,\sigma_1}, \ldots, \frac{\varphi_\varkappa}{\varrho_k\,\sigma_k} \right|_{\varkappa = 2, \ldots, n}.$$

If, next we take the $(t+1)$-st derivative of this last determinant with respect to a_{21}, and omit the factor $(t+1)!$ we obtain

$$\left| \frac{\varphi_\varkappa}{\substack{1\,2\\2\,1}}, \frac{\varphi_\varkappa}{\lambda_1\,1}, \ldots, \frac{\varphi_\varkappa}{\lambda_r\,1}, \frac{\varphi_\varkappa}{1\,\mu_1}, \ldots, \frac{\varphi_\varkappa}{1\,\mu_s}, \frac{\varphi_\varkappa}{\substack{1\,\nu_1\\2\,1}}, \ldots, \frac{\varphi_\varkappa}{\substack{1\,\nu_t\\2\,1}}, \frac{\varphi_\varkappa}{\substack{\varrho_1\,\sigma_1\\1\,1}}, \ldots, \frac{\varphi_\varkappa}{\substack{\varrho_k\,\sigma_k\\1\,1}} \right|_{\varkappa = 2, \ldots, n}.$$

It is to be noticed here that we have not written the symbol $2\,1$ under the symbols $1\mu_\alpha$. If we had done so, we would have, in view of (6)

$$\frac{\varphi_\varkappa}{\substack{1\,\mu_\alpha\\2\,1}} = -\frac{\varphi_\varkappa}{\substack{2\,\mu_\alpha\\1\,1}}.$$

But the symbol $2\mu_\varkappa$ was supposed to be identical with a $\varrho_\beta\sigma_\beta$ so that the determinant in question would vanish, since it would have two columns whose elements are the negatives of each other.

Now, if $r > 0$ we form the r-th partial derivative of the last written determinant with respect to $a_{1\mu}$ where we choose $\mu = 1, 2, \mu_1, \ldots, \mu_s, \nu_1, \ldots, \nu_t, \sigma_1, \ldots, \sigma_k$, and we have at least r possibilities for this choice. Finally, if $s > 0$ we take the s-th partial derivative of the preceding partial derivative, with respect to $a_{\lambda 1}$, where we choose $\lambda = 1, 2, \lambda_1, \ldots, \lambda_r, \varrho_1, \ldots, \varrho_k$, and we have at least s possibilities for this choice. Omitting the factors $r!$ and $s!$ we obtain in this way

$$\left| \frac{\varphi_\varkappa}{\substack{1\,2\\2\,1}}, \frac{\varphi_\varkappa}{\substack{\lambda_1\,1\\1\,\mu}}, \ldots, \frac{\varphi_\varkappa}{\substack{\lambda_r\,1\\1\,\mu}}, \frac{\varphi_\varkappa}{\substack{1\,\mu_1\\\lambda\,1}}, \ldots, \frac{\varphi_\varkappa}{\substack{1\,\mu_s\\\lambda\,1}}, \frac{\varphi_\varkappa}{\substack{1\,\nu_1\\2\,1}}, \ldots, \frac{\varphi_\varkappa}{\substack{1\,\nu_t\\2\,1}}, \frac{\varphi_\varkappa}{\substack{\varrho_1\,\sigma_1\\1\,1}}, \ldots, \frac{\varphi_\varkappa}{\substack{\varrho_k\,\sigma_k\\1\,1}} \right|_{\varkappa = 2, \ldots}$$

But in view of the relations (6), this determinant may be reduced to

$$\pm \left| \frac{q_\varkappa}{1\,1}_{2\,2}, \frac{q_\varkappa}{1\,1}_{\lambda_1\,\mu}, \ldots, \frac{q_\varkappa}{1\,1}_{\lambda_r\,\mu}, \frac{q_\varkappa}{1\,1}_{\lambda\,\mu_1}, \ldots, \frac{q_\varkappa}{1\,1}_{\lambda\,\mu_s}, \frac{q_\varkappa}{1\,1}_{2\,\nu_1}, \ldots, \frac{q_\varkappa}{1\,1}_{2\,\nu_t}, \frac{q_\varkappa}{1\,1}_{\varrho_1\,\sigma_1}, \ldots, \frac{q_\varkappa}{1\,1}_{\varrho_k\,\sigma_k} \right|_{\varkappa=2,\ldots,n},$$

and by the relations (4) this becomes

$$\pm \left| \frac{\psi_{\varkappa-1}}{2\,2}, \frac{\psi_{\varkappa-1}}{\lambda_1\,\mu}, \ldots, \frac{\psi_{\varkappa-1}}{\lambda_r\,\mu}, \frac{\psi_{\varkappa-1}}{\lambda\,\mu_1}, \ldots; \frac{\psi_{\varkappa-1}}{\lambda\,\mu_s}, \frac{\psi_{\varkappa-1}}{2\,\nu_1}, \ldots, \frac{\psi_{\varkappa-1}}{2\,\nu_t}, \frac{\psi_{\varkappa-1}}{\varrho_1\,\sigma_1}, \ldots, \frac{\varphi_{\varkappa-1}}{\varrho_k\,\sigma_k} \right|_{\varkappa=2,\ldots,n}.$$

But by the restrictions (9) on the choice of λ and μ the $n-1$ denominators are all different from each other and among them is the diagonal element a_{22}. Hence it is a JACOBIAN of order $n-1$ which we have assumed to be not identically zero and thus the JACOBIAN Δ does not vanish identically.

4. Some generalizations. With very slight changes in the procedure given above, we may prove

Theorem 2. *Let $\nu_1, \nu_2, \ldots, \nu_m$ be any set chosen from among the numbers 1, 2, ..., n. Then the* JACOBIAN

$$\frac{\partial(q_{\nu_1}, q_{\nu_2}, \ldots, q_{\nu_m})}{\partial(a_{\lambda_1\mu_1}, a_{\lambda_2\mu_2}, \ldots, a_{\lambda_m\mu_m})}$$

does not vanish identically, provided that among the m elements of the denominator there is at least one diagonal element.

Theorem 3. *Let $\nu_1, \nu_2, \ldots, \nu_m$ be any set chosen from the numbers 2, 3, ..., n. Then the* JACOBIAN

$$\frac{\partial(q_{\nu_1}, q_{\nu_2}, \ldots, q_{\nu_m})}{\partial(a_{\lambda_1\mu_1}, a_{\lambda_2\mu_2}, \ldots, a_{\lambda_m\mu_m})}$$

does not vanish identically.

Here no restriction on the presence of a diagonal element is made. Since $m < n$ there is at least one diagonal element missing in the denominator of the JACOBIAN, say a_{11}. Then we form first the highest possible partial derivative with respect to a_{11} which does not vanish in a trivial manner; then we do likewise with respect to $a_{1\mu}$ with a suitably chosen μ; finally, we use $a_{\lambda 1}$ with a suitable λ or, if necessary, two suitable $\lambda's$ (This is similar to Section 3. where we first used a_{21}, then $a_{\lambda 1}$ with $\lambda \neq 2$).

(Eingegangen am 11. Oktober 1949.)

9254-52

Bemerkungen zur Fehlertheorie.

Herrn Oskar Perron zum 70. Geburtstag am 7. Mai 1950 gewidmet.

von

Max Müller in Tübingen.

Bei einer Folge reeller Zahlen $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_\nu, \ldots$ bezeichnen wir die Anzahl derjenigen unter den Zahlen $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_n$, die die Ungleichung $\alpha \leqq \varepsilon_\nu \leqq \beta$ erfüllen, mit $A_n(\varepsilon_\nu, \alpha, \beta)$. Gibt es eine nichtnegative, eigentlich R-integrierbare Funktion $\varphi(\varepsilon)$ derart, daß für jedes Intervall $\langle \alpha, \beta \rangle$

$$\lim_{n \to \infty} \frac{A_n(\varepsilon_\nu; \alpha, \beta)}{n} = \int_\alpha^\beta \varphi(\varepsilon)\, d\varepsilon, \tag{1}$$

so nennt man $\varphi(\varepsilon)$ die Dichte der Folge $\{\varepsilon_\nu\}$. Bei einer Folge von Beobachtungsfehlern ε_ν nimmt man insbesondere an, daß $\int_{-\infty}^{\infty} \varphi(\varepsilon)\, d\varepsilon = 1$ sei, und nennt $\varphi(\varepsilon)$ ihr Fehlergesetz.

Man pflegt eine Funktion $\varphi(\varepsilon)$ auch schon dann Fehlergesetz zu nennen, wenn sie für alle ε definiert, nicht negativ und über jedes endliche Intervall integrierbar ist, und wenn überdies $\int_{-\infty}^{\infty} \varphi(\varepsilon)\, d\varepsilon$ existiert und gleich 1 ist[1]). Diese Benennung scheint mir nur dann sinnvoll zu sein, wenn feststeht, daß es mindestens eine Fehlerfolge $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots$ gibt, bei welcher die Beziehung (1) für dieses $\varphi(\varepsilon)$ gilt. Ob diese Bedingung immer erfüllt ist, fand ich in der Literatur nirgends untersucht. Vor etwa einem Jahr teilte mir Herr H. Kneser nach einer Unterhaltung über diese Frage einen Beweis mit, den ich hier mit seiner Zustimmung in § 1 wiedergebe.

Die Verbindung mit der Lehre von der Gleichverteilung, die der Kneserschе Beweis herstellt, läßt sich auch bei der Untersuchung der

[1]) So z. B. F. Bernstein, Über das Gaußsche Fehlergesetz. Math. Ann. **64**, 1907, S. 417—448, bes. S. 420 unter dem Namen Fehlerfunktion. — G. Pólya, Herleitung des Gaußschen Fehlergesetzes aus einer Funktionalgleichung. Math. Zeitschr. **18**, 1923, S. 96—108, bes. S. 97. — F. R. Helmert, Die Ausgleichungsrechnung nach der Methode der kleinsten Quadrate (2. Aufl., Leipzig u. Berlin, B. G. Teubner, 1907), S. 10 ff. — F. Zernicke, Wahrscheinlichkeitsrechnung und mathematische Statistik. Handbuch der Physik, herausgegeben von Geiger und Scheel, Bd. III (Berlin, J. Springer, 1928), S. 469 ff.

folgenden Frage ausnutzen: Ist $\varphi(\varepsilon)$ das Fehlergesetz und $\psi(\varepsilon)$ die Bedeutung des Fehlers ε, so wird das Fehlerrisiko durch die Formel

$$R = \int_{-\infty}^{\infty} \psi(\varepsilon)\,\varphi(\varepsilon)\,d\varepsilon$$

definiert[2]). Für $\psi(\varepsilon) = |\varepsilon|$ wird R gleich dem durchschnittlichen Fehler ϑ, für $\psi(\varepsilon) = \varepsilon^2$ gleich dem Quadrat des mittleren Fehlers μ der Fehlerfolge $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots$. Es ist wichtig zu wissen, ob man R schon aus den n ersten Fehlern $\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n$ näherungsweise berechnen kann. Ohne die Voraussetzungen genau zu nennen und ohne seine Schlußweise eingehender darzulegen, behauptet E. Czuber[3]), daß dem Bernoullischen Theorem zufolge

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{\nu=1}^{n} \psi(\varepsilon_\nu) = \int_{-\infty}^{\infty} \psi(\varepsilon)\,\varphi(\varepsilon)\,d\varepsilon \tag{2}$$

sei, und J. Bauschinger[4]) schreibt geradezu, wohl dasselbe meinend,

„$\int_{-\infty}^{\infty} |\varepsilon|\,\varphi(\varepsilon)\,d\varepsilon = \frac{|\varepsilon_1| + \cdots + |\varepsilon_n|}{n} = \vartheta =$ durchschnittlicher Fehler,

$\int_{-\infty}^{\infty} \varepsilon^2\,\varphi(\varepsilon)\,d\varepsilon = \frac{\varepsilon_1^2 + \cdots + \varepsilon_n^2}{n} = \mu^2 =$ Quadrat des mittleren Fehlers".

Auch sonst scheint vielfach die Beziehung (2) als selbstverständlich angesehen zu werden[5]).

Wir werden in § 2 und § 5 Voraussetzungen angeben, unter denen die Beziehung (2) gewiß gilt, aber auch an einem Beispiel in § 3 zeigen, daß sie selbst dann nicht ausnahmslos besteht, wenn das uneigentliche Integral existiert. Immer gilt aber unter praktisch wohl nicht zu engen Voraussetzungen bezüglich $\varphi(\varepsilon)$ und $\psi(\varepsilon)$, wie wir in § 4 beweisen, die Formel

$$\lim_{s\to\infty} \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{\substack{\nu=1 \\ |\varepsilon_\nu| \le s}}^{n} \psi(\varepsilon_\nu) = \int_{-\infty}^{\infty} \psi(\varepsilon)\,\varphi(\varepsilon)\,d\varepsilon\,. \tag{2*}$$

---

[2]) E. Czuber, Theorie der Beobachtungsfehler, Leipzig, B. G. Teubner, 1891, S. 128. E. Czuber, Wahrscheinlichkeitsrechnung und ihre Anwendung auf Fehlerausgleichung, Statistik und Lebensversicherung I (4. Aufl., Leipzig u. Berlin, B. G. Teubner, 1924), S. 308 ff.

[3]) E. Czuber, Wahrscheinlichkeitsrechnung ..., a. in [2]) a. O., S. 310.

[4]) Enzyklopädie der mathematischen Wissenschaften I_2 (Leipzig, B. G. Teubner, 1900—1904), S. 779; Artikel Ausgleichungsrechnung von J. Bauschinger.

[5]) M. Näbauer, Grundzüge der Geodäsie mit Einschluß der Ausgleichungsrechnung (2. Aufl., Leipzig u. Berlin, B. G. Teubner, 1925), S. 11. — O. Eggert, Einführung in die Geodäsie (Leipzig, B. G. Teubner, 1907), S. 25 u. 29. — F. R. Helmert, a. in [1]) a. O., S. 19/20 und S. 28/29.

§ 1.

Das allgemeinste Fehlergesetz.

Satz 1. *Zu jeder für* $-\infty < \varepsilon < \infty$ *definierten, nicht negativen Funktion* $\varphi(\varepsilon)$, *für welche* $\int_{-\infty}^{\infty} \varphi(\varepsilon)\, d\varepsilon$ *existiert und gleich 1 ist, gibt es eine Zahlenfolge* $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots$ *derart, daß für jedes Intervall* $\langle \alpha, \beta \rangle$

$$\lim_{n \to \infty} \frac{A_n(\varepsilon_\nu; \alpha, \beta)}{n} = \int_{\alpha}^{\beta} \varphi(\varepsilon)\, d\varepsilon$$

wird.

Beweis. Wir setzen

$$F(t) = \int_{-\infty}^{t} \varphi(\varepsilon)\, d\varepsilon. \tag{3}$$

Es ist $F(-\infty) = 0$, $F(+\infty) = 1$, $F(t)$ im Intervall $-\infty < t < \infty$ stetig und nicht abnehmend. Einen konstanten Wert r, den $F(t)$ in einem ganzen Intervall annimmt, bezeichnen wir als Ruhewert. Jedem Ruhewert r ordnen wir umgekehrt das größte Intervall $t'(r) < t < t''(r)$ zu, in welchem $F(t) = r$. Zu zwei verschiedenen Ruhewerten r_1 und $r_2 (> r_1)$ gehören zwei verschiedene Ruheintervalle $(t'(r_1), t''(r_1))$ und $(t'(r_2), t''(r_2))$, wobei $t''(r_1) < t'(r_2)$. $F(t)$ kann also nur abzählbar viele Ruhewerte haben.

Wir können zu $x = F(t)$ eine Umkehrungsfunktion $t = \Phi(x)$ im Intervall $0 \leqq x \leqq 1$ eindeutig definieren. Ist $r = 0$ Ruhewert, dem das Intervall $-\infty < t < A$ zugeordnet ist, so setzen wir $\Phi(0) = A$; ist $r = 0$ nicht Ruhewert, so setzen wir $\Phi(0) = -\infty$. Ist $r = 1$ Ruhewert, dem das Intervall $B < t < \infty$ zugeordnet ist, so setzen wir $\Phi(1) = B$; ist $r = 1$ nicht Ruhewert, so setzen wir $\Phi(1) = \infty$. An einer Stelle x, die ein von 0 und 1 verschiedener Ruhewert r von $F(t)$ ist, setzen wir $\Phi(x) = \Phi(r) = t^*(r)$, wo $t^*(r)$ beliebig, aber in fester Weise dem Intervall $t'(r) \leqq t \leqq t''(r)$ entnommen ist. An einer Stelle x, die nicht Ruhewert von $F(t)$ ist, sei $\Phi(x)$ die Abszisse des Schnittpunktes der Kurve $y = F(t)$ mit der Parallelen zur t-Achse im Abstand $y = x$. Dieses $\Phi(x)$ ist im Intervall $0 \leqq x \leqq 1$ eindeutig, steigt monoton, hat keine Konstanzintervalle; es ist nur an den Stellen $x = r$ unstetig, wo es springt.

Bedeutet nun $x_1, x_2, \ldots$ irgendeine Folge im Intervall $0 \leqq x \leqq 1$ gelegener und darin gleichverteilter untereinander verschiedener Zahlen, ist also für beliebiges u und v mit $0 \leqq u < v \leqq 1$

$$\lim_{n \to \infty} \frac{A_n(x_\nu; u, v)}{n} = v - u \text{ [6][7]}, \tag{4}$$

[6]) Vgl. H. Weyl, Über die Gleichverteilung von Zahlen mod. Eins. Math. Ann. **77**, 1916, S. 313—352, sowie die dort genannten Literaturstellen.

[7]) Ein besonders bekanntes Beispiel einer Folge von im Intervall $0 \leqq x \leqq 1$ gelegenen und darin gleich verteilten untereinander verschiedenen Zahlen ist die

so setzen wir

$$\varepsilon_\nu = \Phi(x_\nu) \qquad (\nu = 1, 2, 3, \ldots).$$

Für $x_\nu \neq x_{\nu'}$ ist auch $\varepsilon_\nu \neq \varepsilon_{\nu'}$. Es ist bei beliebiger Wahl der Zahlen α und $\beta (> \alpha)$ im allgemeinen

$$A_n(\varepsilon_\nu;\, \alpha, \beta) = A_n(x_\nu;\, F(\alpha), F(\beta))$$

und nur dann

$$A_n(\varepsilon_\nu;\, \alpha, \beta) = A_n(x_\nu;\, F(\alpha), F(\beta)) - 1,$$

wenn entweder

$$t'(r) \leqq \beta < t^*(r) \leqq t''(r)$$

oder

$$t'(r) \leqq t^*(r) < \alpha \leqq t''(r)$$

und r unter den Zahlen $x_1, x_2, \ldots, x_n$ vorkommt, und nur dann

$$A_n(\varepsilon_\nu;\, \alpha, \beta) = A_n(x_\nu;\, F(\alpha), F(\beta)) - 2,$$

wenn r_1 und $r_2 (> r_1)$ unter den Zahlen $x_1, \ldots, x_n$ vorkommen und $t^*(r_1) < \alpha \leqq t''(r_1)$ und gleichzeitig $t'(r_2) \leqq \beta < t^*(r_2)$ ist.

Mit Rücksicht auf (4) ist daher

$$\begin{aligned} \lim_{n \to \infty} \frac{A_n(\varepsilon_\nu;\, \alpha, \beta)}{n} &= \lim_{n \to \infty} \frac{A_n(x_\nu;\, F(\alpha), F(\beta))}{n} \\ &= F(\beta) - F(\alpha) \\ &= \int_\alpha^\beta \varphi(\varepsilon)\, d\varepsilon. \end{aligned}$$

Die konstruierte Zahlenfolge $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots$ hat also die vorgegebene Funktion $\varphi(\varepsilon)$ zur Dichte.

§ 2.

Hinreichende Bedingungen für die Gültigkeit der Formel (2).

1. Der soeben ausgenutzte Zusammenhang zwischen einer Folge $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots$, die eine Dichte $\varphi(\varepsilon)$ hat, für welche $\int_{-\infty}^{\infty} \varphi(\varepsilon)\, d\varepsilon = 1$ ist, und der im Intervall $0 \leqq x \leqq 1$ gleichverteilten Folge $x_1, x_2, \ldots$ läßt sich umkehren. Es gilt

---

Folge der Zahlen $x_\nu = \nu\xi - [\nu\xi]$, wo ξ eine beliebige Irrationalzahl ist. (Vgl. H. Weyl, a. in [6]) a. O.). Herr H. Kneser hat bei derselben Gelegenheit auch das folgende einfache Beispiel einer Folge von im Intervall $0 \leqq x \leqq 1$ gelegenen und darin gleichverteilten untereinander verschiedenen Zahlen angegeben:

$$x_1 = 2^{-1},\ x_{2^n+1+k} = x_{2^n+k} - 2^{-n-2},\ x_{2^{n+1}+2^n+k} = x_{2^n+k} + 2^{-n-2} \quad (n \geqq 0,\ 0 \leqq k < 2^n).$$

Satz 2. *Hat die Folge* $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots$ *eine Dichte* $\varphi(\varepsilon)$, *für welche* $\int_{-\infty}^{\infty} \varphi(\varepsilon)\, d\varepsilon = 1$ *ist, und setzt man*

$$F(t) = \int_{-\infty}^{t} \varphi(\varepsilon)\, d\varepsilon,$$

so ist die Folge der Zahlen $x_\nu = F(\varepsilon_\nu)$ $(\nu = 1, 2, \ldots)$ *im Intervall* $0 \leqq x \leqq 1$ *gleichverteilt.*

Beweis. Zunächst ist $0 \leqq x_\nu \leqq 1$ für alle ν; werden u und v so gewählt, daß $0 \leqq u < v \leqq 1$, und wird $\alpha = \Phi(u)$, $\beta = \Phi(v)$ gesetzt, so ist

$$A_n(x_\nu;\, u,\, v) = A_n(\varepsilon_\nu;\, \Phi(u),\, \Phi(v)) = A_n(\varepsilon_\nu;\, \alpha,\, \beta),$$

falls u und v nicht Ruhewerte von $F(t)$ sind,

$$A_n(x_\nu;\, u,\, v) = A_n(\varepsilon_\nu;\, t'(u),\, \Phi(v)) = A_n(\varepsilon_\nu;\, t'(u),\, \beta),$$

falls u Ruhewert, v nicht Ruhewert von $F(t)$ ist,

$$A_n(x_\nu;\, u,\, v) = A_n(\varepsilon_\nu;\, \Phi(u),\, t''(v)) = A_n(\varepsilon_\nu;\, \alpha,\, t''(v)),$$

falls v Ruhewert, u nicht Ruhewert von $F(t)$ ist,

$$A_n(x_\nu;\, u,\, v) = A_n(\varepsilon_\nu;\, t'(u),\, t''(v)),$$

falls u und v Ruhewerte von $F(t)$ sind.

Es strebt also beziehentlich für $n \to \infty$

$$\frac{A_n(x_\nu;\, u,\, v)}{n} \to \begin{cases} F(\beta) - F(\alpha), \\ F(\alpha) - F(t'(u)) + F(\beta) - F(\alpha), \\ F(\beta) - F(\alpha) + F(t''(v)) - F(\beta), \\ F(\alpha) - F(t'(u)) + F(\beta) - F(\alpha) + F(t''(v)) - F(\beta), \end{cases}$$

d. h. es ist, weil $F(t)$ in den Intervallen $t'(u) \leqq \varepsilon \leqq \alpha$ und $\beta \leqq \varepsilon \leqq t''(v)$ konstant ist, allemal

$$\lim_{n \to \infty} \frac{A_n(x_\nu;\, u,\, v)}{n} = F(\beta) - F(\alpha) = v - u,$$

also die Folge $x_1, x_2, \ldots$ gleichverteilt im Intervall $0 \leqq x \leqq 1$. Dies gilt, wie auch $\Phi(x)$ an seinen Sprungstellen im einzelnen definiert wurde.

2. Ist $f(x)$ irgendeine eigentlich R-integrierbare Funktion, so gilt für die im Intervall $0 \leqq x \leqq 1$ gleichverteilte Folge $x_1, x_2, \ldots$ nach einem bekannten Satz der Gleichverteilungslehre[8]) die Beziehung

$$\lim_{n \to \infty} \frac{1}{n} \sum_{\nu=1}^{n} f(x_\nu) = \int_0^1 f(x)\, dx.$$

[8]) H. Weyl, a. in [6]) a. O., S. 313/4. Auch schon und wohl zuerst bei H. Weyl, Über ein Problem aus dem Gebiet der Diophantischen Approximationen. Nachr. d. K. Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen, math.-phys. Klasse 1914, S. 234—244. Vgl. auch die einfache Darstellung bei G. H. Hardy, Divergent Series (Oxford, At the Clarendon Press, 1949), S. 115.

Hieraus entsteht — zunächst formal — die Formel (2), wenn man $f(x) = \psi(\Phi(x))$ setzt:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{\nu=1}^{n} \psi(\varepsilon_\nu) = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{\nu=1}^{n} \psi(\Phi(x_\nu)) = \int_0^1 \psi(\Phi(x))\, dx$$

$$= \int_{\Phi(0)}^{\Phi(1)} \psi(\varepsilon)\, F'(\varepsilon)\, d\varepsilon = \int_{-\infty}^{\infty} \psi(\varepsilon)\, F'(\varepsilon)\, d\varepsilon = \int_{-\infty}^{\infty} \psi(\varepsilon)\, \varphi(\varepsilon)\, d\varepsilon,$$

denn man darf auch dann, wenn $\Phi(0) = A$, bzw. $\Phi(1) = B$ sein sollte, die Integration nachträglich über das ganze Intervall $-\infty < \varepsilon < \infty$ erstrecken, weil dann für $-\infty < \varepsilon < A$, bzw. $B < \varepsilon < \infty$ die Funktion $F(t) = 0$, bzw. gleich 1, also $F'(t) = 0$ ist.

Gewiß gilt hiernach die Formel (2), wenn $\psi(\Phi(x))$ im Intervall $0 \leqq x \leqq 1$ eigentlich R-integrierbar und der Übergang von der Integrationsvariablen x zur neuen Integrationsvariablen ε statthaft ist. Dies ist gewiß der Fall, wenn einerseits $\psi(\varepsilon)$ für $-\infty < \varepsilon < \infty$ beschränkt und abteilungsweise stetig[9]) ist, weil dann wegen der Monotonie von $\Phi(x)$ im Intervall $0 \leqq x \leqq 1$ die Funktion $\psi(\Phi(x))$ über dieses Intervall eigentlich R-integrierbar wird[10]), und wenn andererseits $\varphi(\varepsilon)$ im Intervall $-\infty < \varepsilon < \infty$ abteilungsweise stetig ist. Wenn $\varphi(\varepsilon)$ außerhalb eines Intervalles $A < \varepsilon < B$ verschwindet, so genügt es, daß $\psi(\varepsilon)$ in diesem Intervall abteilungsweise stetig ist. Es gilt also

Satz 3. *Hat die Folge $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots$ die Dichte $\varphi(\varepsilon)$, ist $\int_{-\infty}^{\infty} \varphi(\varepsilon)\, d\varepsilon = 1$ und $\varphi(\varepsilon)$ abteilungsweise stetig, so gilt für jede in $-\infty < \varepsilon < \infty$ beschränkte und abteilungsweise stetige Funktion $\psi(\varepsilon)$ die Formel*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{\nu=1}^{n} \psi(\varepsilon_\nu) = \int_{-\infty}^{\infty} \psi(\varepsilon)\, \varphi(\varepsilon)\, d\varepsilon. \tag{2}$$

Wenn $\varphi(\varepsilon)$ außerhalb eines Intervalles $A < \varepsilon < B$[11]) verschwindet, so genügt es, daß $\psi(\varepsilon)$ im Intervall $A < \varepsilon < B$ beschränkt und abteilungsweise stetig ist.

---

[9]) Das Intervall $-\infty < \varepsilon < \infty$ soll sich also derart in Teilintervalle $a < \varepsilon < b$ zerlegen lassen, daß $\psi(\varepsilon)$ in $a < \varepsilon < b$ stetig ist und die Annäherungswerte $\psi(a + 0)$ und $\psi(b - 0)$ existieren.

[10]) Nach einem Satz von P. du Bois-Reymond. Math. Ann. **16**, 1880, S. 112 und Math. Ann. **20**, 1882, S. 122—124. Vgl. auch E. W. Hobson, The theory of functions of a real variable and the theory of Fourier's series I (3. Aufl., Cambridge 1927), S. 473 ff. Oder M. Müller, Die Annäherung des Integrales zusammengesetzter Funktionen mittels verallgemeinerter Riemannscher Summen und Anwendungen. Sitzungsber. d. Heidelberger Akademie d. Wissensch., math.-naturw. Kl. 1937, 6. Abhandlung, S. 5—7.

[11]) Hier darf auch $A = -\infty$ oder $B = +\infty$ gesetzt werden.

§ 3.

Ein Beispiel.

Gerade bei der Bestimmung von durchschnittlichem und mittlerem Fehler, d. h. bei den Funktionen $\psi(\varepsilon) = |\varepsilon|$ und $\psi(\varepsilon) = \varepsilon^2$, und bei Benutzung des Gaussschen Fehlergesetzes $\varphi(\varepsilon) = \frac{h}{\sqrt{\pi}} e^{-h^2 \varepsilon^2}$ sind die Voraussetzungen von Satz 3 nicht erfüllt. Es entsteht die Frage, ob die Formel (2) wenigstens dann noch gilt, wenn das rechterhand auftretende uneigentliche Integral konvergiert. Daß sie im allgemeinen zu verneinen ist, lehrt das folgende Beispiel.

Es sei $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots$ eine Folge mit der Dichte $\varphi(\varepsilon)$, bei welcher $\int_{-\infty}^{\infty} \varphi(\varepsilon)\, d\varepsilon = 1$ ist und für einen positiven Exponenten k das Integral $\int_{-\infty}^{\infty} |\varepsilon|^k \varphi(\varepsilon)\, d\varepsilon$ konvergiert.

Wir wählen die ganze Zahl $q > 1$ und die ganze Zahl $r > q - 1$. Wir setzen $p = \frac{r}{kq}$ und

$$\varepsilon_\nu^* = \begin{cases} \varepsilon_\nu, & \text{falls } \nu \text{ nicht } q\text{-te Potenz einer natürlichen Zahl ist,} \\ \nu^p = \lambda^{\frac{r}{k}}, & \text{falls } \nu = \lambda^q \ (\lambda = 1, 2, 3, \ldots). \end{cases}$$

Dann ist

$$A_n(\varepsilon_\nu^*; \alpha, \beta) = A_n(\varepsilon_\nu; \alpha, \beta) - A_n' + A_n'',$$

wo A_n' die Anzahl derjenigen unter den Zahlen $\nu = 1, 2, \ldots, n$ bedeutet, die die q-te Potenz einer natürlichen Zahl sind und für die entweder $\nu^p < \alpha$ oder $\nu^p > \beta$ ist, und A_n'' die Anzahl derjenigen der Zahlen $\nu = 1, 2, \ldots, n$, die die q-te Potenz einer natürlichen Zahl λ sind und für die ν^p, aber nicht ε_ν im Intervall $\langle \alpha, \beta \rangle$ liegt. Daher ist

$$|A_n(\varepsilon_\nu^*; \alpha, \beta) - A_n(\varepsilon_\nu; \alpha, \beta)| \leqq A_n' + A_n'',$$

also höchstens gleich der Anzahl derjenigen der Zahlen $1, 2, \ldots, n$, die die q-te Potenz einer natürlichen Zahl sind. Es ist also

$$|A_n(\varepsilon_\nu^*; \alpha, \beta) - A_n(\varepsilon_\nu; \alpha, \beta)| \leqq \sqrt[q]{n}$$

und daher

$$\frac{A_n(\varepsilon_\nu^*; \alpha, \beta)}{n} = \frac{A_n(\varepsilon_\nu; \alpha, \beta)}{n} + \frac{A_n(\varepsilon_\nu^*; \alpha, \beta) - A_n(\varepsilon_\nu; \alpha, \beta)}{n} \to \int_\alpha^\beta \varphi(\varepsilon)\, d\varepsilon;$$

die Folge $\varepsilon_1^*, \varepsilon_2^*, \ldots$ hat also auch die Dichte $\varphi(\varepsilon)$.

Andererseits ist

$$\frac{1}{n} \sum_{\nu=1}^{n} \varepsilon_\nu^{*k} \geqq \frac{1}{n} \sum_{\nu=1}^{n} \varepsilon_\nu^{*k} = \frac{1}{n} \sum_{\lambda=1}^{\sqrt[q]{n}} \lambda^{rk};$$

$\nu = \lambda^q$

daher, weil für alle ganzen positiven Zahlen r

$$\lim_{m \to \infty} \frac{1}{m^{r+1}} \sum_{\lambda=1}^{m} \lambda^r = \frac{1}{r+1}$$

und damit für hinreichend großes m

$$\sum_{\lambda=1}^{m} \lambda^r \geqq \frac{1}{2(r+1)} m^{r+1}$$

ist, für alle hinreichend großen n

$$\frac{1}{n} \sum_{\nu=1}^{n} |\varepsilon_\nu^*|^k \geqq \frac{1}{n} \cdot \frac{1}{2(r+1)} [\sqrt[q]{n}]^{r+1} > \frac{1}{2(r+1)} (\sqrt[q]{n})^{r+1-q} \left(1 - \frac{1}{\sqrt[q]{n}}\right)^{r+1};$$

da bei unseren Annahmen $r+1-q>0$ ist, strebt also

$$\frac{1}{n} \sum_{\nu=1}^{n} |\varepsilon_\nu^*|^k \to \infty \quad \text{für} \quad n \to \infty,$$

während auf der rechten Seite von (2) eine endliche Zahl steht.

§ 4.

Beweis der Formel (2*).

Das soeben behandelte Beispiel zeigt, daß die Formel (2) zur Berechnung des Fehlerrisikos unbrauchbar werden kann, wenn die Voraussetzungen von Satz 3 nicht erfüllt sind. Einen Ausweg aus dieser Schwierigkeit zeigt

Satz 4. *Hat die Folge $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots$ eine in jedem endlichen Intervall beschränkte Dichte $\varphi(\varepsilon)$, so gilt für jede über jedes endliche Intervall eigentlich R-integrierbare Funktion $\psi(\varepsilon)$, für welche $\int_{-\infty}^{\infty} \psi(\varepsilon)\varphi(\varepsilon)\,d\varepsilon$ existiert, die Formel*

$$(2^*) \qquad \lim_{s \to \infty} \lim_{n \to \infty} \frac{1}{n} \sum_{\substack{\nu=1 \\ \varepsilon_\nu \leqq s}}^{n} \psi(\varepsilon_\nu) = \int_{-\infty}^{\infty} \psi(\varepsilon)\varphi(\varepsilon)\,d\varepsilon.$$

Beweis. Wir setzen für beliebige Zahlen a und b $(>a)$

$$\chi(\varepsilon; a, b) = \begin{cases} 1 \text{ für } a \leqq \varepsilon < b, \\ 0 \text{ für } \varepsilon < a \text{ und } \varepsilon \geqq b. \end{cases}$$

Ist $\langle \alpha, \beta \rangle$ irgend ein Intervall, so gibt es Zahlen α', α'' und β'', β', die beliebig nahe bei α bzw. β liegen, die Ungleichung $\alpha' < \alpha < \alpha'' < \beta'' < \beta < \beta'$ befriedigen und mit keiner der Zahlen $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots$ zusammenfallen. Es

ist also

$$A_n(\varepsilon_\nu;\,\alpha'',\,\beta'') = \sum_{\nu=1}^{n} \chi(\varepsilon_\nu;\,\alpha'',\,\beta'')$$

$$\leqq \sum_{\nu=1}^{n} \chi(\varepsilon_\nu;\,\alpha,\,\beta) \leqq \sum_{\nu=1}^{n} \chi(\varepsilon_\nu;\,\alpha',\,\beta') = A_n(\varepsilon_\nu;\,\alpha',\,\beta').$$

Division durch n und der Grenzübergang $n \to \infty$ ergibt

$$\int_{\alpha''}^{\beta''} \varphi(\varepsilon)\,d\varepsilon \leqq \underline{\lim_{n\to\infty}}\, \frac{1}{n} \sum_{\nu=1}^{n} \chi(\varepsilon_\nu;\,\alpha,\,\beta) \leqq \overline{\lim_{n\to\infty}}\, \frac{1}{n} \sum_{\nu=1}^{n} \chi(\varepsilon_\nu;\,\alpha,\,\beta) \leqq \int_{\alpha'}^{\beta'} \varphi(\varepsilon)\,d\varepsilon,$$

und hieraus folgt für $\alpha' \to \alpha$, $\alpha'' \to \alpha$, $\beta' \to \beta$, $\beta'' \to \beta$, daß

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{\nu=1}^{n} \chi(\varepsilon_\nu;\,\alpha,\,\beta) = \int_{\alpha}^{\beta} \varphi(\varepsilon)\,d\varepsilon. \tag{5}$$

Für jede positive Zahl s ist die Funktion

$$\psi(\varepsilon;\,s) = \begin{cases} \psi(\varepsilon) & \text{für } |\varepsilon| \leqq s, \\ 0 & \text{für } |\varepsilon| > s \end{cases}$$

über das Intervall $-s \leqq \varepsilon \leqq s$ eigentlich R-integrierbar. Es sei $0 \leqq \varphi(\varepsilon) < M$ für $|\varepsilon| \leqq s$, η eine beliebige positive Zahl. Dazu gibt es eine Zerlegung

$$-s = t_0 < t_1 < \cdots < t_\varkappa < t_{\varkappa+1} < \cdots < t_k = s$$

des Intervalles $-s \leqq \varepsilon \leqq s$ und Treppenfunktionen

$$\underline{\psi}(\varepsilon) = \sum_{\varkappa=0}^{k-1} g_\varkappa \chi(\varepsilon;\,t_\varkappa,\,t_{\varkappa+1}), \qquad \bar{\psi}(\varepsilon) = \sum_{\varkappa=0}^{k-1} G_\varkappa \chi(\varepsilon;\,t_\varkappa,\,t_{\varkappa+1})$$

mit

$$g_\varkappa = \operatorname*{fin\,inf}_{t_\varkappa \leqq \varepsilon \leqq t_{\varkappa+1}} \psi(\varepsilon;\,s), \qquad G_\varkappa = \operatorname*{fin\,sup}_{t_\varkappa \leqq \varepsilon \leqq t_{\varkappa+1}} \psi(\varepsilon;\,s) \quad (\varkappa = 0,\,\ldots,\,k-1)$$

derart, daß

$$\int_{-s}^{s} [\bar{\psi}(\varepsilon) - \underline{\psi}(\varepsilon)]\,d\varepsilon = \sum_{\varkappa=0}^{k-1} (G_\varkappa - g_\varkappa)(t_{\varkappa+1} - t_\varkappa) < \frac{\eta}{M}.$$

Es ist

$$\underline{\psi}(\varepsilon) \leqq \psi(\varepsilon;\,s) \leqq \bar{\psi}(\varepsilon) \quad \text{für} \quad -\infty < \varepsilon < \infty$$

und

$$0 \leqq \int_{-s}^{s} \bar{\psi}(\varepsilon)\,\varphi(\varepsilon)\,d\varepsilon - \int_{-s}^{s} \underline{\psi}(\varepsilon)\,\varphi(\varepsilon)\,d\varepsilon \leqq M \int_{-s}^{s} [\bar{\psi}(\varepsilon) - \underline{\psi}(\varepsilon)]\,d\varepsilon < \eta.$$

Ferner ist einerseits

$$\frac{1}{n}\sum_{\nu=1}^{n}\psi(\varepsilon_\nu;\, s) \leqq \frac{1}{n}\sum_{\nu=1}^{n}\bar{\psi}(\varepsilon_\nu) = \sum_{\varkappa=0}^{k-1} G_\varkappa \frac{1}{n}\sum_{\nu=1}^{n}\chi(\varepsilon_\nu;\, t_\varkappa,\, t_{\varkappa+1}),$$

andererseits

$$\frac{1}{n}\sum_{\nu=1}^{n}\psi(\varepsilon_\nu;\, s) \geqq \frac{1}{n}\sum_{\nu=1}^{n}\underline{\psi}(\varepsilon_\nu) = \sum_{\varkappa=0}^{k-1} g_\varkappa \frac{1}{n}\sum_{\nu=1}^{n}\chi(\varepsilon_\nu;\, t_\varkappa,\, t_{\varkappa+1}),$$

also mit Rücksicht auf (5) einerseits

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}\frac{1}{n}\sum_{\nu=1}^{n}\psi(\varepsilon_\nu;\, s) \leqq \sum_{\varkappa=0}^{k-1} G_\varkappa \int_{t_\varkappa}^{t_{\varkappa+1}} \varphi(\varepsilon)\, d\varepsilon = \sum_{\varkappa=0}^{k-1}\int_{t_\varkappa}^{t_{\varkappa+1}} \bar{\psi}(\varepsilon)\,\varphi(\varepsilon)\, d\varepsilon$$

$$= \int_{-s}^{s}\bar{\psi}(\varepsilon)\,\varphi(\varepsilon)\, d\varepsilon < \int_{-s}^{s}\psi(\varepsilon;\, s)\,\varphi(\varepsilon)\, d\varepsilon + \eta,$$

andererseits

$$\underline{\lim_{n\to\infty}}\frac{1}{n}\sum_{\nu=1}^{n}\psi(\varepsilon_\nu;\, s) \geqq \sum_{\varkappa=0}^{k-1} g_\varkappa \int_{t_\varkappa}^{t_{\varkappa+1}} \varphi(\varepsilon)\, d\varepsilon = \sum_{\varkappa=0}^{k-1}\int_{t_\varkappa}^{t_{\varkappa+1}} \underline{\psi}(\varepsilon)\,\varphi(\varepsilon)\, d\varepsilon$$

$$= \int_{-s}^{s}\underline{\psi}(\varepsilon)\,\varphi(\varepsilon)\, d\varepsilon > \int_{-s}^{s}\psi(\varepsilon;\, s)\,\varphi(\varepsilon)\, d\varepsilon - \eta.$$

Da η beliebig nahe bei 0 gewählt werden durfte, folgt hieraus, daß

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{\nu=1}^{n}\psi(\varepsilon_\nu;\, s) = \int_{-s}^{s}\psi(\varepsilon;\, s)\,\varphi(\varepsilon)\, d\varepsilon,$$

d. h. daß

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{\substack{\nu=1\\ t_\nu \leqq s}}^{n}\psi(\varepsilon_\nu) = \int_{-s}^{s}\psi(\varepsilon)\,\varphi(\varepsilon)\, d\varepsilon.$$

Läßt man schließlich $s \to \infty$ gehen, so entsteht die Formel (2*).

§ 5.

Eine weitere hinreichende Bedingung für die Gültigkeit der Formel (2).

1. Die Formel (2) entsteht aus der Formel (2*), indem man die beiden Grenzübergänge vertauscht. Eine Bedingung, unter der diese Vertauschung statthaft ist, enthält Satz 3. Wir wollen jetzt noch eine weitere dafür hinreichende Bedingung angeben.

2. Die verschiedenen Werte, die ε_ν für $\nu = 1, 2, \ldots, n$ annimmt, seien der Größe nach

$$\varepsilon_1' < \varepsilon_2' < \cdots < \varepsilon_s' \qquad (s \leqq n)$$

und der Wert ε'_σ werde n_σ-mal angenommen, so daß

$$n_1 + n_2 + \cdots + n_s = n$$

ist. Wir setzen

$$F_n(t) = \begin{cases} 0 & \text{für} \quad -\infty < t \leqq \varepsilon'_1, \\ \dfrac{n_1}{n} & \text{für} \quad \varepsilon'_1 < t \leqq \varepsilon'_2, \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot & \\ \dfrac{n_1 + n_2 + \cdots + n_\sigma}{n} & \text{für} \quad \varepsilon'_\sigma < t \leqq \varepsilon'_{\sigma+1}, \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot & \\ \dfrac{n_1 + n_2 + \cdots + n_s}{n} & \text{für} \quad \varepsilon'_s < t < \infty; \end{cases}$$

also ist

$$F_n(t) = \frac{A_n(\varepsilon_\nu; -\infty, t)}{n} \tag{6}$$

und

$$F_n(t) \to \int_{-\infty}^{t} \varphi(\varepsilon)\, d\varepsilon = F(t) \quad \text{für} \quad n \to \infty. \tag{7}$$

Dann gilt

Satz 5. *Die Funktion* $\varphi(\varepsilon)$ *sei in* $-\infty < \varepsilon < \infty$ *stetig, und es sei* $\int_{-\infty}^{\infty} \varphi(\varepsilon)\, d\varepsilon = 1$, *die Funktion* $\psi(\varepsilon)$ *sei in* $-\infty < \varepsilon < \infty$ *stetig und abteilungsweise differenzierbar und die Ableitung* $\psi'(\varepsilon)$ *R-integrierbar über jedes endliche Intervall*[12]). *Es sei*

$$\begin{cases} \psi(\varepsilon)\, F(\varepsilon) \to 0 & \textit{für}\ \ \varepsilon \to -\infty, \\ \psi(\varepsilon)\,[1 - F(\varepsilon)] \to 0 & \textit{für}\ \ \varepsilon \to +\infty. \end{cases} \tag{8}$$

Ferner existiere für hinreichend großes $|\varepsilon|$, *etwa für* $|\varepsilon| > \varepsilon_0 > 0$, *eine Funktion* $\omega(\varepsilon)$, *so daß für* $|\varepsilon| > \varepsilon_0$ *und alle* n

$$|\psi'(\varepsilon)|\, |F_n(\varepsilon) - F(\varepsilon)| \leqq \omega(\varepsilon) \tag{9}$$

bleibt und die Integrale

$$\int_{-\infty}^{-\varepsilon_0} \omega(\varepsilon)\, d\varepsilon \quad \textit{und} \quad \int_{\varepsilon_0}^{\infty} \omega(\varepsilon)\, d\varepsilon$$

[12]) Das soll bedeuten: Das Intervall $-\infty < \varepsilon < \infty$ läßt sich in Teilintervalle $a \leqq \varepsilon \leqq b$ zerlegen, so daß $\psi'_+(\varepsilon)$ in $a \leqq \varepsilon < b$, $\psi'_-(\varepsilon)$ in $a < \varepsilon \leqq b$ existiert und $\psi'_+(\varepsilon) = \psi'_-(\varepsilon)$ in $a < \varepsilon < b$. Wird $\psi'(\varepsilon) = \psi'_+(\varepsilon) = \psi'_-(\varepsilon)$ für $a < \varepsilon < b$ gesetzt und $\psi'(\varepsilon)$ an den Stellen, wo zwei solche Teilintervalle zusammenstoßen, der Wert 0 beigelegt, so soll eine in jedem endlichen Teilintervall beschränkte und R-integrierbare Funktion entstehen.

konvergieren. Dann gilt die Beziehung

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{\nu=1}^{n}\psi(\varepsilon_\nu)=\int_{-\infty}^{\infty}\psi(\varepsilon)\,\varphi(\varepsilon)\,d\varepsilon\,. \tag{2}$$

Beweis. Da $\psi(\varepsilon)$ stetig und $F_n(t)$ monoton ist, kann der Mittelwert auf der linken Seite von (2) als STIELTJES-Integral geschrieben werden:

$$\frac{1}{n}\sum_{\nu=1}^{n}\psi(\varepsilon_\nu)=\int_{-\infty}^{\infty}\psi(\varepsilon)\,dF_n(\varepsilon). \tag{10}$$

Und da $\varphi(\varepsilon)$ stetig ist, kann die rechte Seite von (2) entsprechend dargestellt werden:

$$\int_{-\infty}^{\infty}\psi(\varepsilon)\,\varphi(\varepsilon)\,d\varepsilon=\int_{-\infty}^{\infty}\psi(\varepsilon)\,dF(\varepsilon). \tag{11}$$

Für jedes Intervall $a\leqq\varepsilon\leqq b$ ist

$$\int_a^b\psi(\varepsilon)\,dF_n(\varepsilon)-\int_a^b\psi(\varepsilon)\,dF(\varepsilon)=\int_a^b\psi(\varepsilon)\,d[F_n(\varepsilon)-F(\varepsilon)];$$

hieraus folgt wegen der Gültigkeit von (10) und (11) für $a\to-\infty$, $b=u$, bzw. für $a=v$, $b\to\infty$ die Existenz der Integrale

$$\int_{-\infty}^{u}\psi(\varepsilon)\,d[F_n(\varepsilon)-F(\varepsilon)]\quad\text{und}\quad\int_v^{\infty}\psi(\varepsilon)\,d[F_n(\varepsilon)-F(\varepsilon)].$$

Weiter ist

$$\int_a^b\psi(\varepsilon)\,d[F_n(\varepsilon)-F(\varepsilon)] \tag{12}$$

$$=\psi(b)[F_n(b)-F(b)]-\psi(a)[F_n(a)-F(a)]-\int_a^b[F_n(\varepsilon)-F(\varepsilon)]\,d\psi(\varepsilon).$$

Nach der Voraussetzung (8) ist, weil $F_n(\varepsilon)=0$ für hinreichend kleine ε und $F_n(\varepsilon)=1$ für hinreichend große ε,

$$\psi(\varepsilon)[F_n(\varepsilon)-F(\varepsilon)]\to 0\quad\text{für}\quad|\varepsilon|\to\infty$$

und alle n. Daher folgt aus (12), daß

$$\begin{cases}\displaystyle\int_{-\infty}^{u}\psi(\varepsilon)\,d[F_n(\varepsilon)-F(\varepsilon)]=\psi(u)[F_n(u)-F(u)]-\int_{-\infty}^{u}[F_n(\varepsilon)-F(\varepsilon)]\,d\psi(\varepsilon),\\ \displaystyle\int_{v}^{\infty}\psi(\varepsilon)\,d[F_n(\varepsilon)-F(\varepsilon)]=-\psi(v)[F_n(v)-F(v)]-\int_{v}^{\infty}[F_n(\varepsilon)-F(\varepsilon)]\,d\psi(\varepsilon).\end{cases} \tag{13}$$

Aus (10), (11), (12) und (13), angewendet mit $a = u$, $b = v$, folgt also, daß

$$(14)\qquad \frac{1}{n}\sum_{\nu=1}^{n}\psi(\varepsilon_\nu) - \int_{-\infty}^{\infty}\psi(\varepsilon)\,\varphi(\varepsilon)\,d\varepsilon = \int_{-\infty}^{\infty}\psi(\varepsilon)\,d[F_n(\varepsilon)-F(\varepsilon)]$$

$$= \int_{-\infty}^{u}\psi(\varepsilon)\,d[F_n(\varepsilon)-F(\varepsilon)] + \int_{u}^{v}\psi(\varepsilon)\,d[F_n(\varepsilon)-F(\varepsilon)] + \int_{v}^{\infty}\psi(\varepsilon)\,d[F_n(\varepsilon)-F(\varepsilon)]$$

$$= -\int_{-\infty}^{u}[F_n(\varepsilon)-F(\varepsilon)]\,d\psi(\varepsilon) - \int_{u}^{v}[F_n(\varepsilon)-F(\varepsilon)]\,d\psi(\varepsilon) - \int_{v}^{\infty}[F_n(\varepsilon)-F(\varepsilon)]\,d\psi(\varepsilon).$$

Nun ist bei unseren Voraussetzungen

$$\int_{-\infty}^{u}[F_n(\varepsilon)-F(\varepsilon)]\,d\psi(\varepsilon) = \int_{-\infty}^{u}[F_n(\varepsilon)-F(\varepsilon)]\,\psi'(\varepsilon)\,d\varepsilon,$$

$$\int_{v}^{\infty}[F_n(\varepsilon)-F(\varepsilon)]\,d\psi(\varepsilon) = \int_{v}^{\infty}[F_n(\varepsilon)-F(\varepsilon)]\,\psi'(\varepsilon)\,d\varepsilon,$$

also mit Rücksicht auf die Voraussetzung (9) für $u < -\varepsilon_0$, $v > \varepsilon_0$

$$\left|\int_{-\infty}^{u}[F_n(\varepsilon)-F(\varepsilon)]\,d\psi(\varepsilon)\right| \leqq \int_{-\infty}^{u}\omega(\varepsilon)\,d\varepsilon,$$

$$\left|\int_{v}^{\infty}[F_n(\varepsilon)-F(\varepsilon)]\,d\psi(\varepsilon)\right| \leqq \int_{v}^{\infty}\omega(\varepsilon)\,d\varepsilon.$$

Zu jeder positiven Zahl η können wir bei unseren Voraussetzungen also Zahlen u und v finden, so daß

$$(15)\qquad \left|\frac{1}{n}\sum_{\nu=1}^{n}\psi(\varepsilon_\nu) - \int_{-\infty}^{\infty}\psi(\varepsilon)\,\varphi(\varepsilon)\,d\varepsilon\right| < \eta + \left|\int_{u}^{v}[F_n(\varepsilon)-F(\varepsilon)]\,d\psi(\varepsilon)\right|.$$

Es ist aber, wie wir gleich sehen werden,

$$(16)\qquad \int_{u}^{v}[F_n(\varepsilon)-F(\varepsilon)]\,d\psi(\varepsilon) = \int_{u}^{v}[F_n(\varepsilon)-F(\varepsilon)]\,\psi'(\varepsilon)\,d\varepsilon \to 0 \quad \text{für} \quad n \to \infty.$$

Da η beliebig nahe bei 0 gewählt sein konnte, folgt aus (15) und (16) also die behauptete Gleichung (2).

Die Gültigkeit von (16), d. h. der Beziehung

$$(17)\qquad \int_{u}^{v}F_n(\varepsilon)\,\psi'(\varepsilon)\,d\varepsilon \to \int_{u}^{v}F(\varepsilon)\,\psi'(\varepsilon)\,d\varepsilon \quad \text{für} \quad n \to \infty.$$

kann man dem Satz von Arzelà [13]) entnehmen. Denn es ist nach (7) in $u \leqq \varepsilon \leqq v$

$$F_n(\varepsilon)\,\psi'(\varepsilon) \to F(\varepsilon)\,\psi'(\varepsilon) \quad \text{für} \quad n \to \infty$$

und, weil $\psi'(\varepsilon)$ in $u \leqq \varepsilon \leqq v$ beschränkt, etwa $|\psi'(\varepsilon)| \leqq S = S(u, v)$, und $0 \leqq F_n(\varepsilon) \leqq 1$ ist, für alle n

$$|F_n(\varepsilon)\,\psi'(\varepsilon)| \leqq S(u, v);$$

die Integranden $F_n(\varepsilon)\,\psi'(\varepsilon)$ sind also gleichmäßig beschränkt und streben gegen die R-integrierbare Grenzfunktion $F(\varepsilon)\,\psi'(\varepsilon)$.

Man braucht hier aber nicht den Arzelàschen Satz heranzuziehen; man kommt auch mit dem einfacheren Satz über Folgen gleichgradig integrierbarer Funktionen aus, den ich kürzlich angab [14]). Dazu ist festzustellen, daß die Funktionen $F_n(\varepsilon)\,\psi'(\varepsilon)$ über das Intervall $u \leqq \varepsilon \leqq v$ gleichgradig integrierbar sind. Es ist für $u \leqq \varepsilon' < \varepsilon'' \leqq v$

$$F_n(\varepsilon')\,\psi'(\varepsilon') - F_n(\varepsilon'')\,\psi'(\varepsilon'') = [F_n(\varepsilon') - F_n(\varepsilon'')]\,\psi'(\varepsilon') + F_n(\varepsilon'')\,[\psi'(\varepsilon') - \psi'(\varepsilon'')],$$

$$|F_n(\varepsilon')\,\psi'(\varepsilon') - F_n(\varepsilon'')\,\psi'(\varepsilon'')| \leqq S\,|F_n(\varepsilon'') - F_n(\varepsilon')| + |\psi'(\varepsilon'') - \psi'(\varepsilon')|.$$

Bei jeder Zerlegung $\mathfrak{z}$ des Intervalles $u \leqq \varepsilon \leqq v$ in Teilintervalle $\langle \varepsilon_\varrho, \varepsilon_{\varrho+1} \rangle$ $(\varrho = 0, \ldots, r-1)$ besteht also zwischen der Schwankung $\sigma_{n\varrho}$ von $F_n(\varepsilon)\,\psi'(\varepsilon)$ und der Schwankung σ_ϱ von $\psi'(\varepsilon)$ im ϱ-ten Teilintervall, weil $F_n(\varepsilon)$ monoton wächst, die Ungleichung

$$\sigma_{n\varrho} \leqq S\,[F_n(\varepsilon_{\varrho+1}) - F_n(\varepsilon_\varrho)] + \sigma_\varrho.$$

Daraus folgt, wenn $\Delta_\mathfrak{z} = \operatorname{Max}(\varepsilon_1 - \varepsilon_0, \ldots, \varepsilon_r - \varepsilon_{r-1})$ gesetzt wird,

$$\sum_{\varrho=0}^{r-1} \sigma_{n\varrho}(\varepsilon_{\varrho+1} - \varepsilon_\varrho) \leqq S\,\Delta_\mathfrak{z}\,[F_n(v) - F_n(u)] + \sum_{\varrho=0}^{r-1} \sigma_\varrho(\varepsilon_{\varrho+1} - \varepsilon_\varrho)$$

$$\leqq S\,\Delta_\mathfrak{z} + \sum_{\varrho=0}^{r-1} \sigma_\varrho(\varepsilon_{\varrho+1} - \varepsilon_\varrho)$$

und damit, weil die rechte Seite unabhängig von n ist und wegen der R-Integrierbarkeit von $\psi'(\varepsilon)$ durch hinreichend kleine Wahl von $\Delta_\mathfrak{z}$ beliebig klein gemacht werden kann, die gleichgradige Integrierbarkeit der Funktionen $F_n(\varepsilon)\,\psi'(\varepsilon)$ im Intervall $u \leqq \varepsilon \leqq v$.

3. Die Voraussetzungen des Satzes 4 sind für die Funktionen $\psi(\varepsilon) = |\varepsilon|^\varkappa$ $(\varkappa = 1, 2, \ldots, k)$ insbesondere erfüllt, wenn für alle n

[13]) Den Arzelàschen Satz und Angaben über die ältere Literatur findet man in der Enzyklopädie der math. Wissenschaften Bd. II_3, zweite Hälfte, S. 1076—1078, Angaben über neuere Literatur auch in Fußnote [1]) auf S. 296 meiner in der folgenden Fußnote [14]) genannten Arbeit.

[14]) M. Müller, Folgen gleichgradig integrierbarer Funktionen und die Vertauschbarkeit von Grenzübergang und Integration. Math. Zeitschr. **51**, 1948, S. 294—305. Ich benutze die Gelegenheit zur Berichtigung eines störenden Druckfehlers: Es ist stets H. S. Carslaw (statt H. S. Carlslaw) zu lesen.

und $|\varepsilon| > 1$

$$|\varepsilon|^k \, |F_n(\varepsilon) - F(\varepsilon)| \leqq \frac{c}{|\varepsilon|^\delta}, \tag{17}$$

wo c und δ positive Konstanten sind. Dann gelten für $\varkappa = 1, 2, \ldots, k$ die Beziehungen

$$\lim_{n \to \infty} \frac{1}{n} \sum_{\nu=1}^{n} |\varepsilon_\nu|^\varkappa = \int_{-\infty}^{\infty} |\varepsilon|^\varkappa \varphi(\varepsilon) \, d\varepsilon .$$

Ist $k \geqq 2$ in (17), so gelten also insbesondere für durchschnittlichen Fehler ϑ und mittleren Fehler μ die Formeln

$$\vartheta = \lim_{n \to \infty} \frac{1}{n} \sum_{\nu=1}^{n} |\varepsilon_\nu| , \qquad \mu = \lim_{n \to \infty} \sqrt{\frac{1}{n} \sum_{\nu=1}^{n} \varepsilon_\nu^2} .$$

Die Bedingungen (9), bzw. (17) lassen sich dahin deuten, daß in der Fehlerfolge $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_\nu, \ldots$ mit wachsendem ν Fehler von beliebig großem absolutem Betrag nicht zu häufig auftreten dürfen.

(Eingegangen am 18. November 1949.)

Über die Anzahl der Lösungen gewisser diophantischer Gleichungen dritten Grades.

Herrn Oskar Perron zum 70. Geburtstag am 7. Mai 1950 gewidmet.

Von

Trygve Nagell in Uppsala.

§ 1.

Es bedeute Form eine ganzzahlige, irreduzible, binäre kubische Form mit negativer Diskriminante. Durch (a, b, c, d) bezeichnen wir die Form

$$F(x, y) = a x^3 + b x^2 y + c x y^2 + d y^3.$$

Ihre Diskriminante ist bekanntlich

$$D(F) = b^2 c^2 + 18 a b c d - 4 a c^3 - 4 d b^3 - 27 a^2 d^2.$$

Führt man auf $F(x, y)$ die ganzzahlige lineare Transformation

$$x = e u + f v, \qquad y = g u + h v$$

aus, so erhält man die neue Form in u und v

$$G(u, v) = a_1 u^3 + b_1 u^2 v + c_1 u v^2 + d_1 v^3$$

mit $a_1 = F(e, g)$ und $d_1 = F(f, h)$. Die Diskriminante der neuen Form ist gegeben durch

$$D(G) = (e h - f g)^6 \cdot D(F).$$

Die Formen F und G heißen äquivalent, in Zeichen $F \sim G$, wenn die Transformationsdeterminante $e h - f g = \pm 1$ ist. Die Gesamtheit aller untereinander äquivalenten Formen bildet eine Klasse. Äquivalente Formen haben dieselbe Diskriminante.

Es sei N eine ganze Zahl. Wenn es zwei ganze Zahlen x und y gibt, für welche die Gleichung

$$F(x, y) = a x^3 + b x^2 y + c x y^2 + d y^3 = N$$

besteht, sagt man, daß N durch die Form (a, b, c, d) darstellbar ist. Sind x und y teilerfremd, so ist die Darstellung eigentlich.

Äquivalente Formen stellen offenbar genau dieselben Zahlen dar; und die Anzahl der Darstellungen ist genau dieselbe.

Einem bekannten Resultate von Axel Thue zufolge ist die Anzahl der Darstellungen einer gegebenen ganzen Zahl endlich.

§ 2.

In einer früheren Arbeit in dieser Zeitschrift[1]) habe ich u. a. den folgenden Satz bewiesen:

Satz 1. *Es gibt höchstens drei Darstellungen der Zahl* 1 *durch eine binäre kubische Form mit negativer Diskriminante, von den folgenden drei Fällen abgesehen: 1) Die Form* $(1, 1, -1, 1)$ *und die damit äquivalenten Formen gestatten genau vier Darstellungen. 2) Die Form* $(1, 0, 1, 1)$ *und die damit äquivalenten Formen gestatten genau vier Darstellungen. 3) Die Form* $(1, 0, -1, 1)$ *und die damit äquivalenten Formen gestatten genau fünf Darstellungen. Im ersten Ausnahmefall ist* $D = -44$, *im zweiten ist* $D = -31$ *und im dritten ist* $D = -23$. *Ist die Anzahl der Darstellungen* $\leqq 3$, *so ist* $D \leqq -59$. *Gibt es drei Darstellungen, so ist die Form äquivalent einer Form* $(1, p, q, 1)$ *mit ganzzahligen Koeffizienten* p *und* q.

Wir setzen nun

$$F(x, y) = a x^3 + b x^2 y + c x y^2 + d y^3$$

und nehmen an, daß die Form (a, b, c, d) drei (oder mehr) Darstellungen der Zahl 1 gestattet. Nach dem letzten Teile des vorstehenden Satzes gibt es dann zwei ganze Zahlen p und q, so daß

$$(a, b, c, d) \sim (1, p, q, 1).$$

Setzen wir

$$G(u, v) = u^3 + p u^2 v + q u v^2 + v^3,$$

so gibt es dann eine lineare ganzzahlige Transformation

$$x = e u + f v, \qquad y = g u + h v,$$

mit $e h - f g = \pm 1$, die die Form $F(x, y)$ in die Form $G(u, v)$ transformiert. Dann gilt offenbar

$$F(e, g) = 1 \quad \text{und} \quad F(f, h) = 1,$$

und es ergibt sich das folgende Resultat:

Hilfssatz. *Gestattet die Form* $F(x, y)$ *drei (oder mehr) Darstellungen der Zahl* 1, *so gibt es zwei ganzzahlige Lösungen* $x = e, y = g$ *und* $x = f, y = h$ *der Gleichung*

$$F(x, y) = 1,$$

so daß

$$e h - f g = \pm 1.$$

[1]) T. Nagell, Darstellung ganzer Zahlen durch binäre kubische Formen mit negativer Diskriminante, Math. Zeitschrift, Bd. 28 (1929). Vgl. auch T. Nagell, L'Analyse indéterminée de degré supérieur, Mémorial des Sciences Mathématiques, fasc. XXXIX, Paris 1929, p. 48—54.

§ 3.

Es sei $F(x, y)$ eine Form und N eine ganze Zahl $\neq 0$. Das Problem, die Darstellungen der Zahl N durch $F(x, y)$ zu bestimmen, läßt sich dann bekanntlich auf das Problem zurückführen, die Darstellungen der Zahl 1 durch gewisse aus $F(x, y)$ herleitbare Formen zu bestimmen [2]). Dabei erhält man auch leicht eine allein von N abhängige obere Grenze für die Anzahl der Darstellungen der Zahl N.

Wir wollen hier den Fall $N = 2$ näher untersuchen. Es bezeichne M die Anzahl der ganzzahligen Lösungen der Gleichung

$$F(x, y) = a x^3 + b x^2 y + c x y^2 + d y^3 = 2. \tag{1}$$

Hier können x und y nicht gleichzeitig gerade sein. Es sei M_1 die Anzahl der Lösungen von (1) mit ungeradem x und ungeradem y; ferner sei M_2 die Anzahl der Lösungen von (1) mit geradem y und ungeradem x; es sei endlich M_3 die Anzahl der Lösungen von (1) mit ungeradem y und geradem x. Dann ist $M = M_1 + M_2 + M_3$.

Sind x und y beide ungerade, so ist die Zahl $a + b + c + d$ gerade. Durch die Transformation $x = v + 2u$, $y = v$ geht dann die Form (a, b, c, d) in die Form

$$(8a,\ 12a + 4b,\ 6a + 4b + 2c,\ a + b + c + d)$$

hinüber. Hat (a, b, c, d) die Diskriminante D, so hat die neue Form die Diskriminante $D_1 = 2^6 D$. Die Zahl M_1 ist folglich gleich der Anzahl der Darstellungen der Zahl 1 durch die Form

$$(4a,\ 6a + 2b,\ 3a + 2b + c,\ \tfrac{1}{2}(a + b + c + d)). \tag{2}$$

Diese Form hat die Diskriminante $D_2 = \frac{1}{16} D_1 = 4D$. Die Zahl $4D$ kann keinen der Werte -44, -31 oder -23 haben; denn es gibt keine Form mit der Diskriminante -11 [3]). Nach Satz 1 hat somit die Form (2) höchstens drei Darstellungen der Zahl 1, und folglich ist $M_1 \leqq 3$. Wenn $a + c$ ungerade ist, ist sogar $M_1 \leqq 2$. Denn hätte die Gleichung

$$4a u^3 + (6a + 2b) u^2 v + (3a + 2b + c) u v^2 + \tfrac{1}{2}(a + b + c + d) v^3 = 1 \tag{3}$$

drei Lösungen, so müßte es nach dem Hilfssatze in § 2 zwei Lösungen $u = e$, $v = g$ und $u = f$, $v = h$ geben, so daß

$$e h - f g = \pm 1. \tag{4}$$

In der Gleichung (3) ist v ungerade, weil y es ist. In (4) sind also die Zahlen g und h ungerade; die eine von den Zahlen e und f ist

[2]) Vgl. hierzu T. Nagell, L'Analyse indéterminée de degré supérieur, Mémorial des Sciences Mathématiques, fasc. XXXIX, Paris 1929, p. 41—42.

[3]) Siehe G. B. Mathews and W. E. H. Berwick, On the reduction of arithmetical binary cubics which have a negative determinant, Proc. London Math. Soc., 10 (1912), S. 48—53.

dann gerade und die andere ungerade. Aus (3) folgt modulo 2 für gerades u

$$\tfrac{1}{2}(a+b+c+d) \equiv 1 \pmod 2;$$

für ungerades u folgt aber, weil $a+c$ ungerade ist,

$$\tfrac{1}{2}(a+b+c+d) \equiv 0 \pmod 2.$$

Die Zahlen u müssen somit entweder alle gerade oder alle ungerade sein. Die Relation (4) kann folglich nicht bestehen, und es ist $M_1 \leqq 2$.

Es sei nun y gerade und x ungerade; dann ist a gerade. Durch die Transformation $x = u$, $y = 2v$ geht dann die Form (a, b, c, d) in die Form $(a, 2b, 4c, 8d)$ hinüber. Die Zahl M_2 ist folglich gleich der Anzahl der Darstellungen der Zahl 1 durch die Form

$$(\tfrac{1}{2}a,\ b,\ 2c,\ 4d). \tag{5}$$

Diese Form hat offenbar die Diskriminante $4D$. Es ist $4D$ von jeder der Zahlen -44, -31 und -23 verschieden, weil es keine Form mit der Diskriminante -11 gibt. Nach Satz 1 hat somit die Form (5) höchstens drei Darstellungen der Zahl 1, und folglich ist $M_2 \leqq 3$. Wenn b ungerade ist, ist sogar $M_2 \leqq 2$. Denn hätte die Gleichung

$$\tfrac{1}{2}a u^3 + b u^2 v + 2c u v^2 + 4d v^3 = 1 \tag{6}$$

drei Lösungen, so müßte es nach dem Hilfssatze in § 2 zwei Lösungen $u = e$, $v = g$ und $u = f$, $v = h$ geben, so daß

$$eh - fg = \pm 1. \tag{7}$$

In der Gleichung (6) ist u ungerade, weil x es ist. In (7) sind also die Zahlen e und f ungerade; die eine von den Zahlen g und h ist dann gerade und die andere ungerade. Aus (6) folgt modulo 2 für gerades v

$$\tfrac{1}{2}a \equiv 1 \pmod 2;$$

für ungerades v folgt aber, weil b ungerade ist,

$$\tfrac{1}{2}a \equiv 0 \pmod 2.$$

Die Zahlen v müssen somit entweder alle gerade oder alle ungerade sein. Die Relation (7) kann folglich nicht bestehen, und es ist $M_1 \leqq 2$.

Sind in (1) alle Koeffizienten gerade, so erhält man durch Division mit 2 eine Darstellung der Zahl 1. Nach Satz 1 ist dann $M \leqq 5$.

Sind in (1) alle Koeffizienten ungerade, so müssen offenbar sowohl x wie y ungerade sein. Nach dem, was soeben bewiesen wurde, ist dann $M = M_1 \leqq 3$.

Sind a, b und c gerade, aber d ungerade, so muß y gerade sein. Dann wird $M = M_2 \leqq 3$.

Sind a, b und d gerade, aber c ungerade, so muß entweder y oder x gerade sein. Man erhält dann offenbar $M = M_2 + M_3 \leqq 3 + 2 = 5$.

Sind a und b gerade, aber c und d ungerade, so muß entweder y gerade sein oder es müssen sowohl x wie y ungerade sein. Man erhält dann $M = M_1 + M_2 \leqq 2 + 3 = 5$.

Sind a und c gerade, aber b und d ungerade, so muß entweder y gerade sein oder es müssen sowohl x wie y ungerade sein. Man erhält dann $M = M_1 + M_2 \leqq 3 + 2 = 5$.

Sind a und d gerade, aber b und c ungerade, so kann jeder von den drei möglichen Fällen auftreten. Man erhält dann $M = M_1 + M_2 + M_3 \leqq 2 + 2 + 2 = 6$.

Ist a gerade, aber b, c und d ungerade, so muß y gerade sein. Dann folgt $M = M_2 \leqq 2$.

Sind a und d ungerade, aber b und c gerade, so müssen sowohl x wie y ungerade sein. Es ist folglich $M = M_1 \leqq 2$.

Sind a, b und d ungerade, aber c gerade, so ist offenbar $M = 0$.

Die übrigen Fälle erhält man durch gleichzeitiges Umtauschen von a und d und von b und c. Alle Möglichkeiten sind dann erledigt.

Wir formulieren nur das folgende spezielle Resultat:

Satz 2. *Es gibt höchstens sechs Darstellungen der Zahl 2 durch eine binäre kubische Form mit negativer Diskriminante.*

Es gibt höchstens zwei Darstellungen der Zahl 2 durch die Form (a, b, c, d) in den folgenden Fällen: 1) a und d sind ungerade, b und c sind gerade; 2) entweder a oder d ist gerade und die übrigen drei Koeffizienten sind ungerade.

§ 4.

Mit derselben Methode wie in § 3 läßt sich auch eine obere Grenze für die Anzahl der Darstellungen der Zahl 4 bestimmen.

Es bezeichne N die Anzahl der ganzzahligen Lösungen der Gleichung

$$F(x, y) = a x^3 + b x^2 y + c x y^2 + d y^3 = 4. \tag{8}$$

Hier können x und y nicht gleichzeitig gerade sein. Es sei N_1 die Anzahl der Lösungen von (8) mit ungeradem x und ungeradem y; ferner sei N_2 die Anzahl der Lösungen von (8) mit geradem y und ungeradem x; es sei endlich N_3 die Anzahl der Lösungen von (8) mit ungeradem y und geradem x. Dann ist $N = N_1 + N_2 + N_3$.

Sind x und y beide ungerade, so ist $x \equiv \pm y \pmod 4$ entweder für das obere oder für das untere Zeichen. Durch die Transformation $x = \pm v + 2u$, $y = v$ geht dann die Form (a, b, c, d) in die Form

$$(64a, \pm 48a + 16b, 12a \pm 8b + 4c, \pm a + b \pm c + d)$$

hinüber. Die Zahl N_1 ist folglich gleich der Anzahl der Darstellungen der Zahl 1 durch die ganzzahlige Form

$$(16a, \pm 12a + 4b, 3a \pm 2b + c, \tfrac{1}{4}(\pm a + b \pm c + d)).$$

Diese Form hat die Diskriminante $16D$. Durch dasselbe Räsonnement wie in § 3 ergibt sich dann: Es ist $N_1 \leqq 3$ und sogar $\leqq 2$, wenn $a+c$ ungerade ist.

Ist y gerade und x ungerade, so muß a gerade sein. Die Zahl N_2 ist dann gleich der Anzahl der Darstellungen der Zahl 2 durch die Form

$$(\tfrac{1}{2}a, b, 2c, 4d).$$

Nach dem, was soeben in § 3 bewiesen wurde, ist somit $N_2 \leqq 5$.

Ist x gerade und y ungerade, so muß d gerade sein. Die Zahl N_3 ist dann gleich der Anzahl der Darstellungen der Zahl 2 durch die Form

$$(4a, 2b, c, \tfrac{1}{2}d).$$

Nach dem, was soeben in § 3 bewiesen wurde, ist somit $N_3 \leqq 5$.

Ist a ungerade, so ist offenbar $N_2 = 0$ und $N = N_1 + N_3 \leqq 3+5 = 8$. Ist d ungerade, so ist $N_3 = 0$ und $N = N_1 + N_2 \leqq 3+5 = 8$.

Sind sowohl a wie d ungerade, so müssen b und c gerade sein; dann ist $a+c$ ungerade und somit $N = N_1 \leqq 2$.

Es seien demnächst a und d beide gerade. Sind dann b und c gerade, so ist N gleich der Anzahl der Darstellungen der Zahl 2 durch die Form $(\frac{1}{2}a, \frac{1}{2}b, \frac{1}{2}c, \frac{1}{2}d)$ und somit $N \leqq 6$. Sind b und c beide ungerade, so ist $a+c$ ungerade und somit $N_1 \leqq 2$ und $N = N_1 + N_2 + N_3 \leqq 2+5+5 = 12$. Ist die eine der Zahlen b und c gerade und die andere ungerade, so ist $N_1 = 0$ und $N = N_2 + N_3 \leqq 10$.

Wir formulieren das spezielle Resultat:

Satz 3. *Es gibt höchstens zwölf Darstellungen der Zahl 4 durch eine binäre kubische Form mit negativer Diskriminante.*

Es gibt höchstens zwei Darstellungen der Zahl 4 durch die Form (a, b, c, d), *wenn* a *und* d *ungerade,* b *und* c *gerade sind.*

§ 5.

Es fehlt noch eine allgemeine Methode, um die eventuellen Darstellungen einer gegebenen ganzen Zahl durch eine gegebene kubische Form zu bestimmen. Wir haben auch kein Mittel, um zu entscheiden, ob die Zahl 1 durch eine gegebene Formenklasse darstellbar sei oder nicht. In einigen speziellen Fällen gelingt es aber, mit verschiedenen Methoden die sämtlichen Darstellungen der Zahl 1 zu bestimmen; vgl. hierzu meine oben zitierte Arbeit ‚L'Analyse indéterminée de degré supérieur', p. 41—51.

Wir betrachten zuletzt einige numerische Beispiele.

Die diophantische Gleichung

$$x^3 - x^2y + xy^2 + y^3 = 2$$

hat offenbar die Lösungen $x = y = 1$ und $x = 1$, $y = -1$. Nach Satz 2 gibt es keine weitere Lösung dieser Gleichung.

Demselben Satz zufolge hat die diophantische Gleichung

$$x^3 + 2x^2y - 2xy^2 + y^3 = 2$$

genau die beiden Lösungen $x = y = 1$ und $x = 3,\ y = -1$.

Die diophantische Gleichung

$$2x^3 - 3xy^2 + 2y^3 = 2 \tag{9}$$

hat die Lösungen $x = 0,\ y = 1;\ x = 1,\ y = 0;\ x = 3,\ y = -2$.

Um die eventuellen übrigen Lösungen zu finden, verfahren wir wie in § 3. Für gerades y erhält man dann die Gleichung

$$u^3 - 6uv^2 + 8v^3 = 1 \tag{10}$$

und für gerades x die Gleichung

$$u^3 - 3u^2v + 8v^3 = 1. \tag{11}$$

Nach den Überlegungen in § 3 hat die Gleichung (10) höchstens drei und die Gleichung (11) höchstens zwei Lösungen. Mittelst der sogen. „Methode der Erhöhung" ist es jedoch möglich zu zeigen, daß die Gleichung (10) genau zwei Lösungen hat, nämlich $u = 1,\ v = 0$ und $u = 3,\ v = -1$, und daß die Gleichung (11) die einzige Lösung $u = 1,\ v = 0$ hat. Die Gleichung (9) hat somit genau die oben angegebenen drei Lösungen.

Interessante Beispiele mit höchstens zwei Lösungen erbieten die Gleichungen

$$Ax^3 + By^3 = 2 \tag{12}$$

und

$$Ax^3 + By^3 = 4, \tag{13}$$

wo A und B ungerade sind. (Nach den letzten Teilen von den Sätzen 2 und 3.) Ich kenne übrigens bisher keine Gleichung weder von der Form (12) noch von der Form (13) mit zwei Lösungen. Die Möglichkeit besteht deshalb, daß es höchstens eine Darstellung der Zahl 2 oder der Zahl 4 durch die Form $(A, 0, 0, B)$ gibt.

In gewissen Fällen gelingt es, die Darstellungen zu bestimmen. Als Beispiel betrachten wir die Gleichung

$$x^3 + 3y^3 = 2. \tag{14}$$

Sie hat die Lösung $x = -1,\ y = 1$. Es sei $\Theta = \sqrt[3]{3}$. Im kubischen Körper $K(\Theta)$ ist bekanntlich $\Theta^2 - 2$ die zwischen 0 und 1 belegene Fundamentaleinheit. Aus (14) folgt dann

$$x + \Theta y = (\Theta - 1)(\Theta^2 - 2)^m, \tag{15}$$

wo m eine ganze Zahl ist. Wegen

$$0 < \frac{x + \Theta y}{\Theta - 1} = \frac{1 - \Theta + \Theta^2}{x^2 - \Theta xy + \Theta^2 y^2} \leqq 1$$

muß in (15) $m \geqq 0$ sein. Aus (15) folgt dann durch Nullsetzen des Koeffizienten von Θ^2:

$$\binom{m}{1} 2^{m-1} + \sum_{k=1} (-1)^k \binom{m}{3k+1} 2^{m-3k-1} \cdot 3^{2k} = \sum_{k=1} (-1)^k \binom{m}{3k-1} 2^{m-3k+1} \cdot 3^{2k-1}.$$

Ist $m \geqq 1$, folgt hieraus durch Division mit m:

$$2^{m-1} + \sum_{k=1} (-1)^k \binom{m-1}{3k} \frac{2^{m-3k-1} \cdot 3^{2k}}{3k+1} = \sum_{k=1} (-1)^k \binom{m-1}{3k-2} \frac{2^{m-3k+1} \cdot 3^{2k-1}}{3k-1}.$$

Diese Gleichung ist aber unmöglich modulo 3. Die Relation (15) besteht somit nur für $m = 0$, und die Gleichung (14) hat die einzige Lösung $x = -1$, $y = 1$.

Genau in derselben Weise behandelt man die Gleichung

$$x^3 + 3y^3 = 4. \tag{16}$$

Aus ihr folgt

$$x + \Theta y = (\Theta + 1)(\Theta^2 - 2)^m.$$

Wie oben beweist man, daß diese Relation nur für $m = 0$ bestehen kann. Die Gleichung (16) hat folglich keine Lösung außer der trivialen $x = y = 1$.

(Eingegangen am 15. Dezember 1949.)

Eine reelle Deutung der komplexen Vektoren.

Herrn Oskar Perron zum 70. Geburtstag am 7. Mai 1950 gewidmet.

Von

Frank Löbell in München.

Es ist gewiß schon in früheren Zeiten versucht worden, die imaginären Vektoren des dreidimensionalen affinen bzw. euklidischen Raumes reell zu deuten. Wenn es auch nahe liegt, einen solchen Vektor durch ein geordnetes Paar reeller Vektoren darzustellen, und es auch leicht zu erkennen ist, daß dann der Multiplikation eines Vektors mit einem komplexen Skalar das affine Bild einer gewissen, auf ein Paar gleich langer, zueinander senkrechter Vektoren ausgeübten Drehstreckung entspricht, so scheint es doch schwierig zu sein, auf diesem Wege auch für die anderen Produktbildungen der Vektorrechnung ansprechende Deutungen zu finden.

Nun eröffnet sich aber von einer ganz anderen Seite her eine Möglichkeit einer reellen Veranschaulichung der Vektoren von drei komplexen Dimensionen und aller mit ihnen vorzunehmenden Operationen: Man trifft das Wesentliche, wenn man sagt, daß man ihnen die reellen eigentlichen *Geschwindigkeitsschrauben des dreidimensionalen hyperbolischen Raumes* umkehrbar eindeutig zuordnen kann; speziell wird dabei die Menge der komplexen Einheitsvektoren umkehrbar eindeutig auf die der reellen eigentlichen gerichteten Geraden dieses Raumes, die der isotropen Vektoren auf die seiner reellen unendlich fernen Punkte, allerdings nicht umkehrbar eindeutig, abgebildet. Den Vektoroperationen aber entsprechen einfache Verknüpfungen zwischen den genannten geometrischen Gebilden.

Der Darlegung dieser Theorie, die auf alten Überlegungen beruht, die hauptsächlich Klein in seinen Vorlesungen durchgeführt hat[1]), mögen die folgenden Seiten gewidmet sein.

1. Wir wollen uns die absolute Fläche des dreidimensionalen hyperbolischen Raumes auf eine Riemannsche Zahlenkugel im euklidischen Raum abgebildet denken, so daß ihren reellen Punkten, d. h. den reellen unendlich fernen Punkten des nichteuklidischen Raumes umkehrbar eindeutig die komplexen Zahlen ζ als Koordinaten zugewiesen sind.

[1]) Vergl. hauptsächlich F. Klein, Vorl. ü. d. hypergeometrische Funktion. Autographierte Vorlesung vom W.-S. 1893/94. Neue Ausgabe Berlin 1933, S. 179-196. Siehe auch H. Beck, Die Strahlenketten im hyperbolischen Raum. Diss. Hannover 1905.

Dann können die reellen *eigentlichen Geraden* des hyperbolischen Raumes eindeutig den *binären quadratischen Formen*

$$g \equiv g_1 \xi^2 + g_2 \xi \eta + g_3 \eta^2 \tag{1}$$

mit komplexen Koeffizienten g_k $(k = 1, 2, 3)$, deren Diskriminante $g_2^2 - 4 g_1 g_3$ nicht verschwindet, zugeordnet werden, während umgekehrt die Zahlen g_k durch eine solche Gerade nur bis auf einen willkürlichen, von Null verschiedenen Proportionalitätsfaktor ϱ bestimmt sind; die reellen unendlich fernen Punkte sind den Formen (1) mit verschwindender Diskriminante zuzuweisen[2]): das geschieht in naheliegender Weise dadurch, daß die Werte der aus den Nullstellen (ξ, η) der Form g gebildeten Quotienten

$$\zeta = \xi : \eta \tag{2}$$

als Koordinaten der unendlich fernen Punkte, kurz[3]) der „Enden" derjenigen Geraden festgesetzt werden, die g entsprechen soll, und umgekehrt; diese Gerade werden wir ebenfalls mit g bezeichnen. Es ist zu beachten, daß jedes Büschel von Geraden g, die die absolute Fläche in einem Punkte berühren, dieselbe Formenschar ϱg bestimmt, zwei verschiedene Gerade eines solchen Büschels also nicht durch ihre Formen unterschieden werden können; es muß daher vereinbart werden, daß an die Stelle dieser Tangenten die Berührpunkte[4]) treten sollen.

2. Da die *Bewegungen des hyperbolischen Raumes* bekanntlich die Transformationen der absoluten Fläche in sich induzieren, die durch die nicht konstanten, gebrochen linearen Funktionen der Variablen ζ mit komplexen Koeffizienten oder, da (2) allgemein gelten soll, durch

---

[2]) Beck nennt in seiner in der vorigen Fußnote zitierten Schrift die eigentlichen Geraden des hyperbolischen Raumes „Strahlen", die unendlich fernen Punkte „Punktstrahlen". In dieser wie in anderen Arbeiten Beck's spielt das Study'sche Übertragungsprinzip — die Möglichkeit, die Gesamtheit der reellen eigentlichen Geraden des hyperbolischen Raumes mit Einschluß der unendlich fernen Punkte umkehrbar eindeutig auf die Gesamtheit der komplexen Punkte der projektiven Ebene abzubilden — eine große Rolle; es braucht kaum darauf hingewiesen zu werden, daß dieses Prinzip sich unmittelbar ergibt, wenn man die Koeffizienten der Form g als homogene Dreieckskoordinaten deutet. Vgl. besonders Beck, Über einen Satz von Herrn Kubota. Tôhoku Math. Journ. 24 (1924), S. 190 ff., wo schon die binären quadratischen Formen durch ternäre Linearformen, d. s. im Grunde genommen Vektoren, ersetzt werden. — Da die reelle Kugel ein Bild der komplexen projektiven Geraden ist, erkennt man auch den Zusammenhang mit dem Hesseschen Übertragungsprinzip.

[3]) Diese Bezeichnung wird im Anschluß an Hilbert gebraucht.

[4]) Das sind eben die „Punktstrahlen" nach Beck; s. Fußnote 2 oben.

Für den euklidischen Raum schuf die Begriffe „Strahl" und „Punktstrahl" schon E. Study; Ein neuer Zweig der Geometrie, Jahresber. d. DMV. XI (1902), S. 101, und Geometrie der Dynamen, Leipzig 1903, S. 200 u. 261.

die nicht ausgearteten linearen Substitutionen

$$(3) \qquad \xi' = \alpha\xi + \beta\eta, \qquad \eta' = \gamma\xi + \delta\eta, \qquad (\alpha\delta - \beta\gamma \neq 0),$$

dargestellt werden, so müssen wir zur Erreichung unseres Zieles die einschlägigen Tatsachen der klassischen Invariantentheorie heranziehen[5]).

a) Erinnern wir uns zunächst daran, daß zwei Formen g und h die *simultane Invariante*

$$(4) \qquad (g, h) = 2\,g_1 h_3 - g_2 h_2 + 2\,g_3 h_1$$

besitzen, die für $g \equiv h$ in die *Invariante* von g

$$(4') \qquad (g, g) = 4\,g_1 g_3 - g_2^2$$

übergeht, der wir schon oben mit anderem Vorzeichen begegneten.

Dazu tritt die *simultane Kovariante* von g und h, die mit Hilfe der Funktionaldeterminante der Formen erklärt werden kann:

$$(5) \qquad [g, h] = \tfrac{1}{2}\left(\frac{\partial g}{\partial \xi}\frac{\partial h}{\partial \eta} - \frac{\partial h}{\partial \xi}\frac{\partial g}{\partial \eta}\right).$$

Ferner kommt hinzu die *Simultaninvariante* der drei Formen f, g, h, die mit Hilfe von (4) und (5) folgendermaßen definiert werde:

$$(6) \qquad [f, g, h] = (f, [g, h]).$$

Es sei daran erinnert, daß es sich bei (4), (5) und (6) um relative Invarianten bzw. Kovarianten handelt; die Gewichte von (4), (5) und (6) sind bez. 2, 1 und 3.

b) Aus den Erklärungen (4), (5) und (6) und aus der trivialen Bedeutung der Ausdrücke

$$g + h \text{ und } \varrho g,$$

wo ϱ eine komplexe Zahl sei, folgen einige leicht zu verifizierende Beziehungen, die später für uns wertvoll sein werden:

$$(7) \quad (g, h) = (h, g), \qquad (f + g, h) = (f, h) + (g, h), \qquad (\varrho g, h) = \varrho(g, h);$$

$$(8) \quad [g, h] = -[h, g], \qquad [f + g, h] = [f, h] + [g, h], \qquad [\varrho g, h] = \varrho[g, h];$$

$$(9) \quad [f, g, h] = [g, h, f] = [h, f, g] = -[f, h, g] = -[h, g, f] = -[g, f, h].$$

Die Operationen (7) und (8) dürfen wir als *Multiplikationen* bezeichnen[6]), da sie bez. jedes Faktors distributiv zur Addition sind; das gleiche gilt von dem dreifachen Produkt (9).

---

[5]) Siehe Clebsch-Lindemann, Vorl. ü. Geometrie, I$_1$, Leipzig und Berlin 1932, S. 362 ff.

In der vorliegenden Arbeit werden die Formen wie bei Klein ohne Binomialkoeffizienten geschrieben. Die Invarianten und Kovarianten werden im folgenden meist mit anderen Zahlenfaktoren, zum Teil nur mit anderem Vorzeichen gebraucht als gewöhnlich; hierzu vergl. Fußnote 7 dieser Arbeit.

[6]) Eine Verknüpfung zwischen mehreren Größen derselben Art oder verschiedener Arten wird als Multiplikation bezeichnet, wenn für jede der Größenarten eine Addition definiert ist und die besagte Verknüpfung bezüglich jeder der Größen distributiv zu ihrer Addition ist. Hierüber darf eine stillschweigende

Wir können in den Relationen (7), (8), (9) Regeln für ein *Rechnen mit Formen* sehen, deren formale Übereinstimmung mit den Gesetzen der Vektorrechnung im dreidimensionalen euklidischen Raum in die Augen springt. Das tritt noch auffallender hervor, wenn wir durch Ausrechnen gemäß (4) und (5) die Gültigkeit der „Zerlegungsformel“ [7])

$$[f,[g,h]] = g(f,h) - h(f,g)$$

und der unmittelbar aus dieser fließenden „Vertauschungsformel“

$$[f,[g,h]] + [g,[h,f]] + [h,[f,g]] = 0$$

bestätigen. Es wird nun aber darauf ankommen, den geometrischen Sinn dieses Kalküls zu ergründen.

3. Machen wir uns zunächst klar, welche geometrische, d. h. gegenüber der Fundamentalgruppe der Bewegungen des hyperbolischen Raumes invariante Bedeutung das *Verschwinden der Invarianten und Kovarianten* besitzt.

a) Das Bestehen der Gleichung

$$(g,h) = 0 \tag{10}$$

ist die notwendige und hinreichende Bedingung dafür, daß *die Geraden g und h sich senkrecht schneiden* oder, wie wir kurz sagen wollen, „*sich kreuzen*“. Das ergibt sich unmittelbar daraus, daß, wie man weiß, in diesem und nur in diesem Fall die Endenpaare der beiden Geraden harmonisch liegen. Dabei ist Folgendes zu beachten: Wenn eine der Geraden, etwa g, zu einem unendlich fernen Punkt entartet, so fällt dieser mindestens mit einem der Enden der anderen, h, zusammen.

b) Die Beziehung

$$[g,h] \equiv 0 \tag{11}$$

soll bedeuten, daß die links stehende Form für alle Werte von ξ und η verschwinde; dies ist die charakteristische Bedingung dafür, daß *g und h eine und dieselbe Gerade* bedeuten. Denn die Formen g und h haben dann entsprechend proportionale Koeffizienten, wie man sofort erkennt, wenn man die Funktionaldeterminante (5) explizit niederschreibt:

$$[g,h] = \begin{vmatrix} g_1 & g_2 & g_3 \\ h_1 & h_2 & h_3 \\ \eta^2 & -2\xi\eta & \xi^2 \end{vmatrix}. \tag{5'}$$

Übereinkunft unter den Mathematikern festgestellt werden; trotzdem muß es einmal ausdrücklich gesagt werden, da gelegentlich die Berechtigung dieser Sprechweise angezweifelt wurde. Von verschiedener Art sind Größen zu nennen, wenn sie nicht durch eine Addition miteinander verknüpfbar sind.

[7]) Die volle Übereinstimmung dieser Formel mit der analogen der gewöhnlichen Vektorrechnung wurde erreicht durch geeignete Wahl der Zahlenfaktoren der In- und Kovarianten; vergl. den Schlußsatz von Fußnote 5 dieser Arbeit.

Dabei ist es zulässig, daß die Geraden in unendlich ferne reelle Punkte ausgeartet sind. Insbesondere ist (11) erfüllt, wenn $g \equiv h$ ist, wie schon aus der ersten der Gleichungen (8) hervorgeht.

Dieses Ergebnis können wir auch so aussprechen: Das Bestehen von (11) ist die notwendige und hinreichende Bedingung dafür, daß die *Formen g und h linear abhängig* sind.

c) Schließlich finden wir: Das Erfülltsein der Beziehung

$$[f, g, h] = 0 \tag{12}$$

ist die charakteristische Bedingung dafür, daß die drei *Formen f, g, h linear abhängig* sind. Denn aus (4), (5) und (6) berechnen wir

$$[f, g, h] = 2 \begin{vmatrix} f_1 & f_2 & f_3 \\ g_1 & g_2 & g_3 \\ h_1 & h_2 & h_3 \end{vmatrix}. \tag{6'}$$

Geometrisch bedeutet das aber, wie wir bald sehen werden, daß es *mindestens eine Gerade* gibt, *die alle Geraden f, g, h kreuzt.*

Schon nach (9) ist (12) erfüllt, wenn zwei der Formen f, g, h übereinstimmen.

d) Wir bemerken, daß *mehr als drei* unserer *Formen immer linear abhängig* sind.

e) Der Vollständigkeit halber sei noch die Bedingung dafür genannt, daß die *Form g allein schon linear abhängig* ist; sie lautet:

$$g \equiv 0. \tag{13}$$

Es sei betont, daß wir unter einer Geraden, wenn wir von ihr schlechtweg sprechen, nie dieses „*Nullgebilde*" verstehen wollen, ohne daß dies ausdrücklich gesagt wird.

4. Schreiten wir nun zur Deutung der Invariante (4) und der Kovariante (5) für den Fall, daß sie nicht verschwinden!

a) Wir beginnen mit der Funktion $[g, h]$, die nach (5) eine quadratische Form l ist und daher, wenn sie nicht identisch verschwindet, eine eigentliche Gerade darstellt; und zwar ist es auf Grund von (10) eine solche, die die beiden Geraden g und h kreuzt (d. h. senkrecht durchdringt), da für $l = [g, h]$ nach (9)

$$(g, l) = 0 \quad \text{und} \quad (h, l) = 0$$

ist. Durch explizites Niederschreiben dieser Gleichungen gemäß (4) erkennen wir, daß es unter der gemachten Voraussetzung $[g, h] \not\equiv 0$ auch nur das eine *gemeinsame Lot der beiden Geraden g und h*

$$l = \varrho\,[g, h] \tag{14}$$

gibt. Dieses kann allerdings, falls nämlich die Diskriminante der Form $[g, h]$ verschwindet, die absolute Fläche berühren; diese Größe ist

aber zugleich die Resultante der beiden Formen g und h, nämlich vermöge der oben angegebenen Zerlegungsformel

$$([g, h], [g, h]) = (g, g)(h, h) - (g, h)^2, \tag{15}$$

deren Verschwinden bedeutet, daß die beiden Geraden mindestens ein Ende gemein haben. Demnach gilt:

Zwei reelle Gerade besitzen genau ein reelles, eigentliches gemeinsames Lot, wenn sie nicht asymptotisch liegen; es ist dabei, wie man im einzelnen nachprüfen möge, erlaubt, daß g oder h oder g und h unendlich ferne Punkte sind. Zwei asymptotische Gerade besitzen, sofern sie nicht zusammenfallen, ihr gemeinsames Ende als einziges gemeinsames Lot.

Diese Deutung der Form l war mit unseren bisherigen Mitteln nur möglich, weil die Formen eine homogene Darstellung der Geraden bilden, d. h. weil alle zu einer Form l proportionalen Formen ϱl gleichberechtigte Darstellungen einer und derselben Geraden sind.

b) Für die Zahl (g, h) kann, wenn sie nicht verschwindet, unmöglich auf so einfachem Wege eine geometrische Deutung gefunden werden, da sie eine relative Invariante ist. Um aus ihr eine absolute Invariante zu bilden, wollen wir sie durch eine solche vom gleichen Gewicht 2 dividieren, deren uns zwei zur Verfügung stehen: (g, g) und (h, h). Um einen in g und h symmetrisch gebauten Ausdruck zu erhalten, werden wir $\sqrt{(g, g)(h, h)}$ als Divisor wählen.

Es ist bekannt, daß in einem metrischen Raum konstanter Krümmung jedes Geradenpaar g, h ein „*Maß*“ besitzt, d. i. in unserem Fall eine komplexe Zahl ϑ, deren reeller Teil der Winkel von g und h und deren imaginärer Teil der kürzeste Abstand, d. h. die Länge des gemeinsamen Lotes von g und h ist, und daß gilt[8]):

$$\cos\vartheta = (g, h) : \sqrt{(g, g)(h, h)}. \tag{16}$$

Wegen ihrer Wichtigkeit werde diese Formel hier verifiziert: Wir nehmen eine Belegung der absoluten Fläche mit komplexen Koordinaten ξ an, bei der g die unendlich fernen Punkte -1 und 1 verbindet und das gemeinsame Lot l von g und h durch den Punkt 0, also auch durch den Punkt ∞ geht. Dann drehen wir g um die sie kreuzende Gerade l durch den Winkel $\Re\vartheta$ und verschieben sie gleichzeitig längs l um die Strecke $\Im\vartheta$ — kurz, wir verschrauben g um die Größe ϑ entlang der Achse l —; da diesem Vorgang auf der

[8]) Siehe F. Klein, l. c. S. 190 f., wo das Resultat auf einem anderen Wege gewonnen wird.

Vergl. hierzu auch eine Arbeit des Verf. in der Zeitschrift „Aus Unterricht und Forschung“ Bd. 5 (Stuttgart 1933), S. 112 ff. und S. 161 ff., bes. S. 116.

Die Bedeutung der Gleichung (10) findet sich auch auf S. 11 der in Fußnote 1 zitierten Beckschen Schrift.

Zahlenkugel die Transformation $\zeta' = e^{i\vartheta}\zeta$ entspricht, so geht g dabei in die Verbindungsgerade h der Punkte $-e^{i\vartheta}$ und $e^{i\vartheta}$ über, es kann also

$$g \equiv \xi^2 - \eta^2 \quad \text{und} \quad h \equiv e^{-i\vartheta}\xi^2 - e^{i\vartheta}\eta^2$$

gesetzt werden. Dann wird aber tatsächlich vermöge (4)

$$(g, h) : \sqrt{(g, g)\,(h, h)} = (2e^{i\vartheta} + 2e^{-i\vartheta}) : \sqrt{4 \cdot 4} = (e^{i\vartheta} + e^{-i\vartheta}) : 2,$$

und dieses Ergebnis ist wegen der absoluten Invarianz des Ausdrucks (16) für jede Zahlenbelegung der Kugel gültig. — Hierdurch ist auch die Bedingung des Kreuzens (10) nocheinmal bewiesen, weil die ungeraden Vielfachen von $\pi/2$ die einzigen Nullstellen der cos-Funktion sind.

Daß der Wert des Kosinus des komplexen Maßes ϑ wegen des Vorkommens von Quadratwurzeln nur bis aufs Vorzeichen bestimmt ist, kann zunächst nicht anders erwartet werden, da, vorerst wenigstens, eine quadratische Form nur eine Gerade ohne Richtungssinn darstellt.

5. Nun können wir einen Schritt weiter gehen, und zwar auf Grund der Bemerkung, daß wir durch die gleiche Behandlung aus $[g, h] \equiv l$ eine Form

$$n = [g, h] : \sqrt{(g, g)\,(h, h)}$$

bilden können, die eine Gerade darstellt, für die der Wert der Invariante (n, n) einen geometrischen Sinn haben muß; in der Tat finden wir aus (15) und (16)

$$(n, n) = \sin^2\vartheta.$$

Dies deutet aber weiter darauf hin, daß wir, um zu einer vollkommenen geometrischen Deutung der Formen g zu gelangen, durch eine solche nicht nur eine Gerade darstellen dürfen, sondern daß wir diese durch ein Gebilde ersetzen müssen, das wir als eine mit einer komplexen Zahl belegte Gerade oder, mit einem Wort, als *Schraube* bezeichnen können; diese Zahl wird eine der Quadratwurzeln aus (g, g) sein müssen, und es liegt nahe, sie die komplexe „Länge" der Schraube g zu nennen. — Statt „Schraube" hätten wir, um die Ähnlichkeit mit der gewöhnlichen Vektorrechnung deutlich hervortreten zu lassen, auch „komplexer Vektor" sagen können.

Durch die „Länge" kann man der Geraden als Träger der Schraube einen bestimmten Schraubungssinn aufprägen, etwa den einer Rechtsschraube, wenn das Produkt aus dem Realteil und dem Imaginärteil von ϑ positiv ist. Es wird sich später sogar als möglich erweisen, ihr durch Festlegen des Wertes der Quadratwurzel aus dem Längenquadrat einen Richtungssinn zu geben.

6. Betrachten wir die immer mehr sich abrundende Analogie mit der Vektorrechnung aufmerksam, so bemerken wir freilich, daß sie noch eine Lücke aufweist: Die linearen Transformationen (3) ändern ja

i. allg. noch die „Länge"; sie entsprechen also den äquiformen Verwandtschaften. Wir werden deshalb als Repräsentanten der Gruppe der Bewegungen des hyperbolischen Raumes von jetzt an lieber die Untergruppe der linearen Substitutionen (3) mit der Determinante 1 benutzen[9]):

$$(3') \qquad \xi' = \alpha\xi + \beta\eta, \qquad \eta' = \gamma\xi + \delta\eta, \qquad (\alpha\delta - \beta\gamma = 1);$$

ihr gegenüber tragen alle eingeführten Invarianten und Kovarianten, speziell das Längenquadrat, von vornherein absoluten Charakter.

Auf Grund dieser Überlegungen dürfen wir nunmehr eine völlige formale Übereinstimmung der Produktbildungen (g, h) und $[g, h]$ mit dem skalaren und dem vektoriellen Produkt der uns gewohnten Vektorrechnung feststellen, solange wir uns damit begnügen, daß eine Gerade durch das Quadrat der Länge der Schraube, deren Träger sie ist, einen bestimmten Schraubensinn erhält, wir also vorläufig auf die Festlegung eines Richtungssinnes auf ihr verzichten.

7. Jetzt obliegt es uns nur noch, die geometrische Deutung der Formen g zu vervollständigen und die ihrer Summation zu finden. Das wird uns dadurch gelingen, daß wir — in Erinnerung daran, daß bei der Betrachtung der Drehungen des euklidischen Vektorraumes die Vektoren als Winkelgeschwindigkeiten eine neue Bedeutung erlangen — *stetig differenzierbare Bewegungen* des hyperbolischen Raumes betrachten; das sind nach dem im vorigen Abschnitt Gesagten Transformationen, die die „Länge" irgend eines komplexen Vektors und daher auch das für zwei beliebige derartige Vektoren g und h gebildete Skalarprodukt (g, h) ungeändert lassen, so daß es von der Zeit t nicht abhängt:

$$(17) \qquad (g, h) = \text{const.}$$

Da aus (7) und (8) formal die gleichen Differentiationsregeln folgen, wie sie in der euklidischen Vektorrechnung gelten, so erhalten wir

$$(18) \qquad (g, \dot{h}) + (\dot{g}, h) = 0;$$

speziell finden wir, wenn $g \equiv h$ ist,

$$(g, \dot{g}) = 0 \qquad \text{usw.}$$

Mit Hilfe eines beliebigen, $\dot{g}$ kreuzenden, nur mit einer geeigneten „Länge" versehenen komplexen Vektors v können wir also — wie aus der Betrachtung von (4) und (5) zu erkennen ist —

$$\dot{g} = [v, g]$$

setzen, wobei v bis auf ein beliebiges additives Vielfaches von g bestimmt ist; ebenso wird

$$\dot{h} = [w, h].$$

[9]) Auch diese beiden Gruppen sind noch nicht holoedrisch isomorph, denn jede Bewegung wird durch zwei der Lineartransformationen (3') repräsentiert.

Aus (18) fließt dann aber $[g, w, h] + [v, g, h] = 0$ oder

$$[v - w, g, h] = 0;$$

hieraus jedoch folgt, sofern g und h als linear unabhängig vorausgesetzt werden, — wie der Ausdruck (6′) deutlich macht — die Möglichkeit der Darstellung

$$v - w = \mu g - \nu' h.$$

Nehmen wir noch einen dritten, von g und h linear unabhängigen, die Bewegung wie g und h mitmachenden komplexen Vektor f hinzu, so bekommen wir

$$\dot{f} = [u, f]$$

und

$$u - v = \lambda f - \mu' g, \qquad w - u = \nu h - \lambda' f.$$

Folglich wird

$$(\lambda - \lambda') f + (\mu - \mu') g + (\nu - \nu') h = 0.$$

Wegen der vorausgesetzten linearen Unabhängigkeit von f, g, h schließen wir daraus:

$$\lambda' = \lambda, \quad \mu' = \mu, \quad \nu' = \nu,$$

mithin

$$u - \lambda f = v - \mu g = w - \nu h;$$

bezeichnen wir diese drei gleichen Größen mit s, so finden wir also:

Es gibt einen komplexen Vektor s, für den gilt:

$$\dot{f} = [s, f], \quad \dot{g} = [s, g], \quad \dot{h} = [s, h].$$

Nun betrachten wir einen beliebigen, mitbewegten, komplexen Vektor p; für ihn wird nach (18)

$$(f, \dot{p}) + (\dot{f}, p) = (g, \dot{p}) + (\dot{g}, p) = (h, \dot{p}) + (\dot{h}, p) = 0,$$

somit

$$(f, \dot{p} - [s, p]) = (g, \dot{p} - [s, p]) = (h, \dot{p} - [s, p]) = 0.$$

Nun gibt es aber, wieder wegen der linearen Unabhängigkeit von f, g, h, keine Form (1), deren skalare Produkte mit f und g und h verschwinden könnten, außer der Nullform, da sie ja ein gemeinsames Lot der Geraden f, g, h darstellen müßte, das jedoch nur bei linearer Abhängigkeit von f, g, h existiert. Folglich gilt allgemein für jeden sich mitbewegenden Vektor p:[10])

$$\dot{p} = [s, p]. \tag{19}$$

[10]) Eine ähnliche Herleitung der entsprechenden Formel für den euklidischen Raum als System der in ihm enthaltenen Gewinde gab der Verf. mit Hilfe der dualen Vektoren CLIFFORD's in einem Beitrag zur Festschrift der Technischen Hochschule Stuttgart zur Vollendung ihres ersten Jahrhunderts, Berlin 1929, S. 210 ff.

Damit ist gezeigt, daß jede infinitesimale Bewegung des hyperbolischen Raumes durch einen gewissen komplexen Vektor s charakterisiert ist, und es ließe sich leicht die bekannte Tatsache vollends beweisen, daß sie eine infinitesimale Schraubung ist, so daß es berechtigt ist, s *die momentane Geschwindigkeitsschraube* der Bewegung zur Zeit t zu nennen. Hierin können wir eine endgültige Deutung der Formen (1) erblicken. — Der Ausdruck (19) für $\dot{p}$ zeigt, daß, sofern $s \not\equiv 0$ ist, die durch die Formen ϱs dargestellte Gerade die einzige ist, die im Augenblick t in Ruhe bleibt; daß hierbei (s, s) verschwinden darf, braucht wohl kaum gesagt zu werden.

8. Im vorigen Abschnitt hat sich nun auch ein Zugang zu einer einfachen *Deutung der Summe* zweier Schrauben eröffnet:

Auch im hyperbolischen Raum kann man die Bewegung eines Systems starr miteinander verbundener Geraden oder allgemeiner Schrauben relativ zu einem anderen derartigen „starren Geraden- oder Schraubenkörper" untersuchen. Es gilt auch hier der Satz, daß die Änderungsgeschwindigkeit irgend einer dem ersten System angehörenden Schraube p bezüglich des als ruhend geltenden Raumes, d. h. seine Absolutgeschwindigkeit gleich der Summe seiner Führungs- und seiner Relativgeschwindigkeit ist. Sind die Geschwindigkeitsschrauben dieser Bewegungen resp. s, s', s'', so ist demnach

$$[s, p] = [s', p] + [s'', p];$$

da dies für jeden Wert von p gilt, folgt:

$$s = s' + s''. \tag{20}$$

Die Summe zweier Geschwindigkeitsschrauben ist also einfach zu deuten als die Geschwindigkeitsschraube der aus den zugehörigen Bewegungen resultierenden Bewegung.

Zum Schluß sei noch die Frage aufgeworfen, ob die Koeffizienten g_1, g_2, g_3 der Form g als Komponenten oder, besser, Koordinaten des komplexen Vektors g angesehen werden können. Das würde darauf hinauslaufen, daß das Tripel der Formen

$$e_1 \equiv \xi^2, \qquad e_2 \equiv \xi\eta, \qquad e_3 \equiv \eta^2$$

als Basis benützt würde. In der Tat ist dagegen nichts einzuwenden, weil sie linear unabhängig sind. Suchen wir in der Mannigfaltigkeit der euklidischen Vektoren ein dieser Basis entsprechendes Gebilde, so stoßen wir, da nach (4)

$$\begin{aligned} &(e_1, e_1) = 0, \quad (e_2, e_2) = -1, \quad (e_3, e_3) = 0, \\ &(e_2, e_3) = 0, \quad (e_3, e_1) = 2, \quad (e_1, e_2) = 0, \\ &[e_2, e_3] = e_3, \quad [e_3, e_1] = -2e_2, \quad [e_1, e_2] = e_1, \\ &\qquad [e_1, e_2, e_3] = 2 \end{aligned}$$

ist, auf eine Basis von drei imaginären Vektoren, von denen der erste und der dritte Minimalvektoren sind, die auf dem zweiten senkrecht stehen. Solche Basen sind tatsächlich brauchbar; als Beispiel diene die aus den Vektoren

$$\mathfrak{e}_1 = \mathfrak{i} + i\mathfrak{k}, \quad \mathfrak{e}_2 = i\mathfrak{j}, \quad \mathfrak{e}_3 = \mathfrak{i} - i\mathfrak{k}$$

aufgebaute, wo $\mathfrak{i}, \mathfrak{j}, \mathfrak{k}$, wie üblich, drei reelle, zu je zweien aufeinander senkrechte Einheitsvektoren bedeuten. $\mathfrak{e}_1, \mathfrak{e}_2, \mathfrak{e}_3$ erfüllen dieselben Beziehungen wie oben die Formen e_1, e_2, e_3. Es ist interessant, die bei Zugrundelegung der Basis $\mathfrak{e}_1, \mathfrak{e}_2, \mathfrak{e}_3$ für die Länge, das Skalar-, Vektor- und Spatprodukt sich ergebenden Ausdrücke in den Koordinaten der euklidischen Vektoren mit den entsprechenden Ausdrücken (4'), (4), (5'), (6') in den Formenkoeffizienten zu vergleichen, ferner die Bedingungen aufzustellen, denen die Koordinaten genügen müssen, damit der durch sie dargestellte euklidische Vektor reell sei.

Die weitere Behandlung der hiermit zusammenhängenden Fragen möge einer anderen Gelegenheit vorbehalten bleiben.

(Eingegangen am 31. Dezember 1949.)

Summierung der Fourierreihen gleichartig fastperiodischer Funktionen auf Gruppen.

Herrn Oskar Perron zum 70. Geburtstag am 7. Mai 1950 gewidmet.

Von

Wilhelm Maak in Hamburg.

Eine komplexwertige Funktion $f(x)$ der Elemente x einer beliebigen Gruppe $\mathfrak{G}$ heißt dann fastperiodisch, wenn zu jedem $\varepsilon > 0$ ein System von endlich vielen, etwa n Teilmengen $\mathfrak{A}_1, \ldots, \mathfrak{A}_n$ der Gruppe $\mathfrak{G}$ existiert, so daß 1)

$$\mathfrak{G} = \mathfrak{A}_1 \dotplus \cdots \dotplus \mathfrak{A}_n$$

und 2) für zwei beliebige Elemente x, y eines jeden Teiles $\mathfrak{A}_i$ stets

$$\underset{c,\, d \in \mathfrak{G}}{\text{ob. Gr.}} |f(c\,x\,d) - f(c\,y\,d)| < \varepsilon$$

gilt. Ein solches System von Teilmengen $\mathfrak{A}_1, \ldots, \mathfrak{A}_n$, welches die Bedingungen 1) und 2) erfüllt, heiße eine Teilung $\mathfrak{T}\{f(x), \varepsilon\}$ von $\mathfrak{G}$.

Bekanntlich hängt die Theorie der fastperiodischen Funktionen aufs engste mit der Theorie der Normaldarstellungen der Gruppe $\mathfrak{G}$ zusammen. Wir denken uns die irreduziblen Normaldarstellungen $D(x)$ der Gruppe zu Klassen äquivalenter Darstellungen zusammengefaßt. Jeder dieser Klassen entnehmen wir eine unitäre Darstellung. So erhalten wir ein System von unitären irreduziblen inäquivalenten Normaldarstellungen $D^{(\nu)}(x)$. Die verschiedenen Darstellungen dieses Systems werden durch verschiedene Indizes ν unterschieden. Nennt man die Zahl der Zeilen und Spalten von $D^{(\nu)}(x)$ etwa $s^{(\nu)}$, so ist

$$D^{(\nu)}(x) = \{D^{(\nu)}_{\varrho\sigma}(x)\} \qquad \varrho, \sigma = 1, \ldots, s^{(\nu)}.$$

Die Funktionen $D^{(\nu)}_{\varrho\sigma}(x)$ sind fastperiodisch.

Fastperiodische Funktionen besitzen einen Integralmittelwert, welcher durch das Zeichen $M\{\ldots\}$ angedeutet werde. Ist dann $f(x)$ eine fastperiodische Funktion, so nennt man die Zahlen

$$\alpha^{(\nu)}_{\varrho\sigma} = M_x\{f(x)\,\overline{D^{(\nu)}_{\varrho\sigma}(x)}\}$$

die Fourierkoeffizienten von $f(x)$ und schreibt

$$f(x) \sim \sum_{\nu} s^{(\nu)} \sum_{\varrho,\,\sigma=1}^{s^{(\nu)}} \alpha^{(\nu)}_{\varrho\sigma} D^{(\nu)}_{\varrho\sigma}(x).$$

Die der Funktion $f(x)$ auf diese Weise formal zugeordnete Reihe ist die Fourierreihe von $f(x)$.

Von Bochner und v. Neumann [3] ist nach dem Vorbild der von Fejér für den Fall reinperiodischer Funktionen entwickelten Theorie eine Methode angegeben worden, wie man die im allgemeinen nicht konvergente Fourierreihe einer fastperiodischen Funktion summieren kann. Als Summe der Reihe ergibt sich natürlich $f(x)$. Unabhängig von Bochner kam auf etwas andrem Wege auch van Kampen [4] zu ähnlichen Resultaten wie Bochner.

Es ist im allgemeinen nicht möglich, ein Summationsverfahren anzugeben, welches sich erfolgreich auf sämtliche fastperiodischen Funktionen der Gruppe anwenden läßt. Jedem solchen Verfahren entspricht vielmehr ein gewisser umfangreichster invarianter abgeschlossener Modul fastperiodischer Funktionen, so daß die Summe der Fourierreihe einer Funktion des Moduls, welche man mit Hilfe des Verfahrens ermittelt, gerade die Funktion liefert. Derartige Moduln fastperiodischer Funktionen wollen wir Summationsmoduln nennen. Bochner und v. Neumann haben gezeigt, daß sich ein solcher Modul $\mathfrak{M}$ durch die folgenden drei Eigenschaften charakterisieren läßt.

1. $\mathfrak{M}$ enthält höchstens abzählbar viele Darstellungen $D^{(\nu)}(x) = \{D^{(\nu)}_{\varrho\sigma}(x)\}$, d. h. von höchstens abzählbar vielen $D^{(\nu)}(x)$ sind die Funktionen $D^{(\nu)}_{\varrho\sigma}(x)$ in $\mathfrak{M}$ enthalten.

2. Enthält $\mathfrak{M}$ die Funktionen $D^{(\nu)}_{\varrho\sigma}(x)$ einer Darstellung $D^{(\nu)}(x)$, dann enthält $\mathfrak{M}$ auch die Funktionen $\overline{D^{(\nu)}_{\varrho\sigma}(x)}$.

3. Enthält $\mathfrak{M}$ die Funktionen $D^{(\nu)}_{\varrho\sigma}(x)$ und $D^{(\mu)}_{\varrho\sigma}(x)$ zweier Darstellungen $D^{(\nu)}(x)$ und $D^{(\mu)}(x)$, so sind auch sämtliche Produkte dieser Funktionen in $\mathfrak{M}$ enthalten.

Man sieht, daß die (stetigen) periodischen Funktionen einen Summationsmodul bilden. Deshalb kommt man im Falle der periodischen Funktionen mit einem einzigen Summationsverfahren aus.

Wir werden im folgenden sehen, daß man die Summationsmoduln auch anders charakterisieren kann. In jedem Summationsmodul $\mathfrak{M}$ kann man nämlich eine Funktion $\Phi(x)$ finden, so daß $\mathfrak{M}$ genau aus allen denjenigen Funktionen besteht, die „gleichartig fastperiodisch" wie $\Phi(x)$ sind. Dabei heißt $f(x)$ gleichartig fastperiodisch wie $\Phi(x)$, wenn es zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $\delta > 0$ so gibt, daß jede Teilung $\mathfrak{T}\{\Phi(x), \delta\}$ gleichzeitig eine Teilung $\mathfrak{T}\{f(x), \varepsilon\}$ ist. Die Einführung dieses neuen Begriffes liegt sehr nahe, wenn man von der oben gegebenen Definition von fastperiodisch ausgeht. Die ursprüngliche von v. Neumann [2] gegebene Definition dagegen läßt einen so einfachen Vergleich der Fastperiodizität zweier Funktionen nicht zu. Wenn deshalb z. B. van Kampen in seiner Darstellung der Summationstheorie [4] im Grunde zu einem ähnlichen Resultate wie das oben genannte gekommen ist, so ist doch seine endgültige Formulierung des Ergebnisses verhältnismäßig kompliziert.

Außer von „gleichartig fastperiodisch“ werden wir in der vorliegenden Note auch von „gleichgradig fastperiodisch“ sprechen. Die Bedeutung der Worte „gleichgradig stetig“ ist allgemein bekannt. Während nun die Definition von „gleichartig fastperiodisch“ offenbar von der Vorstellung beeinflußt ist, daß fastperiodisch eine Verallgemeinerung von periodisch ist, muß man die Definition von „gleichgradig fastperiodisch“ als eine Analogisierung des erwähnten „gleichgradig stetig“ verstehen, also „fastperiodisch“ als eine Art Analogon von „stetig“ auffassen. Tatsächlich gelten für gleichgradig fastperiodische Funktionen auch durchaus entsprechende Sätze wie für gleichgradig stetige Funktionen.

Im folgenden werden die wichtigsten Stellen der Theorie von Bochner-Fejér unter Verwendung der neuen Formulierungen wiedergegeben. Das Ziel der vorliegenden Note ist der Nachweis, daß die betr. Begriffe besonders gut brauchbar sind. Es gibt in der allgemeinen Theorie fastperiodischer Funktionen viele weitere Gelegenheiten, bei denen man fast zwangsläufig auf die Definition von gleichgradig bzw. gleichartig fastperiodisch geführt wird.

§ 1.

Gleichgradig fastperiodische Funktionen.

Es sei eine Menge F von fastperiodischen Funktionen auf der Gruppe $\mathfrak{G}$ gegeben. Die Funktionen aus F heißen *gleichgradig fastperiodisch*, wenn zu jedem $\varepsilon > 0$ endlich viele, etwa n, Teilmengen $\mathfrak{A}_1, \ldots, \mathfrak{A}_n$ von $\mathfrak{G}$ existieren, so daß diese Mengen $\mathfrak{A}_i$ für jede Funktion $f(x) \in F$ eine Teilung $\mathfrak{T}\{f(x), \varepsilon\}$ bilden. Wir wollen das System von Teilmengen $\mathfrak{A}_i$ durch das Symbol $\mathfrak{T}\{F, \varepsilon\}$ bezeichnen.

Man zeigt sehr leicht, daß z. B. jede endliche Menge von fastperiodischen Funktionen gleichgradig fastperiodisch ist. Für unsere Zwecke wichtig ist folgender ebenfalls leicht beweisbare

Satz 1. *Jede gleichmäßig konvergente Folge von fastperiodischen Funktionen besteht aus gleichgradig fastperiodischen Funktionen.*

Die Umkehrung dieses Satzes ist natürlich im allgemeinen nicht richtig. Es gilt aber

Satz 2. *Jede gleichgradig beschränkte Folge gleichgradig fastperiodischer Funktionen $f_1(x), f_2(x), \ldots$ enthält eine gleichmäßig konvergente Teilfolge.* Die Folge heißt gleichgradig beschränkt, wenn eine Zahl $\Gamma > 0$ existiert, so daß für alle N

$$|f_N(x)| < \Gamma \qquad N = 1, 2, \ldots$$

gilt.

Beweis. Wir nennen die Menge aller $f_N(x)$ etwa F. Man setze nun nacheinander $\varepsilon = 1, 1/2, 1/3, \ldots$ und bestimme für jedes dieser ε in der Teilung $\mathfrak{T}\{F, 1/n\}$ ein Repräsentantensystem. Besteht $\mathfrak{T}\{F, 1/n\}$

aus den Mengen $\mathfrak{A}_1^{(n)}, \ldots, \mathfrak{A}_{r_n}^{(n)}$, so ist jede Menge von Gruppenelementen $a_1^{(n)}, \ldots, a_{r_n}^{(n)}$, welche

$$a_i^{(n)} \in \mathfrak{A}_i^{(n)} \qquad i = 1, \ldots, r_n$$

erfüllen, ein solches Repräsentantensystem. Die Elemente der Folge

$$a_1^{(1)}, \ldots, a_{r_1}^{(1)}, a_1^{(2)}, \ldots, a_{r_2}^{(2)}, a_1^{(3)}, \ldots$$

bezeichnen wir nacheinander mit $a_1, a_2, a_3, \ldots$. Nach Voraussetzung ist

$$|f_N(a_1)| < \Gamma \qquad N = 1, 2, \ldots.$$

Also gibt es eine Teilfolge der $f_N(x)$, welche für a_1 konvergiert:

$$f_{1_1}, f_{1_2}, \ldots.$$

Nach Voraussetzung ist

$$|f_{1_N}(a_2)| < \Gamma \qquad N = 1, 2, \ldots.$$

Also gibt es eine Teilfolge der f_{1_N}, welche für a_2 konvergiert:

$$f_{2_1}, f_{2_2}, \ldots,$$

So fahren wir fort. Die Diagonalfolge f_{N_N} konvergiert offenbar für alle a_k. Ich behaupte, daß sie gleichmäßig konvergiert. Man wähle zum Beweise bei vorgegebenem $\varepsilon > 0$ ein $n > 3/\varepsilon$. Es muß ein N_0 geben, so daß für $M, N > N_0$

$$|f_{M_M}(a_i^{(n)}) - f_{N_N}(a_i^{(n)})| < \frac{\varepsilon}{3} \qquad i = 1, \ldots, r_n.$$

Zu beliebigem $x \in \mathfrak{G}$ wird nun der Repräsentant $a_i^{(n)}$ desjenigen Teiles von $\mathfrak{T}\{F, 1/n\}$ bestimmt, welcher x enthält. Dann ist für alle $M, N > N_0$

$$\begin{aligned} |f_{M_M}(x) - f_{N_N}(x)| \leqq\ & |f_{M_M}(x) - f_{M_M}(a_i^{(n)})| + |f_{M_M}(a_i^{(n)}) - f_{N_N}(a_i^{(n)})| \\ & + |f_{N_N}(a_i^{(n)}) - f_{N_N}(x)| < \frac{1}{n} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{1}{n} < \varepsilon. \end{aligned}$$

Da x willkürlich war, ist unser Satz bewiesen. —

Es sei eine Folge fastperiodischer Funktionen $f_N(x)$ mit der Fourierreihe

$$f_N(x) \sim \sum s^{(\nu)} \sum a_{\varrho\sigma,N}^{(\nu)} D_{\varrho\sigma}^{(\nu)}(x)$$

gegeben. Außerdem sei $f(x)$ eine fastperiodische Funktion mit der Fourierreihe

$$f(x) \sim \sum s^{(\nu)} \sum a_{\varrho\sigma}^{(\nu)} D_{\varrho\sigma}^{(\nu)}(x).$$

Wenn dann für alle ν, ϱ, σ gilt

$$a_{\varrho\sigma}^{(\nu)} = \lim_{N \to \infty} a_{\varrho\sigma,N}^{(\nu)},$$

so heißt die Folge $f_N(x)$ *formal konvergent mit dem Limes* $f(x)$.

Satz 3. *Eine formal konvergente Folge fastperiodischer Funktionen konvergiert dann und nur dann gleichmäßig, wenn die Folge gleichgradig beschränkt und gleichgradig fastperiodisch ist.*

Der Beweis folgt aus Satz 2 und dem Eindeutigkeitssatz über Fourierreihen, bzw. aus Satz 1.

§ 2.

Majorisierbare Funktionen.

Es seien zwei fastperiodische Funktionen $f(x)$ und $g(x)$ gegeben. Wenn dann jede Teilung $\mathfrak{T}\{f(x), \varepsilon\}$ gleichzeitig eine Teilung $\mathfrak{T}\{g(x), \varepsilon\}$ ist, so soll das durch die Worte: „$f(x)$ *majorisiert* $g(x)$", oder durch das Zeichen $g(x) \prec f(x)$ ausgedrückt werden. Dieser Begriff ist deshalb wichtig, weil man meist die gleichgradige Fastperiodizät einer Menge von Funktionen dadurch beweist, daß man zeigt: Alle Funktionen der Menge werden durch eine feste fastperiodische Funktion majorisiert. Für den Fall der eigentlichen fastperiodischen Funktionen findet sich eine entsprechende Definition von majorisierbar z. B. in dem Buche von Bohr [1].

Ist $\Phi(x)$ eine fastperiodische Funktion, so kann man bekanntlich zu jedem N eine fastperiodische Funktion $g_N(x)$ finden, so daß

$$|\Phi(x) - \Phi \times g_N(x)| < \frac{1}{N}$$

ist [2]. Man setze nämlich zunächst

$$\Delta(x, y) = \underset{c,\, d \in \mathfrak{G}}{\text{ob. Gr.}} |\Phi(c\,x\,d) - \Phi(c\,y\,d)|. \tag{1}$$

Diese Funktion Δ ist fastperiodisch in beiden Variablen x und y. Weiter erklären wir

$$F_N(u) = \begin{cases} 1 - N u, & \text{wenn } u \leqq \frac{1}{N} \\ 0 \quad , & \text{wenn } u \geqq \frac{1}{N}. \end{cases} \tag{2}$$

Dann ist

$$g_N(x) = \frac{F_N(\Delta(x, 1))}{M_x\{F_N(\Delta(x, 1))\}}. \tag{3}$$

Wir zeigen, daß zu jeder dieser Funktionen $g_N(x)$ eine Zahl $G_N \neq 0$ gefunden werden kann, so daß $G_N g_N(x)$ durch $f(x)$ majorisiert wird.

Satz 4. *Zu jeder der soeben erklärten Funktionen $g_N(x)$ existiert eine Zahl $G_N \neq 0$, so daß*

$$G_N g_N(x) \prec \Phi(x).$$

Beweis. Es ist wegen (2) und (3)

$$|g_N(x) - g_N(y)| \leqq \frac{N \Delta(x, y)}{M_x\{F_N(\Delta(x, 1))\}}.$$

Liegen x und y in einem Teil von $\mathfrak{T}\{\Phi(x), \varepsilon\}$, so ist $\Delta(x, y) < \varepsilon$. Für $G_N = (1/N)\, M_x\{F_N(\Delta(x, 1))\}$ ist demnach unser Satz bewiesen. —

Die $g_N(x)$ sind Funktionen, welche als Analoga zu den Fejérschen Kernen aufgefaßt werden können. Wir stellen einige weitere ihrer Eigenschaften fest.

Satz 5. *Die Funktionen $g_N(x)$ sind reelle nicht negative fastperiodische Funktionen mit dem Mittelwert* 1. *Ihre Fourierreihen haben die Gestalt*

$$g_N(x) \sim \sum s^{(\nu)} \gamma_N^{(\nu)} \sum_{\varrho=1}^{s^{(\nu)}} D_{\varrho\varrho}^{(\nu)}(x) \tag{4}$$

Beweis. Es genügt, die Formel (4) herzuleiten. Dazu bemerken wir, daß

$$g_N(y\,x\,y^{-1}) = g_N(x)$$

ist. Eine ganz einfache Rechnung liefert dann die Behauptung (siehe [3]). —

Satz 6. *Ist $f(x)$ irgendeine fastperiodische Funktion mit* ob. Gr. $|f(x)| = \Gamma$, *so werden alle Funktionen $f \asymp g_N$ durch $f(x)$ majorisiert*

$$f \asymp g_N \prec f \tag{5}$$

und für alle N gilt

$$|f \asymp g_N| \leqq \Gamma. \tag{6}$$

Beweis. Es seien x_1 und x_2 aus einem Teil von $\mathfrak{T}\{f(x), \varepsilon\}$ gewählt. Dann ist

$$\begin{aligned} |f \asymp g_N(x_1) - f \asymp g_N(x_2)| &= |M_y\{(f(x_1 y^{-1}) - f(x_2 y^{-1}))\, g_N(y)\}| \\ &\leqq M_y\{|f(x_1 y^{-1}) - f(x_2 y^{-1})|\, g_N(y)\} \\ &\leqq \varepsilon\, M\{g_N\} = \varepsilon. \end{aligned}$$

Damit ist (5) bewiesen. Entsprechend folgt (6). —

§ 3.

Summationsmoduln.

Es sei wieder $\Phi(x)$ wie in § 2 eine beliebige fastperiodische Funktion. Mit $g_N(x)$ bezeichnen wir wieder die Funktionen, welche wir dort, von Φ ausgehend, konstruiert haben.

Satz 7. *Das System der Zahlen $\gamma_N^{(\nu)}$, welche in den Fourierreihen* (4) *der Funktionen $g_N(x)$ vorkommen, hat folgende Eigenschaft: Ist für ein ν und ein N_0 die Zahl $\gamma_{N_0}^{(\nu)} \neq 0$, so gilt für dieses ν*

$$\lim_{N \to \infty} \gamma_N^{(\nu)} = 1.$$

Beweis. Es ist

$$|g_N(x) - g_N \asymp g_M(x)| \leqq M_y\{|g_N(x) - g_N(x\,y^{-1})|\, g_M(y)\}.$$

Wenn hierin

$$|g_N(x) - g_N(x\,y^{-1})| > \frac{1}{M\,G_N},$$

so muß wegen Satz 4

$$\Delta(y, 1) > \frac{1}{M}$$

gelten. Folglich ist für diese y wegen der Definition (2), (3)

$$g_M(y) = 0.$$

Insgesamt ergibt sich

$$|g_N(x) - g_N \times g_M(x)| \leqq \frac{1}{M G_N} M_y\{g_M(y)\} = \frac{1}{M G_N}.$$

Läßt man nun $M \to \infty$, so müssen die $g_N \times g_M$ gleichmäßig und deshalb auch formal gegen g_N konvergieren. Da die Fourierkoeffizienten von $g_N \times g_M$ aber $\gamma_N^{(\nu)} \gamma_M^{(\nu)}$ sind, so ergibt sich für $N = N_0$

$$\gamma_{N_0}^{(\nu)} = \lim_{M \to \infty} \gamma_{N_0}^{(\nu)} \gamma_M^{(\nu)}$$

und somit wegen $\gamma_{N_0}^{(\nu)} \neq 0$ die Behauptung. —

Der kleinste zweiseitig invariante abgeschlossene Modul von fastperiodischen Funktionen, welcher alle Funktionen $g_N(x)$ enthält, soll *der zu $\Phi(x)$ gehörige Summationsmodul* $\{\Phi(x)\}$ heißen. Da $\Phi(x)$ gleichmäßig durch die $\Phi \times g_N$ approximiert wird, gehört $\Phi(x)$ selber diesem Modul an.

Satz 8. *Ist $f(x)$ irgendeine Funktion aus $\{\Phi(x)\}$, so wird $f(x)$ gleichmäßig für alle x durch die Funktionen $f \times g_N(x)$ approximiert*

$$f(x) = \lim_{N \to \infty} f \times g_N(x).$$

Beweis. Es sei

$$f(x) \sim \sum s^{(\nu)} \sum \alpha_{\varrho\sigma}^{(\nu)} D_{\varrho\sigma}^{(\nu)}(x)$$

die Fourierreihe von f. Dann ist

$$f \times g_N(x) \sim \sum s^{(\nu)} \gamma_N^{(\nu)} \sum \alpha_{\varrho\sigma}^{(\nu)} D_{\varrho\sigma}^{(\nu)}(x)$$

die Fourierreihe von $f \times g_N$. Da für jedes ν mit nicht verschwindender Fouriermatrix nach Satz 7 $\lim \gamma_N^{(\nu)} = 1$ gilt, so konvergiert also $f \times g_N(x)$ wenigstens formal gegen $f(x)$. Wegen Satz 3 und Satz 6 muß die Konvergenz gleichmäßig sein. —

Dieser soeben bewiesene Satz besagt, daß wir eine für die Fourierreihen der Funktionen aus $\{\Phi(x)\}$ brauchbare Summierungsmethode gefunden haben. Ist nämlich

$$\sum s^{(\nu)} \sum \alpha_{\varrho\sigma}^{(\nu)} D_{\varrho\sigma}^{(\nu)}(x) \tag{7}$$

die Fourierreihe einer Funktion aus $\{\Phi(x)\}$, so bilde man mit Hilfe der Zahlen $\gamma_N^{(\nu)}$ die Reihen

$$\sum s^{(\nu)} \gamma_N^{(\nu)} \sum \alpha_{\varrho\sigma}^{(\nu)} D_{\varrho\sigma}^{(\nu)}(x).$$

Diese Reihen konvergieren sicher gleichmäßig, da es sich um die Fourierreihen gefalteter Funktionen handelt. Setzt man

$$f_N(x) = \sum s^{(\nu)} \gamma_N^{(\nu)} \sum \alpha_{\varrho\sigma}^{(\nu)} D_{\varrho\sigma}^{(\nu)}(x),$$

so sind wir nun sicher, daß die Funktionen $f_N(x)$ für $N \to \infty$ gleichmäßig gegen die zu (7) gehörige fastperiodische Funktion konvergieren. Man kann durch einfache Operationen erreichen, daß die $\gamma_N^{(\nu)}$ für eventuell auszuführende Rechnungen besonders praktisch werden. Z. B. kann man erreichen, daß bei festem N nur endlich viele $\gamma_N^{(\nu)} \neq 0$ sind, doch gehen wir hierauf nicht näher ein.

§ 4.

Gleichartig fastperiodische Funktionen.

Wir nennen eine fastperiodische Funktion $g(x)$ *gleichartig fastperiodisch wie* $f(x)$, wenn zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $\delta > 0$ existiert, so daß jede Teilung $\mathfrak{T}\{f(x), \delta\}$ eine Teilung $\mathfrak{T}\{g(x), \varepsilon\}$ ist. Unter Benutzung dieses Begriffes läßt sich folgender Satz formulieren und beweisen:

Satz 9. *Ist $\Phi(x)$ irgendeine fastperiodische Funktion, so besteht der Summationsmodul $\{\Phi(x)\}$ aus genau denjenigen Funktionen $f(x)$, welche gleichartig fastperiodisch wie $\Phi(x)$ sind.*

Beweis. Es sei $f(x)$ gleichartig fastperiodisch wie $\Phi(x)$. Ist dann $\varepsilon > 0$ beliebig vorgegeben, so bestimmen wir $\delta > 0$ derart, daß $\mathfrak{T}\{\Phi(x), \delta\}$ eine Teilung $\mathfrak{T}\{f(x), \varepsilon\}$ ist. Es sei dann N eine natürliche Zahl $> 1/\delta$. Wir haben

$$|f(x) - f \times g_N(x)| \leqq M_y\{|f(x) - f(xy^{-1})|\, g_N(y)\}.$$

Wenn hierin

$$|f(x) - f(xy^{-1})| \geqq \varepsilon$$

ist, so folgt für die in (1) erklärte Funktion $\Delta(x, y)$

$$\Delta(y, 1) \geqq \delta > \frac{1}{N}.$$

Für diese y ergibt sich dann aus (2) und (3)

$$g_N(y) = 0.$$

Wir haben also

$$|f(x) - f \times g_N(x)| \leqq \varepsilon M_y\{g_N(y)\} = \varepsilon$$

und entnehmen hieraus, daß die $f \times g_N$ gleichmäßig gegen $f(x)$ konvergieren. Deshalb muß $f \in \{\Phi(x)\}$ sein.

Wenn umgekehrt $f \in \{\Phi(x)\}$, so ist zu zeigen, daß $f(x)$ gleichartig fastperiodisch ist wie $\Phi(x)$. Man wähle bei vorgegebenem $\varepsilon > 0$ das natürliche N so groß, daß für alle x

$$|f(x) - f \times g_N(x)| < \frac{\varepsilon}{3}$$

wird. Sodann wähle man $\delta > 0$ so klein, daß

$$\delta < \frac{\varepsilon\, G_N}{3\, M_y\{|f(y)|\}} \qquad f(x) \not\equiv 0$$

ist. Liegen nun x_1 und x_2 in einem Teil $\mathfrak{A}_i$ von $\mathfrak{T}\{\Phi(x), \delta\}$, so gilt

$$|f(x_1)-f(x_2)| \leqq |f(x_1)-f \times g_N(x_1)| + |f \times g_N(x_1) - f \times g_N(x_2)|$$
$$+ |f \times g_N(x_2) - f(x_2)| \leqq \frac{\varepsilon}{3} + |f \times g_N(x_1) - f \times g_N(x_2)| + \frac{\varepsilon}{3}.$$

Nun ist aber

$$|f \times g_N(x_1) - f \times g_N(x_2)| \leqq M_y\{|f(y)||g_N(y^{-1}x_1) - g_N(y^{-1}x_2)|\}.$$

Aus Satz 4 folgt, daß dies

$$< \frac{\delta M_y\{|f(y)|\}}{G_N} < \frac{\varepsilon}{3}.$$

Für die in $\mathfrak{A}_i$ gelegenen Elemente x_1, x_2 gilt also

$$|f(x_1)-f(x_2)| < 3\frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon.$$

Damit ist der Satz auch in der anderen Richtung bewiesen. —

Literaturverzeichnis.

[1] H. Bohr. Fastperiodische Funktionen. Ergebnisse der Mathematik **1** Nr. 5 (1932).

[2] J. v. Neumann. Almost periodic functions in a group I. Transactions A. M. S. **36** 445—492 (1934).

[3] S. Bochner und J. v. Neumann. Almost periodic functions in a group II. Transactions A. M. S. **37** 21—50 (1935).

[4] E. R. van Kampen. Almost periodic functions and compact groups. Ann. Math. Princeton (2) **37** 48—91 (1936).

(Eingegangen am 18. November 1949.)

Einige mittels Laplace-Transformation lösbare Integralgleichungen I.

Herrn Oskar Perron zum 70. Geburtstag am 7. Mai 1950 gewidmet.

Von

J. Heinhold in München.

Wir verwenden im folgenden die Bezeichnungsweise von G. Doetsch[1]). Funktionen $F(t)$ der reellen Veränderlichen $t > 0$, für die das Integral $\int_0^\infty e^{-st} F(t)\, dt = f(s)$ in einer Halbebene $\Re(s) > \alpha$ konvergiert, abgekürzt $L\{F(t)\} = f(s)$, heißen L-Funktionen oder Oberfunktionen, die Resultatfunktion $f(s)$ heißt die zu $F(t)$ gehörige Unterfunktion oder l-Funktion. Funktionen $F(t)$, für die das L-Integral absolut konvergiert, werden als L_a-Funktionen, die zugehörigen Unterfunktionen als l_a-Funktionen bezeichnet. Um eine umkehrbare Eindeutigkeit in der Zuordnung der Ober- und Unterfunktionen zu erreichen, beschränken wir uns auf stetige oder einseitig stetige Funktionen $F(t)$.

Bekanntlich geht die Faltung $K(t) * Y(t) = \int_0^t K(t-\tau)\, Y(\tau)\, d\tau$, falls $L\{K(t)\} = k(s)$ absolut und $L\{Y(t)\} = y(s)$ einfach konvergiert bei der L-Transformation in das Produkt der Unterfunktionen über, $L\{K * Y\} = k(s)\, y(s)$. Hiernach lassen sich Integral- und Integrodifferentialgleichungen, in denen die auftretenden Integrale in der Gestalt von einfachen oder mehrfachen Faltungen auftreten, im Unterbereich in algebraische Gleichungen für $y(s)$ transformieren. Diese haben unter entsprechenden Voraussetzungen l-Funktionen zur Lösung, deren Oberfunktionen die vorgegebenen Integral- bzw. Integrodifferentialgleichungen erfüllen. Derartige Gleichungen, sowie Integralgleichungen, die im Unterbereich auf algebraische Differentialgleichungen führen, hat Doetsch behandelt[2]).

Neben der Faltung gibt es aber noch eine Reihe weiterer Integraloperationen, die eine gegebene und eine beliebige L-Funktion $Y(t)$ enthalten und durch die L-Transformation in einen von Integralen

[1]) Theorie und Anwendung der Laplace-Transformation, Berlin 1937, im folgenden als D_I bezeichnet.

[2]) Die Integrodifferentialgleichungen vom Faltungstypus, Math. Ann. 89 (1923), S. 192—207 und D_I Kap. 15.

freien Ausdruck im Unterbereich übergeführt werden. Hiermit lassen sich wieder gewisse Integralgleichungen in integralfreie Funktionalgleichungen für $y(s)$ des Unterbereiches transformieren. Gelingt es Lösungen dieser Funktionalgleichungen, die nun keine algebraischen Gleichungen mehr sind, in l-Funktionen zu ermitteln, so kann man wieder zu Lösungen der vorgegebenen Integralgleichungen gelangen. Sieht man hiernach die reichhaltigen Tabellen zur LAPLACE-Transformation von G. DOETSCH[3]) durch, so erhält man eine große Zahl spezieller Integralgleichungen, für die sich Lösungen in L-Funktionen angeben lassen.

1.

Wir bringen zunächst einige VOLTERRAsche Integralgleichungen 2. Art. Diese lassen sich natürlich auch nach der allgemeinen Theorie mit Hilfe der NEUMANNschen Reihe lösen, es ergibt sich jedoch hier eine einfachere Darstellung der Lösung.

$$(1) \qquad Y(t) - \alpha \int_a^t \frac{t\, J_1(\alpha \sqrt{t^2 - \tau^2})}{\sqrt{t^2 - \tau^2}}\, Y(\tau)\, d\tau = G(t);$$

dabei sei $J_\nu(z) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m (z/2)^{\nu + 2m}}{m!\, \Gamma(\nu + m + 1)}$ die BESSEL-Funktion 1. Art für den Zeiger ν, ferner werde $\frac{1}{i^\nu} J_\nu(iz) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(z/2)^{\nu + 2m}}{m!\, \Gamma(\nu + m + 1)} = I_\nu(z)$ gesetzt[4]). Der Kern $K(t; \tau)$ ist hier im Bereich $0 \leqq \tau \leqq t \leqq a$ stetig, daher hat die Gleichung, falls noch $G(t)$ für $0 \leqq t \leqq a$ als stetig angenommen wird, genau eine stetige Lösung $Y(t)$.

Setzen wir $G(t)$ und ebenso $Y(t)$ als (einseitig stetige) L_a-Funktionen voraus, $L\{G(t)\} = g(s)$, $L\{Y(t)\} = y(s)$, so ist die linke Seite der Gleichung (1) eine L-Funktion und zwar gehört hierzu die Unterfunktion $\frac{s}{\sqrt{s^2 + \alpha^2}}\, y(\sqrt{s^2 + \alpha^2})$. α kann dabei ein beliebiger komplexer Parameter sein. Für den Fall $\alpha = 1$ ist diese Korrespondenz angegeben in D_{II} S. 78, Formel 33. Für beliebiges α erhält man sie durch Vertauschung der Reihenfolge der Integrationen aus der Definition der L-Transformation und der bei D_{II} S. 109/47 angegebenen Korrespondenz[5]):

Mit

$$\Phi(t, \tau) = \begin{cases} 0 & \text{für} \quad t < \tau \\ \dfrac{\alpha t}{\sqrt{t^2 - \tau^2}}\, J_1(\alpha \sqrt{t^2 - \tau^2}) & \text{für} \quad t > \tau \end{cases}$$

---

[3]) Berlin und Göttingen 1947, im folgenden als D_{II} bezeichnet.

[4]) Unter z^ν sei der Hauptwert $e^{\nu \log z}$, $-\pi < \arg z \leqq \pi$ verstanden.

[5]) Herrn G. DOETSCH bin ich für eine briefliche Mitteilung über die Aufstellung von Korrespondenzen bei den in seiner Tabelle angeführten Operationen zu Dank verpflichtet.

ergibt sich für $\Re(s) > |\Im(\alpha)|$

$$L\{\Phi(t,\tau)\} = e^{-\tau s} - \frac{s}{\sqrt{s^2+\alpha^2}}\, e^{-\tau\sqrt{s^2+\alpha^2}}.$$

Nach Definition der L-Transformation ist für $\Re(s) > A$

$$f(s) = \int_0^\infty e^{-st} F(t)\, dt,$$

also

$$f(s) - \frac{s}{\sqrt{s^2+\alpha^2}} f(\sqrt{s^2+\alpha^2}) = \int_0^\infty \left(e^{-s\tau} - \frac{s}{\sqrt{s^2+\alpha^2}}\, e^{-\tau\sqrt{s^2+\alpha^2}}\right) F(\tau)\, d\tau$$

$$= \int_0^\infty \left(\int_0^\infty e^{-st}\, \Phi(t,\tau)\, dt\right) F(\tau)\, d\tau$$

$$= \int_0^\infty \left(\int_\tau^\infty e^{-st} \frac{\alpha t}{\sqrt{t^2-\alpha^2}}\, J_1(\alpha\sqrt{t^2-\alpha^2})\, dt\right) F(\tau)\, d\tau$$

wenn nur $\Re(s) > A$, $\Re(\sqrt{s^2+\alpha^2}) > A$ und $\Re(s) > |\Im(\alpha)|$, was sicher der Fall ist, wenn nur $\Re(s) > B$ (mit hinreichend großem B) ist.

Vertauschung der Integrationsreihenfolge liefert

$$\int_0^\infty e^{-st}\left(\int_0^t \frac{\alpha t}{\sqrt{t^2-\tau^2}}\, J_1(\alpha\sqrt{t^2-\tau^2})\, F(\tau)\, d\tau\right) dt$$

$$= L\left\{\int_0^t \frac{\alpha t}{\sqrt{t^2-\tau^2}}\, J_1(\alpha\sqrt{t^2-\tau^2})\, F(\tau)\, d\tau\right\}.$$

Die Vertauschung der Integrationen ist möglich[6]), wenn

(a) $$\int_\tau^\infty \left| e^{-st} \frac{\alpha t}{\sqrt{t^2-\tau^2}}\, J_1(\alpha\sqrt{t^2-\tau^2})\, F(\tau)\right| dt$$

und

(b) $$\int_0^t \left| e^{-st} \frac{\alpha t}{\sqrt{t^2-\tau^2}}\, J_1(\alpha\sqrt{t^2-\tau^2})\, F(\tau)\right| d\tau$$

konvergieren und

(c) $$\int_0^\infty \left(\int_\tau^\infty \left| e^{-st} \frac{\alpha t}{\sqrt{t^2-\tau^2}}\, J_1(\alpha\sqrt{t^2-\tau^2})\, F(\tau)\right| dt\right) d\tau$$

konvergiert.

[6]) Siehe Bromwich, An introduction to the theory of infinite series, Second edition, London 1926, S. 504 bzw. D_I S. 399.

Nun gilt[7]) für $\nu > -\frac{1}{2}$ die Ungleichung

$$(d) \qquad |J_\nu(z)| \leqq \frac{|(z/2)^\nu|}{\Gamma(\nu+1)} \exp|\Im(z)|.$$

Daher ist (a) für $\Re(s) > |\Im(\alpha)|$ konvergent. Falls $F(t)$ eine L_a-Funktion ist, konvergiert auch (b) und wegen

$$\int_\tau^\infty \left| e^{-st} \frac{\alpha t}{\sqrt{t^2-\tau^2}} J_1(\alpha\sqrt{t^2-\tau^2})\, F(\tau) \right| dt < \frac{1}{k} e^{-k\tau}\left(\tau + \frac{1}{k}\right)|F(\tau)|$$

mit $\Re(s) - |\Im(\alpha)| = k > 0$ auch (c). Es ist also die Vertauschung der Integrationen sicher möglich, wenn wir uns auf L_a-Funktionen beschränken.

Nach Ausführung der L-Transformation erhalten wir demnach aus (1) S. 780 im Unterbereich die Gleichung

$$(A) \qquad \frac{s}{\sqrt{s^2+\alpha^2}}\, y(\sqrt{s^2+\alpha^2}) = g(s).$$

Die allgemeine Lösung dieser Gleichung läßt sich aber sofort angeben, nämlich

$$(B) \qquad y(s) = \frac{s}{\sqrt{s^2-\alpha^2}}\, g(\sqrt{s^2-\alpha^2}).$$

Diese Funktion stellt aber ihrerseits eine l-Funktion dar, zu der die Oberfunktion

$$(1') \qquad Y(t) = G(t) + \alpha \int_0^t \frac{t\, I_1(\alpha\sqrt{t^2-\tau^2})}{\sqrt{t^2-\tau^2}}\, G(\tau)\, d\tau$$

gehört, wie sich aus der oben angegebenen Korrespondenz ergibt, wenn man α durch $i\alpha$ ersetzt. (1') ist sogar eine L_a-Funktion. Es ist ja $G(t)$ nach Voraussetzung eine solche. Andererseits ist

$$|I_1(\alpha\sqrt{t^2-\tau^2})| = \left|\frac{1}{i} J_1(i\alpha\sqrt{t^2-\tau^2})\right| \leqq \frac{1}{2}|\alpha|\sqrt{t^2-\tau^2}\, \exp|\Re(\alpha\sqrt{t^2-\tau^2})|$$
$$\leqq \frac{|\alpha|}{2}\sqrt{t^2-\tau^2}\, e^{t\,|\Re(\alpha)|},$$

also

$$\left| \int_a^b e^{-st}\left(\int_0^t \alpha t\, \frac{I_1(\alpha\sqrt{t^2-\tau^2})}{\sqrt{t^2-\tau^2}}\, G(\tau)\, d\tau \right) dt \right|$$
$$\leqq \int_a^b e^{-[\Re(s)-|\Re(\alpha)|]t} \cdot t \left(\int_0^t |G(\tau)|\, d\tau \right) dt.$$

[7]) G. N. Watson, A treatise on the theory of Bessel functions, Cambridge 1922, S. 49.

Da $G(t)$ eine L_a-Funktion, also $|G(t)|$ und damit $\int_0^t |G(\tau)|\,d\tau$, sowie $t\int_0^t |G(\tau)|\,d\tau$ L-Funktionen sind, kann für $\Re(s) - |\Re(\alpha)| \geqq \varrho > 0$, bei entsprechendem ϱ, das obige Integral beliebig klein, $< \varepsilon$, gemacht werden, wenn nur $0 < a < b < \delta(\varepsilon)$ und ebenso wenn $b > a > S(\varepsilon)$ ist, woraus die Behauptung folgt.

Die Schlüsse von (1) nach (1′) lassen sich auch rückwärts durchlaufen, so daß also (1′) eine L_a-Funktion ist, die der gegebenen Integralgleichung genügt. Für den lösenden Kern der Integralgleichung (1) ergibt sich demnach der einfache Ausdruck

$$K(t;\,\tau) = -\frac{\alpha t}{\sqrt{t^2-\tau^2}}\, I_1(\alpha\sqrt{t^2-\tau^2}).$$

Betrachten wir $Y(t)$ als gegebene und $G(t)$ als gesuchte L_a-Funktion, so erhalten wir als Lösung von (1′) die L_a-Funktion (1).

In derselben Weise ergibt sich die Lösung der Integralgleichung

$$Y(t) - \alpha \int_0^t \frac{\tau J_1(\alpha\sqrt{t^2-\tau^2})}{\sqrt{t^2-\tau^2}}\, Y(\tau)\,d\tau = G(t) \tag{2}$$

oder, indem wir anstelle von τ die Veränderliche $\lambda = \sqrt{t^2-\tau^2}$ einführen:

$$Y(t) - \alpha \int_0^t J_1(\alpha\lambda)\, Y(\sqrt{t^2-\lambda^2})\,d\lambda = G(t). \tag{3}$$

Wenn $Y(t)$ eine L_a-Funktion ist, so ist auch wieder die linke Seite von (2) bzw. (3) eine solche, was sich wie oben beweisen läßt, und es gehört hierzu die Unterfunktion $y(\sqrt{s^2+\alpha^2})$. Das findet sich für $\alpha = 1$ bei D_{II} S. 77/29 und läßt sich allgemein aus D_{II} S. 105/3 herleiten. Damit haben wir im Unterbereich die Funktionalgleichung

$$y(\sqrt{s^2+\alpha^2}) = g(s) \tag{a}$$

mit der allgemeinen Lösung

$$y(s) = g(\sqrt{s^2-\alpha^2}). \tag{b}$$

Das ist wieder eine l_a-Funktion und zwar erhält man, indem man α durch $i\alpha$ ersetzt aus der vorigen Korrespondenz wieder die zugehörige Oberfunktion als

$$Y(t) = G(t) + \alpha \int_0^t I_1(\alpha\lambda)\, G(\sqrt{t^2-\lambda^2})\,d\lambda \tag{3′}$$

oder $\sqrt{t^2-\lambda^2}=\tau$ gesetzt

$$(2') \qquad Y(t)=G(t)+\alpha\int_0^t \frac{\tau}{\sqrt{t^2-\tau^2}}\, I_1(\alpha\sqrt{t^2-\tau^2})\, G(\tau)\, d\tau .$$

Umgekehrt läßt sich wieder (2) bzw. (3) bei gegebener L_a-Funktion $Y(t)$ als Lösung der Integralgleichung (2') bzw. (3') auffassen.

2.

In ähnlicher Weise kann man die Lösung gewisser Volterrascher Integralgleichungen 1. Art angeben, z. B.

$$(4) \qquad \int_0^t J_0(\alpha\sqrt{t^2-\tau^2})\, Y(\tau)\, d\tau = G(t).$$

Man kann diese Integralgleichung durch Differentiation nach t wegen $J_0'(t) = -J_1(t)$ auf die Integralgleichung (1) mit der rechten Seite $G'(t)$ zurückführen oder unmittelbar wie oben lösen. Es genügt dann anstelle der Differenzierbarkeit vorauszusetzen, daß $G(t)=\int_0^t G_1(\tau)\, d\tau$ ist, wobei $G_1(t)$ eine L_a-Funktion mit der Unterfunktion $g_1(s)$ bedeute. Ist $Y(t)$ eine L_a-Funktion, $L\{Y(t)\}=y(s)$, so ist die linke Seite von (4) ebenfalls eine solche und zwar gehört hierzu die Unterfunktion

$$\frac{y(\sqrt{s^2+\alpha^2})}{\sqrt{s^2+\alpha^2}},$$

wie sich aus der Korrespondenz D_{II} S. 109/43 ergibt und für $\alpha=1$ bei D_{II} S. 77/31 sich findet. Wir haben dann im Unterbereich

$$\frac{y(\sqrt{s^2+\alpha^2})}{\sqrt{s^2+\alpha^2}} = \frac{1}{s}\, g_1(s)$$

mit der Lösung

$$y(s)=\frac{s}{\sqrt{s^2-\alpha^2}}\, g_1(\sqrt{s^2-\alpha^2}).$$

Das ist aber die l_a-Funktion (B) S. 782, also erhält man als zugehörige Oberfunktion für $t \geqq 0$

$$Y(t)=G_1(t)+\alpha\int_0^t \frac{t}{\sqrt{t^2-\tau^2}}\, I_1(\alpha\sqrt{t^2-\tau^2})\, G_1(\tau)\, d\tau .$$

Analog ergibt sich die Lösung, wenn man in (4) an die Stelle von J_0 die Funktion I_0 setzt.

Nach D_{II} S. 106/16 gilt mit

$$\Phi(t;\tau) = \begin{cases} 0 & \text{für } t \leqq \tau \\ \int_{\tau}^{t} J_0(\alpha(t-\lambda))\, J_0(\alpha\sqrt{\lambda^2-\tau^2})\, d\lambda & \text{für } t > \tau \end{cases}$$

für $\Re(s) > |\Im(\alpha)|$

$$L\{\Phi(t;\tau)\} = \frac{1}{s^2+\alpha^2}\, e^{-\sqrt{s^2+\alpha^2}\,\tau}.$$

Hieraus folgt wieder in analoger Weise wie S. 781 unter Vertauschung der Integrationsreihenfolge

$$(A) \qquad L\left\{\int_0^t K(t;\tau)\, Y(\tau)\, d\tau\right\} = \frac{1}{s^2+\alpha^2}\, y(\sqrt{s^2+\alpha^2})$$

mit

$$K(t;\tau) = \int_{\tau}^{t} J_0(\alpha(t-\lambda))\, J_0(\alpha\sqrt{\lambda^2-\tau^2})\, d\lambda\,.$$

Diese Transformationsformel gilt sicher wieder für L_a-Funktionen $Y(t)$, wie sich entsprechend wie auf S. 781—782 unter Benutzung der Ungleichung (d) zeigen läßt.

Nehmen wir daher die Integralgleichung

$$(5) \qquad \int_0^t K(t;\tau)\, Y(\tau)\, d\tau = G(t)$$

und setzen voraus, daß $G''(t)$ eine L_a-Funktion sei, die für $t \to 0$ wie t^r mit $r > 0$ verschwindet, ferner, daß $G(0) = G'(0) = 0$ sei, so erhalten wir im Unterbereich die Gleichung

$$(B) \qquad \frac{1}{s^2+\alpha^2}\, y(\sqrt{s^2+\alpha^2}) = g(s)$$

mit der Lösung

$$(C) \qquad y(s) = s^2\, g(\sqrt{s^2-\alpha^2}) = s^2\, g_1(s).$$

Nun ist nach (3′) S. 783

$$L^{-1}\{g(\sqrt{s^2-\alpha^2})\} = G(t) + \alpha \int_0^t I_1(\alpha\tau)\, G(\sqrt{t^2-\tau^2})\, d\tau = G_1(t),$$

also wegen $G(0) = G'(0) = 0$ auch $G_1(0) = G_1'(0) = 0$. Somit ist

$$Y(t) = \frac{d^2}{dt^2}\, G_1(t)$$

$$= G''(t) + \alpha \int_0^t \left(I_1(\alpha\tau)\, G''(\sqrt{t^2-\tau^2})\, \frac{t^2}{t^2-\tau^2} - G'(\sqrt{t^2-\tau^2})\, \frac{2}{\sqrt{(t^2-\tau^2)^3}} \right) d\tau,$$

$$\text{(D)}\quad Y(t) = G''(t) + \alpha \int_0^t I_1(\alpha \sqrt{t^2 - z^2}) \left(\frac{t^2}{z} G''(z) + \left(\frac{t^2}{z^2} - 1 \right) G'(z) \right) \frac{dz}{\sqrt{t^2 - z^2}}.$$

Wegen der getroffenen Voraussetzungen über $G(t)$ ist wieder, wenn nur S groß genug ist, für alle s mit $\Re(s) > S$,

$$\int_a^b e^{-\Re(s)t} \left| \int_0^t I_1(\alpha \sqrt{t^2 - z^2}) \left(G''(t) \frac{t^2}{z} + G'(t) \left(\frac{t^2}{z^2} - 1 \right) \right) \frac{dz}{\sqrt{t^2 - z^2}} \right| dt < \varepsilon,$$

falls $0 < a < b < \delta(\varepsilon)$ und ebenso, falls $b > a > T(\varepsilon)$ ist. $Y(t)$ ist somit L_a-Funktion und löst die Gleichung (5).

Differenziert man (5) zweimal, so erhält man die Integralgleichung 2. Art

$$\text{(6)}\quad Y(t) + \int_0^t K_1(t;\tau)\, Y(\tau)\, d\tau = G''(t),$$

mit

$$K_1(t;\tau) = \frac{\alpha t}{\sqrt{t^2 - \tau^2}} J_0'(\alpha \sqrt{t^2 - \tau^2}) + \alpha^2 \int_0^t J_0''(\alpha(t - \lambda))\, J_0(\alpha \sqrt{\lambda^2 - \tau^2})\, d\lambda.$$

Ersetzt man wieder α durch $i\alpha$, so erhält man aus (D) die Lösung der Gleichungen (5) und (6), in denen J_0 durch I_0 ersetzt ist.

Wir betrachten weiterhin die Integralgleichung 1. Art

$$\text{(7)}\quad \int_0^t J_0(2\sqrt{(t - \tau)\tau})\, Y(\tau)\, d\tau = G(t);$$

dabei sei $G(t)$ eine ganze Funktion vom „Exponentialtypus" (vgl. D_I S. 61), also höchstens von der Wachstumsordnung 1, $G(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!} a_n t^n$. Eine solche ist bekanntlich eine L_a-Funktion mit der Unterfunktion $g(s) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \frac{1}{s^{n+1}}$. Diese Reihe hat einen endlichen Konvergenzradius. Ist $Y(t)$ eine L_a-Funktion, $L\{Y(t)\} = y(s)$, so ist auch die linke Seite von (7) eine solche und zwar ist nach D_{II} S. 76/18

$$\text{(A)}\quad L\left\{ \int_0^t J_0(2\sqrt{(t - \tau)\tau})\, Y(\tau)\, d\tau \right\} = \frac{1}{s} y\left(s + \frac{1}{s}\right),$$

was aus D_{II} S. 105/9 mittels der Verschiebungsregel für die Oberfunktion hergeleitet werden kann. Hiernach ergibt die Transformation von (7) in den Unterbereich

$$\text{(B)}\quad \frac{1}{s} y\left(s + \frac{1}{s}\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{s^{n+1}},$$

woraus

$$(C) \qquad y(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n a_n}{(s + \sqrt{s^2 - 4})^n}$$

folgt.

Damit ist die Lösung der Aufgabe im Unterbereich durch eine konvergente Reihe dargestellt. Die Reihenglieder sind für $\Re(s) > 2$ selbst wieder l_a-Funktionen, und es gilt nach D_{II} S. 92/64

$$\frac{1}{(s + \sqrt{s^2 - 4})^n} = L\left\{ \frac{n I_n(2t)}{2^n t} \right\}.$$

Wenden wir auf (C) die Umkehrung der L-Transformation gliedweise an, so erhalten wir zunächst formal

$$(D) \qquad Y(t) = \frac{1}{t} \sum_{n=1}^{\infty} n a_n I_n(2t).$$

Wir zeigen: Diese Reihe konvergiert für alle t und genügt der Integralgleichung (7).

Nach Voraussetzung ist $G(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n t^n}{n!}$ und ebenso $G'(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n t^{n-1}}{(n-1)!}$ eine ganze Funktion, konvergiert also absolut und gleichmäßig in jedem endlichen Bereich $|t| \leqq r < R$. Wegen (vgl. (d), S. 782)

$$|n I_n(2t)| \leqq |t| e^{2|t|} \frac{|t|^{n-1}}{(n-1)!}$$

konvergiert auch $\sum_{n=1}^{\infty} n a_n I_n(2t)$ für $0 \leqq |t| \leqq r$ gleichmäßig. Daher gilt, wenn wir die Reihe (D) in die Integralgleichung (7) einsetzen

$$\int_0^t J_0(2\sqrt{(t-\tau)\tau})\, Y(\tau)\, d\tau = \int_0^t J_0(2\sqrt{(t-\tau)\tau}) \sum_{n=1}^{\infty} n a_n \frac{1}{\tau} I_{2n}(2\tau)\, d\tau$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} a_n \left(\int_0^t J_0(2\sqrt{(t-\tau)\tau}) \frac{n}{\tau} I_n(2\tau)\, d\tau \right).$$

Nun ist aber

$$(E) \qquad \int_0^t J_0(2\sqrt{(t-\tau)\tau}) \frac{n}{\tau} I_n(2\tau)\, d\tau = \frac{t^n}{n!} \qquad \text{für} \quad n = 1, 2, \ldots,$$

woraus die Behauptung folgt.

Die letzte Beziehung (E) läßt sich mit Hilfe der L-Transformation sofort beweisen. $\frac{n}{t} I_n(2t)$ ist L_a-Funktion, wie man sofort mittels der Abschätzung (d) von S. 782 erhält und zwar gilt das für $\Re(s) > 2$. Es

ist nach D_{II} S. 92/64

$$L\left\{\frac{n}{t} I_n(2t)\right\} = \frac{2^n}{(s+\sqrt{s^2-4})^n},$$

also nach (A) S. 786

$$L\left\{\int_0^t J_0(2\sqrt{(t-\tau)\tau})\,\frac{n}{\tau} I_n(2\tau)\,d\tau\right\} = \frac{1}{s^{n+1}} = L\left\{\frac{t^n}{n!}\right\},$$

woraus wegen der Stetigkeit der unter dem Operator L stehenden Funktionen die Gleichung (E) folgt.

Nach diesem Beweis können wir die Forderung, daß $G(t)$ eine ganze Funktion vom Exponentialtypus sei, fallen lassen und nur fordern, daß $G(t)$ eine ganze Funktion ist, die im Nullpunkt verschwindet. Es stellt dann (D) die Lösung der Integralgleichung (7) dar, sowie der daraus durch Differentiation nach t entstehenden Gleichung 2. Art:

$$(8)\quad Y(t) - \int_0^t \sqrt{\frac{\tau}{t-\tau}}\, J_1(2\sqrt{(t-\tau)\tau})\, Y(\tau)\,d\tau = G'(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n t^{n-1}}{(n-1)!}.$$

Die Ableitung von (E) nach t ergibt

$$\frac{n}{t} I_n(2t) - \int_0^t \frac{\tau}{\sqrt{(t-\tau)\tau}} J_1(2\sqrt{(t-\tau)\tau})\,\frac{n}{\tau} I_n(2\tau)\,d\tau = \frac{t^{n-1}}{(n-1)!}$$

oder

$$(F)\qquad I_n(2t) - \int_0^t \frac{t}{\sqrt{(t-\tau)\tau}} J_1(2\sqrt{(t-\tau)\tau})\, I_n(2\tau)\,d\tau = \frac{t^n}{n!}.$$

Hieraus folgt in gleicher Weise wie oben

$$(G)\qquad Y(t) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n I_n(2t)$$

als Lösung der Integralgleichung 2. Art

$$(9)\qquad Y(t) - \int_0^t \frac{t}{\sqrt{(t-\tau)\tau}} J_1(2\sqrt{(t-\tau)\tau})\, Y(\tau)\,d\tau = G(t),$$

wobei $G(t) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \frac{t^n}{n!}$ eine ganze Funktion von t ist.

Wir betrachten schließlich noch die beiden Integralgleichungen mit speziellen rechten Seiten

$$(10)\qquad \int_0^t \alpha^{\nu} \left(\frac{t-\tau}{t+\tau}\right)^{\nu/2} J_{\nu}(\alpha\sqrt{t^2-\tau^2})\, Y(\tau)\,d\tau = \alpha^{\mu} J_{\mu}(\alpha t)$$

und

$$\int_0^t \alpha^\nu \left(\frac{t-\tau}{t+\tau}\right)^{\nu/2} I_\nu(\alpha\sqrt{t^2-\tau^2})\, Y(\tau)\, d\tau = \alpha^\mu I_\mu(\alpha t), \tag{11}$$

$$\Re(\mu) > \Re(\nu) > -1.$$

Ist $Y(t)$ eine L_a-Funktion, $L\{Y(t)\} = y(s)$, so erhält man wie auf S. 781 mittels der Definition der L-Transformation und der Korrespondenz D_{II} S. 112/76 für die linke Seite von (10) die Unterfunktion

$$\frac{(\sqrt{s^2+\alpha^2}-s)^\nu}{\sqrt{s^2+\alpha^2}}\, y(\sqrt{s^2+\alpha^2}).$$

Andererseits ist auch die rechte Seite von (10) eine L_a-Funktion mit

$$L\{\alpha^\mu J_\mu(\alpha t)\} = \frac{(\sqrt{s^2+\alpha^2}-s)^\mu}{\sqrt{s^2+\alpha^2}}$$

(vgl. D_{II} S. 89/30) für $\Re(s) > |\Im(\alpha)|$ und $\Re(\nu) > -1$. Somit lautet die in den Unterbereich transformierte Gleichung (10)

$$\frac{(\sqrt{s^2+\alpha^2}-s)^\nu}{\sqrt{s^2+\alpha^2}}\, y(\sqrt{s^2+\alpha^2}) = \frac{(\sqrt{s^2+\alpha^2}-s)^\mu}{\sqrt{s^2+\alpha^2}}$$

mit der Lösung

$$y(s) = (s-\sqrt{s^2-\alpha^2})^{\mu-\nu}.$$

Hierzu gehört (D_{II} S. 87/4) die L_a-Funktion

$$Y(t) = \frac{(\mu-\nu)\,\alpha^{\mu-\nu}}{t} I_{\mu-\nu}(\alpha t). \tag{10'}$$

Daß diese Funktion in der Tat die Gleichung (10) erfüllt, ergibt sich sofort, wenn man (10') in (10) einsetzt und die entstehende Gleichung mittels der benutzten L-Korrespondenzen verifiziert. Ersetzt man wieder α durch $i\alpha$, so ergibt sich als Lösung von (11)

$$Y(t) = \frac{(\mu-\nu)\,\alpha^{\mu-\nu}}{t} J_{\mu-\nu}(\alpha t). \tag{11'}$$

Für $\nu = 0$ geht die linke Seite von (10) in die linke Seite der Integralgleichung (4) S. 784 über. Wir betrachten noch den Spezialfall $\alpha = 1$ dieser Integralgleichung 1. Art

$$\int_0^t J_0(\sqrt{t^2-\tau^2})\, Y(\tau)\, d\tau = G(t) \tag{4}$$

mit einer ganzen Funktion $G(t)$, die wir uns in eine Neumannsche Reihe entwickelt denken:

$$G(t) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n J_n(t).$$

Das Konvergenzgebiet der Neumannschen Reihe ist ein Kreis, der mit dem Konvergenzkreis der assoziierten Potenzreihe $G(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n!} (t/2)^n$ zusammenfällt und die durch die Neumannsche Reihe und ihre analytische Fortsetzung definierte Funktion hat keine anderen Singularitäten als die durch die assoziierte Potenzreihe und ihre analytische Fortsetzung definierte Funktion. Somit konvergiert $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n!} (t/2)^n$ und, wegen $\left| \frac{n}{t} a_n I_n(t) \right| \leqq \frac{1}{2} e^{|t|} |a_n| \frac{|t/2|^{n-1}}{(n-1)!}$, auch $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{t} a_n I_n(t)$ für alle reellen t und für $|t| \leqq R$ gleichmäßig. Setzt man daher die Reihe

$$Y(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{t} a_n I_n(t) \tag{4''}$$

in die Integralgleichung (4) ein, so wird diese, da man Summation und Integration vertauschen kann und (10′) Lösung von (10) ist, von (4″) erfüllt. Ebenso ergibt sich für dasselbe $G(t)$ als Lösung von

$$\int_0^t I_0(\sqrt{t^2 - \tau^2})\, Y(\tau)\, d\tau = G(t)$$

die ganze Funktion

$$Y(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{t} a_n J_n(t).$$

Wir haben uns zunächst auf Volterrasche Integralgleichungen beschränkt. Es lassen sich in gleicher Weise die Lösungen gewisser singulärer Integralgleichungen mit unendlichem Integrationsintervall ermitteln, was in einer folgenden Note geschehen soll.

(Eingegangen am 27. Januar 1950.)

Zur Projektiven Differentialgeometrie der Regelflächen.

Herrn Oskar Perron zum 70. Geburtstag am 7. Mai 1950 gewidmet.

Von

G. Bol in Freiburg.

Die Projektivgeometrie der Regelflächen wurde mehrfach vom Standpunkt der Differentialgeometrie behandelt, wohl zuerst von E. J. Wilczynski[1]). Viele Autoren haben zum Ausbau der Theorie beigetragen, die dadurch zu einem gewissen Abschluß gelangt schien. Wenn wir hier trotzdem diesen Fragenkreis wieder aufgreifen, so hat das verschiedene Gründe.

Einerseits sollte eine Modernisierung der Darstellung versucht werden, wobei der Schwerpunkt von der Normierung der Vektoren und der Wahl eines invarianten Parameters verlegt wird auf die Betrachtung der Transformationsformeln bei Parameteränderung. Man gelangt so zu übersichtlichen und anpassungsfähigen Formeln, die es besonders leicht gestatten, die mit der Fläche verknüpften zweidimensionalen Gebilde geometrisch zu beherrschen. Es liegt nahe, diesen Ansatz zu machen, weil die gleiche Methode sich auch bei der Untersuchung von Raumkurven und nichtgeradlinigen Flächen bewährt hat[2]).

Der zweite neue Gesichtspunkt besteht in einer Anwendung des Hesseschen Korrespondenzprinzips. Die krummlinigen Asymptotenlinien einer Regelfläche bilden bekanntlich die Erzeugenden projektiv aufeinander ab, man kann sie daher als Elemente eines binären Gebietes auffassen. Nach Hesse läßt sich dieses Gebiet auch durch die Tangenten eines Kegelschnittes K in einer Hilfsebene E repräsentieren.

Ist nun ein Kurvenpaar auf der Regelfläche gegeben, so schneidet dieses auf jeder Erzeugenden zwei Punkte aus. Zu den Asymptotenlinien durch diese Punkte gehören zwei Tangenten von K, die durch ihren Schnittpunkt S eindeutig festgelegt werden können.

Macht man das für sämtliche Erzeugenden, so beschreibt S in E eine Kurve, die wir das *hyperbolische Bild* des Kurvenpaares auf

[1]) Vgl. insbesondere E. J. Wilczynski, Projective differential Geometry of curves and ruled surfaces. Leipzig 1906.

[2]) Man vgl. dazu meine Projektive Differentialgeometrie, Bd. 1, Göttingen 1950. Das Buch wird weiterhin mit P. D. zitiert. Für die Flächentheorie S. Comm. Math. Helv. **18**, 129—153.

unserer Regelfläche nennen. In der hyperbolischen Geometrie dieser Kurve in Bezug auf den Kegelschnitt K als absolutes Gebilde spiegeln sich nämlich projektive Eigenschaften der Regelfläche mit dem darauf liegenden Kurvenpaar.

Insbesondere können wir für unsere Kurven die *Fleknodalkurven* oder *Knotenkurven* der Regelflächen wählen[3]). Ihr hyperbolisches Bild, das durch die Regelfläche allein invariant bis auf Abbildungen der hyperbolischen Geometrie in Bezug auf K festgelegt ist, nennen wir die *Kennlinie* der Regelfläche. Sie ist dann und nur dann eine Gerade, wenn die Fläche einem linearen Komplex angehört.

Besonders interessant sind die Regelflächen — wir nennen sie Kreisregelflächen — deren Kennlinie ein Kreis der hyperbolischen Geometrie ist. Sie scheinen bisher nicht beachtet worden zu sein.

Der dritte neue Gesichtspunkt besteht in der Heranziehung der Theorie der Flächenstreifen[4]), mit deren Hilfe man viele Invarianten geometrisch deuten kann. Diese Dinge können allerdings hier nur gestreift werden.

§ 1.

Ebene hyperbolische Geometrie.

x_0, x_1, x_2 seien projektive Koordinaten in einer Ebene E, wir fassen sie zu einem Vektor

$$\mathfrak{x} = \{x_0, x_1, x_2\} \tag{1}$$

zusammen

$$\sum_{i,k=0}^{2} a_{ik} x_i x_k = \langle \mathfrak{x}, \mathfrak{x} \rangle = 0; \qquad a_{ik} = a_{ki}\,^{5}) \tag{2}$$

sei die Gleichung eines nichtentarteten Kegelschnittes K von E, die wir uns durch die Forderung

$$|a_{ik}| = 1 \tag{3}$$

für die Determinante eindeutig normiert denken.

---

[3]) Sie bilden den Ort der Punkte, wo die krummlinigen Asymptotenlinien der Fläche Wendepunkte besitzen. Vgl. P. D. § 26 oder auch R. Sauer, Projektive Liniengeometrie, Berlin und Leipzig 1937, § 13.

[4]) Ausführlich dargestellt in P. D., Abschnitt IV.

[5]) Für die Bezeichnung vgl. etwa W. Blaschke, Projektive Geometrie, Wolfenbüttel 1948. Für zwei beliebige Vektoren ist

$$\langle \mathfrak{p}, \mathfrak{q} \rangle = \sum_{i,k=0}^{2} a_{ik} p_i q_k. \tag{1 a}$$

$\langle \mathfrak{p}, \mathfrak{q} \rangle = 0$ bedeutet, daß die Punkte $\mathfrak{p}$ und $\mathfrak{q}$ in Bezug auf K konjugiert liegen.

K sei der absolute Kegelschnitt einer hyperbolischen Geometrie und möge also reelle Punkte besitzen. Für Punkte im Innengebiet von K ist dann $\langle \mathfrak{x}, \mathfrak{x} \rangle > 0$, für Punkte im Außengebiet ist $\langle \mathfrak{x}, \mathfrak{x} \rangle < 0$ [6].

Durch

$$\mathfrak{x}(v) = \{x_0(v), x_1(v), x_2(v)\} \tag{4}$$

sei in unserer Ebene eine Kurve gegeben, die mit K keinen Punkt und keine Tangente gemeinsam haben soll. Den Vektor $\mathfrak{x}$ denken wir uns durch die Forderung

$$\langle \mathfrak{x}(v), \mathfrak{x}(v) \rangle = \pm 1 = \varepsilon_0 \tag{5}$$

bis auf das Vorzeichen eindeutig normiert.

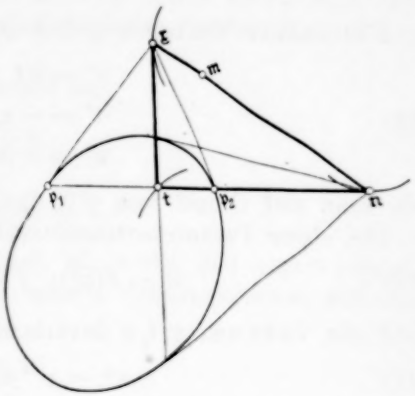


Fig. 1.

Aus (5) folgt durch Differentiation

$$\langle \mathfrak{x}, \mathfrak{x}' \rangle = 0 \text{ [7]}. \tag{6}$$

Wir setzen

$$\mathfrak{x}' = \sigma\, \mathfrak{t}(v) \tag{7}$$

mit

$$\langle \mathfrak{t}, \mathfrak{t} \rangle = \pm 1 = \varepsilon_1 \text{ [8]} \tag{8}$$

und bestimmen den Vektor $\mathfrak{n}$ so, daß

$$\langle \mathfrak{x}, \mathfrak{n} \rangle = 0, \quad \langle \mathfrak{t}, \mathfrak{n} \rangle = 0, \quad \langle \mathfrak{n}, \mathfrak{n} \rangle = \pm 1 = \varepsilon_2. \tag{9}$$

$\mathfrak{n}$ ist durch diese Bedingungen bis auf das Vorzeichen eindeutig festgelegt.

Es gilt dann die Multiplikationstabelle

(10)

	$\mathfrak{x}$	$\mathfrak{t}$	$\mathfrak{n}$
$\mathfrak{x}$	ε_0	0	0
$\mathfrak{t}$	0	ε_1	0
$\mathfrak{n}$	0	0	ε_2

wobei natürlich die durch (1a) erklärten Produkte gemeint sind. Jeder der drei Vektoren ist bis auf das Vorzeichen eindeutig festgelegt.

[6]) Ist der axiomatische Standpunkt maßgebend, so beschränkt man sich bekanntlich auf die Betrachtung der Punkte im Innengebiet von K, die anderen sind „unerreichbar". Bei unseren differentialgeometrischen Untersuchungen lohnt sich die Unterscheidung nicht. Wenn erwünscht, kann man im übrigen jeden unerreichbaren Punkt repräsentieren durch seine Polare an K, die stets erreichbar ist.

[7]) Akzente bedeuten Differentiation nach v. Wir setzen voraus, daß $\mathfrak{x}$ dreimal stetig differenzierbar ist und daß die Vektoren $\mathfrak{x}$ und $\mathfrak{x}'$ linear unabhängig sind.

[8]) Wäre $\langle \mathfrak{x}', \mathfrak{x}' \rangle = 0$, so würde die Tangente $(\mathfrak{x}, \mathfrak{x}')$ unserer Kurve K berühren, was wir ausgeschlossen hatten. Die Normierung ist daher möglich.

Die drei Punkte $\mathfrak{x}, \mathfrak{t}, \mathfrak{n}$ bilden nach (10) ein Polardreieck des absoluten Kegelschnittes K. Daher liegen stets genau zwei dieser Punkte im Außengebiet und es ist

$$\varepsilon_0 \varepsilon_1 \varepsilon_2 = 1. \tag{11}$$

Für unsere Vektoren gelten Ableitungsgleichungen der Form

$$\begin{aligned} \mathfrak{x}' &= \sigma \mathfrak{t} \\ \mathfrak{t}' &= -\varepsilon_2 \sigma \mathfrak{x} + \varepsilon_0 \bar{\sigma} \mathfrak{n} \\ \mathfrak{n}' &= -\bar{\sigma} \mathfrak{t}, \end{aligned} \tag{12}$$

wie man auf Grund von (10), (11), (7) leicht bestätigt.

Bei einer Parametertransformation

$$v = f(v^*); \quad f' \neq 0, \quad \frac{dv^*}{dv} = \varphi(v) \tag{13}$$

sind die Vektoren $\mathfrak{x}, \mathfrak{t}, \mathfrak{n}$ invariant und es ist

$$\sigma^* = \varphi^{-1} \sigma, \quad \bar{\sigma}^* = \varphi^{-1} \bar{\sigma}. \tag{14}$$

Den durch

$$s = \int \sigma \, dv \tag{15}$$

bis auf eine additive Konstante und das Vorzeichen eindeutig festgelegten invarianten Kurvenparameter nennt man die *hyperbolische Bogenlänge* unserer Kurve, die absolute Invariante

$$\varrho = \frac{\bar{\sigma}}{\sigma} \tag{16}$$

ihre *hyperbolische Krümmung*[9]).

Führt man die hyperbolische Bogenlänge als Parameter ein, so ist

$$\sigma = 1, \quad \bar{\sigma} = \varrho. \tag{17}$$

Durchläuft $\mathfrak{x}(v)$ die Kurve, so beschreibt $\mathfrak{n}(v)$ ihre Polkurve in Bezug auf K. Die Formeln zeigen, daß die Beziehung zwischen einer Kurve und ihrer Polkurve gegenseitig ist, falls letztere nicht entartet.

Die Gerade $(\mathfrak{x}, \mathfrak{n})$ ist zur Tangente $(\mathfrak{x}, \mathfrak{t})$ in Bezug auf K konjugiert, sie ist also die hyperbolische Normale der Kurve (und ihrer Polkurve).

Den Punkt

$$\mathfrak{m} = \mathfrak{n} + \varrho \mathfrak{x} \tag{18}$$

nennen wir den hyperbolischen *Krümmungsmittelpunkt* der Kurve an der betrachteten Stelle. Wegen (12) ist nämlich

$$\mathfrak{m} = \varrho' \mathfrak{x}, \tag{19}$$

das zeigt, daß die Kurve $\mathfrak{m}(v)$ von den Normalen $(\mathfrak{x}, \mathfrak{n})$ unserer Kurve berührt wird, sie ist ihre hyperbolische *Evolute*.

---

[9]) Im Sinne der Differentialgeometrie ist dies die nächstliegende Definition der Krümmung. Oft führt man aber auch $\ln \frac{1-\varrho}{1+\varrho}$ als Krümmung ein.

Ist

$$\varrho' = 0, \tag{20}$$

so ist der Punkt $\mathfrak{m}$ längs unserer Kurve fest, die Normalen $(\mathfrak{x}, \mathfrak{n})$ gehen also durch einen festen Punkt. Solche Kurven nennt man *Kreise* der hyperbolischen Geometrie. Kennzeichnend für sie ist, daß ihre Krümmung ϱ konstant ist.

Für die Punkte eines solchen Kreises ist

$$\langle \mathfrak{m}, \mathfrak{x} \rangle = \varrho \, \varepsilon_0,$$

also

$$\langle \mathfrak{m}, \mathfrak{x} \rangle^2 - \varrho^2 \varepsilon_0 \langle \mathfrak{x}, \mathfrak{x} \rangle = 0. \tag{21}$$

Da der Vektor $\mathfrak{m}$ wegen (19), (20) fest ist, stellt (21) einen Kegelschnitt dar, der den absoluten K in seinen Schnittpunkten mit der Polaren

$$\langle \mathfrak{m}, \mathfrak{x} \rangle = 0 \tag{22}$$

des Mittelpunktes $\mathfrak{m}$ doppelt berührt.

Eine Stelle der Kurve, an der (20) gilt, nennen wir einen hyperbolischen Scheitel[10]).

Bei den Anwendungen wird uns der absolute Kegelschnitt in Parameterform gegeben sein, etwa durch

$$x_0 = u^2, \quad x_1 = -\sqrt{2}\, u, \quad x_2 = 0. \tag{23}$$

Schreibt man die Gleichung dieses Kegelschnittes in der Form

$$2 x_0 x_2 - x_1^2 = 0, \tag{24}$$

so ist die Normierungsbedingung (3) erfüllt.

Die Tangente des Kegelschnittes im Punkte (23) hat die Geradenkoordinaten

$$X_0 = 1, \quad X_1 = \sqrt{2}\, u, \quad X_2 = u^2. \tag{25}$$

Der Schnittpunkt der Tangenten in den Punkten

$$\mathfrak{p}_1 = \{\alpha_1^2, -\sqrt{2}\,\alpha_1, 1\}, \quad \mathfrak{p}_2 = \{\alpha_2^2, -\sqrt{2}\,\alpha_2, 1\} \tag{26}$$

hat daher die Koordinaten

$$\mathfrak{x} = \frac{\sqrt{2}}{\alpha_1 - \alpha_2} \left\{ \alpha_1 \alpha_2, \; -\frac{1}{\sqrt{2}} (\alpha_1 + \alpha_2), \; 1 \right\}. \tag{27}$$

[10]) Auch in der hyperbolischen Geometrie gilt der Vierscheitelsatz: eine konvexe Kurve, die mit dem absoluten Kegelschnitt keinen Punkt gemeinsam hat, besitzt mindestens vier Scheitel. Hieraus folgen Sätze „im Großen" über geschlossene Regelflächen mit geschlossenen Asymptotenlinien. Darauf kann hier jedoch nicht eingegangen werden.

Der Normierungsfaktor ist dabei so eingerichtet, daß für die Komponenten

$$2 x_0 x_2 - x_1^2 = -1,$$

wie es nach (5) sein soll.

Hängen α_1 und α_2 und damit auch $\mathfrak{p}_1$, $\mathfrak{p}_2$ und $\mathfrak{x}$ von einem Parameter v ab, so ist

$$\begin{aligned} \mathfrak{p}_1' &= \{2\alpha_1, -\sqrt{2}, 0\}\,\alpha_1' = \left[\frac{2}{\alpha_1 - \alpha_2}\,\mathfrak{p}_1 - \sqrt{2}\,\mathfrak{x}\right]\alpha_1', \\ \mathfrak{p}_2' &= \{2\alpha_2, -\sqrt{2}, 0\}\,\alpha_2' = \left[\frac{-2}{\alpha_1 - \alpha_2}\,\mathfrak{p}_2 + \sqrt{2}\,\mathfrak{x}\right]\alpha_2'. \end{aligned} \tag{28}$$

Wir wollen nun noch die Vektoren $\mathfrak{p}_1$ und $\mathfrak{p}_2$ durch

$$\bar{\mathfrak{p}}_1 = \tau_1 \mathfrak{p}_1, \quad \bar{\mathfrak{p}}_2 = \tau_2 \mathfrak{p}_2 \tag{29}$$

umnormieren und dabei τ_1 und τ_2 so einrichten, daß

$$\frac{\tau_1'}{\tau_1} = \frac{-2\alpha_1'}{\alpha_1 - \alpha_2}, \quad \frac{\tau_2'}{\tau_2} = \frac{-2\alpha_2'}{\alpha_2 - \alpha_1}. \tag{30}$$

Dann folgt aus (28), daß

$$\bar{\mathfrak{p}}_1' = c_1 \mathfrak{x}, \quad \bar{\mathfrak{p}}_2' = c_2 \mathfrak{x}, \tag{31}$$

mit

$$c_1 = -\sqrt{2}\,\alpha_1' \tau_1, \quad c_2 = \sqrt{2}\,\alpha_2' \tau_2. \tag{32}$$

Aus (31) ergibt sich wegen $\langle \mathfrak{p}_1, \mathfrak{x} \rangle = \langle \mathfrak{p}_2, \mathfrak{x} \rangle = 0$, daß

$$0 = \langle \bar{\mathfrak{p}}_1, \bar{\mathfrak{p}}_2 \rangle'$$

$\langle \bar{\mathfrak{p}}_1, \bar{\mathfrak{p}}_2 \rangle$ ist also konstant, und da τ_1 und τ_2 durch (30) nur bis auf konstante Faktoren festgelegt sind, können wir es so einrichten, daß

$$\langle \bar{\mathfrak{p}}_1, \bar{\mathfrak{p}}_2 \rangle = \tfrac{1}{2}. \tag{33}$$

Da nach (26) und wegen (24)

$$\langle \mathfrak{p}_1, \mathfrak{p} \rangle = (\alpha_1 - \alpha_2)^2 \tag{34}$$

ist dann

$$\tau_1 \tau_2 = \frac{1}{2(\alpha_1 - \alpha_2)^2}, \tag{35}$$

was mit (30) im Einklang steht.

Wir führen jetzt noch die Größen

$$A_1 = \frac{1}{2}\frac{c_1'}{c_1}, \quad A_2 = \frac{1}{2}\frac{c_2'}{c_2} \tag{36}$$

ein. Wegen (32), (35) und (30) ist dann

$$c_1 c_2 = \frac{-\alpha_1' \alpha_2'}{(\alpha_1 - \alpha_2)^2} \tag{37}$$

$$A_1 = -\frac{\alpha_1'}{\alpha_1 - \alpha_2} + \frac{\alpha_1''}{2\alpha_1'}, \quad A_2 = -\frac{\alpha_2'}{\alpha_2 - \alpha_1} + \frac{\alpha_2''}{2\alpha_2'}. \tag{38}$$

Für die Vektoren $\mathfrak{x}, \bar{\mathfrak{p}}_1, \bar{\mathfrak{p}}_2$ gelten die Produkttabelle

(39)

	$\mathfrak{x}$	$\bar{\mathfrak{p}}_1$	$\bar{\mathfrak{p}}_2$
$\mathfrak{x}$	-1	0	0
$\bar{\mathfrak{p}}_1$	0	0	$\frac{1}{2}$
$\bar{\mathfrak{p}}_2$	0	$\frac{1}{2}$	0

und die Ableitungsgleichungen

$$\bar{\mathfrak{p}}_1' = c_1 \mathfrak{x}, \quad \bar{\mathfrak{p}}_2' = c_2 \mathfrak{x}, \quad \mathfrak{x}' = 2 c_2 \bar{\mathfrak{p}}_1 + 2 c_1 \bar{\mathfrak{p}}_2. \tag{40}$$

Die letzte Gleichung findet man durch Differentiation von (39) unter Berücksichtigung der beiden ersten.

Die Vektoren $\bar{\mathfrak{p}}_1$ und $\bar{\mathfrak{p}}_2$ und die Invarianten c_1 und c_2 sind durch unsere Bedingungen nur bis auf Umnormungen von der Gestalt

$$\hat{\mathfrak{p}}_1 = k \bar{\mathfrak{p}}_1, \quad \hat{\mathfrak{p}}_2 = k^{-1} \bar{\mathfrak{p}}_2, \quad \hat{c}_1 = k c_1, \quad \hat{c}_2 = k^{-1} c_2 \tag{41}$$

mit festem, von Null verschiedenem k festgelegt.

Bei den Parametertransformationen (13) sind $\mathfrak{x}, \bar{\mathfrak{p}}_1, \bar{\mathfrak{p}}_2$ invariant, während

$$c_1^* = \varphi^{-1} c_1, \quad c_2^* = \varphi^{-1} c_2, \quad A_1^* = \varphi^{-1}(A_1 - A), \quad A_2^* = \varphi^{-1}(A_2 - A), \tag{42}$$

wenn A durch

$$A = \frac{1}{2} \frac{\varphi'}{\varphi} \tag{43}$$

erklärt ist.

Statt (10) und (12) können wir nun ebensogut auch (39) und (40) zur Behandlung von Fragen der hyperbolischen Kurventheorie heranziehen. Die letzten Formeln haben den Vorzug, auch dann verwendbar zu sein, wenn die untersuchte Kurve mit dem absoluten Kegelschnitt Tangenten gemeinsam hat. An solchen Stellen verschwindet c_1 oder c_2.

Ist das nicht der Fall, so können wir leicht die Beziehung zwischen beiden Formelsystemen herstellen. Nach (40), (39) und (12) ist

$$\langle \mathfrak{x}', \mathfrak{x}' \rangle = 4 c_1 c_2 = \sigma^2 \langle \mathfrak{t}, \mathfrak{t} \rangle = \varepsilon_1 \sigma^2. \tag{44}$$

Der Punkt $\mathfrak{t}$ liegt daher im Innengebiet von K, wenn c_1 und c_2 das gleiche Vorzeichen haben, im Außengebiet, wenn diese Invarianten verschiedene Vorzeichen besitzen. Weiter ist nach (44)

$$\sigma = \pm 2 \sqrt{|c_1 c_2|} \tag{45}$$

und

$$\mathfrak{t} = \sigma^{-1} \mathfrak{x}' = 2 \frac{c_2}{\sigma} \bar{\mathfrak{p}}_1 + 2 \frac{c_1}{\sigma} \bar{\mathfrak{p}}_2. \tag{46}$$

Daher wird

$$\mathfrak{n} = -2 \frac{c_2}{\sigma} \bar{\mathfrak{p}}_1 + 2 \frac{c_1}{\sigma} \bar{\mathfrak{p}}_2, \tag{47}$$

denn für diesen Vektor sind die Bedingungen (10) erfüllt.

Aus (47) ergibt sich durch Differentiation

$$\mathfrak{n}' = (A_2 - A_1)\,\mathfrak{t}, \tag{48}$$

so daß

$$\bar{\sigma} = A - A_1. \tag{49}$$

Aus (45) und (49) folgt wegen (15) und (16)

$$s = \pm 2 \int \sqrt{|c_1 c_2|}\, dv \tag{50}$$

$$\varrho = \frac{\pm 1}{2\sqrt{|c_1 c_2|}} (A_2 - A_1). \tag{51}$$

Damit ist der gewünschte Zusammenhang hergestellt. Die Bedingung (20) für die Scheitel nimmt hier die Form an

$$A_1' - A_1^2 = A_2' - A_2^2. \tag{52}$$

§ 2.

Das hyperbolische Bild einer Regelfläche.

Sind

$$\mathfrak{q}_1(v), \quad \mathfrak{q}_2(v)\,^{11}) \tag{1}$$

zwei durch gleiche Parameter eineindeutig aufeinander bezogene Raumkurven, so beschreibt die Verbindungsgerade $(\mathfrak{q}_1, \mathfrak{q}_2)$ entsprechender Punkte in Abhängigkeit von v eine Regelfläche. Bekanntlich „schneiden" sich zwei benachbarte Erzeugende dann und nur dann, wenn die Determinante $(\mathfrak{q}_1, \mathfrak{q}_2, \mathfrak{q}_1', \mathfrak{q}_2')$ verschwindet[12]). Wir setzen daher von jetzt an

$$(\mathfrak{q}_1, \mathfrak{q}_2, \mathfrak{q}_1', \mathfrak{q}_2') \neq 0 \tag{2}$$

voraus.

Die Punkte der Regelfläche werden durch

$$\mathfrak{x}(u, v) = \mathfrak{q}_1(v) + u\,\mathfrak{q}_2(v) \tag{3}$$

dargestellt, setzt man hier für u eine Funktion von v ein, so erhält man eine Kurve auf der Fläche, die jede Erzeugende genau einmal trifft.

Die krummlinigen Asymptotenlinien einer Regelfläche bilden bekanntlich[13]) die Erzeugenden projektiv aufeinander ab. Wählt man also für die Leitkurven (1) Asymptotenlinien und normiert die Vektoren $\mathfrak{q}_1(v)$ und $\mathfrak{q}_2(v)$ so, daß auch $\mathfrak{q}_1(v) + \mathfrak{q}_2(v)$ eine Asymptotenlinie beschreibt, so stellt (3) für jeden festen Wert von u eine Asymptotenlinie dar.

---

[11]) Die Vektoren haben hier natürlich vier Komponenten und stellen Punkte in einem projektiven Raum dar.

[12]) Vgl. P. D. § 14.

[13]) Vgl. P. D. § 25.

Es bleiben jetzt nur noch Umnormungen von $\mathfrak{q}_1(v)$ und $\mathfrak{q}_2(v)$ mit einem gemeinsamen Faktor $\Theta(v)$ möglich. Durch Anwendung einer solchen kann man erreichen, daß

$$(\mathfrak{q}_1, \mathfrak{q}_2, \mathfrak{q}_1', \mathfrak{q}_2') = \varkappa \tag{4}$$

eine Konstante wird, die auf Grund der Voraussetzung (2) von Null verschieden sein muß.

Setzen wir noch

$$\mathfrak{q}_1' = \mathfrak{s}_1, \quad \mathfrak{q}_2' = \mathfrak{s}_2,$$

so nehmen jetzt die Ableitungsgleichungen für unsere Regelfläche die Gestalt an

$$\begin{aligned} \mathfrak{q}_1' &= \mathfrak{s}_1 & \mathfrak{s}_1' &= Q\mathfrak{q}_1 + R\mathfrak{q}_2 \\ \mathfrak{q}_2' &= \mathfrak{s}_2 & \mathfrak{s}_2' &= S\mathfrak{q}_1 + T\mathfrak{q}_2. \end{aligned} \tag{5}$$ [14])

Die Tangente der Asymptotenlinie $\mathfrak{q}_1 + u\mathfrak{q}_2$ enthält nach (5) den Punkt $\mathfrak{s}_1 + u\mathfrak{s}_2$. Diese Tangente ist dann und nur dann stationär, wenn der Punkt

$$(\mathfrak{s}_1 + u\mathfrak{s}_2)' = (Q + uS)\,\mathfrak{q}_1 + (R + uT)\,\mathfrak{q}_2$$

auf ihr liegt, also wenn

$$R + u(T - Q) - Su^2 = 0. \tag{6}$$

Die durch (6) gekennzeichneten Punkte jeder Erzeugenden, in denen also die hindurchgehende Asymptotenlinie einen Wendepunkt hat, nennt man ihre *Fleknodalpunkte*. Sie beschreiben auf der Fläche die beiden *Fleknodalkurven*.

Damit die Bedingung (4) bei einer Parametertransformation (1, 13)[15]) erhalten bleibt, koppeln wir jede derartige Transformation mit einer Umnormung

$$\mathfrak{q}_1^* = \varphi^{\frac{1}{2}}\mathfrak{q}_1, \quad \mathfrak{q}_2^* = \varphi^{\frac{1}{2}}\mathfrak{q}_2 \tag{7}$$

der Vektoren $\mathfrak{q}_1$ und $\mathfrak{q}_2$. Für $\mathfrak{s}_1$ und $\mathfrak{s}_2$ wird dann nach (5)

$$\mathfrak{s}_1^* = \varphi^{-\frac{1}{2}}(\mathfrak{s}_1 + A\mathfrak{q}_1), \quad \mathfrak{s}_2^* = \varphi^{-\frac{1}{2}}(\mathfrak{s}_2 + A\mathfrak{q}_2), \tag{8}$$

wobei A durch (1, 43) erklärt ist.

Aus (8) folgt, daß die Geraden $(\mathfrak{s}_1^*, \mathfrak{s}_2^*)$ die bei verschiedener Wahl des Parameters v^* zu einer festen Erzeugenden gehören, einen Regulus bilden, auf dem A ein projektiver Parameter ist. Für $A = \infty$ gehört diesem Regulus auch die Erzeugende $(\mathfrak{q}_1, \mathfrak{q}_2)$ selbst an. Dieser *Schmiegregulus* der Regelfläche längs der betrachteten Erzeugenden liegt auf der *Schmiegquadrik*. Die andere Geradenschar dieser Quadrik besteht aus den Tangenten der krummen Asymptotenlinien in den Punkten unserer Erzeugenden.

---

[14]) Vgl. P. D. § 25.

[15]) Damit ist Formel (13) aus § 1 gemeint.

Die Gesamtheit der Geraden aller Schmiegreguli bildet eine Kongruenz, die man die *Fleknodalkongruenz* der Regelfläche nennt.

Wir wollen nun die Formeln dadurch verallgemeinern, daß wir zwei beliebige Kurven

$$\bar{\mathfrak{q}}_1(v) = \mathfrak{q}_1(v) + \alpha_1(v)\,\mathfrak{q}_2(v), \quad \bar{\mathfrak{q}}_2(v) = \mathfrak{q}_1(v) + \alpha_2(v)\,\mathfrak{q}_2(v) \tag{9}$$

auf der Regelfläche als Leitlinien einführen. Analog zu (9) setzen wir noch

$$\bar{\mathfrak{s}}_1(v) = \mathfrak{s}_1(v) + \alpha_1(v)\,\mathfrak{s}_2(v), \quad \bar{\mathfrak{s}}_2(v) = \mathfrak{s}_1(v) + \alpha_2(v)\,\mathfrak{s}_2(v). \tag{10}$$

Dann erhalten wir mittels (5) für die neuen Vektoren Ableitungsgleichungen von der Form

$$\begin{aligned}
\bar{\mathfrak{q}}_1' &= \bar{\mathfrak{s}}_1 + \bar{c}_{11}\,\bar{\mathfrak{q}}_1 + \bar{c}_{12}\,\bar{\mathfrak{q}}_2\\
\bar{\mathfrak{q}}_2' &= \bar{\mathfrak{s}}_2 + \bar{c}_{21}\,\bar{\mathfrak{q}}_1 + \bar{c}_{22}\,\bar{\mathfrak{q}}_2\\
\bar{\mathfrak{s}}_1' &= \bar{b}_{11}\,\bar{\mathfrak{q}}_1 + \bar{b}_{12}\,\bar{\mathfrak{q}}_2 + \bar{c}_{11}\,\bar{\mathfrak{s}}_1 + \bar{c}_{12}\,\bar{\mathfrak{s}}_2\\
\bar{\mathfrak{s}}_2' &= \bar{b}_{21}\,\bar{\mathfrak{q}}_1 + \bar{b}_{22}\,\bar{\mathfrak{q}}_2 + \bar{c}_{21}\,\bar{\mathfrak{s}}_1 + \bar{c}_{22}\,\bar{\mathfrak{s}}_2,
\end{aligned} \tag{11}$$

wobei

$$\begin{aligned}
c_{11} &= \frac{\alpha_1'}{\alpha_1 - \alpha_2} \qquad c_{12} = \frac{-\alpha_1'}{\alpha_1 - \alpha_2}\\
c_{21} &= \frac{\alpha_2'}{\alpha_1 - \alpha_2} \qquad c_{22} = \frac{-\alpha_2'}{\alpha_1 - \alpha_2}.
\end{aligned} \tag{12}$$

Die Formeln vereinfachen sich, wenn wir die Vektoren durch

$$\hat{\mathfrak{q}}_1 = \lambda_1 \mathfrak{q}_1, \quad \hat{\mathfrak{q}}_2 = \lambda_2 \mathfrak{q}_2, \quad \hat{\mathfrak{s}}_1 = \lambda_1 \mathfrak{s}_1, \quad \hat{\mathfrak{s}}_2 = \lambda_2 \mathfrak{s}_2 \tag{13}$$

umnormieren, wobei λ_1 und λ_2 den Bedingungen

$$\frac{\lambda_1'}{\lambda_1} = -\bar{c}_{11} = -\frac{\alpha_1'}{\alpha_1 - \alpha_2}, \qquad \frac{\lambda_2'}{\lambda_2} = -\bar{c}_{22} = \frac{\alpha_2'}{\alpha_1 - \alpha_2} \tag{14}$$

genügen sollen. Für die neuen Vektoren führt das auf Ableitungsformeln von der Gestalt

$$\begin{aligned}
\hat{\mathfrak{q}}_1' &= \hat{\mathfrak{s}}_1 + c_1\,\hat{\mathfrak{q}}_2, \quad \hat{\mathfrak{s}}_1' = b_{11}\,\hat{\mathfrak{q}}_1 + b_{12}\,\hat{\mathfrak{q}}_2 + c_1\,\hat{\mathfrak{s}}_2\\
\hat{\mathfrak{q}}_2' &= \hat{\mathfrak{s}}_2 + c_2\,\hat{\mathfrak{q}}_1, \quad \hat{\mathfrak{s}}_2' = b_{21}\,\hat{\mathfrak{q}}_1 + b_{22}\,\hat{\mathfrak{q}}_2 + c_2\,\hat{\mathfrak{s}}_1.
\end{aligned} \tag{15}$$

Dabei ist

$$c_1 = \lambda_1 \lambda_2^{-1}\,\bar{c}_{12}, \quad c_2 = \lambda_1^{-1}\lambda_2\,\bar{c}_{21}. \tag{16}$$

Jetzt wollen wir das in der Einleitung schon erwähnte Hesssche Korrespondenzprinzip anwenden. Wir bilden also für jeden Wert von v die Punkte (9) ab auf die Tangenten des Kegelschnittes (1, 23) die zu $u = \alpha_1$, α_2 gehören, also auf die Tangenten in den durch (1, 26) dargestellten Punkten $\mathfrak{p}_1$ und $\mathfrak{p}_2$. Der Punkt $\mathfrak{x}(v)$ in (1, 27) beschreibt dabei in Abhängigkeit von v eine Kurve, die wir das *hyperbolische Bild* der Leitkurven (9) nennen.

Dann gilt der wichtige Satz:

Die durch (16) *erklärten Größen* c_1 *und* c_2 *sind mit den hyperbolischen Invarianten* (1, 32) *der Bildkurve* $\mathfrak{x}(v)$ *identisch.*

Man prüft nämlich sofort nach, daß wegen (12), (14), (16)

$$c_1 c_2 = \bar{c}_{12}\bar{c}_{21} = -\frac{\alpha_1'\alpha_2'}{(\alpha_1-\alpha_2)^2}$$

$$A_1 = \frac{1}{2}\frac{c_1'}{c_1} = -\frac{\alpha_1'}{\alpha_1-\alpha_2} + \frac{\alpha_1''}{2\alpha_1'}, \quad A_2 = \frac{1}{2}\frac{c_2'}{c_2} = -\frac{\alpha_2'}{\alpha_2-\alpha_1} + \frac{\alpha_2''}{2\alpha_2'} \tag{17}$$

in Übereinstimmung mit (1, 37), (1, 38). Da die Invarianten nur bis auf Umnormungen (1, 41) festgelegt sind, folgt daraus die Behauptung.

Aus (15) folgt, daß auch

$$(\hat{\mathfrak{q}}_1, \hat{\mathfrak{q}}_2, \hat{\mathfrak{s}}_1, \hat{\mathfrak{s}}_2)$$

eine Konstante ist.

Die Ableitungsformeln (15) sind eine Verallgemeinerung von (5), sie gehen für $c_1 = c_2 = 0$ in diese einfacheren über. Das hyperbolische Bild entartet dann in einen Punkt. Wenn keine Mißverständnisse zu befürchten sind, schreiben wir deshalb statt $\hat{\mathfrak{q}}_1, \hat{\mathfrak{q}}_2, \hat{\mathfrak{s}}_1, \hat{\mathfrak{s}}_2$ auch einfach $\mathfrak{q}_1, \mathfrak{q}_2, \mathfrak{s}_1, \mathfrak{s}_2$.

$c_1 = 0$ bedeutet, daß die Leitkurve $\mathfrak{q}_1(v)$ eine Asymptotenlinie berührt, $c_2 = 0$ daß das gleiche für $\mathfrak{q}_2(v)$ gilt.

Aus (14) folgt, daß wir λ_1 und λ_2 bei Parametertransformation ungeändert lassen können. Die Transformationsformeln für die neuen Vektoren haben dann wieder die Gestalt (7), (8). Für c_1 und A_1 findet man naturgemäß die Formeln (1, 42) wieder, während

$$\begin{aligned} b_{11} &= \varphi^{-2}(b_{11} + A' - A^2), & b_{12} &= \varphi^{-3} b_{12} \\ b_{21} &= \varphi^{-2} b_{21}, & b_{22} &= \varphi^{-2}(b_{22} + A' - A^2). \end{aligned} \tag{18}$$

Bestimmen wir noch die Asymptotenlinien unserer Fläche in der neuen Darstellung! Für die Kurve

$$\mathfrak{p}(v) = \mathfrak{q}_1(v) + u(v)\,\mathfrak{q}_2(v)$$

ist nach (15)

$$\begin{aligned} \mathfrak{p}' &= \mathfrak{s}_1 + u\,\mathfrak{s}_2 + u c_2 \mathfrak{q}_1 + (c_1 + u')\,\mathfrak{q}_2 \\ \mathfrak{p}'' &= 2u c_2 \mathfrak{s}_1 + 2(c_1 + u')\,\mathfrak{s}_2 + [(u c_2)' + c_2(c_1 + u') + b_{11} + u b_{21}]\,\mathfrak{q}_1 \\ &\quad + [c_1' + u'' + u c_1 c_2 + b_{12} + u b_{22}]\,\mathfrak{q}_2. \end{aligned} \tag{19}$$

$\mathfrak{p}''$ liegt also dann und nur dann in der von $\mathfrak{q}_1$, $\mathfrak{q}_2$ und $\mathfrak{p}'$ aufgespannten Tangentenebene der Fläche an der Stelle $\mathfrak{p}$, wenn

$$u' = c_2 u^2 - c_1. \tag{20}$$

Die Gleichung (20) *stellt also die Asymptotenlinien der Regelfläche dar.*

Setzt man (20) in (19) ein, so sieht man, daß die Tangente der Asymptotenlinie durch $\mathfrak{q}_1 + u\mathfrak{q}_2$ den Punkt $\mathfrak{s}_1 + u\mathfrak{s}_2$ enthält.

Die Gerade $(\hat{\mathfrak{s}}_1, \hat{\mathfrak{s}}_2)$ ist mit $(\mathfrak{s}_1, \mathfrak{s}_2)$ identisch, gehört also dem Schmiegregulus an.

§ 3.

Die Grundabbildung. Kreisregelflächen.

Wenden wir unsere Betrachtungen an zur Untersuchung der Regelflächen mit zwei verschiedenen reellen Fleknodalkurven! Naturgemäß werden wir für sie die Fleknodalkurven als Leitkurven wählen.

Die Leitkurve $\mathfrak{q}_1(v)$ *ist dann und nur dann Fleknodalkurve, wenn* $b_{12}=0$.

Das folgt aus (2,19) unter Berücksichtigung von (2,20): $\mathfrak{p}''$ ist für $u=0$ dann und nur dann eine Linearkombination von $\mathfrak{p}$ und $\mathfrak{p}'$ wenn $b_{12}=0$. Ebenso ist dann und nur dann $b_{21}=0$, wenn $\mathfrak{q}_2(v)$ eine Fleknodalkurve beschreibt.

Setzen wir noch

$$b_{11}=j+d, \quad b_{22}=j-d, \tag{1}$$

so nehmen die Ableitungsgleichungen die Form an

$$\begin{aligned} \mathfrak{q}_1' &= \mathfrak{s}_1 + c_1\mathfrak{q}_2, \quad \mathfrak{s}_1' = (j+d)\mathfrak{q}_1 + c_1\mathfrak{s}_2 \\ \mathfrak{q}_2' &= \mathfrak{s}_2 + c_2\mathfrak{q}_1, \quad \mathfrak{s}_2' = (j-d)\mathfrak{q}_2 + c_2\mathfrak{s}_1 \end{aligned} \tag{2}$$

und statt (2, 18) haben wir

$$j^* = \varphi^{-2}(j + A' - A'), \quad d^* = \varphi^{-2}d. \tag{3}$$

c_1 und c_2 sind jetzt die Invarianten des hyperbolischen Bildes der Fleknodalkurven, also der *Kennlinie* unserer Regelfläche. Wir werden versuchen, sie und die Krümmung ϱ der Kennlinie auch auf der Fläche selbst geometrisch zu deuten. Der Einfachheit halber setzen wir dabei voraus, daß die Fleknodalkurven keine Asymptotenlinie berühren, so daß c_1 und c_2 von Null verschieden sind.

Die Schmiegebene der Kurve $\mathfrak{q}_1(v)$ enthält die Punkte

$$\begin{aligned} \mathfrak{q}_1' &= \mathfrak{s}_1 + c_1\mathfrak{q}_2, \\ \mathfrak{q}_1'' &= [(j+d) + c_1c_2]\,\mathfrak{q}_1 + 2A_1c_1\mathfrak{q}_2 + 2c_1\mathfrak{s}_2, \end{aligned}$$

sie trifft also die Gerade $(\mathfrak{s}_1, \mathfrak{s}_2)$ im Punkte

$$\mathfrak{b}_1 = A_1\mathfrak{s}_1 - c_1\mathfrak{s}_2. \tag{4}$$

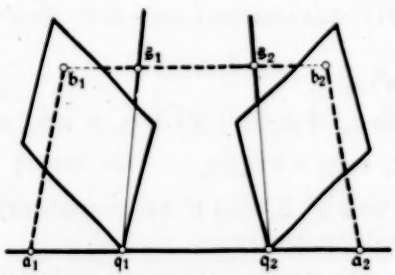


Fig. 2.

Ebenso stellt

$$\mathfrak{b}_2 = -c_2\mathfrak{s}_1 + A_2\mathfrak{s}_2 \tag{5}$$

den Schnittpunkt dieser Geraden mit der Schmiegebene der zweiten Fleknodalkurve dar (vgl. Fig. 2).

Durch $\mathfrak{b}_1$ und $\mathfrak{b}_2$ gehen nach § 2 die Tangenten der Asymptotenlinien in den Punkten

$$\begin{aligned} \mathfrak{a}_1 &= A_1\mathfrak{q}_1 - c_1\mathfrak{q}_2, \\ \mathfrak{a}_2 &= -c_2\mathfrak{q}_1 + A_2\mathfrak{q}_2 \end{aligned} \tag{6}$$

unserer Erzeugenden.

Wir können nun diese Figur verwenden, um eine Abbildung der Regelfläche auf sich zu erklären, die jede Erzeugende projektiv auf sich abbildet.

Wenden wir nämlich eine Parametertransformation (1, 13) an, so bleiben zwar die beiden Schmiegebenen ungeändert, aber die Gerade $(\mathfrak{s}_1, \mathfrak{s}_2)$ ändert sich, sie wird durch $(\mathfrak{s}_1^*, \mathfrak{s}_2^*)$ ersetzt. Ebenso ändern sich auch die Punkte $\mathfrak{b}_1, \mathfrak{b}_2, \mathfrak{a}_1$ und $\mathfrak{a}_2$. Wir können nun v^* so einrichten, daß $\mathfrak{a}_1^*$ in einen beliebigen von $\mathfrak{q}_1$ verschiedenen Punkt P unserer Erzeugenden fällt. Die dann eindeutig bestimmte Lage von $\mathfrak{a}_2^*$ soll dann das Bild von P bei unserer Abbildung sein. Wir nennen die so auf jeder Erzeugenden und damit auf der Regelfläche erklärte Abbildung die *Grundabbildung* der Regelfläche.

Um das Bild von einem beliebigen von $\mathfrak{q}_1$ *verschiedenen Punkt P unserer Erzeugenden zu finden, ziehe man die Tangente der hindurchgehenden Asymptotenlinie und schneide sie mit der Schmiegebene von* $\mathfrak{q}_1(v)$. *Durch den Schnittpunkt ziehe man die Gerade des Schmiegregulus und schneide diese mit der Schmiegebene der anderen Fleknodalkurve. Liegt dieser Schnittpunkt auf der Tangente der Asymptotenlinie durch* $\overline{P}$, *so ist* $\overline{P}$ *das Bild von P bei der Grundabbildung.*

Es sei noch hervorgehoben, daß die Geraden $(\mathfrak{a}_1, \mathfrak{b}_1)$ und $(\mathfrak{a}_2, \mathfrak{b}_2)$ nach § 2 der Schmiegquadrik der Fläche längs unserer Erzeugenden angehören.

Rechnerisch läßt sich die Grundabbildung leicht erfassen. Beim Übergang auf einen neuen Parameter v^* ist nämlich nach (2, 7), (1, 42)

$$\begin{aligned} \mathfrak{a}_1^* &= \varphi^{-\frac{1}{2}}[(A_1 - A)\,\mathfrak{q}_1 - c_1\mathfrak{q}_2] \\ \mathfrak{a}_2^* &= \varphi^{-\frac{1}{2}}[-c_2\mathfrak{q}_1 + (A_2 - A)\,\mathfrak{q}_2]. \end{aligned} \tag{7}$$

Die beiden Punkte haben also auf unserer Erzeugenden die Koordinaten

$$u_1 = -\frac{c_1}{A_1 - A}, \qquad u_2 = -\frac{A_2 - A}{c_2} \tag{8}$$

zwischen denen die Beziehung besteht

$$c_2 u_2 - c_1 u_1^{-1} = A_1 - A_2 \tag{9}$$

oder

$$c_2 u_1 u_2 + (A_2 - A_1)\,u_1 - c_1 = 0. \tag{10}$$

Die Beziehungen (9) *oder* (10) *stellen also die Grundabbildung dar.* Sie ist dann und nur dann involutorisch, wenn

$$A_1 = A_2, \tag{11}$$

also wegen (1, 36) wenn

$$\frac{c_1}{c_2} = \text{konst.} \tag{12}$$

Da (11) wegen (1, 51) auf $\varrho = 0$ führt, ist in diesem Fall die Kennlinie eine Gerade. Andererseits bedeutet (12), wie man leicht nachprüft, daß die Regelfläche einem nichtentarteten linearen Komplex angehört.

Kann es sein, daß die Grundabbildung eine Asymptotenlinie der Regelfläche in eine andere überführt? Nach (2, 20) ist dann für diese Kurven

$$u_1' = c_2 u_1^2 - c_1, \qquad u_2' = c_2 u_2^2 - c_1. \tag{13}$$

Aus (9) folgt dann durch Differentiation

$$2 A_2 c_2 u_2 - 2 A_1 c_1 u_1^{-1} + A_2' - A_1' + c_2 (c_2 u_2^2 - c_1) + c_1 u_1^{-2} (c_2 u_1^2 - c_1) = 0$$

und daraus unter Berücksichtigung von (9)

$$A_1' - A_1^2 = A_2' - A_2^2, \tag{14}$$

was nach (1, 52) mit $\varrho' = 0$ gleichwertig ist.

Die Kennlinie ist also ein Kreis und die Fläche eine *Kreisregelfläche.*

Gilt andererseits (14) so zeigt eine analoge Rechnung, daß aus jeder der Bedingungen (13) die andere folgt. Also:

Führt die Grundabbildung eine Asymptotenlinie der Regelfläche in eine andere über, so gilt das für jede Asymptotenlinie und die Fläche ist eine Kreisregelfläche.

Die Doppelpunkte der Grundabbildung genügen der Gleichung

$$c_2 u^2 + (A_2 - A_1) u - c_1 = 0, \tag{15}$$

die man aus (10) erhält, indem man $u_1 = u_2 = u$ setzt. Für das Doppelverhältnis D, das diese Doppelpunkte mit den Fleknodalpunkten $u = 0$, $u = \infty$ bilden, findet man

$$2 + D + \frac{1}{D} = \pm 4 \varrho^2. \tag{16}$$

Damit ist auch für die Krümmung selbst eine Deutung auf der Fläche gefunden.

Das Doppelverhältnis der Doppelpunkte der Grundabbildung mit den Fleknodalpunkten hat dann und nur dann auf jeder Erzeugenden den gleichen Wert, wenn die Fläche eine Kreisregelfläche ist.

Die beiden Doppelpunkte erzeugen die *Doppelkurven* der Grundabbildung. Auch mit ihrer Hilfe kann man die Kreisregelflächen kennzeichnen:

Die Doppelkurven der Grundabbildung sind dann und nur dann Asymptotenlinien, wenn die Fläche eine Kreisregelfläche ist.

Das folgt leicht aus den vorangehenden Sätzen.

Die Doppelkurven der Grundabbildung lassen sich mit Hilfe der hyperbolischen Bildebene noch in anderer Weise erklären.

Zieht man nämlich in dieser Bildebene aus $\mathfrak{n}$ die beiden Tangenten an den absoluten Kegelschnitt, so stellen diese auf der entsprechenden

Erzeugenden der Regelfläche zwei Punkte dar, die wir die *Medianpunkte* der Leitlinien nennen. Ihre Berührungspunkte mit K liegen offenbar auf der Polaren $(\mathfrak{x}, \mathfrak{t})$ von $\mathfrak{n}$.

Auf der Fläche kann man die Medianpunkte so erklären: es sind die einzigen Punkte der Erzeugenden, durch die Kurven gehen, die das vorgegebene Paar auf jeder Erzeugenden harmonisch trennen und beide eine Asymptotenlinie berühren. Daraus ergibt sich mittels (2, 20) leicht, daß für sie

$$c_2 u^2 - c_1 = 0. \tag{17}$$

Zu jedem Kurvenpaar gehört in dieser Weise eindeutig ein zweites, das von den Medianpunkten erzeugt wird. Wir nennen diese Kurven die *Mediankurven* des Paares.

Die Beziehung zwischen einem Kurvenpaar und seinen Mediankurven ist umkehrbar.

Denn das gleiche gilt für die Kurven $\mathfrak{x}(v)$ und $\mathfrak{n}(v)$ der Bildebene.

Die Mediankurven der Fleknodalkurven nennt man auch *Komplexkurven*[16], weil sie jede Erzeugende in den beiden Stellen treffen, an denen die Tangente der Asymptotenlinie dem linearen Schmiegkomplex der Fläche angehört.

Wenn die Fleknodalkurven als Leitlinien gewählt werden, so stellt also (17) oder

$$\mathfrak{q}_1 \pm \sqrt{\frac{c_1}{c_2}}\, \mathfrak{q}_2 \tag{18}$$

die Komplexkurven dar.

Zu den Fleknodalkurven und den Komplexkurven gehört auf der Fläche ein drittes Kurvenpaar, das alle beide auf jeder Erzeugenden harmonisch trennt. Diese Kurven nennt man die *harmonischen Kurven* der Fläche[16], sie werden durch

$$\mathfrak{q}_1 \pm i \sqrt{\frac{c_1}{c_2}}\, \mathfrak{q}_2 \tag{19}$$

dargestellt. Dann gilt:

Die Doppelkurven der Grundabbildung sind die Mediankurven der harmonischen Kurven.

Die Fleknodalkurven, Komplexkurven und harmonischen Kurven gehören einer einparametrigen Kurvenschar an, die die Erzeugenden der Regelfläche projektiv aufeinander abbildet. Man nennt sie die Prinzipalschar der Regelfläche. Ihre Kurven werden durch

$$u = k \sqrt{\frac{c_1}{c_2}}, \quad k = \text{konst.} \tag{20}$$

dargestellt.

Die Doppelkurven der Grundabbildung sind die Örter der Punkte, in denen die Kurven der Prinzipalschar Asymptotenlinien berühren

[16] Vgl. etwa G. Fubini u. E. Čech, Geometria Proiettiva Differenziale Bologna 1926., Kap. IV.

Gehört der Prinzipalschar eine Asymptotenlinie oder eine Doppelkurve der Grundabbildung an, so ist die Fläche eine Kreisregelfläche.

Umgekehrt sind bei jeder Kreisregelfläche die Doppelkurven der Grundabbildung Asymptotenlinien und gehören der Prinzipalschar an.

Die Doppelkurven der Grundabbildung sind dann und nur dann mit den Komplexkurven identisch, wenn die Regelfläche einem linearen Komplex angehört.

Das folgt sofort aus (15) und (17).

§ 4.

Ausblick.

Deuten wir noch kurz an, in welcher Richtung man die Untersuchungen weiterführen kann!

Die Tangenten der Asymptotenlinien in den Punkten einer Fleknodalkurve bilden eine neue Regelfläche, welche man eine *Fleknodaltransformierte* oder *Fleknodalfläche* der ersten nennt[17]). Die beiden Fleknodalflächen sind nach Wilczynski die Brennflächen der Fleknodalkongruenz; da sich auf beiden die Asymptotenlinien entsprechen, ist diese ein W-Strahlensystem.

Man kann nun leicht die Grundabbildung auf die beiden Fleknodalflächen ausdehnen, indem man entsprechende Punkte $\mathfrak{a}_1$ und $\mathfrak{s}_1$ einander zuordnet. Dadurch entsteht eine Abbildung der Fleknodalfläche auf die ursprüngliche Regelfläche, welche entsprechende Erzeugende projektiv aufeinander abbildet. Denn nach (2, 8), (3, 7) entsprechen sich bei ihr die Punkte

$$(1)\qquad \begin{aligned} \mathfrak{s}_1^* &= \varphi^{-\frac{1}{2}}[\mathfrak{s}_1(v) + A\,\mathfrak{q}_1(v)],\\ \mathfrak{a}_1^* &= \varphi^{-\frac{1}{2}}[(A_1(v) - A)\,\mathfrak{q}_1(v) - c_1(v)\,\mathfrak{q}_2(v)], \end{aligned}$$

sie sind also bei festem v durch die gleichen Werte des auf beiden Erzeugenden projektiven Parameters A aufeinander bezogen.

Diese Abbildung läßt sich im übrigen auch geometrisch leicht überblicken, es gilt nämlich der Satz:

Die Verbindungsgerade zweier Punkte $\mathfrak{a}_1^*$ und $\mathfrak{s}_1^*$, die sich bei der Grundabbildung entsprechen, geht durch den Kehlpunkt $\mathfrak{z}_1$ des Streifens, der die Fläche längs der Fleknodalkurve $\mathfrak{q}_1(v)$ berührt.

Die durch (1) bei festem v vermittelte projektive Abbildung ist also nichts anderes als die Zentralprojektion beider Erzeugenden aufeinander mit diesem Kehlpunkt als Zentrum (vgl. Fig. 3)[18]).

[17]) Bekanntlich ist die Beziehung zwischen beiden Regelflächen gegenseitig, die gemeinsame Kurve ist auf beiden Fleknodalkurve. Man vgl. das auf S. 805 zitierte Lehrbuch von Fubini und Čech.

[18]) Diejenigen Teile der Figur, die bei Parametertransformation festbleiben, sind ausgezogen, die anderen „beweglichen" Teile punktiert.

Die Streifen, die die Fläche längs der Fleknodalkurven berühren, nennen wir auch ihre *Fleknodalstreifen*. Auch sie lassen sich in die Grundabbildung einbeziehen.

Durch die ebengenannte Zentralprojektion werden nämlich die Erzeugenden beider Regelflächen auch projektiv abgebildet auf die Tangente der Fleknodalkurve in ihrem Schnittpunkt, in der Figur ist $\mathfrak{t}_1$ das Bild von $\mathfrak{a}_1$ und $\mathfrak{s}_1$. So entsteht also eine eineindeutige Abbildung der von diesen Tangenten gebildeten Fläche auf unsere Regelfläche und ihre Fleknodaltransformierte.

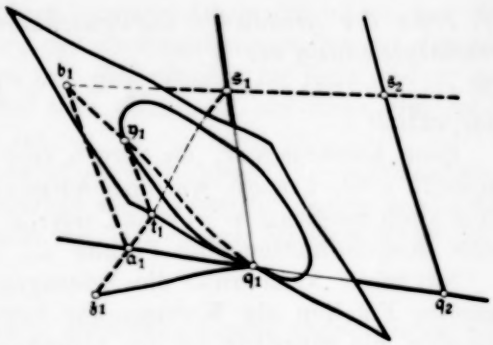


Fig. 3.

Wir können aber auch den Punkt $\mathfrak{b}_1$ mit $\mathfrak{q}_1$ verbinden und diese Gerade mit dem Schmiegkegelschnitt des Fleknodalstreifens an der betrachteten Stelle schneiden, der Schnittpunkt ist in der Figur mit $\mathfrak{y}_1$ bezeichnet. Dadurch werden unsere Flächen auch auf die Fläche der Schmiegkegelschnitte dieses Streifens eineindeutig abgebildet.

Zwischen $\mathfrak{t}_1$ und $\mathfrak{y}_1$ besteht aber auch eine direkte Beziehung. $\mathfrak{y}_1$ ist nämlich der Berührungspunkt der zweiten Tangente aus $\mathfrak{t}_1$ an den Schmiegkegelschnitt. Diese Abbildung der Tangentenfläche der Kurve eines Streifens auf die Fläche der Schmiegkegelschnitte spielt übrigens auch in der Streifentheorie eine wichtige Rolle [19]).

In der gleichen Weise kann man natürlich auch den anderen Fleknodalstreifen in die Grundabbildung einbeziehen.

Die analytische Behandlung der Grundabbildung gestaltet sich auch hier wieder äußerst einfach. Wie in (1), so können wir nämlich auf jeder unserer Flächen v und A als Parameter betrachten, die Abbildung wird dann stets durch gleiche Parameterwerte vermittelt. Oft ist es zweckmäßig, auch noch die Ebene der Parameter A und v zur Vermittlung heranzuziehen. Es herrschen hier ganz ähnliche Verhältnisse, wie sie auch in der Theorie der Raumkurven auftreten [20]).

Auf unseren Flächen liegen verschiedene wichtige Kurvenscharen, so auf den Fleknodalflächen die Brennkurven der Fleknodalkongruenz und die Asymptotenlinien, auf der Fläche der Schmiegkegelschnitte jedes Steifens die Zentralkurven [21]), auf der Regelfläche selbst die Asymptotenlinien, u. a. m.

[19]) Für die Streifentheorie vgl. P. D. Abschnitt IV.

[20]) Vgl. P. D., Abschnitt III, insbesondere § 48.

[21]) Vgl. P. D. § 64. Diese Kurven sind dadurch ausgezeichnet, daß ihre Tangente an jeder Stelle die zugehörige Tangente $(\mathfrak{q}, \mathfrak{z})$ des Streifens trifft.

Nun kann man eine Kurve auf einer unserer Flächen darstellen durch eine Gleichung der Form

$$A = F(v). \tag{2}$$

Jede der genannten Kurvenscharen wird dann durch eine Differentialgleichung der Form

$$A' - A^2 = g(v) \tag{3}$$

dargestellt.

Eine Kurvenschar, die durch eine Gleichung der Gestalt (3) dargestellt wird, nennen wir eine *harmonische Schar*. Als Grenzfall kann man auch die Schar $v =$ konst. oder $A' = \infty$ der erzeugenden Geraden oder Kegelschnitten der Fläche als harmonische Schar betrachten.

Natürlich kann man die Lösungen einer Gleichung (3) auf jeder unserer Flächen als Kurvenschar deuten, man bekommt so Kurvenscharen, die einander bei der Grundabbildung entsprechen.

Durch jeden Punkt der (A, v)-Ebene geht genau eine Kurve jeder harmonischen Schar. Sind vier harmonische Scharen gegeben, so ist das Doppelverhältnis ihrer vier Richtungen eine Ortsfunktion in der (A, v)-Ebene und auf jeder unserer Flächen. Dieses Doppelverhältnis hängt nur von v ab und ist also längs jeder erzeugenden Geraden oder jedes erzeugenden Kegelschnittes der Fläche konstant.

Zu jeder Kurve (2) der (A, v)-Ebene gibt es genau eine harmonische Schar, der sie angehört. *Zwei harmonische Scharen, die eine Kurve gemeinsam haben, fallen also ganz zusammen*[22]).

Kommt es also bei einer Regelfläche beispielsweise vor, daß $\mathfrak{a}_1^*$ und $\mathfrak{a}_2^*$ gleichzeitig Asymptotenlinien beschreiben, die sich daher bei der Grundabbildung entsprechen, so werden die Systeme der von $\mathfrak{a}_1^*$ und von $\mathfrak{a}_2^*$ beschriebenen Asymptotenlinien durch die gleiche Gleichung (2) dargestellt. Dann beschreibt also mit $\mathfrak{a}_1^*$ stets auch $\mathfrak{a}_2^*$ eine Asymptotenlinie. Zu diesem schon in § 3 bewiesenen Satz erhalten wir so einen neuen Zugang.

Ebenso gilt:

Gibt es eine Zentralkurve des Streifens längs $\mathfrak{q}_1(v)$, *der bei der Grundabbildung einer Zentralkurve des Streifens längs* $\mathfrak{q}_2(v)$ *entspricht, so gilt das gleiche für jede Zentralkurve. Dies tritt ein bei den Kreisregelflächen und nur bei diesen.*

Weiter ergibt sich:

Überträgt man die Zentralkurven des Streifens längs $\mathfrak{q}_1(v)$, *die Asymptotenlinien der von* $\mathfrak{s}_1^*$ *beschriebenen Fleknodalfläche und die der Regelfläche selbst, als Ort von* $\mathfrak{a}_1$ *betrachtet, mittels der Grundabbildung auf die gleiche Fläche, so trennt die Kurve der ersten Schar an jeder Stelle die der beiden anderen harmonisch von dem erzeugenden Kegelschnitt oder der erzeugenden Geraden der Fläche.*

Entsprechen sich also zwei dieser Kurvenscharen bei der Grundabbildung, so entsprechen sich alle drei.

[22]) Für die angegebenen Sätze vgl. man P. D., § 48.

Dies ist dann und nur dann der Fall, wenn die Fleknodalkurve $\mathfrak{q}_1(v)$ *auf der Fläche eine Projektivkurve im Sinne von B.* SEGRE ist[23]).

Von der gleichen Art sind folgende Sätze:

Entspricht einer von $\mathfrak{a}_1^*$ *beschriebenen Asymptotenlinie bei der Grundabbildung eine Brennkurve der Fleknodalkongruenz auf der von* $\mathfrak{F}_2^*$ *erzeugten Fleknodalfläche, so gilt das gleiche für jede von* $\mathfrak{a}_1^*$ *beschriebene Asymptotenlinie. Dies tritt dann und nur dann ein, wenn die Fleknodalkurve* $\mathfrak{q}_1(v)$ *eben ist.*

Ebenso entsprechen den von $\mathfrak{a}_1^*$ *beschriebenen Asymptotenlinien dann und nur dann die Brennkurven der Fleknodalkongruenz auf der von* $\mathfrak{F}_1^*$ *beschriebenen Fleknodalfläche, wenn der Streifen längs* $\mathfrak{q}_1(v)$ *auf einem Kegel liegt.*

Daraus folgt:

Hat ein Fleknodalstreifen einer Regelfläche eine ebene Kurve und liegt der andere auf einem Kegel, so ist die Fläche eine (spezielle) Kreisregelfläche.

Der Punkt $\mathfrak{a}_1^*$ fällt nach (1) dann und nur dann mit $\mathfrak{q}_2$ zusammen, wenn

$$A = A_1. \tag{4}$$

Ebenso fällt $\mathfrak{a}_2^*$ dann und nur dann mit $\mathfrak{q}_1$ zusammen, wenn

$$A = A_2. \tag{5}$$

Der Fleknodalkurve $\mathfrak{q}_2(v)$ *als Ort von* $\mathfrak{a}_1^*$ *entspricht bei der Grundabbildung dann und nur dann die Fleknodalkurve* $\mathfrak{q}_1(v)$ *als Ort von* $\mathfrak{a}_2^*$, *wenn die Regelfläche einem linearen Komplex angehört.*

Die Kurven (4) *und* (5) *in der* (A, v)*-Ebene gehören dann und nur dann der gleichen harmonischen Schar an, wenn*

$$A_1' - A_1'' = A_2' - A_2'', \tag{6}$$

also wenn die Fläche eine Kreisregelfläche ist.

Mit Hilfe der oben erwähnten Konstanz des Doppelverhältnisses von vier harmonischen Scharen längs jeder Erzeugenden läßt sich diese Bedingung auf den bei der Grundabbildung verwendeten Flächen geometrisch deuten.

Schließlich erwähnen wir noch einen Satz über die Fleknodalstreifen einer Regelfläche, der zur Grundabbildung keine direkte Beziehung hat:

Haben beide Fleknodalstreifen einer Regelfläche in Punkten der gleichen Erzeugenden eine sextaktische Stelle[24]*), so ist der Schmiegkomplex der Regelfläche längs dieser Erzeugenden stationär.*

Sind also beide Fleknodalstreifen einer Regelfläche sextaktisch, so gehört sie einem linearen Komplex an.

[23]) Vgl. Atti Accad. Naz. Lincei. Rend. Cl. d. Sc. fis., mat. e nat. VI, **21**. 656—660, 692—697, **22**. 400—405 (1935) und auch P. D., § 73.

[24]) Vgl. P. D. § 60.

(Eingegangen am 2. Januar 1950.)

Subdirekte Summendarstellungen von Integritätsbereichen.

Herrn Oskar Perron zum 70. Geburtstag am 7. Mai 1950 gewidmet.

von

Wolfgang Krull in Bonn.

Einleitung.

Für die Theorie beliebiger, assoziativer, aber nicht notwendig kommutativer Ringe ist in den letzten zwei Jahrzehnten die „subdirekte" Zerlegung wichtig geworden[1]), die zwar formal ähnlich definiert wird wie die wohlbekannte „direkte" Zerlegung, die aber ihrem eigentlichen Wesen nach eine ganz andere Bedeutung besitzt. Im folgenden soll die Eigenart des Begriffes „subdirekt", sowie sein praktischer Wert an dem einfachen Beispiel der Integritätsbereiche, also der kommutativen, nullteilerfreien Ringe mit Einheitselement, genauer verdeutlicht werden. Positiv kommen wir dabei zu notwendigen und hinreichenden Bedingungen dafür, daß sich unter den subdirekten Summen von abzählbar unendlichvielen vorgegebenen, höchstens abzählbaren Körpern Integritätsbereiche befinden. Auch erhalten wir das auf den ersten Blick überraschende Resultat: Ist $\mathfrak{K}_1, \mathfrak{K}_2, \ldots$ eine abzählbare Menge von höchstens abzählbaren Körpern, die nicht alle ein und dieselbe Primzahlcharakteristik p besitzen, und gibt es unter den subdirekten Summen der $\mathfrak{K}_i$ überhaupt einen Integritätsbereich, so befindet sich unter diesen insbesondere auch der Integritätsbereich $\mathfrak{J}_0[u_1, u_2, \ldots]$ aller ganzrationalzahligen Polynome in abzählbar unendlichvielen Unbestimmten $u_1, u_2, \ldots$. — Die kritischen Folgerungen, die aus den gewonnenen Ergebnissen gezogen werden müssen und gewisse daran anknüpfende Vorschläge zur Terminologie sind in dem Schlußparagraphen (§ 6) zusammengefaßt.

---

[1]) Die vorliegende Note wurde angeregt durch den ausführlichen und zur ersten Einführung in die Theorie der subdirekten Zerlegungen ausgezeichnet geeigneten Bericht von Neal H. Mc Coy: Subdirekt sums of rings Bull. Americ. Math. Soc. (1947), S. 856—877. (In Zukunft kurz mit Mc Coy zitiert.)

§ 1.

Die Grundbegriffe [2]).

Es sei M eine beliebige Menge, $M_{\mathfrak{R}}$ sei eine Menge von Ringen $\mathfrak{R}_\alpha$, die umkehrbar eindeutig den Elementen α von M entsprechen; 0_α sei das Nullelement aus $\mathfrak{R}_\alpha$. Von einer Funktion $f(x)$ auf M (oder auch auf $M_{\mathfrak{R}}$) wird gesprochen, wenn jedem $\alpha \in M$ eindeutig ein Funktionswert $f(\alpha) = a_\alpha \in \mathfrak{R}_\alpha$ zugeordnet ist. Summe und Produkt zweier Funktionen werden in üblicher Weise definiert [3]). Die Menge aller Funktionen $f(x)$ auf M bildet einen Ring $\mathfrak{S}^*$, dessen Struktur durch die Strukturen der Komponentenringe $\mathfrak{R}_\alpha$ eindeutig bestimmt ist, und der als die *direkte Summe* der $\mathfrak{R}_\alpha$ bezeichnet wird [4]).

Satz 1. *Ein beliebiger Ring $\mathfrak{R}$ ist dann und nur dann zu einem Unterringe $\mathfrak{S}$ der direkten Summe $\mathfrak{S}^*$ isomorph, wenn jedem $\alpha \in M$ eindeutig (aber nicht notwendig umkehrbar eindeutig) ein zweiseitiges $\mathfrak{R}$-Ideal $\mathfrak{m}_\alpha$ so zugeordnet werden kann, daß $\mathfrak{R}/\mathfrak{m}_\alpha$ jeweils zu einem Unterring $\mathfrak{U}_\alpha$ von $\mathfrak{R}_\alpha$ isomorph ist, und daß gleichzeitig der Durchschnitt $\bigcap_\alpha \mathfrak{m}_\alpha$ aller $\mathfrak{m}_\alpha$ gleich dem Nullideal wird* [5]).

Beweis. a) Ist $\mathfrak{S}$ ein Unterring von $\mathfrak{S}^*$, so bildet die Menge aller der $f(x) \in \mathfrak{S}$, die der Bedingung $f(\alpha) = 0_\alpha$ genügen, ein zweiseitiges $\mathfrak{S}$-Ideal $\mathfrak{m}_\alpha$, und es wird $\mathfrak{S}/\mathfrak{m}_\alpha$ isomorph zum Unterring $\mathfrak{U}_\alpha$ aller der $b_\alpha \in \mathfrak{R}_\alpha$, zu denen es ein $g(x) \in \mathfrak{S}$ mit $g(\alpha) = b_\alpha$ gibt. Offenbar wird $\bigcap_\alpha \mathfrak{m}_\alpha = (0)$. — b) Es seien in $\mathfrak{R}$ die Ideale $\mathfrak{m}_\alpha$ gemäß Satz 1 gegeben, und es bedeute für beliebiges $b \in \mathfrak{R}$ stets b_α das Element aus $\mathfrak{R}_\alpha$, das der Restklasse $b + \mathfrak{m}_\alpha$ aus $\mathfrak{R}/\mathfrak{m}_\alpha$ vermöge des zwischen $\mathfrak{R}/\mathfrak{m}_\alpha$ und $\mathfrak{U}_\alpha$ bestehenden Isomorphismus zugeordnet ist. Lassen wir dann jedem $b \in \mathfrak{R}$ die durch $f(\alpha) = b_\alpha$ $(\alpha \in M)$ eindeutig definierte Funktion $f(x)$ aus $\mathfrak{S}^*$ entsprechen, so wird wegen $\bigcap_\alpha \mathfrak{m}_\alpha = (0)$ offen-

---

[2]) In der Terminologie und vor allem in der „Funktionsschreibweise" schließen wir uns im wesentlichen an Mc Coy an. Anders ist die Bezeichnungsart z. B. bei Bourbaki, vgl. [4]).

[3]) Es ist also $g(\alpha) = f_1(\alpha) + f_2(\alpha)$ bzw. $g(\alpha) = f_1(\alpha) \cdot f_2(\alpha)$, falls $g(x) = f_1(x) + f_2(x)$ bzw. $g(x) = f_1(x) \cdot f_2(x)$.

[4]) Die Bezeichnungsweise entspricht der von Mc Coy. Man beachte die folgenden Punkte: a) Nach unserer Definition sind die Komponentenringe $\mathfrak{R}_\alpha$ von $\mathfrak{S}^*$ keineswegs Unterringe von $\mathfrak{S}^*$, sondern es gibt nur zu jedem $\mathfrak{R}_\alpha$ in $\mathfrak{S}^*$ ein zu $\mathfrak{R}_\alpha$ als Ring isomorphes zweiseitiges Ideal (bestehend aus der Menge aller Funktionen $f(x)$ mit $f(\beta) = 0_\beta$ $(\beta \neq \alpha)$). — b) Die Terminologie des Textes ist weder für Moduln noch für Ringe in der Literatur allgemein üblich, z. B. definiert Bourbaki für Moduln die direkte Summe so, daß sie in der Mc Coy-schen Bezeichnungsweise eine minimale spezielle subdirekte Summe im Sinne von [15]) darstellt. (Bourbaki, Teil I, Bd. II (Algèbre), Kap. VI (Algèbre linéaire), insbesondere S. 13.)

[5]) Eine leichte Verallgemeinerung von Mc Coy, Satz 3, vgl. [6]).

bar $\mathfrak{R} = \mathfrak{R}/\overset{\alpha}{\Delta}\mathfrak{m}_\alpha$ zu dem aus allen so erklärten Funktionen $f(x)$ bestehenden Unterring $\mathfrak{S}$ von $\mathfrak{S}^*$ isomorph. — Nennt man weiter den Unterring $\mathfrak{S}$ von $\mathfrak{S}^*$ eine *subdirekte Summe* der $\mathfrak{R}_\alpha$, wenn der beim Beweise von Satz 1 unter a) gebildete Ring $\mathfrak{U}_\alpha$ für jedes α mit $\mathfrak{R}_\alpha$ zusammenfällt, so folgt aus Satz 1 sofort:

Satz 2. *$\mathfrak{R}$ läßt sich dann und nur dann als subdirekte Summe der $\mathfrak{R}_\alpha$ darstellen, d. h. $\mathfrak{R}$ ist dann und nur dann zu einer subdirekten Summe $\mathfrak{S}$ der $\mathfrak{R}_\alpha$ isomorph, wenn in $\mathfrak{R}$ die Ideale $\mathfrak{m}_\alpha$ mit $\overset{\alpha}{\Delta}\mathfrak{m}_\alpha = (0)$ so bestimmt werden können, daß $\mathfrak{R}/\mathfrak{m}_\alpha$ jeweils zu $\mathfrak{R}_\alpha$ isomorph wird*[6]).

Da bei jedem kommutativen Ring $\mathfrak{R}$ mit Einselement (insbesondere bei jedem Integritätsbereich) $\mathfrak{R}/\mathfrak{m}$ dann und nur dann ein Körper wird, wenn $\mathfrak{m} = \mathfrak{p}$ ein maximales (von $\mathfrak{R}$ selbst verschiedenes) $\mathfrak{R}$-Ideal (und damit gleichzeitig ein Primideal) ist, ergibt sich aus Satz 2 insbesondere:

Satz 3. *Der kommutative Ring $\mathfrak{R}$ mit Einselement ist dann und nur dann als subdirekte Summe von Körpern darstellbar, wenn in $\mathfrak{R}$ der Durchschnitt aller maximalen Ringprimideale gleich dem Nullideal wird*[7]).

§ 2.

Darstellbarkeit von Integritätsbereichen als subdirekte Summen.

Aus Satz 3 von § 1 folgt sofort: Ein Integritätsbereich $\mathfrak{J}$ ist sicher *nicht* als subdirekte Summe von Körpern darstellbar, wenn er nur endlichviele verschiedene maximale Primideale $\mathfrak{m}_1, \ldots, \mathfrak{m}_s$ enthält[8]). Denn wegen der Nullteilerfreiheit von $\mathfrak{J}$ ist ja $\mathfrak{m}_1 \cdot \cdots \cdot \mathfrak{m}_s = \mathfrak{m}_1 \cap \ldots \ldots \cap \mathfrak{m}_s \neq (0)$. Insbesondere kann demnach ein *Stellenring*, d. h. ein Integritätsbereich mit nur einem einzigen maximalen Primideal niemals subdirekte Körpersumme sein. Daß auch Integritätsbereiche mit unendlichvielen maximalen Primidealen existieren, die sich nicht als subdirekte Körpersummen darstellen lassen, zeigt das folgende Beispiel eines Durchschnitts von unendlichvielen „zweistufigen Bewertungsringen“[9]):

---

[6]) Mc Coy, Satz 3. Beachtet man den bekannten Zusammenhang zwischen zweiseitigen Idealen und Homomorphismen, so sieht man sofort, daß unser Satz 2 auch so formuliert werden könnte: $\mathfrak{R}$ ist dann und nur dann als subdirekte Summe der $\mathfrak{R}_\alpha$ darstellbar, wenn für jedes α ein Homomorphismus $\mathfrak{R} \to \mathfrak{R}_\alpha$ existiert, und wenn dabei kein $a \neq 0$ aus $\mathfrak{R}$ durch alle diese Homomorphismen auf 0_α abgebildet wird (Mc Coy, Satz 2).

[7]) Folgt bei Mc Coy aus einem allgemeineren Theorem von Jacobson, vgl. [17]).

[8]) Unter einem Integritätsbereich schlechtweg verstehen wir stets einen echten Integritätsbereich, also einen Nicht-Körper.

[9]) Vgl. W. Krull, Allgemeine Bewertungstheorie, I. f. Math. 167 (1931), S. 160—196, insbesondere § 6.

Es sei $\mathfrak{J}$ der Ring aller der Polynomquotienten $\frac{p(x,y)}{q(x,y)}$ über einem beliebigen Körper $\mathfrak{K}$, bei denen, falls wir $p(x,y) = x \cdot p_1(x,y) + r(y)$, $q(x,y) = x \cdot q_1(x,y) + s(y)$ setzen, die Bedingungen $s(y) \neq 0$, $r(y) \equiv 0 (s(y))$ erfüllt sind. Dann bildet in $\mathfrak{J}$ die Menge aller $\frac{p(x,y)}{q(x,y)}$ mit $r(y) = 0$ ein Primideal $\mathfrak{p}^* \neq (0)$, dessen Elemente durch jeden Quotienten $\frac{\tilde{p}(x,y)}{\tilde{q}(x,y)}$ mit $\tilde{p}(x,y) \not\equiv 0(x)$ teilbar sind, und es ist $\mathfrak{J}/\mathfrak{p}^*$ zu $\mathfrak{K}[y]$ isomorph, ja es liefern sogar die Elemente von $\mathfrak{K}[y]$ ein volles Restsystem von $\mathfrak{J}$ modulo $\mathfrak{p}^*$. Daraus folgt mühelos, daß jedes maximale $\mathfrak{J}$-Primideal $\mathfrak{m}$ die Gestalt $\mathfrak{m} = (\mathfrak{p}^*, i(y))$ besitzt, wobei $i(y)$ ein irreduzibles Polynom aus $\mathfrak{K}[y]$ bedeutet, und daß auch alle Ideale dieses Typs maximale $\mathfrak{J}$-Primideale sind. Es gibt also in $\mathfrak{J}$ unendlichviele maximale Primideale und ihr Durchschnitt ist $\mathfrak{p}^* \neq (0)$. Nach Satz 3 kann daher $\mathfrak{J}$ nicht als subdirekte Körpersumme dargestellt werden[10]).

Wir kehren jetzt die Fragestellung gewissermaßen um, indem wir uns nicht mehr einen Integritätsbereich $\mathfrak{J}$ sondern eine Körpermenge $M_{\mathfrak{K}}$ gegeben denken und festzustellen suchen, wann unter den subdirekten Summen der $\mathfrak{K}_\alpha$ ($\mathfrak{K}_\alpha \in M_{\mathfrak{K}}$) sich Integritätsbereiche befinden. Zunächst erhalten wir drei Sätze von negativem Charakter.

Satz 4. *Eine subdirekte Summe von endlichvielen Körpern $\mathfrak{K}_1, \ldots, \mathfrak{K}_n$ ist nie ein Integritätsbereich.*

Es sei nämlich $\mathfrak{S}$ eine subdirekte Summe der $\mathfrak{K}_i$ und es sei das $\mathfrak{S}$-Ideal $\mathfrak{m}_i$ wie beim Beweis von Satz 1 unter a) definiert. Dann ist $\mathfrak{m}_1 \cap \ldots \cap \mathfrak{m}_n = \mathfrak{m}_1 \cdot \cdots \cdot \mathfrak{m}_n = (0)$. Ist nun etwa $\mathfrak{m}_1 = (0)$, so ist $\mathfrak{S}$ zu $\mathfrak{K}_1$ isomorph und somit ein Körper. Ist aber $\mathfrak{m}_i \neq (0)$ $(i = 1, \ldots, n)$, so ist $\mathfrak{S}$ wegen $\mathfrak{m}_1 \cdot \cdots \cdot \mathfrak{m}_n = (0)$ nicht nullteilerfrei.

Satz 5. *Liegt bei allen Körpern $\mathfrak{K}_\alpha \in M_{\mathfrak{K}}$ die Elementezahl unter einer festen Schranke N, so ist keine subdirekte Summe $\mathfrak{S}$ der $\mathfrak{K}_\alpha$ ein Integritätsbereich.*

Unter unserer Voraussetzung läßt sich nämlich $M_{\mathfrak{K}}$ so in endlichviele paarweise elementefremde Mengen $M_{\mathfrak{K}}^1, \ldots, M_{\mathfrak{K}}^n$ aufteilen, daß alle Körper der Menge $M_{\mathfrak{K}}^i$ zu einem festen endlichen Körper, etwa zu einem der Elementezahl z_i, isomorph sind. Es ist dann jedes Element aus einem Körper der Menge $M_{\mathfrak{K}}^i$ Nullstelle des Polynoms $u^{z_i} - u$. Setzen wir ferner $P(u) = \prod_{i=1}^{n} (u^{z_i} - u)$, so wird $P(f(x)) = 0$ für jede Funktion $f(x) \in \mathfrak{S}$. Im Falle der Nullteilerfreiheit von $\mathfrak{S}$ kann daher $\mathfrak{S}$ höchstens $z_1 \cdot z_2 \cdot \cdots \cdot z_n$ verschiedene Elemente enthalten, woraus elementar folgt, daß $\mathfrak{S}$ ein Körper sein muß.

[10]) Auf eine systematische Methode zur Konstruktion von nicht als subdirekte Körpersummen darstellbaren Integritätsbereichen mit unendlich vielen maximalen Primidealen soll in einer späteren Note in etwas anderem Zusammenhang kurz eingegangen werden.

Satz 5 dient als Grundlage für das folgende, allgemeinere Theorem:

Satz 6. *Es sei $M_{\mathfrak{R}}$ eine Menge von Körpern $\mathfrak{R}_\alpha$, von denen mindestens zwei verschiedene Charakteristik besitzen. $M_{\mathfrak{R}}^0$ bzw. $M_{\mathfrak{R}}^p$ sei die Menge aller der $\mathfrak{R}_\alpha$, die die Charakteristik 0 bzw. die Primzahlcharakteristik p haben. Ist dann $M_{\mathfrak{R}}^0$ endlich, und gibt es endlichviele Primzahlen $p_1, \ldots, p_n$ derart, daß die Elementezahlen aller $\mathfrak{R}_\alpha \in M_{\mathfrak{R}} - (M_{\mathfrak{R}}^0 \cup M_{\mathfrak{R}}^{p_1} \cup \ldots \cup M_{\mathfrak{R}}^{p_n})$ unterhalb einer festen Schranke N liegen, so gibt es keinen als subdirekte Summe der $\mathfrak{R}_\alpha$ darstellbaren Integritätsbereich.*

Es genügt offenbar zu zeigen: Ist in einem beliebigen Integritätsbereich $\mathfrak{J}$ jedem $\mathfrak{R}_\alpha \in M_{\mathfrak{R}}$ ein Primideal $\mathfrak{m}_\alpha$ so zugeordnet, daß der Restklassenkörper $\mathfrak{J}/\mathfrak{m}_\alpha$ zu $\mathfrak{R}_\alpha$ isomorph wird, so kann der Durchschnitt $\mathfrak{a}$ aller $\mathfrak{m}_\alpha$ niemals gleich dem Nullideal sein. — Wegen der Annahme, daß mindestens zwei $\mathfrak{R}_\alpha$ charakteristikungleich sind, muß der betrachtete Integritätsbereich die Charakteristik 0 haben, d. h. wir können und wollen $\mathfrak{J}$ als Oberring des Ringes $\mathfrak{J}_0$ der ganzen rationalen Zahlen annehmen. Setzen wir nun $\mathfrak{a}_0$ bzw. $\mathfrak{a}_i$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$ bzw. $\mathfrak{a}_\omega$ gleich dem Durchschnitt aller der Primideale $\mathfrak{m}_\alpha$, die Körpern aus der Menge $M_{\mathfrak{R}}^0$ bzw. $M_{\mathfrak{R}}^{p_i}$ $(i = 1, \ldots, n)$ bzw.

$$M_{\mathfrak{R}} - (M_{\mathfrak{R}}^0 \cup M_{\mathfrak{R}}^{p_1} \cup \ldots \cup M_{\mathfrak{R}}^{p_n})$$

entsprechen, so wird $\mathfrak{a}_0 \neq (0)$ nach Satz 4 und $\mathfrak{a}_\omega \neq (0)$ nach Satz 5. Außerdem muß wegen der Primzahlcharakteristik p_i aller $\mathfrak{R}_\alpha \in M_{\mathfrak{R}}^{p_i}$ die von 0 verschiedene Primzahl p_i in $\mathfrak{a}_i$ enthalten sein, wir haben also auch $\mathfrak{a}_i \neq (0)$ $(i = 1, \ldots, n)$ und damit $\bigcap_\alpha \mathfrak{m}_\alpha = \mathfrak{a} \neq (0)$ wegen $\mathfrak{a}_0 \cdot \mathfrak{a}_1 \cdot \cdots \cdot \mathfrak{a}_n \cdot \mathfrak{a}_\omega \leq \mathfrak{a}$. — Für den Fall einer Menge von Körpern gleicher Charakteristik erhalten wir als Ergänzung zu dem bewiesenen Satz 6 auf Grund von Satz 4 und Satz 5 unmittelbar:

Satz 6a. *Es sei $M_{\mathfrak{R}}$ eine Menge von Körpern $\mathfrak{R}_\alpha$ gleicher Charakteristik, $M_{\mathfrak{R}}^\infty$ die Untermenge aller der $\mathfrak{R}_\alpha$, die unendliche Elementezahlen haben. Ist dann $M_{\mathfrak{R}}^\infty$ endlich und liegen die Elementezahlen aller $\mathfrak{R}_\alpha \in M_{\mathfrak{R}} - M_{\mathfrak{R}}^\infty$ sämtlich unter einer festen Schranke N, so gibt es keinen als subdirekte Summe der $\mathfrak{R}_\alpha$ darstellbaren Integritätsbereich $\mathfrak{J}$.*

Selbstverständlich ist Satz 6a nur im Falle einer Primzahlcharakteristik von Interesse. Für den Fall der Charakteristik 0 wird $M_{\mathfrak{R}}^\infty = M_{\mathfrak{R}}$, und die Behauptung reduziert sich auf die von Satz 4. Man beachte übrigens, daß jede subdirekte Summe einer Körpermenge $\mathfrak{R}_\alpha$ die Primzahlcharakteristik p besitzen muß, falls alle $\mathfrak{R}_\alpha$ diese Charakteristik haben. — Auf Satz 5 und Satz 6 stützt sich ein Hilfssatz über abzählbare Integritätsbereiche, den wir hier in etwas allgemeinerer Fassung beweisen als wir ihn später in § 3 benötigen:

Satz 7. *Es seien* $\mathfrak{m}_1, \mathfrak{m}_2, \ldots$ *abzählbar unendlichviele maximale Primideale aus dem abzählbaren Integritätsbereich* $\mathfrak{J}$ *mit* $\bigcap_i \mathfrak{m}_i = (0)$. *Haben dann mindestens zwei der Restklassenkörper* $\mathfrak{J}/\mathfrak{m}_i$ *verschiedene Charakteristik, so läßt sich aus den* $\mathfrak{m}_i$ *eine Teilfolge* $\mathfrak{m}_{i_1}, \mathfrak{m}_{i_2}, \ldots$ *mit* $\bigcap_k \mathfrak{m}_{i_k} = (0)$ *stets so auswählen, daß die Restklassenkörper* $\mathfrak{J}/\mathfrak{m}_{i_k}$ *entweder alle Charakteristik 0 haben oder sämtlich unendlich sind und paarweise verschiedene Primzahlcharakteristiken besitzen oder sämtlich endlich sind, paarweise verschiedene Primzahlcharakteristiken besitzen und der Bedingung genügen, daß ihre Elementezahlen mit wachsendem k echt monoton wachsen*[11]. — *Haben andererseits alle* $\mathfrak{J}/\mathfrak{m}_i$ *die gleiche Primzahlcharakteristik p, so kann die Teilfolge* $\mathfrak{m}_{i_k}$ *mit* $\bigcap_k \mathfrak{m}_{i_k} = (0)$ *immer so bestimmt werden, daß entweder alle* $\mathfrak{J}/\mathfrak{m}_{i_k}$ *unendlich sind oder daß alle* $\mathfrak{J}/\mathfrak{m}_{i_k}$ *endlich sind, und daß gleichzeitig die Elementezahlen der* $\mathfrak{J}/\mathfrak{m}_{i_k}$ *mit wachsendem k monoton wachsen.*

Es genügt, den Hauptfall der nicht charakteristikgleichen $\mathfrak{J}/\mathfrak{m}_i$ zu behandeln. Es sei $M_{\mathfrak{m}}^{0}$ bzw. $M_{\mathfrak{m}}^{\omega}$ bzw. $M_{\mathfrak{m}}^{e}$ die Menge aller der $\mathfrak{m}_i$, für die $\mathfrak{J}/\mathfrak{m}$ Charakteristik 0 hat bzw. unendlich und von Primzahlcharakteristik bzw. endlich ist; $\mathfrak{a}_0$ bzw. $\mathfrak{a}_\omega$ bzw. $\mathfrak{a}_e$ sei der Durchschnitt aller $\mathfrak{m}_i$ aus $M_{\mathfrak{m}}^{0}$ bzw. $M_{\mathfrak{m}}^{\omega}$ bzw. $M_{\mathfrak{m}}^{e}$. Dann ist mindestens eines der Ideale $\mathfrak{a}_0$, $\mathfrak{a}_\omega$, $\mathfrak{a}_e$ gleich dem Nullideal; ist $\mathfrak{a}_0 = (0)$, so bilden die Ideale $\mathfrak{m}_i \in M_{\mathfrak{m}}^{0}$ eine Folge von einem der von uns gesuchten Typen. — Es sei jetzt $\mathfrak{a}_e = (0)$, und es seien $a_1, a_2, \ldots$ die irgendwie abgezählten, von 0 verschiedenen Elemente von $\mathfrak{J}$. Ferner werde angenommen, es seien die Ideale $\mathfrak{m}_{i_1}, \ldots, \mathfrak{m}_{i_n}$ aus $M_{\mathfrak{m}}^{e}$ bereits so bestimmt, daß die Körper $\mathfrak{J}/\mathfrak{m}_{i_k}$ $(k = 1, \ldots, n)$ monoton wachsende Elementezahlen und paarweise verschiedene Charakteristiken besitzen, und daß überdies $a_i \not\equiv 0 \,(\mathfrak{m}_{i_k})$ $(k = 1, \ldots, n)$. Wir bilden nun die Menge $M_{\mathfrak{m}}^{e,n}$ bzw. $\overline{M}_{\mathfrak{m}}^{e,n}$ aller der $\mathfrak{m}_i \in M_{\mathfrak{m}}^{e}$, für die die Charakteristik von $\mathfrak{J}/\mathfrak{m}_i$ gleich der Charakteristik der Körper $\mathfrak{J}/\mathfrak{m}_{i_k}$ wird bzw. für die die Elementezahl von $\mathfrak{J}/\mathfrak{m}_i$ *nicht* die Elementezahlen aller $\mathfrak{J}/\mathfrak{m}_{i_k}$ übertrifft. $\mathfrak{a}_{e,n}$ bzw. $\bar{\mathfrak{a}}_{e,n}$ bzw. $\mathfrak{b}_{e,n}$ sei der Durchschnitt aller $\mathfrak{m}_i$ aus $M_{\mathfrak{m}}^{e,n}$ bzw. $\overline{M}_{\mathfrak{m}}^{e,n}$ bzw. $M_{\mathfrak{m}}^{e} - (M_{\mathfrak{m}}^{e,n} \cup \overline{M}_{\mathfrak{m}}^{e,n})$. Dann ist, wie aus Satz 5 und dem Beweise von Satz 6 zu entnehmen, sicher $\mathfrak{a}_{e,n} \neq (0)$, $\bar{\mathfrak{a}}_{e,n} \neq (0)$ und damit $\mathfrak{b}_{e,n} = (0)$ wegen $\mathfrak{a}_{e,n} \cdot \bar{\mathfrak{a}}_{e,n} \cdot \mathfrak{b}_{e,n} \leq \mathfrak{a}_e = (0)$. Es gibt daher in $M_{\mathfrak{m}}^{e} - (M_{\mathfrak{m}}^{e,n} \cup \overline{M}_{\mathfrak{m}}^{e,n})$ sicher ein $\mathfrak{m}_{i_{k+1}}$, das a_{n+1} nicht enthält, und für dieses $\mathfrak{m}_{i_{k+1}}$ hat nach Konstruktion der Körper $\mathfrak{J}/\mathfrak{m}_{i_{k+1}}$ eine andere Primzahlcharakteristik und eine größere Elementezahl als jeder der Körper $\mathfrak{J}/\mathfrak{m}_{i_k}$ $(k = 1, \ldots, n)$. Es lassen sich also schrittweise die $\mathfrak{m}_{i_k}$ $(k = 1, 2, \ldots)$ in $M_{\mathfrak{m}}^{e}$ so bestimmen, daß die Körper $\mathfrak{J}/\mathfrak{m}_{i_k}$ $(k = 1, 2, \ldots)$ paarweise verschiedene Charakteristiken und monoton wachsende

[11] Das „oder" ist hier und im nächsten Satz selbstverständlich nicht ausschließend gemeint.

Elementezahlen besitzen. Ebenso, nur noch etwas einfacher zeigt man, daß für $\mathfrak{a}_\omega = (0)$ die $\mathfrak{m}_{i_k}$ aus $M_{\mathfrak{m}}^{\omega}$ so ausgewählt werden können, daß die (durchweg unendlichen) $\mathfrak{J}/\mathfrak{m}_{i_k}$ paarweise verschiedene Primzahlcharakteristiken haben.

§ 3.

Subdirekte Darstellungen von abzählbaren Integritätsbereichen.

In § 2 wurden im wesentlichen die Fälle erfaßt, in denen eine gegebene Körpermenge $M_{\mathfrak{R}}$ keinen Integritätsbereich als subdirekte Summe besitzt. Diese negativen Betrachtungen sollen jetzt positiv ergänzt werden. Zunächst beweisen wir:

Satz 8. *Sind $\mathfrak{K}_1, \mathfrak{K}_2, \ldots$ abzählbar unendlichviele, nichtendliche Körper, die sämtlich untereinander und zu einem festen Körper $\mathfrak{K}$ isomorph sind, so lassen sich alle endlichen Polynomringe $\mathfrak{K}[u_1, \ldots, u_n]$ $(n = 1, 2, \ldots)$, und außerdem der Polynomring $\mathfrak{K}[u_1, u_2, \ldots]$ in abzählbar unendlichvielen Variabeln als subdirekte Summen der $\mathfrak{K}_i$ darstellen.*

Es genügt, den Beweis für $\mathfrak{K}[u_1, u_2, \ldots] = \mathfrak{P}$ zu führen; zu zeigen ist, daß in $\mathfrak{P}$ abzählbar unendlich viele Primideale $\mathfrak{m}_i$ der Gestalt $\mathfrak{m}_i = (u_1 - \alpha_{i_1}, u_2 - \alpha_{i_2}, \ldots)$ mit $\bigcap_i \mathfrak{m}_i = (0)$ existieren. Da ferner $p(u_1, u_2, \ldots)$ dann und nur dann zu $\mathfrak{m}_i$ gehört, wenn $p(\alpha_{i_1}, \alpha_{i_2}, \ldots) = 0$, ist die zu beweisende Behauptung gleichwertig mit der andern: Es gibt in $\mathfrak{K}$ abzählbar unendlichviele Wertsysteme $\alpha_{i_1}, \alpha_{i_2}, \ldots$ derart, daß aus $p(\alpha_{i_1}, \alpha_{i_2}, \ldots) = 0$ $(i = 1, 2, \ldots)$ stets $p(u_1, u_2, \ldots) = 0$ folgt. Die Richtigkeit dieser zweiten Behauptung ist aber fast trivial. Man erhält nach elementaren algebraischen Sätzen eine Wertsystemmenge $\alpha_{i_1}, \alpha_{i_2}, \ldots$ $(i = 1, 2, \ldots)$ der gewünschten Art z. B. dann, wenn man die sämtlichen Folgen $\alpha_1, \alpha_2, \ldots$ bildet, bei denen fast alle α_k gleich 0 sind, während die von 0 verschiedenen α_k einer festen abzählbaren Untermenge $\mathfrak{A}$ von $\mathfrak{K}$ angehören. (Man beachte, daß die Menge aller dieser Folgen abzählbar ist, daß jedes Polynom $p(u_1, u_2, \ldots)$ nur endlichviele u_k wirklich enthält, und daß die Werte der nicht in $p(u_1, u_2, \ldots)$ auftretenden α_k für den Wert von $p(\alpha_1, \alpha_2, \ldots)$ völlig gleichgültig sind.)

Es sei jetzt $\mathfrak{K}_1, \mathfrak{K}_2, \ldots$ eine abzählbare Menge von endlichen oder höchstens abzählbar unendlichen Körpern $\mathfrak{K}_i$, die nur der einen Bedingung genügen soll, daß nicht auf Grund von Satz 6 die Existenz eines als subdirekte Summe der $\mathfrak{K}_i$ darstellbaren Integritätsbereichs $\mathfrak{J}$ von vornherein ausgeschlossen ist. Dann gilt zunächst:

Satz 9. *Ist der abzählbare Integritätsbereich $\mathfrak{J}$ als subdirekte Summe der Körper $\mathfrak{K}_i$ darstellbar, so ist es auch der Polynomring $\mathfrak{J}[u_1, \ldots, u_n]$ in endlichvielen und der Polynomring $\mathfrak{J}[u_1, u_2, \ldots]$ in abzählbar unendlichvielen Unbestimmten u_i.*

Faßt man einen Körper als Grenzfall eines Integritätsbereiches auf, so erscheint Satz 8 offenbar als Grenzfall von Satz 9; denn unter den Voraussetzungen von Satz 8 kann ersichtlich der Körper $\mathfrak{K}$ als subdirekte Summe der Körper $\mathfrak{K}_i$ dargestellt werden. Im übrigen ist Satz 8 vor allem deshalb wesentlich einfacher als Satz 9, weil dort der Körper $\mathfrak{K}$ ein festes volles Repräsentantensystem liefert für jeden der Restklassenkörper $\mathfrak{P}/\mathfrak{m}_i$, den wir zur subdirekten Zerlegung des betrachteten Polynomrings $\mathfrak{P}$ benötigen. Ein solches festes volles Repräsentantensystem steht uns diesmal nicht zur Verfügung, und so brauchen wir zum Beweis von Satz 9 die $\mathfrak{J}$ betreffende Abzählbarkeitsvoraussetzung, die bei Satz 8 entbehrt werden konnte[12]). — Es genügt für uns, den Fall eines Polynomrings $\mathfrak{J}[u] = \mathfrak{P}$ in einer einzigen Unbestimmten u zu behandeln. Die Richtigkeit von Satz 9 für $\mathfrak{J}[u_1, \ldots, u_n]$ ergibt sich dann unmittelbar durch Induktion, und was den Fall $\mathfrak{J}[u_1, u_2, \ldots]$ angeht, so sind im Verhältnis zum Falle $\mathfrak{J}[u]$ nur unbedeutende Modifikationen nötig, für die der später ausführlich darzustellende Beweis von Satz 10 als Vorbild dienen kann. — Nach Voraussetzung gibt es in $\mathfrak{J}$ maximale Primideale $\mathfrak{m}_1, \mathfrak{m}_2, \ldots$ derart, daß $\mathfrak{J}/\mathfrak{m}_i$ jeweils zu $\mathfrak{K}_i$ isomorph und $\bigcap_i \mathfrak{m}_i = (0)$ wird; wegen der Nullteilerfreiheit von $\mathfrak{J}$ wird $\mathfrak{m}_1 \cap \ldots \cap \mathfrak{m}_n \neq (0)$, $\mathfrak{m}_{n+1} \cap \mathfrak{m}_{n+2} \cap \ldots = (0)$ für jedes n. Beachtet man weiter, daß die Existenz von Primidealen $\mathfrak{m}_i[u]$ mit zu $\mathfrak{K}_i$ isomorphem Restklassenkörper $\mathfrak{P}/\mathfrak{m}_i[u]$ trivial ist, — man braucht nur $\mathfrak{m}_i[u] = (\mathfrak{m}_i, u - \alpha)$ mit beliebigem $\alpha \in \mathfrak{J}$ zu setzen, — und berücksichtigt man Satz 7, so sieht man, daß ohne Einschränkung der Allgemeinheit Satz 9 nur unter der Voraussetzung bewiesen zu werden braucht, daß entweder die Körper $\mathfrak{K}_i$ alle unendlich sind, oder daß die Elementezahlen der $\mathfrak{K}_i$ mit zunehmendem i monoton ins Unendliche wachsen; dabei genügt es noch, allein die zweite, etwas schwierigere Möglichkeit zu betrachten. Es seien nun $p_1(u), p_2(u), \ldots$ die irgendwie abgezählten, von 0 verschiedenen Elemente von $\mathfrak{P}$, und es seien bereits die Primideale $\mathfrak{m}_i[u] = (\mathfrak{m}_i, u - \alpha_i)$ $(i = 1, \ldots N(n))$ so konstruiert, daß kein $p_k(u)$ $(k = 1, \ldots, n)$ in sämtlichen $\mathfrak{m}_i[u]$ enthalten ist; nach Voraussetzung gibt es dann ein kleinstes $M(n+1) > N(n)$, derart, daß die Elementezahlen der Körper $\mathfrak{K}_i$ $(i \geqq M(n+1))$ sämtlich größer sind als der Grad g von $p_{n+1}(u)$. Ferner existiert wegen $\mathfrak{m}_{M(n+1)} \cap \mathfrak{m}_{M(n+1)+1} \cap \ldots = (0)$ ein kleinstes $N(n+1) \geqq M(n+1)$, für das nicht alle Koeffizienten von $p_{n+1}(u)$ zu $\mathfrak{m}_{N(n+1)}$ gehören. Wegen der Existenz von mindestens $g+1$ verschiedenen Elementen in $\mathfrak{J}/\mathfrak{m}_{N(n+1)}$ kann man dann in diesem Restklassenkörper ein $\bar{\alpha}_{N(n+1)}$ so bestimmen, daß $\bar{p}_{n+1}(\bar{\alpha}_{N(n+1)}) \neq \bar{0}$ wird, falls wir durch die Querstriche durchweg die Restklassenbildung modulo $\mathfrak{m}_{N(n+1)}$ kennzeichnen. $\bar{p}_{n+1}(\bar{\alpha}_{N(n+1)}) \neq \bar{0}$ bedeutet aber soviel wie die Nichtzugehörigkeit von

[12]) Über die vermutliche Möglichkeit, sich auch bei Satz 9 von der Abzählbarkeitsvoraussetzung frei zu machen, vgl. den Schluß des Paragraphen.

$p_{n+1}(u)$ zu $\mathfrak{m}_{N(n+1)}[u] = (\mathfrak{m}_{N(n+1)}, u - a_{N(n+1)})$, wenn $a_{N(n+1)}$ ein beliebiger Repräsentant der Klasse $\bar{a}_{N(n+1)}$ ist. Setzen wir noch $\mathfrak{m}_i[u] = [\mathfrak{m}_i, \mathfrak{a}]$ $(i = N(n)+1, \ldots, N(n+1)-1)$, so ist $\mathfrak{P}/\mathfrak{m}_i$ zu $\mathfrak{K}_i$ isomorph $(i = 1, \ldots, N(n+1))$, und es gehört keines der Elemente $p_i(u)$ $(i = 1, \ldots, n+1)$ zu allen Idealen $\mathfrak{m}_i[u]$. — Damit ist ersichtlich der zum Beweise von Satz 9 nötige Schluß von n auf $n+1$ durchgeführt. Als Gegenstück zu Satz 9, bei dem ein als subdirekte Summe der $\mathfrak{K}_i$ darstellbarer Integritätsbereich $\mathfrak{J}$ gegeben sein mußte, beweisen wir jetzt:

Satz 10. *Es sei $\mathfrak{K}_1, \mathfrak{K}_2, \ldots$ eine beliebige abzählbare Folge von endlichen oder abzählbar unendlichen Körpern, die nicht alle die gleiche Charakteristik haben, und auf die Satz 6 nicht anwendbar ist. Dann ist der Integritätsbereich $\mathfrak{P}^* = \mathfrak{J}_0[u_1, u_2, \ldots]$ aller ganzzahligen Polynome in abzählbar unendlichvielen Unbestimmten u_k stets subdirekte Summe der $\mathfrak{K}_i$.*

Als Grundlage für das fundamentale Existenztheorem 10 dient der Hilfssatz: Ist $\mathfrak{K}$ ein beliebiger höchstens abzählbarer Körper, so gibt es in $\mathfrak{P}^*$ stets unendlichviele Primideale $\mathfrak{m}$, für die $\mathfrak{P}^*/\mathfrak{m}$ zu $\mathfrak{K}$ isomorph wird.

Daß unendlichviele Primideale der gewünschten Art existieren, wenn auch nur ein einziges vorhanden ist, folgt sofort aus der Bemerkung: Es sei $\tilde{\mathfrak{P}}^* = \mathfrak{J}_0[u_{N+1}, u_{N+2}, \ldots]$ der zu $\mathfrak{P}^*$ isomorphe ganzzahlige Polynomring in $u_{N+1}, u_{N+2}, \ldots$ und es sei $\tilde{\mathfrak{P}}^*/\tilde{\mathfrak{m}}$ zu $\mathfrak{K}$ isomorph. Dann wird auch $\mathfrak{P}^*/\mathfrak{m}$ zu $\mathfrak{K}$ isomorph, falls wir $\mathfrak{m} = (\tilde{\mathfrak{m}}, u_1 - \tilde{p}_1, \ldots, u_N - \tilde{p}_N)$ setzen, wobei die $\tilde{p}_i$ beliebige Elemente aus $\mathfrak{K}$ bedeuten. Um nun überhaupt ein $\mathfrak{m}$ zu finden, bilden wir zunächst $\mathfrak{J}_0$ je nach der Charakteristik von $\mathfrak{K}$ isomorph oder homomorph auf den Ring $\mathfrak{R}_0$ der ganzzahligen Vielfachen des Einheitselementes von $\mathfrak{K}$ ab, und ordnen dann jedem u_i irgendwie ein $\alpha_i \in \mathfrak{K}$ zu, wobei nur dafür zu sorgen ist, daß jedes nicht zu $\mathfrak{R}_0$ gehörige $\mathfrak{K}$-Element unter den α_i mindestens einmal vorkommt. Es entsteht so ein Homomorphismus H von $\mathfrak{P}^*$ auf $\mathfrak{K}$, zu dem in $\mathfrak{P}^*$ ein $\mathfrak{m}$ mit zu $\mathfrak{K}$ isomorphem $\mathfrak{P}^*/\mathfrak{m}$ gehört.

Angesichts des Hilfssatzes genügt es zum Beweise von Satz 10, zu einer Teilfolge $\mathfrak{K}_{i_1}, \mathfrak{K}_{i_2}, \ldots$ von $\mathfrak{K}_1, \mathfrak{K}_2, \ldots$ die zugehörigen Primideale $\mathfrak{m}_{i_1}, \mathfrak{m}_{i_2}, \ldots$ so zu konstruieren, daß $\bigcap_k \mathfrak{m}_{i_k} = (0)$ wird. Da ferner auf die Folge $\mathfrak{K}_1, \mathfrak{K}_2, \ldots$ Satz 6 nicht anwendbar sein soll, ergibt sich aus den beim Beweise von Satz 7 angestellten Überlegungen, daß eine unendliche Teilfolge $\mathfrak{K}_{l_1}, \mathfrak{K}_{l_2}, \ldots$ existiert, bei der entweder alle $\mathfrak{K}_{l_k}$ die Charakteristik 0 haben oder alle $\mathfrak{K}_{l_k}$ unendlich und paarweise charakteristikungleich sind, oder schließlich die $\mathfrak{K}_{l_k}$ endliche, paarweise charakteristikungleiche Körper darstellen, deren Elementezahlen mit wachsendem k echt monoton wachsen. Wir legen bei den weiteren Betrachtungen die dritte Möglichkeit zugrunde, weil für sie der

Beweis verhältnismäßig am umständlichsten zu führen ist. Es seien $p_1(u), p_2(u), \ldots$ die irgendwie abgezählten, von 0 verschiedenen Elemente von $\mathfrak{P}^*$, und es seien die Primideale $\mathfrak{m}_{i_k}$ ($k = 1, \ldots, n$; $i_k = l_{m_k}$, $m_{k+1} > m_k$) bereits so bestimmt, daß $\mathfrak{P}^*/\mathfrak{m}_{i_k}$ zu $\mathfrak{K}_{i_k}$ isomorph und $p_k(u) \not\equiv 0\ (\mathfrak{m}_{i_k})$. Ferner sei N so groß gewählt, daß $u_{N+1}, u_{N+2}, \ldots$ in $p_{n+1}(u) = p_{n+1}(u_1, \ldots, u_N)$ nicht auftreten, und es sei M der Grad von $p_{n+1}(u)$. Wegen der Art der Auswahl der Körperkette $\mathfrak{K}_{l_1}, \mathfrak{K}_{l_2}, \ldots$ gibt es nun ein kleinstes $m_{n+1} > m_n$ derart, daß die Elementezahl von $\mathfrak{K}_{l_{m_{n+1}}} = \mathfrak{K}_{i_{n+1}}$ größer ist als M, und daß gleichzeitig nicht alle Koeffizienten von $p_{n+1}(u)$ durch die Charakteristik von $\mathfrak{K}_{i_{n+1}}$ teilbar sind. Nach dem Hilfssatz existiert weiter in $\tilde{\mathfrak{P}}^* = \mathfrak{J}_0[u_{N+1}, u_{N+2}, \ldots]$ ein $\tilde{\mathfrak{m}}_{i_{n+1}}$ mit zu $\mathfrak{K}_{i_{n+1}}$ isomorphem $\tilde{\mathfrak{P}}^*/\tilde{\mathfrak{m}}_{i_{n+1}}$. Wegen der Auswahl von $\mathfrak{K}_{i_{n+1}}$ lassen sich schließlich $\tilde{p}_1, \ldots, \tilde{p}_N$ in $\tilde{\mathfrak{P}}^*$ so bestimmen, daß $p_{n+1}(\tilde{p}_1, \ldots, \tilde{p}_N) \not\equiv 0\ (\tilde{\mathfrak{m}}_{i_{n+1}})$. Setzt man dann $\mathfrak{m}_{i_{n+1}} = (\tilde{\mathfrak{m}}_{i_{n+1}}, u_1 - \tilde{p}_1, \ldots, u_N - \tilde{p}_N)$, so wird $\mathfrak{P}^*/\mathfrak{m}_{i_{n+1}}$ isomorph zu $\mathfrak{K}_{i_{n+1}}$, und es liegt $p_{n+1}(u)$ nicht in $\mathfrak{m}_{i_{n+1}}$. Mit dieser Feststellung sind wir, ebenso wie beim Beweise von Satz 9 im wesentlichen fertig. — Was den in Satz 10 nicht erfaßten Fall einer Folge $\mathfrak{K}_1, \mathfrak{K}_2, \ldots$ von lauter charakteristikgleichen Körpern angeht, so erhält man offenbar:

Satz 10a. *Ist $\mathfrak{K}_1, \mathfrak{K}_2, \ldots$ eine beliebige abzählbare Folge von abzählbaren Körpern der Charakteristik 0, so kann sowohl der Ring $\mathfrak{J}_0[u_1, u_2, \ldots]$ aller ganzzahligen als auch der Ring $\mathfrak{K}_0[u_1, u_2, \ldots]$ aller rationalzahligen Polynome in abzählbar unendlichvielen Unbestimmten $u_1, u_2, \ldots$ als subdirekte Summe der $\mathfrak{K}_i$ dargestellt werden.*

Satz 10b. *Ist $\mathfrak{K}_1, \mathfrak{K}_2, \ldots$ eine abzählbare Folge von abzählbaren Körpern der Charakteristik p, auf die Satz 6a nicht anwendbar ist, so ist stets der Polynomring $\mathfrak{K}_p[u_1, u_2, \ldots]$ über dem Primkörper $\mathfrak{K}_p$ als subdirekte Summe der $\mathfrak{K}_i$ darstellbar.*

Die Beweise der Sätze 10a und 10b dürfen unterdrückt werden, da sie im wesentlichen nach den gleichen Richtlinien verlaufen wie der Beweis von Satz 10 selbst. — Mit den Sätzen 10, 10a, 10b ist die Frage nach denjenigen abgezählten Mengen abzählbarer Körper, die zur subdirekten Darstellung von Integritätsbereichen brauchbar sind, vollständig beantwortet. Die in den Sätzen 6 und 6a angegebenen Ausnahmefälle sind die einzigen, in denen unter den subdirekten Summen kein Integritätsbereich vorkommt. Natürlich wird man weiterfragen, ob die Beschränkung aufs Abzählbare für das gewonnene Resultat wirklich wesentlich war. Wie eine Überschlagsbetrachtung zeigt, dürfte es nicht schwierig sein, die bei den Beweisen benutzten Konstruktionen mit transfiniter Induktion auf den Fall auszudehnen, daß die Mächtigkeit der Menge vorgegebener Körper nicht kleiner ist als die Mächtigkeit der Menge aller Elemente irgend eines dieser Körper. Soll dagegen etwa eine abgezählte Folge $\mathfrak{K}_1, \mathfrak{K}_2, \ldots$ von nicht durchweg endlichen oder abzählbaren Körpern $\mathfrak{K}_i$ behandelt werden, so

liegt offenbar ein neuartiges Problem vor, bei dem eine schematische Übertragung der oben mit Erfolg angewandten Überlegungen nicht mehr möglich ist. Indessen erscheint es zweifelhaft, ob ein Vorwärtsdringen in der angedeuteten Richtung lohnend sein würde. Denn der Hauptwert der Untersuchungen von § 3 dürfte noch mehr als im Positiven im Negativen liegen. Am wichtigsten ist es wohl, daß hier an drastischen Beispielen gezeigt wurde, daß einerseits Integritätsbereiche der verschiedensten arithmetischen Typen subdirekte Summen ein und derselben Körpermenge sein können, und daß es andererseits in Gestalt von $\mathfrak{P}^*$ einen Integritätsbereich gibt, der als subdirekte Summe beinahe aller möglichen abzählbaren Mengen von abzählbaren Körpern darstellbar ist. Damit ist aufs deutlichste nachgewiesen, daß subdirekte Zerlegungen einen ganz anderen Charakter haben als direkte, und es dürfte wohl nicht nötig sein, dieses Ergebnis durch Betrachtung überabzählbarer Beispiele weiter zu bekräftigen.

§ 4.

Subdirekte Komponenten von Idealen.

Die negativen Resultate von § 3 sollen mit Rücksicht auf eine spätere Gegenüberstellung in einer etwas anderen Richtung noch kurz ergänzt werden. Es sei sei zunächst der (kommutative oder nicht kommutative) Ring $\mathfrak{S}$ subdirekte Summe der beliebigen Ringmenge $M_{\mathfrak{R}}$, und es sei $\mathfrak{a}$ irgend ein zweiseitiges $\mathfrak{S}$-Ideal. Dann bildet die Menge aller der $a_\alpha \in \mathfrak{R}_\alpha$, zu denen ein $f(x) \in \mathfrak{a}$ mit $f(\alpha) = a_\alpha$ existiert, ein zweiseitiges $\mathfrak{R}_\alpha$-Ideal, das mit $\mathfrak{i}_\alpha(\mathfrak{a})$ bezeichnet und die „α-Komponente von $\mathfrak{a}$" genannt werden soll. Bedeutet ferner $\mathfrak{m}_\alpha$ wie in § 1 das dem Ringe $\mathfrak{R}_\alpha$ in $\mathfrak{S}$ zugeordnete zweiseitige Ideal (also in der neuen Bezeichnung das größte zweiseitige $\mathfrak{S}$-Ideal $\mathfrak{a}$, das der Bedingung $\mathfrak{i}_\alpha(\mathfrak{a}) = (0_\alpha)$ genügt), so ergibt sich mühelos:

Satz 11. *Zwei zweiseitige $\mathfrak{S}$-Ideale $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$ haben dann und nur dann die gleiche α-Komponente, $\mathfrak{i}_\alpha(\mathfrak{a}) = \mathfrak{i}_\alpha(\mathfrak{b})$, wenn $\mathfrak{a} + \mathfrak{m}_\alpha = \mathfrak{b} + \mathfrak{m}_\alpha$; es ist $\mathfrak{R}_\alpha/\mathfrak{i}_\alpha(\mathfrak{a})$ isomorph zu $\mathfrak{S}/(\mathfrak{a} + \mathfrak{m}_\alpha)$.*

Soll nun auf Grund von Satz 11 untersucht werden, wie weit sich die arithmetischen Eigenschaften von $\mathfrak{a}$ in seinen Komponenten $\mathfrak{i}_\alpha(\mathfrak{a})$ spiegeln, so wird man zunächst fragen, ob etwa die Primideale $\mathfrak{p}$ durch prime α-Komponenten $\mathfrak{i}_\alpha(\mathfrak{p})$ charakterisiert sind. Die Antwort ist völlig negativ. Beschränken wir uns dem Charakter der Note entsprechend auf subdirekte Darstellungen eines Integritätsbereiches $\mathfrak{J}$ durch Integritätsbereiche $\mathfrak{J}_\alpha$, so erhalten wir:

Satz 12. *Bei passender Wahl der subdirekten Summe $\mathfrak{J}$ und der Komponenten $\mathfrak{J}_\alpha$ kann es vorkommen:* a) *Daß alle Komponenten $\mathfrak{i}_\alpha(\mathfrak{a})$ eines Nichtprimideals $\mathfrak{a}$ Primideale werden oder mit $\mathfrak{J}_\alpha$ zusammenfallen.* b) *Daß die Komponenten $\mathfrak{i}_\alpha(\mathfrak{p})$ eines Primideals $\mathfrak{p}$ alle primär*

werden oder sämtlich mindestens zwei verschiedene minimale Primoberideale besitzen.

Es sei nämlich $\mathfrak{J} = \mathfrak{K}[x, y]$ der Polynomring in zwei Unbestimmten über irgendeinem unendlichen Körper $\mathfrak{K}$, und es werde für $\alpha = 1, 2, \ldots$ gesetzt:

a_1) $\mathfrak{J}_\alpha = \mathfrak{J}/(y + a_\alpha)$, $\mathfrak{a} = (x\,y)$ a_2) $\mathfrak{J}_\alpha = \mathfrak{J}/(xy + a_\alpha)$, $\mathfrak{a} = (xy)$.

b_1) $\mathfrak{J}_\alpha = \mathfrak{J}/(x + a_\alpha y^2)$, $\mathfrak{p} = (x)$. b_2) $\mathfrak{J}_\alpha = \mathfrak{J}/(x + a_\alpha \cdot y \cdot (y + b))$, $\mathfrak{p} = (x)$.

Dabei sollen durchweg $a_\alpha \neq 0$; $a_\alpha \neq a_\beta$ $(\alpha \neq \beta)$ sowie $b \neq 0$ sein. Dann ist zunächst sofort zu sehen, daß in allen 4 Fällen die $\mathfrak{J}_\alpha$ Integritätsbereiche sind, und daß $\mathfrak{J}$ nach Satz 2 als subdirekte Summe der $\mathfrak{J}_\alpha$ darstellbar ist. Ferner wird bei a_1) $\mathfrak{m}_\alpha + \mathfrak{a} = (y + a_\alpha, xy) = (y + a_\alpha, x)$ ein Primoberideal von $\mathfrak{m}_\alpha = (y + a_\alpha)$ und folglich $\mathfrak{i}_\alpha(\mathfrak{a})$ ein Primideal für jedes α. Ebenso ergibt sich $\mathfrak{m}_\alpha + \mathfrak{a} = (xy + a_\alpha, xy) = \mathfrak{J}$, $\mathfrak{i}_\alpha(\mathfrak{a}) = \mathfrak{J}_\alpha$ $(\alpha = 1, 2, \ldots)$ im Falle a_2). Bei b_1) haben wir: $\mathfrak{m}_\alpha + \mathfrak{p} = (x + a_\alpha y^2, x) = (x, y^2)$, und es ist nicht nur (x, y^2) in $\mathfrak{J}$ sondern auch $(x, y^2)/(x + a_\alpha y^2)$ in $\mathfrak{J}/(x + a_\alpha y^2)$ echt primär, so daß $\mathfrak{i}_\alpha(\mathfrak{p})$ für jedes α ein echtes Primärideal wird. Entsprechend folgt bei b_2) aus $\mathfrak{m}_\alpha + \mathfrak{p} = (x + a_\alpha \cdot (y + b) \cdot y, x) = (x, y \cdot (y + b)) = (x, y) \cdot (x, y + b)$, daß $\mathfrak{i}_\alpha(\mathfrak{p})$ für jedes α das Produkt zweier verschiedener Primideale darstellt.

Spezialisieren wir uns nun wie in § 2 und § 3 auf die Betrachtung der subdirekten Summendarstellungen von Integritätsbereichen $\mathfrak{J}$ durch *Körper* $\mathfrak{K}_\alpha$, so gibt es für jedes $\mathfrak{a}$ aus $\mathfrak{J}$ und jedes α nur die beiden Möglichkeiten $\mathfrak{i}_\alpha(\mathfrak{a}) = (0_\alpha)$ und $\mathfrak{i}_\alpha(\mathfrak{a}) = \mathfrak{K}_\alpha$. Beispiele zu Satz 12b können hier also nicht mehr gebildet werden. Andererseits ist es auch in diesem einfachsten Sonderfall keine Kunst, entsprechend Satz 12a, Fälle zu finden, in denen ein Nichtprimärideal $\mathfrak{a}$ der Bedingung $\mathfrak{i}_\alpha(\mathfrak{a}) = \mathfrak{K}_\alpha$ für alle α genügt, (man braucht ja nur $\mathfrak{a}_\alpha$ zu allen $\mathfrak{m}_\alpha$ teilerfremd zu wählen), und als Ersatz für Satz 12b kann die folgende Bemerkung dienen:

Es gibt Fälle, in denen für ein maximales $\mathfrak{J}$-Primideal $\mathfrak{m}$ unendlichviele Komponenten $\mathfrak{i}_\alpha(\mathfrak{m})$ gleich (0_α) werden. (Trivial; man braucht nur von einer Menge $M_\mathfrak{m}$ maximaler $\mathfrak{J}$-Primideale mit dem Gesamtdurchschnitt (0) auszugehen, in der unendlich oft das Primideal $\mathfrak{m}$ auftritt[13]), und die zugehörige subdirekte Zerlegung von $\mathfrak{J}$ zu bilden.) — Die Folgerungen, die aus Satz 12 und den Ergänzungsbemerkungen gezogen werden müssen, sind eindeutig:

---

[13]) Natürlich ist eine subdirekte Darstellung von $\mathfrak{J}$, bei der mehrere Komponentenringe $\mathfrak{R}_{\alpha_1}, \mathfrak{R}_{\alpha_2}, \ldots$ ein-und-demselben maximalen $\mathfrak{J}$-Primideal $\mathfrak{m}_{\alpha_1} = \mathfrak{m}_{\alpha_2} = \cdots$ zugeordnet sind, nichtreduziert in dem Sinne, daß z. B. $\mathfrak{R}_{\alpha_2}, \mathfrak{R}_{\alpha_3}, \ldots$ unter Beibehaltung von $\mathfrak{R}_{\alpha_1}$ weggelassen werden können, ohne daß die übrigbleibende Ringmenge die Eigenschaft verliert, eine subdirekte Darstellung von $\mathfrak{J}$ zu definieren. Man beachte aber, daß bei jeder subdirekten Darstellung eines Integritätsbereiches $\mathfrak{J}$ durch beliebige Komponentenringe $\mathfrak{R}_\alpha$, bei der nur $\mathfrak{m}_\alpha \neq (0)$

Die Betrachtung der Komponentenideale $\mathfrak{i}_\varkappa(\mathfrak{a})$ *eines* $\mathfrak{S}$*-Ideals* $\mathfrak{a}$ *hinsichtlich einer gegebenen subdirekten Summendarstellung von* $\mathfrak{S}$ *ist im allgemeinen zur Festlegung der arithmetischen Eigenschaften von* $\mathfrak{a}$ *völlig ungeeignet.*

§ 5.

Spezielle subdirekte Summen[14]).

Für die endgültige kritische Auseinandersetzung mit dem Begriff der subdirekten Summe ist es wichtig, den negativen Ergebnissen von § 4 die positiven Resultate gegenüberzustellen, die man bei denjenigen Ringen erhält, die im Rahmen der allgemeinen Theorie der subdirekten Zerlegung als „spezielle" subdirekte Summen bezeichnet werden. — Benutzt man die in § 1 eingeführte Terminologie, so kann man kurz so definieren: Der Ring $\mathfrak{S}^+ \leq \mathfrak{S}^*$ heißt dann und nur dann *spezielle subdirekte Summe* der Ringe $\mathfrak{R}_\alpha$, wenn $\mathfrak{S}^+$ alle Funktionen $f(x)$ enthält, die fast überall auf $M_\mathfrak{R}$ verschwinden, (also für fast alle α der Gleichung $f(\alpha) = 0_\alpha$ genügen). — Oder auch, scheinbar weniger fordernd, aber tatsächlich gleichwertig: $\mathfrak{S}^+ \leq \mathfrak{S}^*$ heißt dann und nur dann spezielle subdirekte Summe der $\mathfrak{R}_\alpha$, wenn für jedes $\alpha \in M$ und jedes $a_\alpha \in \mathfrak{R}_\alpha$ die durch die Gleichungen $f(\beta) = 0_\beta$, $(\beta \neq \alpha)$; $f(\alpha) = a_\alpha$ definierte Funktion $f(x)$ zu $\mathfrak{S}^+$ gehört[15]). —

Bei einer endlichen Ringmenge $M_\mathfrak{R}$ gibt es offenbar außer der direkten Summe $\mathfrak{S}^*$ keine weiteren speziellen subdirekten Summen

---

für jedes α, irgendwelche endlich vielen Komponentenringe $\mathfrak{R}_{\alpha_1}, \mathfrak{R}_{\alpha_2}, \ldots \mathfrak{R}_{\alpha_n}$ stets im gleichen Sinne weggelassen werden dürfen. (Denn es muß ja wegen $\mathfrak{m}_{\alpha_1} \cap \mathfrak{m}_{\alpha_2} \cap \ldots \cap \mathfrak{m}_{\alpha_n} \neq (0)$ der Durchschnitt aller von den $\mathfrak{m}_{\alpha_i}$ $(i = 1, \ldots n)$ verschiedenen $\mathfrak{m}_\alpha$ sicher gleich (0) werden.) In Sonderfällen kann es sogar vorkommen, daß j e d e unendliche Teilmenge der Menge $M_\mathfrak{R}$ aller $\mathfrak{R}_\alpha$ eine subdirekte Darstellung von $\mathfrak{Z}$ definiert; man betrachte z. B. eine subdirekte Darstellung des Ringes aller ganzen Zahlen durch Körper $\mathfrak{R}_\alpha = \mathfrak{K}_\alpha$, bei der keine zwei verschiedenen $\mathfrak{K}_\alpha$ derselben Primzahl zugeordnet sind.

[14]) Die wichtigsten Sätze über spezielle subdirekte Summen stammen von Köthe. Vgl. vor allem: G. Köthe, Abstrakte Theorie nichtkommutativer Ringe mit einer Anwendung auf die Darstellungstheorie kontiunierlicher Gruppen, Math. Ann. 103 (1930), S. 545—572. — Die Ausführungen von § 5 sollen nicht die Theorie wesentlich weiterentwickeln, sondern nur einige für unsere kritischen Betrachtungen besonders wichtige Punkte kurz hervorheben.

[15]) Unter allen speziellen subdirekten Summen $\mathfrak{S}^+$ einer gegebenen Ringmenge $M_\mathfrak{R}$ gibt es offenbar eine minimale $\mathfrak{S}^+_{\min}$, und zwar besteht $\mathfrak{S}^+_{\min}$ aus allen u n d n u r d e n Funktionen $f(x)$, die fast überall auf $M_\mathfrak{R}$ verschwinden. Zum Teil werden in der Literatur die speziellen minimalen subdirekten Summen $\mathfrak{S}^+_{\min}$ (und nicht die von uns in § 1 im Anschluß an Mc Coy eingeführten Ringe $\mathfrak{S}^*$) als „direkte Summen" schlechthin bezeichnet. Diese vom Texte abweichende Terminologie steht in Übereinstimmung mit der von Bourbaki bei Moduln gegebenen Definition der direkten Summe — vgl. [4]).

$\mathfrak{S}^+$ (wohl aber unter Umständen nichtspezielle von $\mathfrak{S}^*$ verschiedene subdirekte Summen $\mathfrak{S}$). Ganz allgemein folgt unmittelbar aus der Grunddefinition: Bei jeder speziellen subdirekten Summe $\mathfrak{S}^+$ bildet die Menge aller $f(x)$ mit $f(\beta) = (0_\beta)$, $(\beta \neq \alpha)$ einen zu $\mathfrak{R}_\alpha$ isomorphen Unterring $\mathfrak{R}'_\alpha$ von $\mathfrak{S}^+$ und gleichzeitig ein zweiseitiges Ideal in $\mathfrak{S}^+$. Enthält wie weiterhin angenommen werden soll jeder Komponentenring $\mathfrak{R}_\alpha$ ein Einheitselement, so wird bei jedem zweiseitigen $\mathfrak{S}^+$-Ideal $\mathfrak{a}$ das Durchschnittsideal $\mathfrak{a} \cap \mathfrak{R}'_\alpha$ durch den zwischen $\mathfrak{R}'_\alpha$ und $\mathfrak{R}_\alpha$ bestehenden Isomorphismus auf die α-Komponente $\mathfrak{i}_\alpha(\mathfrak{a})$ von $\mathfrak{a}$ abgebildet, so daß man ebensogut mit dem Unterideal $\mathfrak{a} \cap \mathfrak{R}'$ von $\mathfrak{S}^+$ wie mit der abstrakten α-Komponente $\mathfrak{i}_\alpha(\mathfrak{a})$ arbeiten kann. *Jedem zweiseitigen $\mathfrak{R}_\alpha$-Primideal $\mathfrak{p}_\alpha \neq \mathfrak{R}_\alpha$ bzw. seinem isomorphen Bild $\mathfrak{p}'_\alpha$ in $\mathfrak{R}'_\alpha$ entspricht umkehrbar eindeutig ein $\mathfrak{S}^+$-Primideal $\mathfrak{p}_{\nu_\alpha}$ mit $\mathfrak{p}_{\nu_\alpha} \cap \mathfrak{R}'_\alpha = \mathfrak{p}'_\alpha$, und zwar besteht $\mathfrak{p}_{\nu_\alpha}$ aus allen und nur den $f(x) \in \mathfrak{S}^+$, bei denen $f(\alpha) \in \mathfrak{p}'_\alpha$. Gibt es außer den $\mathfrak{p}_{\nu_\alpha}$ in $\mathfrak{S}^+$ noch weitere zweiseitige Primideale, so müssen diese sämtlich der Gleichung $\mathfrak{p} \cap \mathfrak{R}'_\alpha = \mathfrak{R}'_\alpha$ für jedes α genügen.*

Die Beweise sind ganz einfach. Man hat nur zu beachten, daß jeder Ring $\mathfrak{R}'_\alpha$ wegen der Existenz des Einheitselementes der Gleichung $\mathfrak{R}'^2_\alpha = \mathfrak{R}'_\alpha$ genügt, während $\mathfrak{R}'_\alpha \cdot \mathfrak{R}'_\beta = (0)$ $(\alpha \neq \beta)$ wird, und darüber hinaus sogar $\mathfrak{R}'_\alpha \cdot \overline{\mathfrak{R}}'_\alpha = (0)$ gilt, falls $\overline{\mathfrak{R}}'_\alpha$ den Ring aller $f(x) \in \mathfrak{S}^+$ mit $f(\alpha) = 0_\alpha$ bedeutet. — Spezialisiert man weiter — entsprechend der Beschränkung auf Körperkomponenten in § 2 und § 3 — die $\mathfrak{R}_\alpha$ zu *einfachen* Ringen, d. h. zu Ringen (mit Einheitselement) ohne von (0_α) verschiedenes echtes zweiseitiges Ideal, so erhält man über die bisherigen Ergebnisse hinaus mühelos die Sätze:

In der speziellen subdirekten Summe $\mathfrak{S}^+$ der einfachen Ringe $\mathfrak{R}_\alpha$ gibt es minimale zweiseitige Ideale (also solche ohne echtes zweiseitiges Unterideal $\neq (0)$, und zwar sind die Ringe $\mathfrak{R}'_\alpha$ die einzigen derartigen Ideale. Jedes zweiseitige $\mathfrak{S}^+$-Ideal enthält mindestens ein minimales. Die einfachen Komponentenringe $\mathfrak{R}_\alpha$ von $\mathfrak{S}^+$ sind durch den Gesamtring $\mathfrak{S}^+$ bis auf Isomorphie eindeutig bestimmt [16]).

Zu jedem α gibt es genau ein zweiseitiges $\mathfrak{S}^+$-Primideal $\mathfrak{p}_{0_\alpha}$ mit $\mathfrak{p}_{0_\alpha} \cap \mathfrak{R}'_\alpha \neq \mathfrak{R}'_\alpha$, nämlich das Ideal aller der $f(x) \in \mathfrak{S}^+$ mit $f(\alpha) = 0_\alpha$. Die $\mathfrak{p}_{0_\alpha}$ sind maximale zweiseitige Nullteilerideale in $\mathfrak{S}^+$, und zwar die einzigen. D. h.: zu jedem $\mathfrak{p}_{0_\alpha}$ gibt es ein zweiseitiges Ideal $\mathfrak{a} \neq (0)$ in $\mathfrak{S}^+$ mit $\mathfrak{p}_{0_\alpha} \cdot \mathfrak{a} = (0)$, während kein echtes zweiseitiges Oberideal von $\mathfrak{p}_{0_\alpha}$ die gleiche Eigenschaft besitzt; ferner ist jedes zweiseitige $\mathfrak{q}$, zu dem ein $\mathfrak{a} \neq (0)$ mit $\mathfrak{q} \cdot \mathfrak{a} = (0)$ existiert, in mindestens einem $\mathfrak{p}_{0_\alpha}$ enthalten.

Vergleicht man die für eine spezielle subdirekte Summe mit allgemeinen bzw. einfachen Komponenten $\mathfrak{R}_\alpha$ geltenden Primidealsätze mit den Ergebnissen von § 4, stellt man ferner den für die einfachen

[16]) Die Unterringe $\mathfrak{R}'_\alpha$ von $\mathfrak{S}^+$, die den $\mathfrak{R}_\alpha$ in $\mathfrak{S}^+$ entsprechen, sind sogar absolut eindeutig festgelegt.

Komponenten einer subdirekten Summe gültigen Eindeutigkeitssatz den negativen Resultaten von § 3 gegenüber — (wobei noch zu berücksichtigen ist, daß die in § 3 allein als Komponenten zugelassenen Körper einfache Ringe primitivster Art sind) — so sieht man klar: Die speziellen subdirekten Summen stehen den direkten Summen sehr nahe, wenn auch wesentliche Unterschiede nicht vernachlässigt werden dürfen, die sich z. B. bei unsern Betrachtungen in der Möglichkeit des Auftretens von Primidealen $\mathfrak{p} \neq \mathfrak{S}^+$ mit $\mathfrak{p} \cap \mathfrak{R}'_\alpha = \mathfrak{R}'_\alpha$ für alle α zeigen. — Bei den allgemeinen subdirekten Summen dagegen gehen die Analogien zu den direkten Summen völlig verloren.

§ 6.

Schlußfolgerungen.

Die negativen Ergebnisse von § 3 und § 4 müssen sorgfältig berücksichtigt werden, wenn man die notwendigen und hinreichenden Darstellungskriterien, die in der systematischen Theorie der subdirekten Zerlegung in gewissem Sinne im Mittelpunkt stehen, richtig würdigen will. Als Beispiel möge etwa der fundamentale Satz betrachtet werden:

Ein beliebiger Ring $\mathfrak{R}$ *ist dann und nur dann als subdirekte Summe dichter Ringe darstellbar, wenn sein Radikal* (im Sinne der allgemeinen neuerdings von Jacobsen aufgestellten Definition) *gleich dem Nullideal wird* [17]).

Hier ist einerseits zu beachten, daß der Begriff „dichter Ring" eine glückliche Verallgemeinerung des Begriffs „voller Matrizenring endlichen Grades über einem Schiefkörper" darstellt, andererseits ist zu berücksichtigen, daß das Radikal Jacobsens nach Chevalley eine sehr anschauliche Deutung gestattet [18]): Es ist das zweiseitige Ideal aller der Elemente a des gegebenen Ringes $\mathfrak{R}$, die bei jedem einfachen $\mathfrak{R}$-Rechtsmodul $\mathfrak{M}$ der Bedingung $\mathfrak{M} \cdot a = 0$ genügen. — Das betrachtete Fundamentaltheorem besagt also unter Berücksichtigung von Satz 2:

In jedem Ring $\mathfrak{R}$ *ist der Durchschnitt aller der Ideale* $\mathfrak{m}$, *für die* $\mathfrak{R}/\mathfrak{m}$ *ein dichter Ring wird, gleich dem Radikal im Sinne Jacobsens.*

D. h. das Fundamentaltheorem vermittelt eine wesentliche Erkenntnis, weil es zwei unabhängig voneinander in einfacher und plausibler

---

[17]) Vgl. Mc Coy, Theorem 8, sowie die Originalarbeiten von Jacobson: Structure theorie of simple rings without finiteness assumptions, Trans. Amer. Math. Soc. **57** (1945), S. 228—245. (Definition des dichten Ringes, auf die im Text nicht näher eingegangen werden kann.) — The radical and semi-simplicity for arbitrary rings, Amer. J. Math. **67** (1945), S. 300—320. (Formulierung und Beweis des Haupttheorems.)

[18]) Vgl. O. Goldmann, A characterization of semi-simple rings with descending chain condition, Bull. Amer. Math. Soc. **52** (1946), S. 1021—1027.

Weise definierte Begriffe in Beziehung setzt[19]). Auf der anderen Seite muß man sich hüten, aus der formalen Analogie mit dem Artin-Wedderburnschen Satz, nach dem jedes hyperkomplexe System, bei dem das Radikal im üblichen Sinne des Wortes verschwindet, halbeinfach sein muß, falsche Folgerungen zu ziehen. Aus dem Satz von Artin-Wedderburn ergibt sich sofort, daß man alle hyperkomplexen Systeme mit verschwindendem Radikal beherrscht, sofern man nur die Struktur der einfachen Systeme völlig übersieht. Um einzusehen, daß aus unserem Fundamentaltheorem in keiner Weise eine ähnliche Aussage abgeleitet werden kann, braucht man nur zu beachten, daß für kommutative Ringe mit Einheitselement das Fundamentaltheorem mit Satz 3 zusammenfällt, und dann sich der Ergebnisse von § 3 und § 4 zu erinnern. — Hier muß nun entschieden die Frage aufgeworfen werden, ob nicht die Bezeichnung „subdirekte Summe" als unglücklich gewählt anzusehen ist, weil sie den nicht voll mit dem Stoffe Vertrauten allzuleicht zu falschen Analogien verführt. Verstärkt werden diese Bedenken durch die Ergebnisse von § 5, wo sich zeigte, daß die „speziellen" subdirekten Summen — ganz im Gegensatz zu den allgemeinen — sehr eng mit den direkten Summen zusammengehören, so daß das Wort „subdirekt" auch mit einem Zusatz für sie im Grunde nicht richtig paßt. Es wäre daher — bei aller Anerkennung der Bedenken gegen eine Änderung einer einmal angenommenen Terminologie — zu erwägen, ob es nicht zweckmäßig ist, die Bezeichnung „subdirekte Summe" überhaupt aufzugeben[20]). Nur müßte man dann folgerichtig sein und — soweit nicht ausschließlich von endlichen oder unendlichen direkten Summen $\mathfrak{S}^*$ im Sinne von § 1 die Rede ist — das Wort „Summe" völlig vermeiden. Das wäre nicht schwierig, da die Art wie die subdirekten Summen in § 1 eingeführt wurden, ohnehin den Gedanken nahelegt, von *Funktionenringen auf einer gegebenen Ringmenge* $M_{\mathfrak{R}}$ zu sprechen. Man käme so zwanglos etwa zu der folgenden Terminologie:

Funktionenring auf $M_{\mathfrak{R}}$	— beliebiger Unterring der direkten Summe $\mathfrak{S}^*$ aller $\mathfrak{R}_\alpha \in M_{\mathfrak{R}}$
vollwertiger Funktionenring auf $M_{\mathfrak{R}}$	— subdirekte Summe der $\mathfrak{R}_\alpha$

[19]) Im übrigen wirft die Einführung des Jacobsonschen Radikalbegriffs auch auf die Theorie der kommutativen Integritätsbereiche in mancher Hinsicht neues Licht. Zu denken ist da vor allem an das Problem, welche Ideale in einem gegebenen Integritätsbereich als Durchschnitte von (i. a. unendlich vielen) maximalen Primidealen dargestellt werden können. (Verallgemeinerung des „Hilbertschen Nullstellensatzes".)

[20]) Dabei ist noch zu berücksichtigen, daß man zum mindesten bei den speziellen subdirekten Summen zur Zeit noch keineswegs von einer allgemein angenommenen, einheitlichen Terminologie reden kann, vgl. [4]) und [15]).

fast vollständiger Funktionenring auf $M_{\mathfrak{R}}$ — spezielle subdirekte Summe $\mathfrak{S}^+$ der $\mathfrak{R}_\alpha$

vollständiger Funktionenring auf $M_{\mathfrak{R}}$ — direkte Summe $\mathfrak{S}^*$ der $\mathfrak{R}_\alpha$.

Dabei würden die Worte „vollwertig" bzw. „fast vollständig" darauf hinweisen, daß bei einer subdirekten Summe an jeder einzelnen Stelle α der durch den Ring $\mathfrak{R}_\alpha$ gelieferte Wertevorrat voll zur Verwendung kommt bzw. darauf, daß eine spezielle subdirekte Summe alle fast überall verschwindenden Funktionen enthält. Natürlich könnten diese Zusätze eventuell durch andere, möglicherweise die Sache noch besser treffende ersetzt werden. Aber der Grundgedanke, von der Summen- zur Funktionenring-Terminologie überzugehen, sei hier nachdrücklich zur Diskussion gestellt, nicht aus Pedanterie, sondern weil auf diese Weise das Wesen der benutzten Begriffe klarer als bisher zum Ausdruck gebracht und sonst naheliegende Mißverständnisse vermieden werden könnten.

(Eingegangen am 30. Dezember 1949.)

Sulle molteplicità d'intersezione delle varietà algebriche ed analitiche e sopra una teoria geometrica dell'eliminazione.

Herrn Oskar Perron zum 70. Geburtstag gewidmet.

Memoria di Francesco Severi in Roma.

Introduzione.

Il concetto di molteplicità d'intersezione, sul quale son tornato varie volte dal 1933, onde precisarne il valore costruttivo e critico e conferirgli la maggiore estensione, è fondamentale nella geometria algebrica [1]).

Esso costituisce uno degli scopi principali d'una recente opera di A. Weil [2]).

Il problema più importante, da cui posson farsi derivare le soluzioni di tutti gli altri congeneri, è quello dell'intersezione di due varietà algebriche (irriducibili) W_h, V_k tracciate sopra una varietà algebrica irriducibile M_r, essendo $h + k \geqq r$.

I miei scopi sono ora:

a) Di collegare la definizione di Weil alla mia e di mostrare come quella discenda da questa.

b) Di stabilire il carattere intrinseco e invariante per trasformazioni pseudoconformi (e quindi per trasformazioni birazionali senza eccezioni) della mia definizione; mentre quella di Weil ha carattere proiettivo e non intrinseco.

Alla definizione di Weil si può però dare facilmente un contenuto invariante, benché non intrinseco (n. 9). Comunque, ponendo in rilievo

---

[1]) Ved. le citazioni più aggiornate in proposito nell'ultima mia Memoria sull'argomento: Il concetto generale di molteplicità delle soluzioni pei sistemi di equazioni algebriche e la teoria dell'eliminazione (Annali di Matematica, vol. 26, pagg. 221—270; 1947). Vedi pure le mie lezioni (litografate) tenute a Roma nel 1947—48 e 1948—49: Introduzione alla geometria algebrica: geometria numerativa (Roma, Edizioni Universitarie Docet, 1948—49). L'ultima parte di queste lezioni, da tenersi nel 1949—50, sarà ulteriormente pubblicata.

[2]) Foundation of algebraic geometry (American Math. Society. Colloquium publications, New York, 1946). L'Autore stesso dichiara che "the main purpose of the book is to present a detailed and connected treatment of the properties of intersection-multiplicities, which is to include all that is necessary and sufficient to legitimize the use made of these multiplicities in classical algebraic geometry, especially of the Italian school." Vedi pure la recensione chiara e sintetica che del libro di Weil ha fatto van der Waerden (Nieuw Archiv voor Wiskunde, 1949).

queste caratteristiche di tale definizione, non si vuole sminuirne l'importanza e l'eleganza.

La definizione dell'A. è *dinamica*; quella di Weil ha il pregio di essere in gran parte *statica*[3]). Inoltre essa offre il vantaggio di ricondurre la molteplicità d'intersezione di due varietà qualunque al più semplice concetto di molteplicità d'intersezione d'una varietà con uno spazio lineare.

c) Di esporre un cenno di estensione della teoria alle varietà analitiche, per le quali le conclusioni sostanziali del campo algebrico permangono immutate[4]).

d) D'indicare una nuova semplicissima dimostrazione del teorema di Bézout inerente ad r equazioni algebriche in r variabili, col preciso complemento inerente alla molteplicità d'intersezione delle soluzioni isolate.

Questa dimostrazione è essenzialmente geometrica e non ricorre nè a concetti nè ad operazioni di eliminazione[5]).

e) D'indicare una nuova via molto rapida e geometrica onde pervenire al risultante di $r+1$ forme di $r+1$ variabili e all'u-risultante di r forme, senza alcun appoggio alle classiche teorie dell'eliminazione[6]).

In relazione all'u-risultante dimostro l'esistenza anche di risultanti limiti, cui è necessario ricorrere quando vi sono infiniti punti comuni ad r forme di S_r, epperò l'u-risultante formale svanisce identicamente;

---

[3]) Ma può divenire del tutto dinamica attraverso il concetto di specializzazione (van der Waerden, Weil).

[4]) Il dott. P. Samuel, che ho incontrato nel Convegno matematico di Liegi (dicembre 1949), dopo che il presente lavoro era preparato, mi ha informato dell'esistenza di un lavoro di Chevalley (Intersections of algebraic and algebroid varieties, Trans. Amer. Math. Soc. t. 57, 1945, pp. 1—85) che non ho ora nè il modo nè il tempo di consultare. Probabilmente le osservazioni del n. 10 della presente Memoria verranno assorbite dalla ricerca di Chevalley; ma i punti di vista sono di certo diversi. D'altronde le mie considerazioni sono estremamente semplici.

[5]) Va osservato pure che il cosidetto „teorema di Bézout per due varietà di dimensioni complementari V_k, W_{r-k} di S_r", fu da me dimostrato nel 1933 indipendentemente dall'eliminazione (col solo ausilio del principio di corrispondenza di Chasles completato con la regola di Zeuthen). Da questo teorema deducesi, quale corollario, quello che concerne l'intersezione di più varietà di dimensioni $k_1, k_2, \ldots, k_t$ di S_r, con $\sum k_i \geq (t-1)r$ (qualora esse si taglino in una varietà di dimensione normale). Per $t = r$, $k_1 = k_2 = \cdots = k_t = r-1$ ne deriva il teorema di Bézout per r forme di S_r, che si taglino in un numero finito di punti. Tale teorema risulta così anche per questa via svincolato dall'eliminazione. Ma la dimostrazione esposta nella presente Memoria è molto più semplice ed elementare.

[6]) Pertanto anche per la via qui indicata viene cancellata dalla geometria algebrica ogni traccia di sviluppi inerenti alle teorie dell'eliminazione, anche se, sotto certi riflessi, convenga conservare una parte del linguaggio. Questo è uno scopo altrimenti realizzato da Chevalley e da Weil (ved. l'opera citata di A. Weil, pag. 31).

ciò che avevo altrove fatto (1947) pel risultante di KRONECKER (dimostrando che con ciò si eliminano le circostanze paradossali a cui talvolta dà luogo l'applicazione di questo risultante). Dai risultanti limiti deducesi poi quello che chiamo *risultante ridotto*, che serve a determinare (con le loro molteplicità) le eventuali intersezioni *isolate* e *pseudisolate:* queste ultime provenienti da soluzioni comuni a tutti i risultanti limiti, al pari delle intersezioni isolate.

In ultimo la considerazione dell'u-risultante e del risultante ridotto dà luogo a risultanti ridotti di varie dimensioni, che definiscono la molteplicità d'intersezione delle componenti delle varie dimensioni di una varietà algebrica anche impura, definita per interferenza [7]) da un sistema qualunque di equazioni algebriche; e ciò d'accordo col concetto di tali molteplicità introdotto nella mia Memoria citata del 1947.

La definizione dell'Autore.

1. Richiamo in primo luogo la definizione del 1933 [8]). Cominciamo dal caso in cui $h + k = r$ e le V_k, W_{r-k} hanno un'intersezione isolata nel punto *semplice* P di M_r. Si dice che P è *intersezione semplice* delle V, W o che in P le V, W hanno *molteplicità d'intersezione* **1**, s'esse passano per P semplicemente senza tangenti comuni.

Suppongasi ora che P sia un'interferenza qualunque isolata delle V, W e che una delle due varietà, sia p. es. V_k, possa variare entro M_r in un sistema algebrico irriducibile Σ, in guisa che la generica $\overline{V}_k$ dell'intorno di V_k in Σ non passi per P e incontri W_{r-k} soltanto in intersezioni semplici. Il numero $i(\geqq 1)$ di queste intersezioni resta invariato finché son soddisfatte le ipotesi (intersezioni tutte semplici distinte da P). Esso definiscesi quale *molteplicità d'intersezione* delle V_k, W_{r-k} in P. Per $\overline{V}_k \to V_k$ gli i punti tendono a riunirsi in P: donde la ragione della denominazione, che dunque rispecchia bene il fatto geometrico.

Il numero i resta il medesimo se, essendo variabile W, si mutano le veci delle due varietà e se, essendo variabili entrambe, si fa subire a ciascuna delle due un piccolo spostamento generico nel rispettivo intorno entro il sistema irriducibile in cui essa è variabile sopra M_r. In quest'ultimo caso le due varietà spostate hanno nell'intorno di P esattamente i intersezioni semplici.

Perché la definizione abbia valore generale, occorre considerare inoltre il caso in cui ciascuna delle due varietà non può variare entro

[7]) Nella Memoria del 1947 ho stimato opportuno di riserbare il nome d'interferenza all'insieme dei punti comuni a due varietà, quando i punti stessi si considerino a prescindere dalla molteplicità d'intersezione.

[8]) Über die Grundlagen der algebraischen Geometrie (Abhandl. aus dem Math. Seminar der Hamburgischen Universität. S. 335–364; 1933).

M_r (caso concretamente possibile). Si dimostra allora che si può scegliere (in infiniti modi) sopra M_r una varietà pura V'_k *non passante per* P (questo è l'essenziale, di cui anche VAN DER WAERDEN profitta nella sua teoria) tale che la $H = V + V'$ appartenga sopra M_r ad un sistema irriducibile Σ, la cui generica $\overline{H}$, dell'intorno di H, incontri W soltanto in un certo numero i d'intersezioni semplici. Il numero i è indipendente, sotto le ipotesi espresse, dalla scelta delle V', $\overline{H}$ e, se V è variabile in un sistema irriducibile, i uguaglia il numero che si ottiene, in questo caso, come sopra si è detto. Mutando le veci delle V, W l'intero i non cangia. Esso è invariante per trasformazioni analitiche biregolari. Condizione necessaria e sufficiente perché le V, W si incontrino semplicemente in P, è che $i = 1$.

Quando $h + k > r$ e S_d è lo spazio ambiente di M_r, la molteplicità d'intersezione delle V, W si definisce in relazione al punto generico P di una componente irriducibile C, di dimensione normale $l = h + k - r$, dell'interferenza delle V, W[9]); e ci si riduce al caso precedente segando tutto con un S_{d-l} generico passante per P. La *molteplicità d'intersezione di* V, W *lungo* C è data dalla molteplicità d'intersezione in P delle sezioni di V, W col predetto S_{d-l} generico[10]).

La definizione di Weil.

2. Ecco ora la definizione di WEIL[11]).

Conservate le notazioni e le ipotesi precedenti, vogliamo definire la molteplicità d'intersezione delle V, W lungo C ($h + k - r \geqq 0$). All'uopo si consideri il prodotto $V \times W$ costituito dalle coppie X, X', essendo il punto X variabile su V ed il punto X' su W. Sia: P un punto generico di C; $F_j(X - P) = 0$ ($j = 1, \ldots, r$) un sistema di r equazioni lineari, aventi una sola soluzione sullo spazio tangente in P ad M_r.

Lo spazio lineare $F_j(X - X') = 0$ ($j = 1, \ldots, r$) contiene la *varietà diagonale* inerente a C, cioè l'insieme delle coppie X, X' per cui X, mobile su C, coincide con X'.

---

[9]) Se P appartiene ad una componente di dimensione anormale, la molteplicità di questa fra le componenti dell'interferenza di V, W si valuta com'è spiegato nella mia Memoria del 1933 (ved. il successivo n. 23).

[10]) L'esser generico P sulla C, che si suppone non sia luogo di punti multipli di M_r, significa 1) che P è semplice per M_r; 2) che fra le coppie incidenti (P, S_{d-l}) quelle per cui la molteplicità d'intersezione in P delle sezioni di V, W con S_{d-l} è maggiore del minimo valore che questa molteplicità può conseguire al variare di P su C, costituiscono una varietà algebrica subordinata entro la varietà irriducibile di tutte le coppie (P, S_{d-l}) (P variabile su C e S_{d-l} passante per P).

[11]) Foundation, etc.; Cap. VI, pag. 142.

La molteplicità d'intersezione della varietà diagonale nella complessiva intersezione di $V \times W$ con lo spazio lineare $F_j(X - X') = 0$ è, per definizione, la molteplicità d'intersezione di C, quale componente dell'intersezione di V, W in M_r.

Questa è indubbiamente una definizione elegante e semplice, la quale (come si è già detto) riduce il concetto di molteplicità d'intersezione di V, W lungo C al concetto di molteplicità d'intersezione d'una varietà con uno spazio lineare; il qual concetto s'intende stabilito coi mezzi elementari noti. Naturalmente la definizione esposta in tanto è legittima, in quanto si provi, come l'Autore citato fa, che il numero definito è indipendente dagli elementi arbitrari, che compaiono nella definizione; che nel caso della molteplicità d'intersezione 1 si ricade nella definizione usuale; ecc.

Ci renderemo ora conto del valore geometrico della definizione di Weil e, constateremo così ch'essa può farsi derivare senza difficoltà dalla nostra ed anzi che equivale a proprietà considerate da tempo nell'indirizzo che ci è consueto (n. 5, Oss. 2^a).

Rapporti fra le due definizioni.

3. Anzitutto potremo abbreviare l'esposizione riferendoci al caso $h + k = r$, perché anche qui il caso $h + k > r$ può ridursi a questo per sezione con un conveniente spazio lineare.

Le V_k, W_{r-k} hanno dunque nel punto semplice P di M_r un'intersezione isolata.

Fisseremo l'attenzione sulla varietà di Corrado Segre $T = S_d \times S'_d$, dello spazio S_ϱ [$\varrho = d(d+2)$] prodotto dello spazio ambiente S_d di M_r, percorso dal punto X, con lo spazio medesimo S'_d percorso dal punto X'; e indicheremo rispettivamente con Y, Z i prodotti $M_r \times M'_r$, $V \times W$ tracciati su T, ove V è percorso da X e W da X'; e con U, U_0 le varietà diagonali di T, Y.

Le varietà T, U son prive di punti multipli in S_ϱ e le Y, U_0 possiedono in $P \times P$ un punto semplice.

In primo luogo supponiamo che le V, W s'incontrino semplicemente in P; e, se P non è al finito, portiamolo al finito con una trasformazione omografica, onde usare più comodamente coordinate non omogenee. La trasformazione, essendo dovunque biregolare, non altera la proprietà da considerarsi.

La rappresentazione parametrica nello S_ϱ delle coordinate omogenee ξ del punto $X \times X'$ mobile su T, s'imaginerà ottenuta alla maniera di C. Segre, mediante i prodotti a due a due delle coordinate omogenee $x_1, x_2, \ldots, x_d, 1$; $x'_1, x'_2, \ldots, x'_d, 1$ dei punti X, X'. Vi saranno così, fra le $(d+1)^2$ coordinate ξ, d uguali alle x ed altrettante uguali alle x', le chiameremo coordinate $\bar{\xi}$, $\bar{\xi}'$.

Lo spazio lineare $F_j(X-P)=0$, considerato da Weil, potrà rappresentarsi in S_d con r equazioni lineari (omogenee nelle differenze $x-p$, fra le coordinate omonime di X, P) del tipo:

$$\bar{F}_j(x-p)=0 \qquad (j=1,2,\ldots,r).$$

E lo spazio lineare $\bar{F}_j(X-X')=0$ potrà rappresentarsi nello spazio S_ϱ con equazioni del tipo:

$$\bar{F}_j(x-x')=0 \qquad (j=1,2,\ldots,r)$$

lineari omogenee nelle differenze $x-x'$.

La falda lineare di M_r avente l'origine in P è rappresentata in S_d da un sistema di $d-r$ equazioni olomorfe:

$$\Theta_m(x)=0 \qquad (m=1,2,\ldots,d-r),$$

le $\Theta_m(x)=0$ essendo singolarmente falde *lineari* a $d-1$ dimensioni di S_ϱ, aventi l'origine P e funzionalmente indipendenti attorno a P [12]).

Similmente sieno:

$$\Theta_m(x)=0,\ \varphi_{m_1}(x)=0 \qquad (m=1,\ldots,d-r;\ m_1=1,\ldots,r-k)$$

$$\Theta_m(x)=0,\ \psi_{m_2}(x)=0 \qquad (m=1,\ldots,d-r;\ m_2=1,\ldots,k)$$

i sistemi di equazioni olomorfe rispettivamente rappresentativi delle falde lineari di V, W aventi l'origine P, ove le d equazioni

(1) $\quad \Theta_m=0,\ \varphi_{m_1}=0,\ \psi_{m_2}=0$ (le m, m_1, m_2 variando come sopra)

son funzionalmente indipendenti nell'intorno di P.

Le $2d-r$ equazioni

(2) $$\Theta_m(x)=0,\ \Theta_m(x')=0,\ \varphi_{m_1}(x)=0,\ \psi_{m_2}(x')=0$$

rappresentano in T la falda con cui Z passa per $P\times P$ [13]). Si riconosce subito che anche questa falda è lineare, perché le singole falde lineari (2) di origine $P\times P$ sono, nell'intorno dell'origine, funzionalmente indipendenti. Da ciò una prima conseguenza:

a) *Se le V, W s'incontrano semplicemente nel punto semplice P di M_r, il lôro prodotto $Z=V\times W$ sopra $Y=M_r\times M'_r$ passa per $P\times P$ con una falda lineare.*

Si osservi inoltre che nelle (2) figurano soltanto le coordinate $\bar{\xi}$, $\bar{\xi}'$ del punto mobile $X\times X'$ e che le (2) per $X=X'$ riduconsi alle d

[12]) Ved. le mie Vorlesungen über algebraische Geometrie (Leipzig, Teubner, 1921; pag. 309). Ved. altresì per più ampie considerazioni sulle falde analitiche ed in particolare lineari, la mia Memoria, Sul teorema fondamentale dei sistemi continui di curve sopra una superficie algebrica (Annali di Matematica, t. 43, 1944,; pag. 159).

[13]) Per ottenere la rappresentazione di detta falda in S_ϱ occorrerebbe aggiungere le equazioni (quadratiche) di T in S_ϱ.

equazioni (1), le quali interpretate in Y, hanno sulla U_0 una sola soluzione semplice in $P \times P$, perché nell'intorno di $P \times P$ esse son funzionalmente indipendenti. Ne deriva che:

b) *Nell'ipotesi precedente, la varietà diagonale U_0 del prodotto $Y = M_r \times M'_r$ ha in $P \times P$ una intersezione semplice con* Z.

4. Sia infine P un'intersezione isolata qualunque, anche non semplice, delle V, W e V sia mobile nel sistema Σ, come al n. 1. La generica $\overline{V}$ dell'intorno di V in Σ incontra allora semplicemente W, attorno a P, in i punti ed il prodotto $\overline{Z} = \overline{V} \times W$ possiede nell'intorno di $P \times P$ altrettanti punti semplici, imagini delle predette intersezioni. In ciascuno di questi $\overline{Z}$ taglia semplicemente U_0, in virtù di b).

Se $\overline{V} \to V$, la $\overline{Z}$ tende a Z e le i intersezioni semplici di $\overline{Z}$, U_0 attorno a $P \times P$ tendono al punto $P \times P$, per cui U_0 passa (semplicemente).

Se nè V nè W son variabili in M_r, si applicherà alle V, W, e in conseguenza alle Z, U_0, il procedimento indicato alla fine del n. 1 e si concluderà similmente che le molteplicità d'intersezione di V, W in P e di $V \times W$, U_0 in $P \times P$ son uguali. Pertanto:

c) *Tenuta ferma la definizione di molteplicità d'intersezione data dall'Autore nel 1933, le molteplicità d'intersezione di V, W in una loro intersezione isolata P (semplice per M_r) e del prodotto $V \times W$ con la varietà diagonale U_0 di $M_r \times M'_r$ nel punto $P \times P$ (semplice per $M_r \times M'_r$) sono uguali.*

Uguaglianza delle molteplicità desunte dalle due definizioni.

5. Un piccolo passo ancora ci conduce a provare che il numero i, secondo l'antica accezione, è identico a quello definito secondo Weil.

Invero in S_ϱ lo spazio $S_{\varrho-r}$, diciamolo α, di equazioni $\overline{F}_j(x - x') = 0$ $(j = 1, \ldots, r)$ considerato con Weil nel n. 2, in relazione ad uno spazio S_{d-r} di S_d, di equazioni $\overline{F}_j(x - p) = 0$, passante pel punto P di coordinate non omogenee p, e indipendente dallo S_r tangente in P ad M_r, incontra *semplicemente* in $P \times P$, entro S_ϱ, la varietà $M_r \times P$.

Quest'affermazione si dimostra così. La falda lineare di Y, di origine $P \times P$, è rappresentata in T dalle equazioni $\Theta_m(x) = 0$, $\Theta_m(x') = 0$ e dentro T, la falda lineare con cui $M_r \times P$ passa per $P \times P$, è data da $x_n = p'_n$ $(n = 1, \ldots, d)$, $\Theta_m(x) = 0$ $(m = 1, \ldots, d - r)$, ove le p' $(= p)$ son le coordinate non omogenee di P. Le $2d$ equazioni $x_n = p'_n$, $\Theta_m(x) = 0$, $\overline{F}_j(x - x') = 0$ rappresentano dunque l'interferenza di $M_r \times P$ con α, nell'intorno di $P \times P$; e quest'interferenza consta del solo punto $P \times P$, contato semplicemente, perché le falde lineari rappresentate da quelle equazioni son funzionalmente indipendenti attorno a P.

Si aggiunga che l'interferenza di α con Y consta intanto della varietà U_0 per cui α passa; e nell'intorno di $P \times P$ quest'interferenza

riducesi soltanto alla falda lineare di U_0 per $P \times P$, perché U_0 sega *ogni* $M_r \times X'$, e quindi anche $M_r \times P$, in una sola intersezione semplice, che per $M_r \times P$ è appunto $P \times P$; e α sega $M_r \times P$ alla stessa guisa; sicché l'ulteriore intersezione di α con Y *non passa per* $P \times P$. In conclusione:

d) *La molteplicità d'intersezione di* $V \times W$ *con la varietà diagonale* U_0 *in* $P \times P$, *entro* Y, *uguaglia la molteplicità d'intersezione ivi di* $W \times W$ *con uno spazio lineare generico* $S_{\varrho-r}$ *passante per* U_0, *entro lo spazio ambiente* S_ϱ.

Così resta dimostrato che la nostra definizione di molteplicità d'intersezione equivale a quella di Weil.

Osservazione 1ª. In realtà nella definizione di Weil invece di un $S_{\varrho-r}$ generico passante per U_0, figura lo $S_{\varrho-r}$ particolare α. Ma è ovvio che, se fra gli $S_{\varrho-r}$ per U_0 ve n'è uno, α, che incontra Y in U_0 e ulteriormente in una varietà *non passante* per $P \times P$, le stesso accade per lo $S_{\varrho-r}$ generico contenente U_0; potendo avvenire soltanto che l'ulteriore intersezione passi per $P \times P$ in corrispondenza agli $S_{\varrho-r}$ di una varietà subordinata nel sistema lineare degli $S_{\varrho-r}$ contenenti U_0[14]).

Osservazione 2ª. Che la molteplicità d'intersezione di V_k, W_{r-k} in P debba esser uguale alla molteplicità d'intersezione di $V \times W$ con U_0 in $P \times P$, poteva prevedersi a priori, in quanto, se le V, W si segano in un numero finito di punti (semplici per M) e son variabili in sistemi algebrici infiniti — e a questo caso, con piccoli spostamenti di V, W, o con l'artificio di cui alla fine del n. 1, ci si può sempre ridurre — il numero delle loro intersezioni (semplici per le V, W generiche entro i loro sistemi) si conserva immutato al variare delle V, W. D'altronde tale numero è uguale a quello delle coincidenze della corrispondenza ∞^r costituita su M_r dalle coppie X, X' con X su V e X' su W; cioè al numero delle intersezioni (semplici) di $V \times W$ con U_0[15]).

---

[14]) Si può aggiungere che la varietà diagonale U di T (e quindi la U_0 di Y) appartiene entro S_ϱ ad uno spazio lineare S_τ di dimensione $\tau = \varrho - \binom{d+1}{2}$. Invero, ogni iperpiano di S_ϱ rappresentato dall'annullarsi di una forma bilineare nelle coordinate omogenee dei punti X, X' di M_r, M'_r, la quale svanisca identicamente per $X = X'$ (come accade appunto per l'iperpiano α), passa per U. Ora ogni forma del tipo indicato è combinazione lineare dei determinanti di secondo ordine estratti dalla matrice delle coordinate omogenee di X, X'; epperò le forme siffatte sono $\binom{d+1}{2}$ linearmente indipendenti. L'interferenza di S_τ con Y, in quanto è luogo dei punti di Y dove è nulla la precedente matrice, coincide con U.

[15]) Questo concetto è già realizzato per le corrispondenze sopra una curva nel mio Trattato di geometria algebrica (Bologna, Zanichelli, vol. P, parte I, 1926).

Per arrivare alla definizione di Weil secondo la via accennata, che rientra nel quadro delle considerazioni a noi familiari, basta stabilire soltanto la proprietà *d*), la quale, come si è visto, si consegue facilmente.

Limiti d'invarianza delle due definizioni.

6. Proviamo ora che *la nostra definizione ha carattere intrinseco e invariante per trasformazioni pseudoconformi*[16]) *(in particolare birazionali senza eccezioni).*

Riferiamoci prima a due varietà di dimensioni complementari nell'ambiente M_r.

Intanto nella definizione di cui si parla intervengono soltanto elementi interni ad M_r (anche se i mezzi con cui essa si consegue, allo stato della teoria, sono estrinseci). Si è cercato di soddisfare a tale requisito, in vista delle applicazioni alla geometria *sopra* M_r, la quale, almeno nelle formulazioni conclusive, richiede concetti intrinseci[17]).

In verità nella definizione del 1933 c'è un residuo in apparenza estrinseco (perché relativo all'ambiente proiettivo di M_r) là dove la valutazione della molteplicità d'intersezione si riduce al computo di certe intersezioni „semplici", che sono proiettivamente definite. Ma è facile passare anche qui ad una nozione intrinseca.

Si consideri una trasformazione pseudoconforme T tra gl'intorni di due punti semplici P, P' di due varietà algebriche M_r, M'_r. L'ipotesi che i punti sieno semplici è essenziale, almeno in una certa misura, che sarà in seguito specificata.

Una falda lineare φ, ∞^k, di origine P, sopra M_r, è proiettivamente definita dalla condizione di essere del 1° ordine (ossia intersecata attorno a P in un sol punto da un S_{d-k} dell'ambiente S_d di M_r prossimo ad un S_{d-k} uscente da P, indipendente dallo S_r tangente ivi a M_r) od anche dalla condizione (equivalente) di esser rappresentabile in S_d con un sistema di $d-k$ equazioni olomorfe e funzionalmente indipendenti attorno a P. Ma, a malgrado di questo suo carattere

[16]) Così ho denominato da tempo — e la denominazione è stata adottata da E. CARTAN e dalla sua scuola — le trasformationi analitiche biregolaii. Non sto qui a ripeter la ragione della denominazione.

[17]) Se si astrae da questo scopo, basta la nozione introdotta nella prima parte della Memoria del 1933 relativa alla molteplicità d'intersezione entro un ambiente lineare. E ciò perché la definizione sopra una qualunque M_r, nell'intorno di un suo punto semplice P, ne deriva per proiezione dell'intorno di P da un S_{d-r-1} generico, sopra l'intorno di un punto di un S_r (proiezione biregolare), in quanto il numero definito riesce indipendente dagli elementi arbitrari della proiezione. Invece nella Memoria del 1933 si reputò necessario una definizione intrinseca, che aderisse meglio al significato geometrico infinitesimale del fatto da esprimere.

proiettivo, φ si muta, mediante T, in una falda *lineare* φ', ∞^k, di origine P', tracciata su M'_r. In sintesi si potrebbe dire che la linearità della falda impegna soltanto l'intorno di 1° ordine e le trasformazioni pseudoconformi, che mutino un punto semplice in un punto semplice, non alterano la linearità degli intorni di 1° ordine, in quanto inducono tra essi un'omografia.

Proviamo dunque che la falda φ', omologa di φ nella T, è lineare. Basta all'uopo tener conto che scelta una parametrizzazione assolutamente regolare[18]) della falda lineare Φ, ∞^r, con cui M_r passa per P (ottenuta per esempio con la proiezione di Φ sopra un S_r da un S_{d-r-1} sghembo con lo S_r tangente in P a Φ) φ viene ad esser rappresentata da un sistema di $r-k$ equazioni negli r parametri, olomorfe e funzionalmente indipendenti in P; e che tali caratteristiche delle equazioni non mutano con la trasformazione pseudoconforme T.

Stabilita *l'invarianza della linearità delle falde di origine P in una trasformazione pseudoconforme, che conservi la linearità della falda ambiente*, a cagione dell'omografia indotta da T fra le stelle tangenti in P, P' a M_r, M'_r, spazi tangenti indipendenti si mutano in spazi tangenti indipendenti, epperò un'intersezione semplice in P di due falde lineari di dimensioni complementari e di origine P, ha carattere invariante. E si noti che, pel teorema d'esistenza delle funzioni analitiche implicite, viene conservata anche, per una coppia di falde lineari di dimensioni complementari tracciate nell'intorno di M_r, la definizione infinitesimale dell'intersezione semplice.

A questo punto è da osservarsi che *la linearità della falda ambiente non è strettamente necessaria pel tipo di conclusioni che si vogliono trarre. Ci si può cioè riferire anche ad una falda di M_r avente l'origine in un punto multiplo P di M_r*, purché la falda (varietà analitica o caratteristica, secondo la denomicazione di Levi-Civita, irriducibile in piccolo attorno a P e costituente un intorno, parziale o totale, del punto P sopra M_r) goda della proprietà di essere di *ordine invariantivo (relativo) uno*, cioè di ammettere una rappresentazione parametrica assolutamente regolare, in guisa da risultare, dal punto di vista delle trasformazioni pseudoconformi, equivalente ad una falda lineare[19]). Sopra una tal falda le corrispondenti delle falde lineari sono

[18]) Ved. a tal proposito la mia citata Memoria, Sul teorema fondamentale dei sistemi continui di curve sopra una superficie algebrica (Annali di Matematica, 1944).

[19]) I rami di curva algebrica sono tutti equivalenti a rami lineari; non così le falde di varietà. Perché una falda sia equivalente pseudoconformemente ad una falda lineare è necessario che il suo cono tangente nell'origine sia razionale. Perciò p. es. un punto triplo conico ordinario d'una superficie di S_3 è origine di una falda di 3° ordine non equivalente ad una falda lineare (e quindi non regolarmente parametrizzabile). Invece un punto cuspidale ordinario d'una superficie è origine d'una falda di 2° ordine, equivalente ad una falda lineare.

invariantivamente definite e così le loro intersezioni semplici; ecc. E perciò tutto quanto si dice per le falde lineari si può applicare a falde di questa natura. In questo senso abbiamo sopra avvertito che la semplicità dei punti P, P' di M_r, M'_r non è strettamente necessaria. Basta riferirsi a due punti origini di falde equivalenti, in modo pseudoconforme, a falde lineari.

Ritornando ora alla nostra questione principale, si conclude senz'altro nel modo enunciato al principio di questo n.

7. Dal n. prec. si trae come corollario che *la molteplicità s di un punto multiplo P di una V_k algebrica tracciata su M_r, quando P è semplice per M_r, è invariante per trasformazioni pseudoconformi dell'intorno di P in M_r, che conservino la linearità dell'intorno:* proposizione questa di uso frequente in geometria algebrica (limitatamente alle trasformazioni birazionali), della quale non mi consta sia mai stata data una dimostrazione generale.

Infatti la molteplicità di P per V_k non è che la molteplicità d'intersezione di V_k e della W_{r-k} segata su M_r da un S_{d-k} generico per P.

8. Dobbiamo infine considerare due varietà V_k, W_h di M_r aventi in comune il punto P semplice per M_r, quando è soddisfata la disuguaglianza $l = h + k - r > 0$ e le due varietà s'incontrano attorno a P lungo una varietà pura C di dimensione normale l.

La molteplicità d'intersezione i delle V_k, W_h in P (mediante sezione delle V, W con uno spazio lineare S_{d-l}, dell'ambiente S_d di M_r, passante e per P e non tangente ivi a C) è, a norma della Memoria del 1933, la medesima di quella che presentano, nel punto proiezione di P, le proiezioni delle V, W, sopra un S_r, da un S_{d-r-1} sghembo con lo S_r tangente a M_r in P.

La questione è così ricondotta al caso in cui l'ambiente M_r è uno spazio proiettivo S_r. Esaminiamo dunque questo caso, dimostrando che la molteplicità d'intersezione i delle V, W, dedotta per sezione con un S_{d-l} passante per P e non tangente ivi a C, è la stessa di quella che similmente si ottiene segando con una falda lineare φ_{r-l} di origine P, dello S_r, la quale non tocchi in P la C.

Diciamo all'uopo $\overline{V}_k$ la trasformata di V_k con un'omografia di S_r, generica nell'intorno dell'omografia identica. Allora (secondo la Memoria del 1933) le $\overline{V}$, W si tagliano, nelle vicinanze di P, lungo una varietà $\overline{C}$, di dimensione normale l, la quale, alla sua volta, è tagliata dallo S_{r-l} tangente in P a φ, in i intersezioni semplici. Ognuna di queste è origine di una falda lineare ∞^l, contenuta in $\overline{C}$. E siccome l'origine di questa falda è vicina quanto si vuole alla falda fissa φ, di origine prossima a P e di dimensione complementare, così le due falde s'incontrano, attorno alle loro vicinissime origini, in un punto ed in un solo, perché i loro spazi tangenti nelle origini, in quanto prossimi a due spazi di uguali dimensione indipendenti, sono indipendenti.

Viceversa, ogni intersezione (necessariamente semplice) di φ con $\bar{C}$ nell'intorno di P, essendo origine di una falda lineare di $\bar{C}$ e avendo l'origine prossima allo S_{r-l} tangente in P a φ, è vicinissima a un'intersezione semplice di questo S_{r-l} con C.

Insomma φ e il suo S_{r-l} tangente segano $\bar{C}$, nelle vicinanze di P, nello stesso numero i d'intersezioni semplici e si conclude che *se la molteplicità d'intersezione i delle V_k, W_h $(h+k-r=l>0)$ tracciate su M_r e incontrantesi nell'intorno di P in una varietà pura di dimensione normale l, si definisce segando con una falda lineare ∞^{r-l}, di origine P, non tangente ivi a C, l'intero i ottenuto è indipendente dal cangiamento della falda considerata sotto le ipotesi espresse:* epperò esso è uguale a quello ottenuto segando con un S_{d-l} lineare, ossia con la falda lineare ∞^{r-l} traccia di questo su M_r. La definizione attuale, di manifesto carattere intrinseco e invariante, equivale dunque a quella del 1933.

Quanto P sia generico in C il numero definito è la *molteplicità d'intersezione delle V, W lungo C.*

9. Ritornando ora alla definizione di Weil osserveremo che il carattere proiettivo della definizione si può subito eliminare, trasformando la definizione stessa in una di carattere invariante, ma non intrinseco. Basta all'uopo prendere come molteplicità d'intersezione delle V, W in P la molteplicità d'intersezione di $V \times W$ con U_0 in $P \times P$. Invero, gli enti $V \times W$, U_0 son collegati invariantivamente (rispetto a trasformazioni birazionali) con V, W, M_r; ma sono enti esterni ad M_r.

Estensione alle varietà analitiche.

10. La maggior parte delle considerazioni e dei concetti precedenti *si può trasportare alle varietà algebroidi attorno ad un punto P, tracciate sopra una falda lineare di origine P.* Ci limitiamo a pochi cenni in proposito.

Con argomentazioni pressoché identiche a quelle del n. 4 della mia Memoria del 1933 si prova che, se le varietà algebroidi (irriducibili o pure in piccolo) V_k, W_{r-k} di un S_r, hanno in comune il punto P attorno a cui esse son definite, la trasformata di una di esse mediante un' omografia genericamente prossima all'identità, taglia l'altra in un certo numero finito i d'intersezioni semplici (origini per ambedue le varietà di falde lineari a spazi tangenti indipendenti) e questo numero non cangia, mutando le veci delle due varietà. Quando le V, W abbiano in P un'intersezione isolata, i definisce la *molteplicità d'intersezione delle due varietà algebroidi in P.*

Il caso di due varietà algebroidi definite attorno all'origine P di una falda lineare Φ_r, che le contiene, si riconduce al procedente mediante proiezione sopra un S_r, in quanto questa è una trasforma-

zione pseudoconforme tra Φ_r e l'intorno di un punto di S_r, in cui quella falda si proietta.

Se poi le V, W hanno le dimensioni k, h, con $k+h-r=l>0$, e si tagliano attorno a P lungo una varietà analitica C, di dimensione normale l, la loro molteplicità d'intersezione si definisce segandole in P con una falda lineare di origine P, appartenente alla falda lineare ambiente Φ_r, di dimensione $r-l$ e non tangente in P a C.

Il concetto è invariante per trasformazioni pseudoconformi.

In particolare *la molteplicità s di una varietà algebroide pura nell'origine P della falda lineare ambiente ov'essa è definita, è invariante per trasformazioni pseudoconformi, che rispettino la linearità della falda ambiente.*

Se la varietà è non soltanto pura, ma irriducibile in piccolo, ossia è una *falda* (analitica), la sua molteplicità nell'origine P della falda è l'*ordine* della falda; e dunque *non soltanto per le falde lineari (di 1° ordine), ma anche per le falde di ordine qualunque tracciate sopra una falda lineare Φ, avente la stessa loro origine, l'ordine è invariante per ogni trasformazione pseudoconforme che muti Φ in un'altra falda lineare.*

Una nuova dimostrazione puramente geometrica del teorema di Bézout.

11. Ecco ora la dimostrazione del teorema di Bézout per r equazioni algebriche in r variabili, cui si è alluso nell'introduzione.

Consideriamo il sistema lineare Σ, di dimensione $N=\binom{l+r}{r}-1$, delle forme d'ordine l di S_r. Esso gode delle proprietà seguenti:

1) È privo di punti base, perché si può sempre costruire una forma d'ordine l (p. es. mediante iperpiani) che non passi per un punto comunque prefissato di S_r.

2) È semplice, ossia tutte le forme di Σ, che passano per un punto *qualunque* P di S_r, non hanno altri punti comuni. Preso invero un punto Q di S_r, distinto da P, si può costruire una forma d'ordine l passante per P e non per Q: p. es. la somma d'un iperpiano per P e non per Q e di una forma d'ordine $l-1$ generica.

Si può pertanto fare l'imagine proiettiva M_r dello S_r entro un S_N a mezzo del sistema Σ[20]. La varietà M_r si costruisce ponendo le coordinate proiettive omogenee di un punto di un S_N proporzionali ad $N+1$ forme linearmente indipendenti, di ordine l [le quali forme non hanno alcun punto comune, se no si contraddirebbe a 1)].

La M_r è in corrispondenza birazionale *senza eccezioni* con lo S_r. Le sezioni iperpiane di M_r son le imagini delle forme di ordine l di S_r. Le omografie di S_r mutano in sè il sistema lineare di tutte le

[20]) Varietà considerata pel primo da Veronese (Rendiconti dei Lincei, 1884).

forme di ordine l di S_r epperò inducono su M_r un gruppo continuo di trasformazioni birazionali (senza eccezioni), che mutano sezioni iperpiane in sezioni iperpiane; cioè in un gruppe di omografie. E questo gruppo è transitivo su M_r, come il gruppo corrispondente sopra S_r. Perciò due punti qualunque di M_r sono proiettivamente equivalenti; e dunque sono tutti semplici.

La corrispondenza senza eccezioni fra S_r ed M_r, essendo birazionale e quindi continua, muta gli elementi lineari di S_r negli elementi lineari di M_r; e quindi forme di S_r che passino semplicemente per un punto P, senza avere ivi tangenti comuni, in sezioni iperpiane di M_r passanti semplicemente pel punto omologo P', senza avere ivi tangenti comuni; e viceversa.

Ad una r-pla di forme di ordine l di S_r risponde una r-pla di sezioni iperpiane di M_r: le due r-ple si diranno *associate*. Esse son insieme linearmente indipendenti; perciò ad una r-pla di forme d'ordine l linearmente indipendenti di S_r resta associato un S_{N-r} di S_N: ai punti comuni alla r-pla i punti comuni ad M_r e allo S_{N-r}.

Sia S_{N-r} generico entro S_N (e precisamente non appartenente alla varietà algebrica subordinata alla grassmanniana degli S_{N-r} di S_N, riempita dagli S_{N-r} che toccano in qualche punto M_r o che hanno con M_r infinite interferenze). Allora le intersezioni di S_{N-r} con M_r son tutte semplici (le due varietà S_{N-r} ed M_r, di dimensioni complementari, passano per ciascuna di quelle intersezioni semplicemente senza toccarsi) e il loro numero uguaglia l'ordine μ di M_r. Ne deriva che una r-pla generica di forme di S_r (necessariamente indipendenti per la genericità) dà luogo a μ intersezioni semplici (per ciascuna delle quali passano semplicemente le r forme, senza avere alcuna tangente comune).

Il numero μ si conserva costante, se non diviene infinito, al variare dello S_{N-r}, cioè delle r forme associate, purché ciascuna interferenza isolata P di r forme particolari [21]) si conti con la propria „molteplicità d'intersezione" i uguale a quella con cui il punto P' si deve contare fra le intersezioni di S_{N-r} ed M_r.

Essendo poi i il numero delle intersezioni semplici prossime a P' in cui M_r è segata da un S_{N-r} genericamente prossimo al dato (e quindi non passante per P'), il numero i uguaglia anche quello delle intersezioni semplici prossime a P, in cui si segano le forme di una r-pla genericamente prossima alla data (ossia di forme, necessariamente linearmente indipendenti, appartenenti a un intorno abbastanza ristretto della r-pla considerata, e non aventi l'intersezione P).

Se inoltre per un S_{N-r} particolare vi sono infinite interferenze con M_r e un'interferenza isolata P', la molteplicità d'intersezione dello

[21]) Le quali son necessariamente linearmente indipendenti, in quanto abbiano un'intersezione isolata.

S_{N-r} con M_r in P' e delle r forme associate (linearmente indipendenti) nel punto omologo P, può ancora esser valutata come sopra.

Ne deriva che l'ordine μ di M_r può esser valutato intersecando r forme qualunque d'ordine l di S_r, le quali abbiano soltanto intersezioni semplici, com'è appunto il caso di r forme ciascuna delle quali consti di iperpiani generici.

Pertanto $\mu = l^r$ e *si conclude col teorema di Bézout nei caso di r forme di S_r aventi ordini uguali.*

Tutto ciò può apparire nuovo soltanto a chi non abbia completa conoscenza della geometria algebrica italiana; per chiunque invece abbia esperienza in questo campo, quanto abbiamo esposto è in fondo una precisazione ed un collegamento di circostanze note, enunciate però di solito sotto forma più breve, il cui significato ci è stato sempre familiare per l'uso quasisecolare dei nostri maestri e nostro da mezzo secolo.

12. Vediamo ora come si compia il passaggio ad r forme $A_1, A_2, \ldots, A_r$ aventi ordini qualunque $n_1, n_2, \ldots, n_r$. Scelto un intero l, non minore del massimo degli n, diciamo $B_1, B_2, \ldots, B_r$ r forme di S_r aventi gli ordini rispettivi $l - n_1$, $l - n_2$, $l - n_r$ e costituite ciascuna da tanti iperpiani generici quant'è l'ordine della forma. Supponiamo inoltre acquisito il teorema che abbiamo in vista (e del quale ci risparmiamo il notissimo enunciato) negli spazi di dimensione $< r$. Poniamo:

$$C_1 = A_1 + B_1,\ C_2 = A_2 + B_2, \ldots, C_r = A_r + B_r.$$

Designato il numero delle interferenze di r forme di S_r (quand'è finito) scrivendo tra graffe il simbolo delle forme di cui si parla, nell'ipotesi che le $A_1, A_2, \ldots, A_r$ non abbiano infinite interferenze, attesa la genericità degl'iperpiani costituenti le $B_1, B_2, \ldots, B_r$, potremo scrivere:

$$(3)\quad \{C_1, C_2, \ldots, C_r\} = \{A_1, A_2, \ldots, A_r\} + \sum \{A_{i_1}, A_{i_2}, \ldots, A_{i_q}, B_{i_{q+1}}, \ldots, B_{i_r}\}$$

ove il sommatorio è esteso a tutte le possibili combinazioni semplici di q delle A ($q = 0, 1, \ldots, r-1$) e di $r - q$ delle B.

Il valore dei singoli addendi del sommatorio si calcola col teorema di Bézout negli spazi lineari di dimensione $< r$ o per $q = 0$ intersecando fra loro le forme $B_1, \ldots, B_r$ costituite soltanto da iperpiani; il valore del primo membro è noto in virtù di quanto si è dimostrato nel n. precedente. Ne deriva il valore di $\{A_1, A_2, \ldots, A_r\}$. A calcoli fatti si trova il prodotto $n_1 n_2 \ldots n_r$. E si riconosce di più che, se le intersezioni delle $A_1, A_2, \ldots, A_r$ son tutte semplici, il loro numero è espresso da questo prodotto; altrimenti ciascuna va contata con la debita molteplicità, il cui significato risulta senz'altro il consueto.

Se le $A_1, A_2, \ldots, A_r$ hanno infinite intersezioni (e quindi così avviene delle $C_1, C_2, \ldots, C_r$), la relazione (3) deve intendersi, per tutti i simboli che in esse figurano, limitata alle intersezioni isolate e si sbocca nel solito significato della molteplicità d'intersezione in ciascuna di queste. Dunque:

Il teorema di Bézout per r forme algebriche di S_r può conseguirsi rigorosamente, con semplice procedimento geometrico, che comprende la precisazione del significato delle molteplicità d'intersezione per le interferenze isolate, anche quando, oltre queste, ne esistono infinite altre.

Un metodo geometrico per ottenere rapidamente il risultante.

13. Il procedimento esposto, algebricamente interpretato, sbocca in modo ovvio nel risultante di $r+1$ forme del medesimo ordine in $r+1$ variabili; e da questo non è difficile trarre, mercé il concetto del n. prec., il risultante per $r+1$ forme di ordini qualunque. Ma è molto più semplice ragionare come segue.

Consideriamo la varietà di Segre W_t di dimensione $t = \sum_{i=0}^{r} N_i - r - 1$ $\left[N_i = \binom{n_i + r}{r};\ i = 0, 1, \ldots, r;\ n_0 = n\right]$ imagine delle $(r+1)$-ple di forme di ordini rispettivi $n, n_1, \ldots, n_r$ appartenenti ad S_r. Entro W_t le $(r+1)$-ple di forme passanti pei singoli punti di S_r formano un connesso irriducibile di dimensione massima $t-1$, che è *perciò* rappresentabile entro W_t *con una sola equazione*[22]). Designati con $u(u_0, \ldots, u_{N_0})$, $u'(u'_0, \ldots, u'_{N_1}), \ldots, u^r(u^r_0, \ldots, u^r_{N_r})$ i coefficienti delle forme di una $(r+1)$-pla variabile in W_t[23]), il connesso predetto vien dunque rappresentato da un'equazione del tipo

$$D(u, u', \ldots, u^r) = 0, \tag{6}$$

ove D è una forma nelle singole serie di variabili, il cui grado, in ciascuna serie di variabili, è l'*indice* corrispondente del connesso.

La (6) esprime *la condizione necessaria e sufficiente perché le $r+1$ forme date abbiano un punto comune*, epperò riducesi al *risultante delle forme* $u, u', \ldots, u^r$.

Date genericamente le $u', \ldots, u^r$, l'indice del connesso, rispetto alle variabili u, uguaglia il numero dei sistemi lineari $\infty^{N_0 - 2}$ di forme u, che passano pei singoli punti comuni alle $u', \ldots, u^r$; cioè (n. 12) il numero $n_1 n_2 \ldots n_r$ delle intersezioni (tutte semplici) delle $u', \ldots, u^r$; sicché i fattori lineari dell'equazione (6) nelle u sono tanti distinti quant'è il grado dell'equazione e sono dunque tutti semplici. Perciò

[22]) Per la teoria generale dei connessi rinvio ad una mia Memoria in corso di stampa negli Atti di Salamanca (ved. pure il fascicolo II delle mie citate lezioni di geometria numerativa; pag. 134 e segg.). Ivi appunto è dimostrato che un connesso algebrico di dimensione massima, entro il prodotto di più spazi lineari, è rappresentabile con una sola equazione nelle coordinate dei punti di questi spazi.

[23]) Nel seguito ogni forma viene indicata con la lettera che denota il complesso de'suoi coefficienti; così u, u'; etc.

il polinomio (6) *è omogeneo nei coefficienti di ciascuna delle* $r+1$ *forme date ed ha, rispetto ad essi, l'ordine uguale al prodotto degli ordini delle altre.*

Inoltre esso è *irriducibile* rispetto al complesso delle variabili indeterminate $u, u', \ldots, u^r$. Di più D *è individuato* (a meno di un fattore costante), perché ogni polinomio esprimente la detta condizione necessaria e sufficiente, rappresenta il connesso *irriducibile* di cui si è parlato[24]).

14. Quando le $u', u'', \ldots, u^r$ sono date comunque, purché segantisi in un numero finito di punti, la forma nelle u a cui riducesi $D(u, u', \ldots, u^r)$, uguagliata a zero, rappresenta pertanto coi suoi fattori lineari le interferenze delle date forme, in coordinate di forme u d'ordine n passanti per questi punti. In particolare, se $n = 1$, *la forma* $R(u)$, *a cui riducesi la* (6), *uguagliata a zero, rappresenta (in coordinate d'iperpiani) le stelle d'iperpiani aventi i centri nelle intersezioni delle date forme.*

Pertanto $R(u)$ è l'*u-risultante* (Mertens) delle forme $u', \ldots, u^r$, ben conosciuto negli sviluppi dell'algebra moderna[25]). Esso si decompone in tante forme lineari quante sono le stelle predette. È di grado $n_1, n_2, \ldots, n_r$ e, quando le $u', \ldots, u^r$ son indeterminate, ha altrettanti fattori lineari semplici.

Secondo gli algebristi moderni la molteplicità d'intersezione di una r-pla qualunque $u', \ldots, u^r$ in ciascuno dei punti comuni (supposti in numero finito) è definita dall'esponente con cui il corrispondente fattore lineare di $R(u)$ figura nel polinomio stesso. È una definizione statica. Constateremo nel n. successivo che *ognuno di questi esponenti uguaglia alla sua volta anche la molteplicità d'intersezione delle* $u', \ldots, u^r$ *intesa in senso dinamico e geometrico.*

Lo *u*-risultante limite $R_Y(u)$ e il risultante ridotto.

15. Rappresentiamo la totalità delle r-ple (ordinate) $u', \ldots, u^r$ di forme degli ordini $n_1, \ldots, n_r$ dello S_r, coi punti della varietà di Segre V_τ (priva di punti multipli), di dimensione $\tau = \sum_{i=1}^{r} N_i - r$, prodotto

[24]) Per la teoria del risultante dal punto di vista algebrico moderno veggasi Mertens (Sitz. der math.-nat. Klasse der Wiener Akademie, 1886 e 1889); Macaulay (Proc. Lond. Math. Society, 1903); Hurwitz (Annali di Matematica, 1913); van der Waerden, Moderne Algebra (Springer, 1931), II Teil, S. 1 e segg.; Perron, Algebra (Göschen, 1932, II Auflage), S. 221, 274; Hodge e Pedoe, Methods of algebraic geometry (Cambridge, 1947), p. 139 e segg.; Gröbner, Moderne algebraische Geometrie (Springer, 1949), p. 39 e segg. Nel lavoro citato di Macaulay (ved. anche Gröbner, l. c.) si dà un'esplicita espressione del risultante di $r+1$ forme di S_r come quoziente di due determinanti.

[25]) Ved. p. es. van der Waerden, Moderne Algebra (Springer, 1931), II Teil, S. 21.

degli r sistemi lineari di forme dei detti ordini situati in altrettanti spazi proiettivi S_r, sovrapposti al dato.

Riferiamoci dapprima al senso algebrico statico della molteplicità d'intersezione e proviamo che *le r-ple con un numero finito di intersezioni, di cui taluna non semplice, son rappresentate da punti d'una varietà algebrica subordinata a* V_r.

Infatti, se una r-pla con un numero finito d'intersezioni possiede un'intersezione non semplice, $R(u)$ ha in corrispondenza un fattore lineare multiplo e i suoi coefficienti soddisfanno perciò ad un certo sistema di equazioni algebriche [26]).

Le r-ple con un numero finito d'intersezioni, di cui qualcuna non semplice, riempiono dunque in V_r una varietà algebrica.

Anche *le r-ple con infinite intersezioni riempiono in* V_r *una varietà algebrica*, perché esse son caratterizzate dall'annullarsi identico del polinomio $R(u)$. Invero, una r-pla con infinite intersezioni non può dare che un $R(u)$ identicamente nullo, in quanto esistono infinite stelle coi centri in punti comuni alle forme stesse; e, viceversa, se $R(u)$ si annulla identicamente, ogni iperpiano u di S_r fa parte di una stella col centro in qualche punto comune alle r forme date, e ciò significa che quell'iperpiano incontra il luogo delle interferenze delle r forme, il quale dunque contiene qualche componente di dimensione ≥ 1.

Siccome quando le $u', \ldots, u^r$ sono a coefficienti indeterminati, $R(u)$ non contiene che fattori lineari semplici, attesa l'irriducibilità di V_r, si può legittimamente concludere che *una r-pla generica dà luogo ad un numero finito* $\mu = n_1 n_2 \ldots n_r$ *d'intersezioni tutte semplici*, nel senso che le r-ple con infinite intersezioni o con un numero finito d'intersezioni, di cui talune non semplici (r-ple che chiameremo complessivamente "singolari"), appartengono ad una varietà algebrica (eventualmente riducibile e impura) E, le cui componenti hanno tutte dimensioni $< \tau$.

Ne deriva che nell'intorno dell'imagine su V_r di una r-pla $u', \ldots, u^r$, *comunque fissata*, la varietà E penetra eventualmente, se $u', \ldots, u^r$ è singolare, con falde (analitiche) di dimensione $< \tau$, ma comunque esse non riempiono l'intorno; e la E non penetra affatto nell'intorno, se $u', \ldots, u^r$ non è singolare.

In conseguenza, può tracciarti su V_r, in infiniti modi, un ramo analitico γ, avente l'origine nell'imagine di $u', \ldots, u^r$ e non appartenente ad E; questo ramo non ha con E nell'intorno dell'origine alcuna intersezione distinta dall'origine, epperò il punto mobile su γ, rappresenta una r-pla $\bar{u}', \ldots, \bar{u}^r$ con un numero finito d'intersezioni tutte semplici. Dunque:

---

[26]) Quello che, nel sistema lineare delle forme di ordine $\mu = n_1 n_2 \ldots n_r$ di un S_r, rappresenta le forme spezzate in forme lineari, di cui una almeno doppia.

Data una qualunque r-pla $u', \ldots, u^r$ di r forme di ordini $n_1, \ldots, n_r$ di S_r, anche con intersezioni non semplici o con infinite intersezioni, essa può sempre considerarsi quale limite di una r-pla $\bar{u}', \ldots, \bar{u}_r$ la quale, durante la variazione (salvo eventualmente al limite), conservasi ognora con $n_1\ n_2 \ldots n_r$ intersezioni semplici.

16. Tutto ciò premesso, *possiamo definire l'u-risultante $R_\gamma(u)$ relativo ad una r-pla qualunque $u', \ldots, u^r$ di forme di ordini $n_1, n_2, \ldots, n_r$ e ad un ramo analitico γ di V_r, avente l'origine in $(u', \ldots, u^r)$.*

Sia, a questo scopo, λ un parametro uniformizzante biregolarmente γ e l'origine del ramo corrisponda a $\lambda = 0$. Allora i coefficienti dello u-risultante $\overline{R}(u)$ della r-pla non singolare variabile in γ, son funzioni olomorfe di λ, attorno a $\lambda = 0$.

Se $\nu \geqq 1$ è l'ordine *minimo* dei coefficienti di $\overline{R}(u)$ rispetto a λ, il polinomio $\frac{1}{\lambda^\nu}\overline{R}(u)$ per $\lambda \to 0$ tende ad un polinomio ben determinato $R_\gamma(u)$ *non identicamente nullo.*

Il centro di una delle stelle che annullano $\frac{1}{\lambda^\nu}\overline{R}(u)$ varia mantenendosi sempre comune alle $\bar{u}', \ldots, \bar{u}^r$, le quali hanno ordinatamente per limiti i polinomi $u', \ldots, u^r$. Perciò quel centro ha per limite una interferenza delle $u', \ldots, u^r$. Ne deriva che i fattori lineari di $R_\gamma(u)$, rappresentano altrettanti punti d'interferenza delle $u', \ldots, u^r$.

Qui possiamo subito fare due precisazioni. La prima è che $R_\gamma(u)$, a meno di un eventuale fattore costante non nullo, non dipende dal parametro λ, scelto per la rappresentazione biregolare di γ.

Infatti, se μ è un altro parametro analogo (che dia anch'esso l'origine per $\mu = 0$), i parametri λ, μ sono funzioni olomorfe l'uno dell'altro nell'intorno dell'origine, sicché il cangiamento del parametro porta al più soltanto la moltiplicazione del limite per un fattore costante *non nullo.*

La seconda è che se $u', \ldots, u^r$ dà luogo ad un numero finito d'interferenze ed $R(u)$ è lo u-resultante ben determinato relativo ad una tale r-pla, i due polinomi $R(u)$, $R_\gamma(u)$ differiscono al più per un fattore costante non nullo, *qualunque* sia γ (non giacente in E).

Infatti, in questo caso i coefficienti di $\overline{R}(u)$, che son forme nei coefficienti di $\bar{u}', \ldots, \bar{u}^r$, non si annullano tutti quando $(\bar{u}', \ldots, \bar{u}^r) \to (u', \ldots, u^r)$, se no le $u', \ldots, u^r$ avrebbero infinite intersezioni. (In tal caso dunque, è $\nu = 0$). E siccome i coefficienti di $\overline{R}(u)$, come polinomi, son funzioni continue dei coefficienti di $\bar{u}', \ldots, \bar{u}^r$, nel caso in esame, $R(u)$ è sempre limite di $\overline{R}(u)$.

Tenuto conto del teorema di continuità delle funzioni algebriche [27] se ne trae, nell'ipotesi di un numero finito di interferenze, che ogni

[27] Ved. le mie Lezioni di Analisi (Bologna, Zanichelli, II ed. 1946, p. 346).

fattore lineare i-plo di $R(u)$ è limite di i fattori lineari semplici di $\overline{R}(u)$; donde la conclusione preannunciata alla fine del n. 14.

Passiamo al caso che vi sieno infinite interferenze. Allora ciascuna dei fattori lineari di $R_\gamma(u)$ ha un proprio esponente e si ha dunque per quel dato γ una molteplicità statica di ognuno dei limiti delle interferenze di $\bar{u}', \ldots, \bar{u}^r$, la quale molteplicità acquista valore geometrico, dinamico, in virtù del citato teorema di continuità; nel senso che in ognuna delle interferenze limite, confluisce un certo numero $i \geqq 1$ d'intersezioni semplici variabili delle $\bar{u}', \ldots, \bar{u}^r$ e la somma delle molteplicità ottenute è $n_1 n_2 \ldots n_r$, ossia il grado di $R_\gamma(u)$, perché, durante la variazione, il grado di $\overline{R}(u)$ rimane immutato.

Le molteplicità così definite dipendono a priori da γ. Occorre indagare in qual misura esse ne dipendono effettivamente.

Bisogna a questo punto distinguere le eventuali interferenze limiti indipendenti da γ, da quelle che dipendono effettivamente dalla scelta del ramo.

Mostriamo in primo luogo che ogni interferenza isolata P delle $u', \ldots, u^r$ è indipendente da γ.

Consideriamo all'uopo le r-ple passanti pel punto P, le quali costituiscono una varietà di Segre $Z_{\tau-r}(P)$ appartenente a V_τ. Le r-ple di $Z_{\tau-r}(P)$ aventi infinite interferenze attorno a P, formano un insieme, che è parte propria di $Z_{\tau-r}(P)$, perché $u', \ldots, u^r$ *non* appartiene a tale insieme. La totalità delle r-ple passanti per un dato punto Q dell'intorno di P in S_r, forma dunque una varietà $Z_{\tau-r}(Q)$ le cui r-ple prossime ad $u', \ldots, u^r$ hanno tutte, nelle vicinanze di P, un numero finito d'intersezioni (uguale alla molteplicità d'intersezione in P delle $u', \ldots, u^r$). Pertanto le r-ple prossime alla data e passanti pei punti Q, sono in corrispondenza bicontinua d'indici finiti con le posizioni di Q attorno a P; perciò le $Z_{\tau-r}(Q)$ sono ∞^r e riempiono V_τ.

Vuol dire insomma che *ogni* r-pla dell'intorno di $u', \ldots, u^r$ ha qualche interferenza nell'intorno di P. Epperò qualunque sia il ramo γ lungo il quale la r-pla $\bar{u}', \ldots, \bar{u}^r$ varia tendendo a $u', \ldots, u^r$, sempre qualche interferenza tende a P[28]).

La stessa conclusione si può stabilire o applicando il metodo di eliminazione di KRONECKER (il che abbiamo qui voluto evitare, trattandosi di conseguire il fine metodologico di svincolare la nostra tratta-

[28]) L'argomentazione precedente dimostra altresì il criterio di PLÜCKER-CLEBSCH sotto la forma datagli dall'Autore (Ved. la successiva nota (29) a piè di pag.). Si aggiunga che fra S_r e V_τ intercede una corrispondenza irriducibile T, in cui sono omologhi un punto Q di S_r ed un punto Q' di V_τ, quando Q è comune alle forme della r-pla rappresentata da Q'. A punti particolari Q' di V_τ posson corrispondere infiniti punti Q, ma comunque ognuno di questi, a causa dell'irriducibilità di T, può ottenersi come limite di punti omologhi del generico Q'. Quest'osservazione riescirà utile tra breve.

zione da ognuno dei processi conosciuti di eliminazione) oppure applicando un teorema di POINCARÉ, precisato da OSGOOD, sulle funzioni analitiche di più variabili [29]).

17. La conclusione precedente ha tale importanza pel nostro scopo, che val la pena di considerarla sotto un altro aspetto.

Stabiliamo anzitutto un facile lemma:

In uno spazio S_r (di cui sieno $x_0, x_1, \ldots, x_r$ le coordinate omogenee di punto) ogni ramo analitico di data origine può sempre derivarsi per continuità da un ramo prefissato della stessa origine.

Sieno:

$$\alpha) \qquad x_i = a_{i0} + a_{i1} t + a_{i2} t^2 + \cdots \qquad (i = 0, 1, \ldots, r)$$

$$\beta) \qquad x_i = b_{i0} + b_{i1} t + b_{i2} t^2 + \cdots \qquad (b_{i0} = a_{i0};\ i = 0, 1, \ldots, r)$$

le rappresentazioni parametriche dei due dati rami α, β, la cui origine comune corrisponde a $t = 0$. Le serie dei secondi membri s'intendono considerate in un comune cerchio di convergenza.

Le serie:

$$\sum_{j=0}^{+\infty} [\tau_0 a_{ij} + (b_{ij} - a_{ij}) \tau_1] t^j \qquad (i = 0, 1, \ldots, r)$$

sono convergenti in quel cerchio, qualunque sieno i valori (finiti) dei parametri τ_0, τ_1.

Perciò

$$\gamma) \qquad x_i = \sum_{j=0}^{+\infty} [\tau_0 a_{ij} + (b_{ij} - a_{ij}) \tau_1] t^j \qquad (i = 0, 1, \ldots, r)$$

rappresenta un ramo γ della stessa origine dei precedenti. Facendo variare il punto della retta complessa (τ_0, τ_1) da (1, 0) a (1, 1), il ramo γ passa con continuità dalla posizione iniziale α alla β. La conclusione può applicarsi ai rami tracciati du V_r per un suo punto P (che è semplice), perché l'intorno di P è biregolarmente rappresentabile nell'intorno di un punto di un S_r.

Ciò posto, poiché (n. prec.) l'interferenza isolata P delle $u', \ldots, u^r$ può conseguirsi quale limite di una delle interferenze di $\bar{u}', \ldots, \bar{u}^r$ quando $(\bar{u}', \ldots, \bar{u}^r)$ varia in un conveniente ramo, denotiamo con α un tal ramo, di origine $(u', \ldots, u^r)$, e con β un qualsiasi altro ramo di V_r, avente la stessa origine (ed esterno ad E). Facciamo poi variare il ramo γ di origine $(u', \ldots, u^r)$ da α a β; varia così con continuità il risultante $R_\gamma(u)$ ed ognuno dei suoi fattori lineari, che rappresenta sempre un'interferenza delle $u', \ldots, u^r$. Onde, se P dipendesse dalla

[29]) Cfr. in proposito la mia Nota: Sulla compatibilità dei sistemi di equazioni algebriche ed analitiche (Rend. della R. Accademia naz. dei Lincei, vol. XVII, 1° sem., 1933, pag. 1), nonché i trattati seguenti, citati nella Nota medesima: OSGOOD, Lehrbuch der Funktionentheorie (Leipzig, Teubner, 1929, II B., I Lief. p. 135); LEFSCHETZ, Topology (American Mathematical Society, 1930, pag. 383).

variazione di γ, il punto stesso varierebbe in modo continuo a partire dalla posizione P e non sarebbe una interferenza isolata.

La molteplicità d'intersezione definita per ciascuno dei limiti delle interferenze di $\bar{u}', \ldots, \bar{u}^r$, quando $(\bar{u}', \ldots, \bar{u}^r) \to (u', \ldots, u^r)$ su γ, dipende a priori essa stessa da γ, ma nella variazione continua di γ non è possibile che un fattore lineare di $R_\gamma(u)$, distinto dal fattore lineare che compete a una determinata interferenza isolata, venga a coincidere con quest'ultimo, altrimenti quest'interferenza cesserebbe di essere isolata. Pertanto possiamo asserire che la molteplicità d'intersezione di un'interferenza isolata è indipendente da γ.

18. Oltre alle interferenze isolate, posson esservi altre interferenze indipendenti da γ; le chiamiamo interferenze *pseudoisolate*. La molteplicità d'intersezione in una di queste, la definiamo come il valore minimo $\geqq 1$ conseguibile per tutti i possibili γ, in quanto è naturale che per un'interferenza pseudoisolata la molteplicità d'intersezione possa variare, mutando γ.

Riassumendo l'analisi svolta dal n. 17 in poi, possiamo enunciare: *Una qualunque r-pla $u', \ldots, u^r$ di forme di ordini $n_1, \ldots, n_r$ di S_r, anche con infinite interferenze e con interferenze multiple, considerata come limite di una r-pla $\bar{u}', \ldots, \bar{u}^r$ a intersezioni semplici, variabile sopra un ramo analitico γ di origine $(u', \ldots, u^r)$, definisce per $(\bar{u}', \ldots, \bar{u}^r) \to (u', \ldots, u^r)$ un u-resultante limite $R_\gamma(u)$ delle $u', \ldots, u^r$ (ivi compreso il caso in cui l'u-resultante ordinario $R(u)$ svanisca identicamente). Il resultante limite è indipendente da γ (salvo un fattore costante non nullo) allora e soltanto allora che $u', \ldots, u^r$ abbiano un numero finito di interferenze*; *ed esso allora coincide con $R(u)$.*

In ogni caso le stelle d'iperpiani soddisfacenti ad $R_\gamma(u) = 0$ hanno per centri interferenze delle $u', \ldots, u^r$ e tra questi centri vi sono sempre, per qualunque γ, le eventuali interferenze isolate. La molteplicità d'intersezione in una P di queste, è pure indipendente da γ ed uguaglia sia l'esponente del fattore lineare corrispondente di $R_\gamma(u)$, come il numero delle intersezioni semplici di $\bar{u}', \ldots, \bar{u}^r$, che confluiscono verso P per $(\bar{u}', \ldots, \bar{u}^r) \to (u', \ldots, u^r)$ su γ.

Vi posson essere anche interferenze indipendenti da γ, diverse dalle interferenze isolate (pseudoisolate).

Ogni interferenza delle $u', \ldots, u^r$, anche non isolata, può sempre ottenersi come limite di qualche interferenza di una r-pla di forme aventi un numero finito d'interferenze, la quale varii in un conveniente ramo analitico γ, non avendo mai (fuori che al limite) infinite interferenze.

19. Che cosa accade dei limiti delle intersezioni di $\bar{u}', \ldots, \bar{u}^r$ quando varia il ramo γ?

Tenuto conto del n. 17, si può far variare γ da una, α, ad altra posizione β, attraverso alla famiglia analitica ∞^1 di rami, data dalla

rappresentazione

$$x_i \doteq (\tau_0 - \tau_1) \sum_{j=0}^{+\infty} a_{ij} t^j + \tau_1 \sum_{j=0}^{+\infty} b_{ij} t^j \quad (i = 0, 1, \ldots, r).$$

L'elemento di questa famiglia, dipendendo in modo analitico biunivoco, senza eccezione, dal punto (τ_0, τ_1) variabile sopra una retta proiettiva complessa, descrive un sistema ∞^1 razionale.

Epperò due gruppi limiti, deducibili l'uno dall'altro sopra una componente irriducibile dell'interferenza di $u', \ldots, u^r$, appartengono ad un sistema ∞^1 razionale di gruppi analoghi; ossia son congiunti da una serie lineare sopra una curva tracciata in quella componente; e dunque [30]) la totalità di quei gruppi limiti costituisce una serie d'equivalenza.

In conclusione: *Le intersezioni limiti descrivono serie di equivalenza sulle componenti dell'interferenza delle* $u', \ldots, u^r$.

20. I risultanti limiti, essendo di ordine costante nelle u, appartengono ad un sistema lineare e vi è pertanto *un numero finito di risultanti limiti linearmente indipendenti.* Un fattore lineare comune a tutti questi risultanti limiti è indipendente dalla scelta del ramo epperò corrisponde a un'interferenza isolata o pseudoisolata. Nel caso che l'interferenza sia isolata, è invariabile, come si è visto, anche l'esponente con cui quel fattore comune comparisce nei risultanti limiti; nel caso di una interferenza pseudoisolata c'è invece un *esponente generico*, che può crescere per rami γ particolari in quanto un fattore lineare variabile può venire a sovrapporsi ad un fattore lineare fisso. Risulta così senz'altro che:

Il massimo comun divisore dei risultanti limiti [31]) *consta dei fattori lineari corrispondenti alle interferenze isolate e alle interferenze pseudoisolate.*

Lo chiamiamo *risultante ridotto.* Esse *serve a determinare le interferenze isolate e le pseudoisolate delle quali dà la molteplicità d'intersezione (minima per le interferenze pseudoisolate).*

Il risultante per un sistema qualunque di equazioni.

21. Per un sistema qualunque di forme la molteplicità d'intersezione in un'interferenza isolata o in un'interferenza k-dimensionale sono definite nella mia Memoria del 1947 (citata nella nota [1]) a pié di pag.) e ad essa faccio riferimento.

---

[30]) Ved. F. Severi, Ulteriori sviluppi della teoria delle serie di equivalenza sulle superficie algebriche (Commentationes Pontificia Academia Scientiarum, 1942, p. 980).

[31]) Cioè del massimo numero di quelli che son linearmente indipendenti.

Sia

$$f_j(x) = 0 \qquad (j = 1, 2, \ldots, h) \tag{7}$$

un dato sistema di forme nelle coordinate omogenee $x_0, x_1, \ldots, x_r$ di un punto x di S_r, le quali non abbiano che interferenze isolate.

Se gli ordini delle f sono uguali tra loro, le f riduconsi ad almeno r linearmente indipendenti [32]), sicché r combinazioni lineari di esse, e sieno

$$\sum_{j=1}^{h} \lambda_{lj} f_j = 0 \qquad (l = 1, 2, \ldots, r) \tag{8}$$

a parametri indeterminati (e quindi generici), sono linearmente indipendenti. La molteplicità d'intersezione delle (7) in un punto comune isolato è (per definizione) la molteplicità d'intersezione delle (8) in quel punto. E questa è data dall'esponente del fattore lineare dell'u-risultante $R(u; \lambda)$ delle (8), che corrisponde all'interferenza medesima.

Variando le λ, il risultante $R(u; \lambda)$ varia entro un sistema lineare [33]); il massimo comun divisore delle forme di questo sistema è una forma $S(u)$, la quale si scinde in tanti fattori lineari quanti sono i punti comuni alle (7) e ciascuno di tali fattori ha per esponente la molteplicità d'intersezione delle (7) nel punto medesimo. La forma deve perciò legittimamente considerarsi quale risultante del dato sistema di equazioni.

Passiamo al caso più generale di h forme (7) di ordini disuguali, $n_1, n_2, \ldots, n_r$ e sia n il massimo di questi.

Se φ denota un iperpiano generico di S_r, esso non passa per alcuna delle interferenze isolate delle (7); epperò le interferenze del sistema di forme:

$$\varphi^{n-n_j} f_j(x) = 0 \qquad (j = 1, \ldots, h), \tag{9}$$

abbracciano quelle delle forme (7), ciascuna conservandosi isolata pel sistema (9); e comprendono altre interferenze isolate o no, la cui posizione dipende da φ. Prese r generiche combinazioni lineari delle (9) i cui parametri chiamiamo ancora λ, la loro molteplicità d'intersezione in un punto comune alle (7) è (per definizione) la molteplicità d'intersezione in quel punto di tali combinazioni lineari.

L'u-risultante delle (9) può ben essere identicamente nullo (ciò accade quando le (9) hanno infiniti punti comuni); ma ad ogni modo possiamo considerare l'u-risultante ridotto $R(u; \lambda)$ delle predette combinazioni lineari.

Variando le λ, questo u-risultante si muove in un sistema lineare e il massimo comune divisore $S(u)$ delle forme di questo sistema è *l'u-risultante delle* (7) *originarie*. Ogni fattore lineare di tale risultante è elevato ad un esponente uguale alla molteplicità d'intersezione delle (7) nella interferenza isolata corrispondente.

---

[32]) Ved. la mia Memoria del 1947, pag. 227.

[33]) Descrivendo ivi un sistema unirazionale!

Lo stesso procedimento è applicabile anche quando le (7) abbiano infinite interferenze e qualche interferenza isolata, purché si faccia riferimento soltanto alle interferenze isolate e pseudoisolate delle forme date.

22. Il passaggio ad un sistema di equazioni (7) che abbiamo interferenze di dimensione > 0 non offre difficoltà.

Anzitutto conviene distinguere nell'interferenza delle (7) le varietà pure che la compongono e disporle p. es. in ordine decrescente di dimensione. Avremo così le varietà M_{h_1}, M_{h_2}, ... fino eventualmente ad una M_0 (gruppo di punti isolati) essendo $h_1 > h_2 > \cdots > 0$ [34]).

Se si vuole un risultante delle (7), che riguardi in modo particolare un punto P generico di una delle predette varietà pure, per es. la M_{h_i}, si segheranno le forme date con un S_{r-h_i} generico, rappresentato da h_i equazioni lineari a coefficienti indeterminati μ (e quindi linearmente indipendenti) e si costruirà il risultante $S(u; \mu)$ del sistema formato dalle (7) e dalle h_i equazioni lineari. I fattori lineari di $S(u; \mu)$ dànno coi loro esponenti la molteplicità d'intersezione delle (7) lungo ciascuna delle componenti irriducibili di M_{h_i} ed eventualmente lungo certe altre varietà di dimensione h_i (situate sopra componenti di dimensione $> h_i$ dell'interferenza), le quali per sezione con lo S_{r-h_i} generano interferenze pseudoisolate del sistema sezione.

---

[34]) E' noto (p. es. attraverso al metodo di eliminazione di KRONECKER) che l'isolamento di queste componenti delle varie dimensioni si compie razionalmente.

(Eingegangen am 21. Januar 1950).

Nachtrag zu meinen Arbeiten über „Eindeutige beschränkte Funktionen in mehrfach zusammenhängenden Gebieten“ [1]).

Von

Helmut Grunsky in Tübingen.

Für die in Satz IV (Teil II) fehlende Einzigkeitsaussage gebe ich hier einen äußerst einfachen Beweis, der mir bisher leider entgangen war; damit ist dann auch Satz I (Teil I) in vollem Umfang bewiesen [2]).

Satz IV a. *Es gibt, von einem konstanten Faktor vom Betrage* 1 *abgesehen, nur eine einzige Lösung des in Satz IV formulierten Extremalproblems.*

Beweis [3]): $F_1(z)$ und $F_2(z)$ seien zwei Funktionen der Klasse $\mathfrak{K}_{IV}$. Dann gehört, wie leicht nachzuprüfen, auch $\frac{1}{2}(F_1(z)+F_2(z)) = F_3(z)$ zu $\mathfrak{K}_{IV}$. Sind F_1 und F_2 zwei Extremalfunktionen, so darf ohne Beschränkung der Allgemeinheit vorausgesetzt werden, $F_1^{(j)}(z^*)$ und $F_2^{(j)}(z^*)$ seien positiv, also $F_1^{(j)}(z^*) = F_2^{(j)}(z^*) = \max_{F\in\mathfrak{K}_{IV}} |F^{(j)}(z^*)|$. Dann ist auch F_3 eine Extremalfunktion, muß also nach dem sonstigen Inhalt von Satz IV auf jedem $\mathfrak{C}_\lambda$ überall den Betrag m_λ (im Sinne stetiger Randwerte) haben. In der Abschätzung für $z \in \mathfrak{C}_\lambda$: $|F_3(z)| \leqq \frac{1}{2}|F_1(z)| + \frac{1}{2}|(F_2(z)| = m_\lambda$ gilt jedoch dann und nur dann das Gleichheitszeichen, wenn arc $F_1(z) =$ arc $F_2(z)$. Also muß auf jedem $\mathfrak{C}_\lambda$ gelten: $F_1(z) = F_2(z)$. Nun sind aber F_1 und F_2, wenn wir die C_ν ohne Beschränkung der Allgemeinheit (vgl. Teil I, S. 237) als analytische Kurven voraussetzen, auf den $\mathfrak{C}_\lambda$ regulär, weshalb die vorige Gleichung ohne weiteres ihre Identität nach sich zieht.

Der mühsame Weg von Teil III zu einem speziellen Einzigkeitssatz erweist sich sonach als entbehrlich. Doch hoffe ich, daß die dort entwickelten Gedankengänge brauchbare Ansätze zu weiteren Untersuchungen der Topologie der in Rede stehenden Funktionsklassen enthalten.

---

[1]) Teil I und II: Jahresber. Deutsche Math.-Vereinig. **50**, 230—255 (1940); **52**, 118—132 (1942). Teil III: Ein Einzigkeitssatz: Math. Z. **51**, 586—615 (1949).

[2]) Bei Ahlfors, Bounded analytic functions. Duke math. J. **14**, 1—11 (1947), ergibt sich der entsprechende Einzigkeitssatz mühelos als Nebenresultat einer etwas weiter führenden Theorie.

[3]) Vgl. einen entsprechenden Beweis bei M. Heins, On a problem of Walsh concerning the Hadamard three circles theorem. Trans. Amer. math. Soc. **55**, 349—372 (1944), insbes. S.354.

(Eingegangen am 24. Februar 1950.)